

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. П. Г. ДЕМИДОВА

На правах рукописи

**Богомолов Юрий Викторович**

**ВОПРОСЫ СИНХРОНИЗАЦИИ В НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ  
СО СЛОЖНОЙ ДИНАМИКОЙ**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование  
численные методы и комплексы программ  
(физико-математические науки)

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Научный руководитель**  
доктор физико-математических  
наук, профессор  
Глызин Сергей Дмитриевич

Ярославль 2014

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Анализ дискретной модели нейронной сети</b>	<b>16</b>
1.1 Математическая модель . . . . .	16
1.2 Характеристики динамики сети . . . . .	19
1.3 Устойчивость состояния равновесия системы . . . . .	23
1.4 Описание и результаты вычислительного эксперимента . . . . .	30
1.4.1 Оценка энтропии нейронной сети . . . . .	30
1.4.2 Анализ показателей энтропии . . . . .	35
1.4.3 Периодические и неперидические режимы . . . . .	40
1.4.4 Анализ возмущенной системы . . . . .	41
1.5 Результаты анализа модели . . . . .	46
<b>2 Синхронизация сетей в дискретной модели</b>	<b>49</b>
2.1 Математическая модель взаимодействующих нейронных сетей . . . . .	49
2.1.1 Модель сети с постоянным воздействием . . . . .	50
2.1.2 Модель сети со случайным воздействием . . . . .	51
2.2 Результаты анализа процесса синхронизации . . . . .	53
2.3 Анализ процессов десинхронизации . . . . .	55
<b>3 Анализ сети осцилляторов на основе импульсной модели нейрона</b>	<b>62</b>
3.1 Математическая модель нейронной сети . . . . .	62
3.1.1 Биологическая справка . . . . .	63
3.1.2 Моделирование импульсной активности нейрона . . . . .	65
3.1.3 Модели нейронных сетей на основе уравнения с запаздыванием	69

3.2	Численное моделирование динамики нейронной сети . . . . .	73
3.2.1	Анализ процессов синхронизации в паре диффузионно связанных нейронов . . . . .	73
3.2.2	Анализ волновых процессов в нейронной цепи . . . . .	78
	<b>Литература</b>	<b>91</b>
	<b>Приложение</b>	<b>105</b>

# Введение

## 1. Направления в моделировании нейронных сетей

Искусственные нейронные сети имитируют свойства и структуру естественных нейронных сетей (нервной системы животных) и находят свое применение в задачах, для которых использование традиционных вычислительных средств оказывается недостаточным. Демонстрируя свою эффективность в применении к задачам обработки изображений и распознавания образов [21–23, 74, 120], анализа временных рядов [35, 77, 78], обработки сигналов [71, 76, 79], кластеризации [4, 29, 103], обработки семантической информации [5, 34], аппроксимации и прогнозирования [81, 112, 118], оптимизации сложных систем [80, 87], организации ассоциативной памяти [48, 49, 122] и в ряде других приложений, нейронные сети привлекают пристальное внимание исследователей во всем мире, а нейронауки обладают тесными междисциплинарными связями с самыми разными областями научного знания (нейрофизиологией, физикой, математическим моделированием, психологией, статистикой, синергетикой).

Основанные на биологических предпосылках, искусственные сети на нейроподобных элементах переняли и свойственные естественным нейронным сетям особенности: параллельная обработка импульсной информации большим количеством достаточно простых однотипных элементов (нейронов), высокая степень связанности элементов между собой, модифицируемость связей между элементами в процессе функционирования (адаптация, обучаемость), надежность и устойчивость к повреждениям (достигаемая, как правило, за счет избыточности). Разнообразие нейросетевых моделей и подходов к их реализации требует подключения широкого математического инструментария для анализа процессов, происходящих в нейронных сетях.

Направления в моделировании и исследовании нейронных сетей можно условно разделить на две основные категории. К первой можно отнести исследования, направленные на имитацию структуры и свойств нервной системы с целью анализа процессов, происходящих в нервной системе, изучения механизмов мыслительных процессов (на основе формально-логических моделей), осознания особенностей структурно-функциональной организации мозга, имитации и анализа биологических, нейрофизиологических, когнитивных процессов. Ключевую роль здесь играет сопоставление нейросетевой модели и ее свойств с биологическим прототипом, анализ

адекватности нейронной сети путем выявления в нервной системе предсказанных на основе модели процессов. Ко второй категории относятся исследования, направленные на практическую реализацию обработки данных с помощью нейросетевых моделей. В данном случае от биологического прототипа берутся лишь общие черты, основное внимание направлено на анализ эффективности искусственной нейронной сети для решения практических задач (вне зависимости от соответствия происходящих в модели процессов естественным биологическим прототипам).

Изучение свойств нейронных сетей производится либо путем теоретического анализа формальной структурной математической модели, либо рассмотрением ее практических реализаций, среди которых можно выделить аппаратные (схемотехнические) и программные (нейроимитаторы). Выбор формы реализации определяется сложностью выбранной формальной модели сети, а также областью ее применения. Аппаратные реализации (нейрокомпьютеры) отличаются высокой скоростью параллельной обработки данных, однако зачастую обладают определенными сложностями в техническом исполнении, являются менее гибкими в плане модификации, чувствительны ко внешнему воздействию [138]. Программные симуляторы, напротив, обладают относительной дешевизной и простотой разработки, легко модифицируемы и адаптируемы к решению конкретной поставленной задачи, более мобильны и наглядны, однако значительно уступают схемотехническим нейрокомпьютерам в скорости работы. Разработка программной модели может являться промежуточным этапом между построением формальной модели и ее аппаратной реализацией. В настоящее время разработан широкий спектр программных средств, предназначенных для упрощения построения и анализа нейроимитаторов.

Развитие электроники, рост степени автоматизации производства, а также информатизации жизни общества явились составной частью научно-технической революции. Возросшая к середине XX века роль информации и резкий рост ее объемов, стремительное развитие средств информационных коммуникаций, выразившееся в создании глобального информационного пространства, привели к появлению понятия «информационная эра» и позволили говорить о формировании информационного общества. Появление персонального компьютера послужило мощным толчком к вовлечению большого числа людей в производство, обработку и реализацию инфор-

мации. Именно к этому времени относится и разработка первых информационных систем, основанных на нейросетевом принципе.

Появление моделей искусственных нейронных сетей не могло состояться без активного развития представлений о структуре нервной системы и происходящих в ней процессов. Развитие клеточной теории (Шванн, Шлейден), исследования клеточной структуры мозга (Пуркинье, Дейтерс, Гольджи, Ранвье, Рамон-и-Кахал, Форель, Вальдейер) уже во второй половине XIX и начале XX века заложили основу биологии и физиологии нервной системы. Работы Сеченова, Бехтерева [6], Павлова [73], Шеррингтона [95], Магнуса в области физиологии высшей нервной деятельности также сыграли серьезную роль в развитии представлений о функционировании нервной системы высших животных. Накопление данных о процессах, происходящих в нервной системе (Эдриан, Мэгоун, Анохин, Мак-Лейн, Левиташвили, Воронцов), и их физиологических механизмах (Ходжкин, Хаксли, Кац, Хебб, Экклс) позволили заложить общие принципы моделирования нейронных сетей и к разработке во второй половине XX века первых систем на основе нейроподобных элементов.

На основе представлений о структуре нейрона Мак-Каллок и Питтс (1943 [127]) разрабатывают первую формальную модель нейрона. Нейрон Мак-Каллока–Питтса представлял из себя элемент, генерирующий импульс под воздействием других аналогичных нейроподобных элементов (логический сумматор). Анализ предложенной модели [64, 128] позволил предположить возможность использования обучаемой искусственной нейронной сети на основе формальной модели нейрона для выполнения логических и числовых операций, распознавания образов, классификации. Первые успехи послужили толчком к развитию теории нейронных сетей и возникновению специфической области научного знания (нейроинформатики), что выразилось в появлении новых моделей нейронных сетей (персептрон Розенблатта [75, 133]) и развитию принципов их обучения (Хебб [113]).

Выход работы Минского и Пейперта [70], демонстрирующей ограниченность существующей модели персептрона Розенблатта (неспособность решать ряд задач классификации, в частности реализовывать функцию XOR, ограниченные возможности распознавания изображений) породил определенные сомнения в адекватности искусственных нейросетевых моделей биологическим прототипам и адекватности их

динамики реальным нейрофизиологическим процессам, что несколько снизило активность исследователей в данной области. Возобновление активной работы по моделированию элементов нервной системы приходится на 80-е годы. В этот период появляются специфические модели нейронных сетей, имитирующих процессы ассоциативной памяти (Фукушима [111], Кохонен [48, 49, 122], Хопфилд [116, 117, 129]), модифицируется модель персептрона [135], разрабатываются алгоритмы обучения [30, 108, 126], проводится разработка аппаратных и программных реализаций моделей и активное их применение в задачах обработки информации. Большинство рассматриваемых моделей основаны на так называемом детекторном подходе, характеризующемся неизменностью состояния нейроподобных элементов при отсутствии внешнего воздействия и способностью данных элементов избирательно реагировать генерацией импульса на импульсные сигналы со стороны других нейронов сети.

К тому же периоду относится и прогресс в области технологий получения данных о нейрофизиологических процессах в нервной системе. Развитие методов электроэнцефалографии (ЭЭГ) позволило проводить качественный и количественный анализ биоэлектрической активности отдельных участков мозга [93]. Из прочих методов анализа электромагнитной активности нервной системы можно отметить магнитную энцефалографию (МЭГ), позволяющую рассчитывать интенсивность и локализацию источников тока в коре головного мозга, формируя в динамике карты активности нейронов, а также структурную и функциональную магнитно-резонансную томографию (МРТ), позволяющие получать данные, отражающие локальную активацию нервных клеток во время психической деятельности. Развитие современных методов анализа нейрофизиологических электромагнитных процессов в нервной системе позволяет выработать подходы к моделированию когнитивных процессов и повысить адекватность нейросетевых моделей биологическим системам.

К середине XX века получено экспериментальное подтверждение механизма обмена информации между нейронами в импульсной форме (Эдриан [98]), выявлено наличие функциональных ансамблей нейронов (в том числе кольцевых структур), обладающих свойством циклической ритмической активности [31], отмечен механизм передачи информации потоком импульсов определенной плотности (Экклс [97]).

На последней идее основана модель нейрона, передающего информацию на основе

стохастического потока бинарных импульсов определенной плотности, предложенная и изученная в [65, 68, 82] и допускающая относительно простую схмотехническую реализацию [58, 67].

Нейрофизиологические данные способствовали выдвижению гипотезы о кодировании информации в виде волн нейронной активности и динамическом характере когнитивных процессов, связанных с активностью когерентно функционирующих нейронных ансамблей (Бехтерева [7]), что выразилось в создании осцилляторных моделей нейронных сетей [123, 140].

Такого рода подход к построению искусственных нейронных сетей можно условно назвать фазово-частотным (волновым). Развитием идеи о роли циклических волновых механизмов в когнитивных процессах можно считать работы Ливанова о синхронизации циклических (периодических) процессов в головном мозге [55], отметившего феномены навязывания ритмов в ЭЭГ, частота которых эквивалентна частотам навязываемых стимулов. Обнаружено, что синхронность колебаний потенциалов ЭЭГ в разных пунктах мозга может служить мерой умственного напряжения [56], также отмечено увеличение количества вовлеченных в нейронных ансамбль элементов при нарастании сложности предлагаемых задач., выявлена функциональная связь синхронных отношений биопотенциалов мозга человека с реализацией двигательных реакций.

Рост представлений о механизмах импульсной активности нейронов и роли синхронизации и ритмической импульсации в процессах памяти позволил выдвинуть гипотезу о фазово-частотном кодировании информации в головном мозге (Лебедев [52, 53]). Основная идея гипотезы заключается в предположении хранения и обработке информации в мозге в виде устойчивых комбинаций волновых пакетов (периодически повторяющихся устойчивых узоров биоэлектрической активности) [54, 125]. При этом ключевая роль отводилась волнам альфа-ритма как обладающим наибольшей регулярностью. Работы Ливанова и Лебедева продемонстрировали значимость фазово-частотного подхода для осознания механизмов когнитивных процессов и дают общее адекватное представление о нейрофизиологических процессах запоминания, что в дальнейшем выразилось в активном применении при создании нейросетевых моделей. Изучению процессов синхронизации в нейронных сетях, описывающих



динамику нейронной активности, также уделяется основное внимание в предлагаемой диссертационной работе.

Успехи в развитии методов исследования электромагнитных процессов в отдельном нейроне привели к разработке модели мембраны аксона (в качестве объекта изучения был выбран гигантский аксон кальмара, лишенный аксоплазмы) Ходжкина и Хаксли [91, 115], описывающей процессы транспорта ионов калия и натрия сквозь мембрану, а также токов утечки (ионов хлора). Динамика токов различного типа описывается системой дифференциальных уравнений и учитывает процессы активизации и инактивации предполагаемых натриевых и калиевых каналов (наличие каналов такого типа и механизмы их активации позже были изучены Армстронгом [100], Хилле [99], Мак-Кинноном [107] и Скоу [136]). Модель Ходжкина-Хаксли с высокой степенью адекватности качественно и количественно описывает технологию и основные особенности прохождения нервных импульсов, физико-химических механизмов возбуждения и торможения, однако достаточно сложна для аналитического исследования, что затрудняет ее использование в явном виде для моделирования мембранной активности.

На принципах, положенных в основу модели Ходжкина-Хаксли, а также работ Эклса, Катца, Эккерта, уточняющих механизмы генерации импульсной активности и взаимодействия нейронов, был разработан ряд нейросетевых моделей, имитирующих на низком уровне процессы, проходящие в нервной системе. Одними из наиболее распространенных моделей, основанных на данном принципе, являются нейронная модель Фитц-Хью-Нагумо [109, 110, 131], являющаяся упрощением модели Ходжкина-Хаксли и имеющая разного рода модификации, а также модель Хиндмарша-Розе [114, 124]. Упомянутые модели позволяют несколько упростить процесс моделирования нейронной активности и демонстрируют высокий уровень биологической адекватности.

В качестве недостатка, присущего модели Ходжкина-Хаксли, можно отметить сложность для аналитического исследования, обусловленная в частности наличием дополнительных уравнений, описывающих динамику калиевой и натриевой проводимости, а также требованием неявно отразить запаздывание натриевого тока по отношению к калиевому в процессе генерации спайка, что осуществляется выбором

параметров. Однако тех же свойств системы удается добиться заменой системы дифференциальных уравнений одним уравнением с запаздыванием, что нашло свое отражение в разработке модели, имитирующей импульсную активность нейрона, на основе уравнения с отклоняющимся аргументом [60] (импульсная модель нейрона). Данная модель достаточно хорошо согласуется с биологическими данными о динамике отдельного нейрона (характер генерации спайков, авторитмичность [37, 61]), а также допускала построение на ее основе систем нейронов с различными типами взаимодействия, в том числе и кольцевых структур нейронов, обладающих различными периодической волновой активностью ([38–41, 62]). Анализ процессов в нейронных сетях, построенных на основе данной модели, проведен в том числе и в настоящей работе.

Аналогичные идеи также использованы в построении нейронных клеточных автоматов [94], позволяющих обойтись без использования систем дифференциальных уравнений при моделировании процессов, что значительно упрощает анализ динамики нейронной сети с сохранением в общих чертах основных качественных свойств системы (наличие автоколебательных режимов и способность к организации кольцевых структур с возможностью хранения последовательностей импульсов).

Однако общего подхода к моделированию структуры нервной системы и механизмов ее функционирования в настоящее время не выработано, что влечет за собой наличие разнообразных нейросетевых моделей с различной степенью адекватности и специфическими особенностями. Работы [29, 139] содержат достаточно подробное и обширное описание направлений нейросетевых исследований, достигнутых в данных направлениях результатов, а также дают общее представление об идеях, которые лежат в основе построения сетей из нейроподобных элементов. Рассмотрим основные структурные классификации существующих в данный момент искусственных нейронных сетей.

*По топологии* (структуре) можно выделить полносвязные и неполносвязные нейронные сети. К полносвязным сетям, в которых нейроны попарно соединены между собой, относится, к примеру, модель нейронной сети Хопфилда, организующая механизмы ассоциативной памяти и распознавания образов. Основные проблемы, связанная с моделированием полносвязных нейронных сетей, связаны с квадратичным

ростом количества связей между нейронами, что затрудняет анализ и снижает возможности построения аппаратных и программных реализаций, а также снижение роста объема сохраняемой информации по отношению к росту количества связей (плотности информации в отношении «бит на синапс»). Эти трудности приводят к необходимости организации неполносвязных сетей, среди которых можно выделить клеточные нейронные сети, нейроны в которых располагаются в узлах некоторой решетки (как правило, регулярной структуры) со связями только между соседними элементами, а также слоистые нейронные сети, к которым относятся, например, многослойный персептрон и нейронная сеть Хэмминга (являющаяся некоторой вариацией модели Хопфилда). Также можно выделить сети с центральным элементом, являющиеся определенным развитием идеи доминанты и используемые для имитации процессов внимания.

*По направленности связей* можно выделить сети с симметричными (например, сети Хопфилда) и несимметричными связями. В случае многослойных нейронных сетей также выделяют сети прямого распространения (к их числу относятся, к примеру, модели самоорганизующихся карт Кохонена), сети с обратными связями (между слоями) и рекуррентные нейронные сети (с передачей выходной информации на вход той же сети; к данной категории принадлежит уже упомянутая сеть Хопфилда).

*По характеру настройки синаптической связи* выделяются нейронные сети с постоянными (фиксированными) и динамическими (изменяемыми в ходе функционирования) связями. Отдельно можно отметить сети с вероятностными, а также альтернативными синапсами [46, 59].

*По моделированию времени* нейронные сети подразделяются на сети, функционирующие в реальном и дискретном времени. Сети, функционирующие в дискретном времени, во многих случаях описываются системами рекуррентных соотношений и легко реализуются программно, что обуславливает их широкое распространение как средства решения практических задач обработки информации. Нейронные сети реального времени зачастую явным образом основаны на физиологических механизмах функционирования биологических элементов нервной системы и чаще всего описываются системами дифференциальных уравнений (в том числе с запаздыванием). Однако стоит отметить, что при программной реализации и численном анализе вре-

мя как правило дискретизируется, вследствие чего сеть аппроксимируется функционирующим в дискретном времени аналогом (такого рода подход применяется на определенном этапе и в данной работе).

Помимо структурных особенностей, в качестве классифицирующих признаков нейронных сетей используются методы и парадигмы обучения (сети, обучающиеся с учителем, без учителя, с критиком, а также различные классификации сетей по форме предоставления обучающей выборки), характер входных и выходных данных (аналоговые и бинарные сети).

Рассмотренные выше подходы к классификации нейронных сетей могут дать лишь самое поверхностное представление о разнообразии нейросетевых моделей и их структурных отличиях. Большое количество подходов, идей построения искусственных нейронных сетей соответствует значимости исследований нейроинформатики, а также косвенно свидетельствует о широте применения нейросетевых моделей для решения задач, предъявляемых практикой. Побочным эффектом осознания перспектив практической значимости нейросетевых исследований явился тот факт, что в погоне за количественными и качественными показателями применимости моделей нейронных сетей в задачах обработки информации зачастую на второй план отходят вопросы соответствия результатов, полученных на построенных моделях, реальным данным о структурно-функциональной организации нервной системы (биологическому прототипу), все чаще не происходит сопоставления модели (интерпретации результатов) исходной моделируемой системе. Вместе с этим потребность в анализе механизмов функционирования нервной системы заставляет обратить внимание на выделение в предложенных моделях соответствующих аналогов нейрофизиологических процессов. Анализ существующих моделей, выявление и анализ процессов запоминания, основанных на синхронизации импульсов является предметом предложенной диссертационной работы.

Об *актуальности работы* свидетельствуют следующие положения:

1. Изучение процессов синхронизации в нейронных сетях различной структуры способствует выявлению и анализу механизмов процессов запоминания в нервной системе.
2. В существующие модели особенности динамики нейронных сетей изучены не

полностью.

3. Роль хаоса в когнитивных процессах отмечена, но вопросы сложной (хаотической) динамики в ряде моделей нейронных сетей не получили адекватного рассмотрения.

В данной ситуации *целью работы* являлось изучение сложных режимов в динамике нейронных сетей на основе стандартных моделей в контексте применимости к анализу процессов самоорганизации.

В соответствии с поставленной целью в работе выдвинуты следующие *задачи*:

1. проанализировать особенности поведения нейронной сети на основе формального нейрона и выявить сложные режимы в ее динамике;
2. изучить вопросы синхронизации нейронных сетей (в том числе и с хаотическим поведением) с различными типами взаимодействия.

*Научная новизна* работы проявляется в следующем:

1. получено численное подтверждение возможности построения системы с хаотической динамикой на базе простых нейроподобных элементов;
2. исследованы процессы синхронизации в дискретной модели нейронных сетей со сложной динамикой, что позволяет использовать модель в задачах передачи информации на хаотическом носителе и в имитации процессов запоминания.

Среди *основных результатов* можно отметить:

1. выявление параметров нейронной сети на основе формальной модели нейрона, при которых динамика сети обладает свойствами детерминированного хаоса;
2. отмечено наличие порогового значения коэффициента воздействия дискретного генератора импульсов на базу нейронной сети на приемник, разделяющего случаи синхронизации и десинхронизации в системе.

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы могут использоваться для моделирования когнитивных процессов в нервной системе, а также в построении систем передачи информации на хаотическом носителе.

Результаты, изложенные в данной работе, были представлены на следующих семинарах и конференциях: XII Всероссийский семинар «Нейроинформатика и ее приложения» (Красноярск, 2004), VII всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика–2005» (Москва, 2005), VIII всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика–2006» (Москва, 2006), IX всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика–2007» (Москва, 2007), XX международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях–20» (Ярославль, 2007), XIV всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика–2012» (Москва, 2012), XV всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика–2014» (Москва, 2014).

По теме диссертации опубликовано 13 работ.

## 2. Краткое содержание работы

Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы.

В первой главе рассматривается нейронная сеть на основе формального нейрона Мак-Каллока–Питтса. Обосновывается выбор данной модели нейронной сети, приводится математическое описание модели отдельного нейрона и структуры сети. Вводится понятие энтропии нейронной сети как глобальной характеристики ее динамики. В данной главе проводится анализ зависимости этой характеристики от значений синаптических весов, дополнительно исследуется поведение данной нейронной сети с различными значениями общего показателя энтропии.

В ходе анализа нейронной сети было установлено наличие наборов параметров, при которых значения общего показателя энтропии высоки, что соответствует долгопериодическим, а возможно, и хаотическим колебаниям вектора состояния нейросети, также проверено наличие параметров, при которых вектор состояния нейронной сети совершает периодические колебания. Для подтверждения выводов о наличии хаоса была проведена серия численных экспериментов с целью проверить устойчивость сетей к малым возмущениям начального состояния, в ходе чего отмечена устойчивость нейросети с низким показателем энтропии к таким возмущениям и неустойчивость к таким возмущениям вектора состояния нейронной сети с высоким значением этой характеристики. Таким образом, для данной модели получено численное подтверждение наличия сложных (хаотических) режимов в динамике нейронной сети.

Во второй главе рассматривается задача анализа процессов синхронизации нейронных сетей описанной ранее структуры. Одна сеть выступает в роли автогенератора, сигнал с нее передается с определенным весом на вторую нейронную сеть (приемник), также имеющую собственную активность. Данная задача решается для двух типов взаимодействия сетей: воздействие нейронной сети с хаотической или периодической динамикой на вторую нейронную сеть той же структуры с постоянным синаптическим весом, а также с переменным воздействием (с заданной вероятностью) определенного веса. По результатам серии вычислительных экспериментов отмечена синхронизация нейронных сетей при больших значениях коэффициента воздействия, а также отсутствие устойчивой синхронизации в случае слабого синап-

тического воздействия между сетями. Отмечена возможность использования синхронизирующихся нейронных сетей со сложной динамикой для передачи информации на хаотическом носителе.

Основные итоги работы приводятся в заключении.

Отдельные разработанные автором программы для реализации вычислительных экспериментов приводятся в приложении к работе.



# Глава 1

## Анализ дискретной модели нейронной сети

В данной главе приводится общее описание исследуемой дискретной модели нейронной сети на основе формального нейрона Мак-Каллока–Питтса. Для данной модели описываются методы ее исследования как динамической системы. Рассматривается энтропия нейронной сети как глобальная характеристика ее динамики. Анализ энтропии позволяет сделать предположения о сложной (хаотической) динамике предлагаемой модели. С целью подтверждения наличия хаотических режимов проводится исследование сети на устойчивость, проводится анализ старшего показателя Ляпунова; в главе приводится описание вычислительных экспериментов и полученных результатов.

### 1.1 Математическая модель

Искусственные нейронные сети имитируют структуру и свойства мозга. В последние десятилетия интерес к нейронным сетям сильно вырос, исследуются сети различной структуры на основе различных моделей нейрона.

В работах Хакена [90], Ижикевича, Малинецкого [36] и других [43, 44, 88] отмечается возможная важная роль хаоса в в функционировании мозга и когнитивных процессах, поэтому на данном этапе анализа моделей когнитивных процессов в качестве основной задачи рассматривалось построение нейронной сети достаточно простой

структуры, с малым количеством нейронов, но допускающей хаотическую динамику при должном подборе параметров.

В качестве такой модели выбрана нейронная сеть на основе формального нейрона Мак-Каллока–Питтса, впервые введенного в классических работах [127, 128] и претерпевшего в дальнейшем некоторые модификации. Модель представляет из себя сумматор подаваемых на вход значений с некоторыми коэффициентами с дальнейшим нелинейным преобразованием с помощью активационной функции.

В соответствии с вышесказанным, рассмотрим следующую модель. Логическим элементом сети является искусственный нейрон, имеющий  $n$  входов, на которые подаются числа (сигналы)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Входные сигналы умножаются на синаптические веса  $w_1, w_2, \dots, w_n$  и суммируются. К результирующему сигналу добавляется величина смещения  $w_0$ , полученное значение (состояние нейрона)

$$X = \sum_{i=1}^n w_i x_i + w_0 \quad (1)$$

является аргументом активационной функции нейрона  $f(X)$ . Значение  $f(X)$  является выходом нейрона.

Рассмотренная модель нейрона допускает достаточно простую программную реализацию и удобна для численного анализа динамики.

В работе рассматривается полносвязная нейронная сеть на  $N$  нейронах. Динамика такой сети может быть описана рекуррентным соотношением:

$$X(t+1) = W \cdot F(X(t)) + I, \quad t = \overline{t_0, \dots, t_0 + T_a}, \quad (2)$$

где  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$  –  $N$ -мерный вектор состояния нейросети в момент времени  $t$ ; поведение сети определяется матрицей синаптических весов  $W = \{w_{ij}\}$  из  $N$  строк и  $N$  столбцов (здесь  $w_{ij}$  – синаптический вес связи от  $i$ -го нейрона к  $j$ -му),  $N$ -мерным вектором смещения  $I$ , а также функцией активации  $F(X) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N))$  ( $x_i$  – компоненты вектора состояния сети  $X$ ).

В качестве функции активации выбрана сигмоида следующего вида (рис.1):

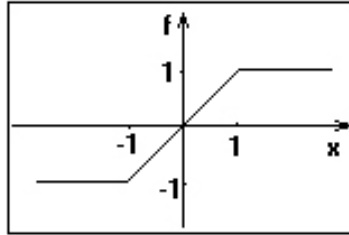


Рис. 1.1: Функция активации нейрона

Задается она уравнением

$$f(x) = \frac{|mx + 1| - |mx - 1|}{2} \quad (3)$$

при  $m = 1$ . При дальнейшем исследовании нейросети рассматривались также функции активации такого типа при других значениях параметра  $m$  (сигмоиды при этом становятся растянутыми или, напротив, сжатыми вдоль оси абсцисс).

Более подробно в работе рассмотрен случай  $N = 3$  (для сетей такой размерности удалось выявить сложные режимы в динамике; об этом также будет сказано позже), также рассматривались нейросети с другим количеством элементов. В матрице синаптических весов при анализе такой сети большинство весов были зафиксированы, а один или два являлись параметрами и изменялись в некотором диапазоне значений. Рассматриваемая весовая матрица для случая  $N = 3$ , в соответствии с работой [106], выбрана следующего вида:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & p_0 & -1 \\ 0 & 1 & p_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Здесь  $p_0$  и  $p_1$  – параметры, принимающие разные значения на отрезке  $[-3, 3]$ . Для случаев  $N > 3$  структура нейронной сети (ее весовой матрицы) была схожей. Вектор смещения может быть произвольным, в работе рассматривались случаи с нормой вектора  $\|I\| \ll 1$ .

В качестве начального состояния чаще всего использовался нулевой вектор (при этом при заданном варианте модели необходимо выбирать ненулевой вектор смещения). Ненулевой вектор смещения выбирался с целью выведения нейронной сети из нулевой неподвижной точки (состояния равновесия). В дальнейшем будет показана

неустойчивость нулевого состояния равновесия, что дает возможность рассмотреть нейронную сеть с нулевым вектором смещения и ненулевым начальным состоянием.

Нейронная сеть функционирует в дискретном времени, до периода наблюдения осуществляется  $t_0$  «скрытых» итераций, после чего она рассматривается в течение промежутка времени  $T_a$  (время наблюдения). Количество скрытых итераций выбиралось равным  $t_0 = 512$ . При первичном анализе нейронная сеть рассматривалась чаще всего в течение  $T_a = 512$  итераций, при дальнейшем анализе сети время наблюдения увеличивалось.

## 1.2 Характеристики динамики сети

В течение периода наблюдения вектор состояния нейронной сети принимает значения в  $N$ -мерном пространстве состояний. Поведение нейросети при этом может быть совершенно различным: вектор состояния может совершать циклические переходы между конечным набором состояний, то есть совершать периодические колебания с различной длиной периода, но не исключено, что нейросеть не будет вести себя подобным образом (вектор состояния сети будет совершать непериодические колебания, будем называть их хаотическими). Вполне возможно, что нейронной сети необходимо некоторое время, чтобы прийти к состоянию периодических колебаний. Для этого перед наблюдением нейросеть совершает  $t_0$  «скрытых» итераций, после чего она может стабилизироваться и далее совершать периодические колебания, но, может быть, этого и не произойдет; после этого в течение времени  $T_a$  осуществляется наблюдение за характером поведения вектора состояния нейросети.

### Энтропия нейронной сети

Необходимо определить некоторую глобальную характеристику, описывающую динамику нейросети. В качестве такой характеристики выбран показатель энтропии нейронной сети.

Пусть вектор состояния нейросети в течение итеративного процесса за рассматриваемый период  $T_a$  принимает  $N_s$  различных состояний  $s_j$  ( $j = \overline{0, \dots, N_s}$ ). Для каждого состояния есть определенная вероятность (в ходе численного эксперимента она аппроксимируется частотой) того, что вектор состояния нейронной сети в него

попадет, определяемая как

$$p_j = \lim_{T_a \rightarrow \infty} \frac{n_j}{T_a}, \quad (5)$$

где  $n_j$  — количество попаданий вектора состояния нейросети в данное состояние  $s_j$ .

Общий показатель энтропии нейронной сети  $\mathbf{N}$  вводится следующим образом:

$$H(\mathbf{N}) = - \sum_{j=0}^{N_s} p_j \log p_j \quad (6)$$

Если вектор состояния нейросети совершает периодические колебания с длиной периода  $T$ , то, как несложно убедиться,  $N_s = T$ , а для любого состояния  $s_j$  имеем:  $p_j = \frac{1}{N_s}$  для  $j = \overline{0, \dots, N_s}$ . Вероятности нахождения сети во всех этих состояниях равны, так как система полностью детерминирована; каждое последующее состояние однозначно определяется предыдущим. Поэтому, в том случае, если нейросеть дважды оказалась в одном и том же состоянии, то мы будем наблюдать периодическую динамику системы. В этом случае  $N_s - 1$  — длина минимального периода и в течение одного такого периода состояния не повторяются. Легко вычислить и общий показатель энтропии в данном случае: он равен  $H(\mathbf{N}) = \log N_s$ .

В случае непериодических или хаотических колебаний имеем:  $H(\mathbf{N}) \rightarrow \infty$ . Действительно, за время наблюдения  $T_a$  количество различных состояний равно  $N_s = T_a$ , частота попадания нейронной сети в данное состояние равна  $p_j = \frac{1}{T_a}$ , а общий показатель энтропии оценивается как  $H(\mathbf{N}) = \log T_a$ . Значит при  $T_a \rightarrow \infty$ :  $H(\mathbf{N}) = \log T_a \rightarrow \infty$ .

Для того, чтобы иметь количественную характеристику поведения системы и в случае непериодической динамики, показатель энтропии нейронной сети можно ввести следующим образом:

$$h(\mathbf{N}) = \lim_{dx \rightarrow 0} \lim_{T_a \rightarrow \infty} \frac{2^{H(\mathbf{N})}}{T_a} \quad (7)$$

Здесь пространство состояний нейронной сети дискретизируется, то есть разбивается на элементарные ячейки сколь угодно малого размера ( $\delta x$ ). Легко видеть, что в случае периодической динамики нейронной сети  $h(\mathbf{N}) = 0$ , так как

$$\frac{2^{H(\mathbf{N})}}{T_a} = \frac{N_s}{T_a} \rightarrow 0 \quad (8)$$

(при  $T_a \rightarrow \infty$ ), так как количество состояний сети  $N_s$  конечно и не зависит от  $T_a$ .

Для хаотической динамики характерны ненулевые значения показателя энтропии. Легко видеть, что в случае хаотического поведения нейронной сети наибольшее значение показателя энтропии равно 1.

При рассмотрении нейронной сети на основе  $N$  элементов (формальных нейронов) пространство состояний такой системы будет  $N$ -мерным. Для упрощения численного анализа показателя энтропии имеет смысл (особенно для достаточно больших значений  $N$ ) ввести некоторую наблюдаемую величину, зависящую от состояния нейронной сети в текущий момент времени, и исследовать ее динамику в процессе функционирования нейронной сети. По характеру поведения наблюдаемой величины можно (в случае удачного ее выбора) сделать некоторые предварительные выводы о характере поведения системы в целом.

В работе в качестве такой наблюдаемой величины выбрана евклидова норма вектора состояния нейронной сети. Легко видеть, что при периодическом характере поведения нейронной сети периодически будет изменяться и норма вектора состояния (обратно, очевидно, неверно, поэтому по периодической динамике такой наблюдаемой величины можно сделать только предварительный вывод о поведении системы в целом). Если же норма вектора состояний ведет себя непериодически (хаотически), то динамика вектора состояния также будет хаотической).

Для вычисления энтропии пространство состояний разбивалось на ячейки диаметра  $\delta x$  (при вычислении энтропии  $\delta x$  выбиралось равным  $10^{-3}$ — $10^{-4}$ ). Сеть после некоторого периода стабилизации (длины  $t_0$ ) рассматривалась в течение периода времени  $T_a$  (время наблюдения). Обозначим через  $p_j$  частоту попадания наблюдаемой величины (нормы вектора состояния сети) в состояние  $s_j$  (как и ранее, считаем наблюдаемые величины равными в том случае, если они попали в одну ячейку разбиения) за время наблюдения, то есть  $p_j = \frac{n_j}{T_a}$ , где  $n_j$  — количество таких попаданий.

Введем величину, которую будем считать оценкой энтропии:

$$H(\mathbf{N}, T_a) = - \sum_{j=0}^{N_s} p_j \log p_j \quad (9)$$

Очевидно, что в случае периодических колебаний вектора состояния нейронной сети, величина  $H(\mathbf{N}, T_a) \rightarrow H(\mathbf{N}) = \log N_s$ . В случае хаотических колебаний, как легко убедиться, величина  $H(\mathbf{N}, T_a)$  будет неограниченно расти при увеличении параметра  $T_a$  и уменьшении  $\delta x$ .

По этой причине (чтобы иметь количественную характеристику поведения системы и в случае хаотической динамики) оценку энтропии будем вычислять следующим образом:

$$h(\mathbf{N}, T_a) = \frac{2^{H(\mathbf{N}, T_a)}}{T_a} \quad (10)$$

В ходе численного эксперимента в качестве общего показателя нерегулярности поведения нейронной сети в некоторых случаях также использовалось значение  $N_s(T_a)$ , то есть количество различных состояний, которые принимает нейронная сеть в течение времени наблюдения, однако данный показатель использовался лишь на стадии предварительного анализа.

### **Способы отображения результатов**

Для анализа нейронной сети большая часть параметров фиксируется, а некоторое количество (чаще всего один или два) параметров (синаптических весов) изменяются в некотором диапазоне значений, при этом для каждого набора параметров производятся наблюдения за вектором состояния нейросети, а также вычисляется ее показатель энтропии. Результаты такого численного анализа представимы в различных формах.

1. *Диаграмма Фейгенбаума* (Feigenbaum Plots, FP-диаграмма, бифуркационная диаграмма)

Один из весов (при анализе нейронной сети на трех нейронах, структура которой указана выше, это один из весов  $p_0$  или  $p_1$ ) выбирается в качестве свободного параметра и принимает различные значения на некотором отрезке, напротив этого свободного параметра откладываются значения евклидовой нормы вектора состояния нейросети, подсчитываемые в течение времени наблюдения  $T_a$ . При этом в случае периодических колебаний нормы вектора состояний сети напротив соответствующего параметра будем иметь некоторый набор точек, количество которых будет тем большим, чем больше будет период колебаний, в случае хаотических колебаний будут наблюдаться уже полосы (напротив параметра).

2. *Одномерный график энтропии* (1DEP's, one-dimensional entropic plots).

В этом случае напротив свободного параметра откладывается значение обще-

го показателя энтропии (в работе напротив параметра откладывается число различных состояний нормы вектора состояния нейросети). При этом будем получать картину из линий различной высоты, высота их будет тем больше, чем больше показатель энтропии.

### 3. *Двумерная карта энтропии* (2DEM, two-dimensional entropic map).

Для отображения в таком виде уже оба параметра ( $p_0$  и  $p_1$ ) пробегают различные значения в некотором диапазоне. Каждая точка  $p(x, y)$  на карте будет тем светлее, чем больше будет значение общего показателя энтропии для данных параметров ( $p_0 = x$  и  $p_1 = y$ , соответствующих координатам  $(x, y)$  точки на карте). Левая верхняя точка карты соответствует минимальным значениям параметров, а правая нижняя — максимальным.

В работе оба параметра ( $p_0$  и  $p_1$ ) изменяются в диапазоне  $-3 \leq p_0, p_1 \leq 3$ . При этом темные точки будут свидетельствовать о короткопериодическом характере поведения нейронной сети (в частности, о нахождении нейронной сети в стационарном состоянии), более светлые точки соответствуют периодическим колебаниям с большей длиной периода, белые точки на диаграмме свидетельствуют об очень высоких значениях общего показателя энтропии, что соответствует колебаниям с очень большой длиной периода (порядка времени наблюдения) и хаотическим колебаниям нормы вектора состояния нейросети.

Также для фиксированных параметров анализу подвергаются зависимости нормы вектора состояния нейросети от текущей итерации, значения одной или двух компонент вектора состояния в течение периода наблюдения, а также в работе анализировалась таблица значений вектора состояния и его нормы.

## 1.3 Устойчивость состояния равновесия системы

Уменьшение количества параметров системы значительно упрощает ее анализ. В то же время интерес представляют нейронные сети с разнообразными режимами функционирования — периодическими и непериодическими. Рассмотрим вопрос об устойчивости состояний равновесия системы при нулевом векторе смещения: неустой-



чивость данного состояния позволит рассматривать более простую систему, не сходящуюся к какому-либо тривиальному состоянию (устойчивой неподвижной точке), без дополнительного рассмотрения выводящих из данного состояния векторов смещения, что в том числе позволит интерпретировать и такую упрощенную модель нейросети как нетривиальную сеть-автогенератор.

Рассматриваем динамику нейронной сети, описываемой следующей системой:  $X_{n+1} = F(WX_n)$ , где  $X_n$  — вектор из  $\mathbb{R}^3$  (состояние нейросети в момент  $n$ ),  $F(x)$  — применяемая покомпонентно линейная функция с насыщением (1 при  $x > 1$ ,  $-1$  при  $x < -1$ , иначе  $x$ ),  $W$  — матрица весов:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & p_0 & -1 \\ 0 & 1 & p_1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

При этом  $p_0$  и  $p_1$  — вещественные параметры, относительно которых и будет исследоваться динамика описанной нейронной сети (системы).

Легко видеть, что при любых  $p_0$  и  $p_1$  данная система имеет неподвижную точку  $(0, 0, 0)$ . Зададимся вопросом об устойчивости данной неподвижной точки.

**Теорема 1.** *Неподвижная точка  $(0, 0, 0)$  является неустойчивой при любых значениях коэффициентов обратной синаптической связи  $(p_0, p_1)$ .*

*Доказательство.* Найдем характеристический многочлен  $P$  матрицы  $W$ :

$$W - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ 1 & p_0 - \lambda & -1 \\ 0 & 1 & p_1 - \lambda \end{pmatrix}. \quad (12)$$

$$P(\lambda) = \det(W - \lambda E) = (1 - \lambda)((p_0 - \lambda)(p_1 - \lambda) + 1) + (p_1 - \lambda). \quad (13)$$

Критерием устойчивости нулевой неподвижной точки является принадлежность корней характеристического многочлена  $P(\lambda)$  (собственных значений матрицы (5)) внутренности единичного круга  $|\lambda| < 1$ .

Воспользуемся преобразованием комплексной плоскости

$$x \rightarrow \lambda = \frac{x + 1}{x - 1}, \quad (14)$$

переводящим левую комплексную полуплоскость во внутренность единичного круга: корни многочлена  $P(\lambda)$  лежат внутри единичного круга тогда и только тогда, когда корни многочлена

$$Q(x) = (1 - x)^3 P\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) \quad (15)$$

лежат в левой комплексной полуплоскости.

После подстановки (7) в характеристический многочлен  $P(\lambda)$  и умножения на  $(1 - x)^3$  получим:

$$Q(x) = -2[((p_0 - 1)x - (p_0 + 1))((p_1 - 1)x - (p_1 + 1)) + (x - 1)^2] + (x - 1)^2((p_1 - 1)x - (p_1 + 1)) \quad (16)$$

После элементарных преобразований многочлен  $Q$  приобретает следующий вид:

$$Q(x) = c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= p_1 - 1, \\ c_1 &= -2p_0 p_1 + 2p_0 - p_1 - 3, \\ c_2 &= 4p_0 p_1 + 3p_1 + 5, \\ c_3 &= -2p_0 p_1 - 2p_0 - 3p_1 - 5. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, для исследования нулевого состояния равновесия на устойчивость необходимо выяснить, при каких значениях параметров  $p_0$  и  $p_1$  корни многочлена (10) лежат в левой комплексной полуплоскости.

Воспользуемся критерием Рауса-Гурвица [33] для данного кубического многочлена: его корни лежат в левой комплексной полуплоскости тогда и только тогда, когда  $\Delta = c_1 c_2 - c_0 c_3 > 0$  а коэффициенты  $c_0, c_1, c_2, c_3$  имеют один и тот же знак. Рассмотрим случаи положительных и отрицательных значений коэффициентов (11).

Первый случай:  $c_0, c_1, c_2, c_3$  положительны. Заметим, что тогда их сумма также положительна:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= (-2p_0 p_1 + 2p_0 - p_1 - 3) + (4p_0 p_1 + 3p_1 + 5) + \\ &+ (-2p_0 p_1 - 2p_0 - 3p_1 - 5) = -p_1 - 3 > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда непосредственно вытекает, что  $p_1 < -3$ . В то же время из условия  $c_0 > 0$  следует, что  $p_1 > 1$ . Таким образом, в данном случае условие критерия Рауса-Гурвица не выполняется.

Второй случай:  $c_0, c_1, c_2, c_3$  отрицательны.

Из условия  $c_0 < 0$  следует, что  $p_1 < 1$ .

Также отметим, что сумма  $c_1 + c_2 + c_3 = -p_1 - 3 < 0$ , откуда аналогично (12) получаем второе ограничение:  $p_1 > -3$ .

Несложно убедиться в том, что условия  $c_1 < 0, c_2 < 0, c_3 < 0$  равносильны следующим:

$$p_0 < -\frac{1}{2} - \frac{2}{p_1 - 1}, 4p_0p_1 + 3p_1 + 5 < 0, -2p_0p_1 - 2p_0 - 3p_1 - 5 < 0. \quad (20)$$

Полученное ограничение  $p_1 \in (-3, 1)$  и неравенства (13)–(15) задают следующую область  $D$  в диапазоне значений  $p_0 \in (0; 1/2), p_1 \in (-5/3; -1)$ :

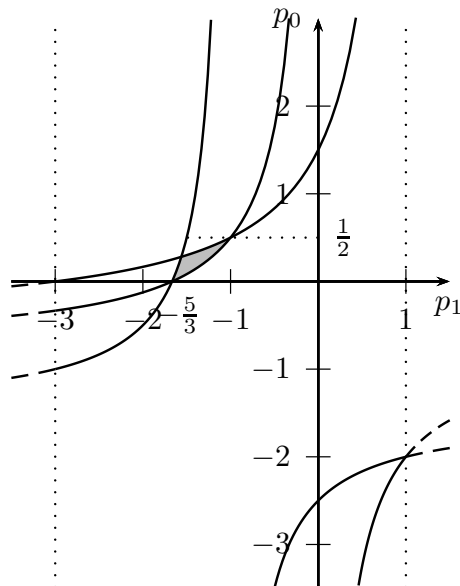


Рис. 1.2: Выделенная область значений параметров

Рассмотрим оставшееся условие критерия Рауса-Гурвица:  $\Delta = c_1c_2 - c_0c_3 > 0$ . Подставляя найденные ранее значения коэффициентов, после преобразования получим неравенство:

$$F(p_0, p_1) = 4p_0^2p_1^2 + 4p_0p_1^2 - 4p_0^2p_1 + 8p_0p_1 + p_0 + 6p_1 + 10 < 0. \quad (21)$$

Для доказательства неустойчивости нулевого решения исходной системы достаточно показать, что условие (16) в области  $D$  не выполняется.

При ограничениях на параметры из области  $D$  ( $p_0 \in (0; 1/2)$ ,  $p_1 \in (-5/3; -1)$ ) получаем:

$$\frac{\partial F(p_0, p_1)}{\partial p_1} = 8p_0^2p_1 + 8p_0p_1 - 4p_0^2 + 8p_0 + 6 = 8p_0^2p_1 + 8p_0(p_1 + 1) - 4p_0^2 + 6. \quad (22)$$

Также при упомянутых ограничениях на параметры  $p_0$  и  $p_1$  несложно убедиться в том, что  $8p_0^2p_1 > -10/3$ ,  $-4p_0^2 > -1$ , а при дополнительном условии  $p_0 < 5/16$  также  $8p_0(p_1 + 1) > -4/3$ . Тогда

$$\frac{\partial F(p_0, p_1)}{\partial p_1} > -\frac{10}{3} - \frac{4}{3} - 1 + 6 = \frac{1}{3} > 0. \quad (23)$$

Таким образом,  $F(p_0, p_1)$  возрастает по  $p_1$  в части области  $D$ , расположенной в прямоугольнике  $p_0 \in (0; 5/16)$ ,  $p_1 \in (-5/3; -1)$ . Отсюда следует, что если выполнено условие  $F(p_0, p_1) \geq 0$  при некотором  $(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1)$  из данного прямоугольника, то  $F(\tilde{p}_0, p_1) > 0$  при всех  $p_1 > \tilde{p}_1$  (при  $p_1 \in (-5/3; -1)$ ).

Легко видеть, что  $F\left(p_0, -\frac{5}{3}\right) = \frac{p_0}{9}(160p_0 - 11)$ . Отсюда непосредственно следует, что  $F(p_0, p_1) > 0$  в той части области  $D$ , которая расположена в диапазоне значений параметра  $11/160 < p_0 < 5/16$ .

Часть области  $D$  при  $p_0 \leq 11/160$  слева ограничена кривой  $p_0 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{p_1 + 1}$ . Докажем, что на этой границе функция  $F$  принимает неотрицательные значения (отсюда непосредственно будет следовать, что  $F(p_0, p_1) \geq 0$  в области  $D$  при условии  $0 < p_0 < 11/160$ ).

Из условия  $p_0 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{p_1 + 1}$  получим:  $p_1 = -\frac{5 + 2p_0}{3 + 2p_0}$ . Заметим, что в ограничениях на параметры из области  $D$  выражение  $F\left(p_0, -\frac{5 + 2p_0}{3 + 2p_0}\right)$  имеет тот же знак, что и многочлен  $G(p_0) = (3 + 2p_0)^2 F\left(p_0, -\frac{5 + 2p_0}{3 + 2p_0}\right)$ .

В то же время  $G(p_0) = 32p_0^4 + 132p_0^3 + 140p_0^2 + 13p_0 \geq 0$  при неотрицательных  $p_0$  (а значит, что и при  $p_0 \in [0, 11/160]$ ).

Осталось доказать, что  $F(p_0, p_1) \geq 0$  в области  $D$  при ограничении  $p_0 \in [5/16, 1/2]$ .

Сгруппируем:

$$F(p_0, p_1) = 4p_0^2p_1^2 + 4p_0p_1^2 + 4p_0(2 - p_0)p_1 + p_0 + 6p_1 + 10. \quad (24)$$

Несложно доказать, что при рассматриваемых ограничениях на коэффициент  $p_0$  выполняются неравенства:  $4p_0(2 - p_0) \geq 3$ ,  $4p_0^2 \geq 25/64$ ,  $4p_0p_1^2 \geq 5/4$ . Также заметим, что при  $p_0 \in [5/16, 1/2]$  рассматриваемая область  $D$  слева ограничена кривой  $p_0 = -\frac{1}{2} - \frac{2}{p_1 - 1}$ , откуда при заданных значениях  $p_0$  несложно получить ограничение  $p_1 \geq -19/13$ .

Разобьем множество значений параметра  $p_1$  на несколько промежутков и на каждом из них докажем неравенство  $F(p_0, p_1) \geq 0$  при ограничении  $p_0 \in [5/16, 1/2]$ .

1)  $p_1 \in [-19/13, -4/3]$ .

Здесь выполняются следующие неравенства:

$$4p_0^2p_1^2 \geq \frac{25}{36}, \quad 4p_0p_1^2 \geq \frac{20}{9}, \quad 4p_0(2 - p_0)p_1 \geq -3 \cdot \frac{19}{13}, \quad 6p_1 + 10 \geq \frac{16}{13}, \quad (25)$$

откуда

$$F(p_0, p_1) \geq \frac{25}{36} + \frac{16}{9} - \frac{57}{13} + \frac{5}{16} + \frac{16}{13} = \frac{141}{144 \cdot 13} > 0. \quad (26)$$

2)  $p_1 \in (-4/3, -5/4]$ .

При данных условиях выполняются ограничения:

$$4p_0^2p_1^2 \geq \frac{625}{1024}, \quad 4p_0p_1^2 \geq \frac{125}{64}, \quad 4p_0(2 - p_0)p_1 \geq -4, \quad 6p_1 + 10 \geq 2. \quad (27)$$

$$F(p_0, p_1) \geq \frac{625}{1024} + \frac{125}{64} - 4 + \frac{5}{16} + 2 = \frac{625}{1024} + \frac{5}{16} - \frac{3}{64} > 0. \quad (28)$$

3)  $p_1 \in (-5/4, -1]$ .

Аналогично показываем:

$$4p_0^2p_1^2 \geq \frac{25}{64}, \quad 4p_0p_1^2 \geq \frac{5}{4}, \quad 4p_0(2 - p_0)p_1 \geq -\frac{15}{4}, \quad 6p_1 + 10 \geq \frac{5}{2}. \quad (29)$$

$$F(p_0, p_1) \geq \frac{25}{64} + \frac{5}{4} - \frac{15}{4} + \frac{5}{16} + \frac{5}{2} = \frac{25}{64} + \frac{5}{16} > 0. \quad (30)$$

Таким образом,  $F(p_0, p_1) \geq 0$  в области  $D$ . Отсюда следует, что условие критерия Рауса-Гурвица  $\Delta = c_1 c_2 - c_0 c_3 > 0$  (в силу введенных обозначений эквивалентное неравенству  $F(p_0, p_1) < 0$ ) нарушается, поэтому нулевое решение системы неустойчиво при всех значениях параметров  $(p_0, p_1)$ .  $\square$

## 1.4 Описание и результаты вычислительного эксперимента

### 1.4.1 Оценка энтропии нейронной сети

Ниже будет описана статэнтропия как числовая характеристика динамики сети, а также подходы к оценке данной характеристики.

Описанная математическая модель нейронной сети может быть рассмотрена как динамическая система, функционирующая в дискретном времени. Одним из важных числовых показателей ее динамики является энтропия, характеризующая степень хаотичности траекторий такой системы (для периодической динамики характерна нулевая энтропия, в случае хаотического поведения динамической системы ее энтропия положительна).

#### *Исправить ссылки в данном подразделе*

В работе [83] предложен подход к нахождению энтропии динамических систем. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — независимые одинаково распределенные (с вероятностной мерой  $\mu$ ) случайные величины, принимающие значения в некотором пространстве  $\Omega$ . Тогда оценка статэнтропии меры  $\mu$ , предложенная в [83], строится следующим образом:

1. Вычисляется вспомогательная статистика

$$r_n^{(k)} = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \left( \min_{i:i \neq j}^{(k)} \rho(X_i, X_j) \right), \quad (31)$$

где  $\min^{(k)}\{x_1, \dots, x_n\}$  —  $k$ -е по величине значение в множестве  $x_1, \dots, x_n$ .

При вычислении вспомогательной оценки для каждого элемента выборки  $X_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) вычисляется описанное  $k$ -е минимальное расстояние до остальных элементов выборки, логарифмы найденных расстояний суммируются.

2. В качестве оценки статэнтропии полагаются следующие статистики:

$$\eta_n^{(k)}(\rho) = \frac{\ln n}{r_n^{(k)}}, \quad (32)$$

$$\tilde{\eta}_n^{(k)}(\rho) = \frac{1}{k(r_n^{(k+1)} - r_n^{(k)})}. \quad (33)$$

В частности, в качестве  $\Omega$  может быть рассмотрено пространство последовательностей  $S^{\mathbb{N}}$ , где  $S = (1, 2, \dots, s)$ , а элементы (точки) пространства будем обозначать следующим образом:  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$  (здесь  $x_i \in S$ ). Для такого пространства можно ввести следующую метрику  $\rho$ :

$$\rho(x, y) = \theta^{-n},$$

где параметр  $\theta > 1$ , а  $n = \min\{i : x_i \neq y_i\}$ .

Опишем процедуру оценки энтропии динамической системы (в соответствии с методикой, предложенной в работах [83–85]), состояние которой принадлежит некоторому пространству  $Y$ . Рассматривается разбиение пространства  $Y$  на множества  $Y_1, \dots, Y_s$ . Пусть траектория (последовательность состояний) динамической системы равна  $(y_0, y_1, \dots, y_n, \dots)$ . Тогда определим символическую динамическую систему, пространством значений которой является  $S^{\mathbb{N}}$ : траектории исходной динамической системы поставим в соответствие последовательность  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ , где  $x_i = k$  при  $y_i \in Y_k$ . Иначе говоря, если состояние исходной динамической принадлежит какому-то множеству  $Y_k$ , то полагаем, что состояние символической динамической системы равно  $k$ . Далее в качестве оценки энтропии соответствующей символической динамической системы будем рассматривать оценку статэнтропии, которая строится описанным выше способом.

Отметим особенности программной реализации описанного подхода к вычислению энтропии, а также опишем постановку вычислительного эксперимента.

Для рассмотренной в работе модели нейронной сети строится следующая символическая динамическая система. Траекторию такой нейронной сети обозначим как  $(X_0, X_1, \dots, X_n, \dots)$ , где  $X_0$  — начальное состояние нейронной сети, а  $X_n = F(WX_{n-1} + I)$  при  $n \geq 1$ . Проведем разбиение пространства состояний нейронной сети на подмножества. Для выбранной активационной функции  $F$  пространством состояний соответствующей системы является куб  $Q = \{(y_1, y_2, y_3) \mid -1 \leq y_1, y_2, y_3 \leq 1\}$ . Разобьем пространство  $Q$  на 8 октантов:  $Y_1, \dots, Y_8$ . Траектории  $(X_0, X_1, \dots, X_n, \dots)$  будем сопоставлять последовательность символов  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ , где  $x_i = k$  в том случае, если  $X_i \in Y_k$ .

Отметим, что хаотическая динамика построенной символической динамической системы будет свидетельствовать о хаотическом поведении исходной нейронной сети



(обратное в общем виде неверно).

Для полученного пространства последовательностей рассмотрим метрику:

$$\rho(x, y) = 8^{-n}, \quad (34)$$

где  $n = \min\{i : x_i \neq y_i\}$ . В рассматриваемой задаче данная метрика удобна по следующим причинам:

1. Для нахождения расстояния между последовательностями достаточно знать конечное число их элементов (равное наименьшему номеру позиции, на которой элементы последовательностей отличаются). Поэтому в работе предполагается выделение конечных упорядоченных наборов символов, соответствующих состояниям нейронной сети за некоторый конечный временной промежуток.
2. Данная метрика согласована с отношением лексикографического порядка на рассматриваемых последовательностях: если упорядочить последовательности лексикографически, то ближайший элемент к заданной последовательности является соседним (соответственно,  $k$ -й ближайший элемент к заданной последовательности в этом упорядоченном списке последовательностей будет находиться на расстоянии не более  $k$ ).
3. Все используемые при оценке энтропии значения  $\ln \left( \min_{i:i \neq j}^{(k)} \rho(X_i, X_j) \right)$  представляют собой целые числа, умноженные на общую константу  $C = -\ln \theta$ , что при вычислении вспомогательной оценки  $r_N^{(k)}$  в основном обходится суммированием целых чисел, тем самым решая проблему накопления погрешности вычисления сумм чисел с плавающей запятой.

Формирование выборки для оценки энтропии производится следующим образом:

1. Выбирается ненулевое начальное состояние нейронной сети. Далее нейронная сеть до периода наблюдения (формирования элементов выборки) функционирует в течение некоторого промежутка времени  $T_0$  («скрытые итерации»).
2. Рассматривается последовательность состояний нейронной сети в течение промежутка времени длиной  $L$ . По данной последовательности состояний  $(X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+L-1})$  формируется элемент выборки  $Z = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+L-1})$ .

3. Далее нейронная сеть функционирует в течение некоторого промежутка времени  $T$  («скрытые итерации» между формированием отдельных элементов выборки). Данная процедура проводится с целью добиться независимости отдельных элементов выборки.
4. Шаги (2) и (3) повторяются для формирования выборки длиной  $N$ .

По построенной выборке оценка энтропии строится по следующему алгоритму:

1. Выборка  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  сортируется в лексикографическом порядке стандартным алгоритмом поразрядной сортировки (трудоемкость алгоритма для данной задачи порядка  $N \cdot L$ , то есть сортировка производится за линейное по  $N$  время). Для удобства дальнейшего изложения будем считать, что выборка  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  уже упорядочена.
2. Для каждого элемента  $Z_j$  упорядоченной выборки вычисляется значение следующей величины:

$$d_j = \max_{i:i \neq j}^{(k)} d(Z_i, Z_j), \quad (35)$$

где  $d(x, y) = \min\{t : x_t \neq y_t\}$ , а значение  $\max^{(k)}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = k$  для упорядоченного набора  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ .

Еще раз отметим, что  $\rho(x, y) = 8^{-d(x,y)}$ , таким образом

$$d_j = -\log_8 \left( \min_{i:i \neq j}^{(k)} \rho(Z_i, Z_j) \right). \quad (36)$$

Также обратим внимание на то, что при заданном выборе метрики для нахождения  $d_j$  соответствующий максимум достаточно найти в множестве  $\{Z_i\}$  при  $i \in [j - k, j + k]$ .

3. Вычисляется значение вспомогательной оценки:

$$r_N^{(k)} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N d_j.$$

4. Вычисляются оценки энтропии:

$$\eta_N^{(k)}(\rho) = \frac{\log_8 N}{r_N^{(k)}}, \quad (37)$$

$$\tilde{\eta}_N^{(k)}(\rho) = \frac{1}{k \left( r_n^{(k+1)} - r_n^{(k)} \right)}. \quad (38)$$

В работе [8] было выявлено, что при значениях параметров (синаптических весов)  $p_0 = -1,05$  и  $p_1 = 0$  динамика нейронной сети похожа на хаотическую (в частности, наблюдается неустойчивость к малому изменению начального вектора состояния нейронной сети и быстрое расхождение траекторий исходной и возмущенной системы). Поэтому в качестве примера вычисления оценки статэнтропии будет выбрана нейронная сеть именно с такими весовыми коэффициентами.

Рассмотрим нейронную сеть с нулевым начальным состоянием и малым значением вектора смещения. Предварительно нейронная сеть функционирует в течение  $T_0 = 10^4$  скрытых итераций, в дальнейшем последовательно выделяется  $K = 10^7$  состояний нейронной сети (точнее, рассматривается номер октанта, в который попал текущий вектор состояния) с пропуском в  $T = 100$  итераций. Из выделенных состояний (номеров октантов) выделяются строки по  $L = 250$  элементов, которые и образуют выборку объема  $N = 4 \cdot 10^4$ . По заданной выборке описанным выше алгоритмом проводятся оценки статэнтропии ( $\eta_N^{(k)}(\rho)$  и  $\tilde{\eta}_N^{(k)}(\rho)$ ).

Результаты вычислительных экспериментов (статистические оценки энтропии) приведены в таблице для различных значений параметра  $k$ .

$k$	$r_N^{(k)}$	$\eta_N^{(k)}(\rho)$	$\tilde{\eta}_N^{(k)}(\rho)$
1	50,3744	0,1012	0,1398
2	43,2221	0,1179	0,1297
3	39,3674	0,1294	0,1245
4	36,6891	0,1389	0,1238
5	34,6693	0,1470	0,1222
6	33,0332	0,1543	0,1217
7	31,6632	0,1609	0,1212
8	30,4847	0,1672	0,1221
9	29,4611	0,1730	0,1237
10	28,5628	0,1784	0,1236

Таблица 1.1: Последовательность значений оценок статэнтропии нейронной сети

Отметим также, что с ростом  $k$  оценка энтропии  $\eta_N^{(k)}(\rho)$  возрастает (так как из определения  $\min^{(k)}\{x_1, \dots, x_n\} \leq \min^{(k+1)}\{x_1, \dots, x_n\}$ , откуда  $r_N^{(k+1)} \leq r_N^{(k)}$  и  $\eta_N^{(k+1)}(\rho) \geq$

$\eta_N^{(k)}(\rho)$ ). Последовательность оценок  $\tilde{\eta}_N^{(k)}(\rho)$  в свою очередь при  $k > 2$  изменяется в диапазоне  $0,123 \pm 0,002$ , что можно считать достаточно точной оценкой энтропии соответствующей символической системы.

Полученную в работе ненулевую оценку энтропии символической динамической системы, построенной по последовательности состояний (траектории) описанной в работе модели нейронной сети, можно интерпретировать как численное подтверждение возможности хаотического поведения данной нейросетевой модели при указанных значениях параметров. Это позволяет сделать вывод, что уже в динамике простейших классических моделей искусственных нейронных сетей с обратными связями возможны хаотические режимы. В свою очередь это замечание дает возможность на основе таких искусственных нейронных сетей моделировать процессы обработки данных в естественных живых системах с потенциально хаотической динамикой.

Дальнейшим этапом в исследовании нейросетевых моделей, для которых в работе численно показано наличие хаотических режимов, может являться анализ процессов взаимодействия и синхронизации нейронных сетей со сложной динамикой, что в том числе может позволить получить нейросетевую реализацию систем передачи данных, использующих идею хаотической синхронизации.

## 1.4.2 Анализ показателей энтропии

### Двумерная карта энтропии

Как указывалось выше, двумерная карта энтропии (2DEM) демонстрирует величину показателя энтропии при различных значениях параметров (весов). На рис.2 приведено инверсное изображение двумерной карты энтропии (высоким значениям энтропии соответствуют более темные точки на диаграмме, и наоборот) для стандартных параметров (нулевой начальный вектор, вектор смещения

$$I = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.04 \\ -0.03 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

512 скрытых итераций, время наблюдения  $T_a = 512$ ; в дальнейшем по умолчанию будет использоваться этот набор параметров).

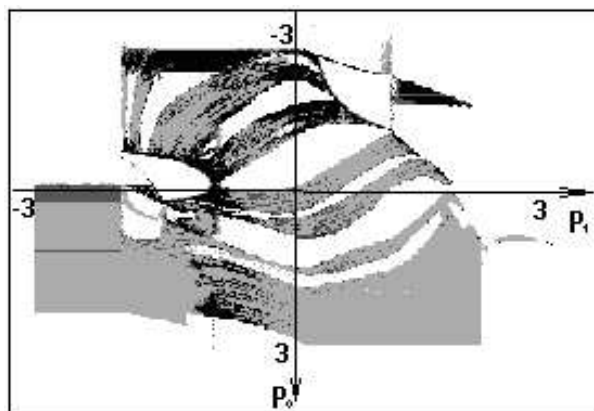


Рис. 1.3: Двумерная карта энтропии

Диапазон принимаемых нормой вектора состояния значений разбивается на элементарные отрезки длины  $\delta x = 10^{-4}$  (будем считать, что нормы векторов состояния равны, если они попали в один элементарный отрезок, в противном случае будем считать их различными). Для таких значений общих параметров и для свободных параметров (весов) производится подсчет общего показателя энтропии. На диаграмме видны области, соответствующие низким значениям показателя энтропии, а значит, короткопериодическим колебаниям (белые зоны на инверсном изображении двумерной карты энтропии), участки, соответствующие колебаниям вектора состояния нейросети с большей длиной периода (серые области), а также области, соответствующие параметрам (весам), при которых вектор состояния нейросети совершает хаотические колебания или колебания с длиной периода порядка времени наблюдения (черные участки на инверсном изображении, будем их называть зонами хаоса).

Теперь будем изменять основные параметра нейросети (вектор смещения, параметры функции активации) и отслеживать изменения двумерной карты энтропии.

Увеличение количества «скрытых» итераций не внесло заметных изменений в двумерную карту энтропии. Предположительно, это связано с тем, что в том случае, когда динамика нейронной сети при некотором наборе параметров становится периодической с небольшими значениями длины периода, то этот процесс стабилизации происходит достаточно быстро. В случае хаотического поведения нейронной сети такого рода стабилизация не происходит даже при достаточно большом количестве «скрытых» итераций. В результате можно ограничиться указанным их количеством (то есть  $t_0 = 512$ ), это значение будет рассматриваться по умолчанию.

Рассмотрим с помощью двумерной карты энтропии изменение динамики нейронной сети при изменении функции активации. В качестве функции активации продолжим использовать сигмоиду  $f(x) = \frac{|mx + 1| - |mx - 1|}{2}$ , но будем рассматривать ее при различных значениях параметра  $m$  (то есть и при  $m \neq 1$ ). Также рассмотрим изменение характера поведения нейронной сети при изменении вектора смещения (при этом будем увеличивать и уменьшать норму вектора смещения), при этом также будем использовать двумерную карту энтропии.

Как видно из рис.3, вид двумерной карты энтропии несколько меняется при изменении параметров. При использовании вектора смещения с большей нормой (рис.3а и рис.3б) характер зон различной энтропии практически не меняется, однако инверсное изображение двумерной карты энтропии стало светлее (это особенно заметно на рис.3б), зоны хаоса несколько уменьшились.

Таким образом, если норма вектора смещения высока, то это делает более вероятной периодическую динамику вектора состояния нейросети.

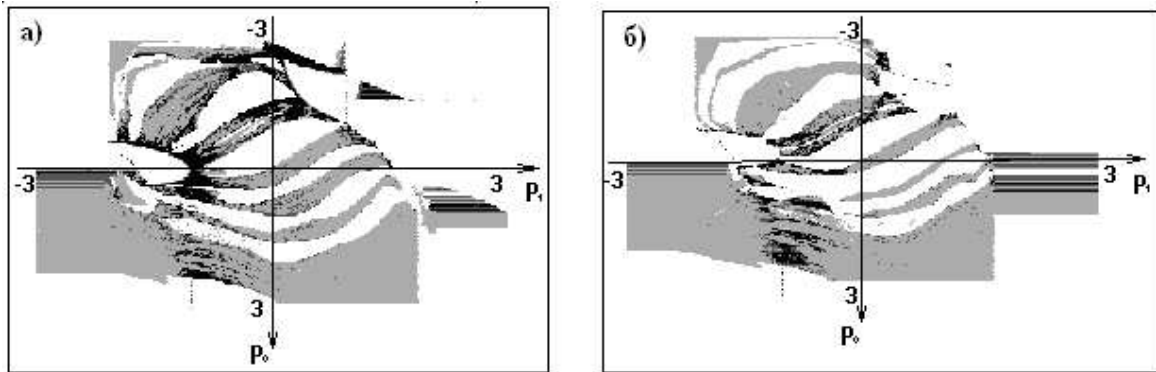


Рис. 1.4: Двумерная карта энтропии для сети с различными значениями вектора смещения: а)  $I = (0.1, 0.2, -0.12)^T$ ,  $m = 1$ , б)  $I = (-0.4, 0.3, 0.3)^T$ ,  $m = 1$

При использовании функции активации с большим значением параметра  $m$  (рис.3в) двумерная карта энтропии деформируется, зоны хаоса сокращаются, в основном преобладает периодическая динамика нейронной сети (причем со сравнительно небольшой длиной периода). Схожие результаты получаются при одновременном увеличении параметра  $m$  и нормы вектора смещения.

Объяснить это можно тем, что увеличение параметра  $m$  приводит к сжатию функции активации вдоль оси абсцисс, поэтому компоненты вектора состояния нейросети

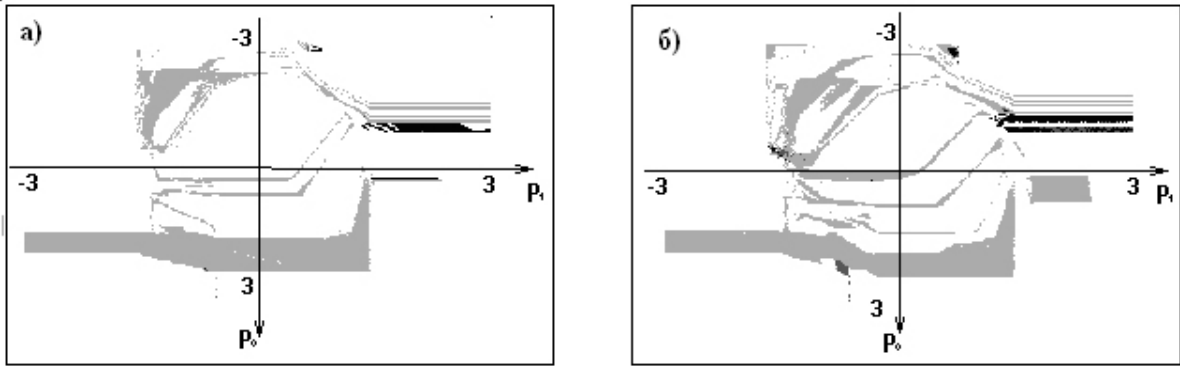


Рис. 1.5: Изменение двумерной карты энтропии при изменении параметра  $m$ : а)  $I = (0.02, 0.04, -0.03)^T$ ,  $m = 2$ , б)  $I = (0.1, 0.2, -0.12)^T$ ,  $m = 1.6$

чаще попадают за пределы отрезка  $\left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right]$ , где обрезаются до величины 1 или -1, это ведет к тому, что значения компонент вектора состояния чаще повторяются в процессе функционирования, что способствует установлению периодических колебаний вектора состояния. При этом в большем числе случаев будем наблюдать периодическую динамику нейронной сети.

Использование вектора смещения с большой нормой также способствует тому, что вектор состояния нейросети будет чаще выходить за пределы отрезка  $\left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right]$  и, как отмечалось выше, это способствует установлению периодических колебаний. При этом изображение затемняется (а инверсное изображение, соответственно, становится светлее), зоны хаоса сокращаются. Изменение вектора начального состояния значительного влияния на вид двумерной карты энтропии не оказывает.

Также в ходе работы двумерная карта энтропии строилась при других значениях основных параметров (увеличивалось число скрытых итераций и время наблюдения), что также практически не сказалось на ее виде.

## Бифуркационная диаграмма

При анализе одномерного графика энтропии и диаграммы Фейгенбаума (бифуркационной диаграммы), один из двух параметров-весов фиксируется; в дальнейшем будет дополнительно указываться, какой параметр фиксируется и какое его значение. Основные параметры стандартны. Ниже приводятся диаграммы при различных значениях параметров (рис.5,6).

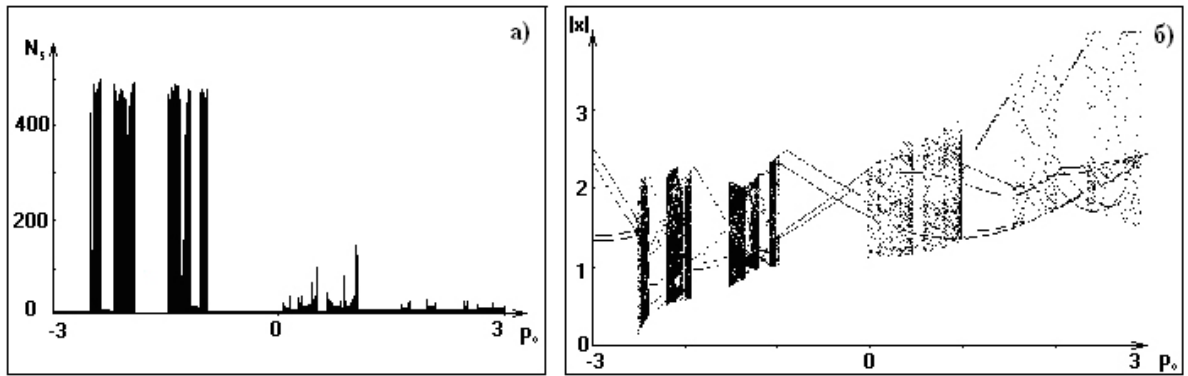


Рис. 1.6: Одномерный график энтропии и диаграмма Фейгенбаума для случая  $p_1 = 0$

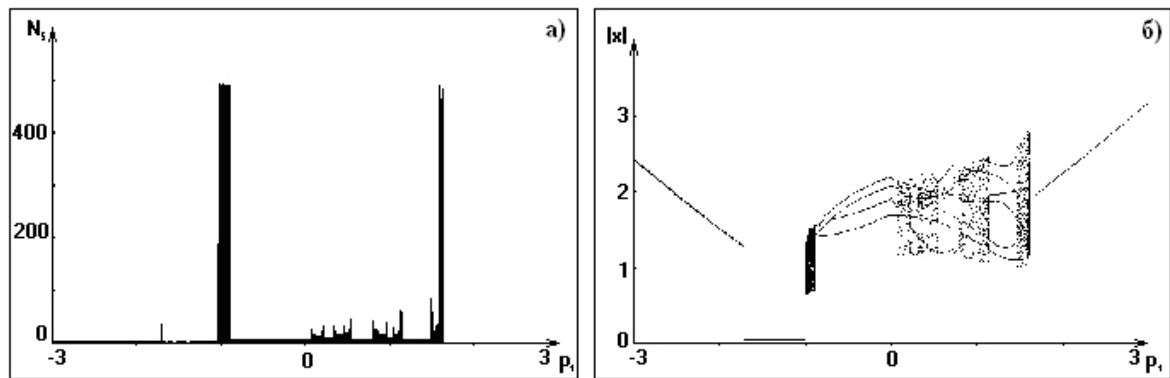


Рис. 1.7: Одномерный график энтропии и диаграмма Фейгенбаума для случая  $p_0 = -0.09$

На одномерном графике энтропии можно выделить участки, где высота столбцов невысока (при таких значениях параметров динамика сети будет периодической с небольшой величиной периода), участки, где столбцы выше (соответствующие колебаниям с большей длиной периода), а также можно заметить наличие параметров, для которых значение показателя энтропии высоко. Заметны полосы из столбцов большой высоты, на двумерной карте энтропии это будет соответствовать пересечению зон хаоса прямой  $p_0 = const$  ( $p_1 = const$ ), участки с низкой высотой столбцов соответствуют прохождению такой секущей через зоны с низким значением показателя энтропии (светлые области на инверсном изображении двумерной карты энтропии).

Сопоставляя одномерный график энтропии (1DEP) и диаграмму Фейгенбаума, несложно заметить, что при значениях параметров, для которых значение показателя энтропии низко (столбцы небольшой высоты на 1DEP), на диаграмме Фей-



генбаума наблюдается совокупность небольшого количества точек. На диаграммах Фейгенбаума (рис.5б,6б) можно выделить полосы, густо заполненные точками, при таких значениях параметров на одномерном графике энтропии столбцы более высокие, а также черные вертикальные полосы, соответствующие высоким значениям показателя энтропии (на одномерном графике энтропии таким значениям параметров соответствуют полосы из высоких столбцов), что соответствует хаотической динамике нейросети или колебаниям с периодом, сравнимым со временем наблюдения. На одномерном графике энтропии также заметны провалы между полосами из высоких столбцов.

### 1.4.3 Периодические и неперіодические режимы

Для тех значений параметров, при которых наблюдалась предположительно хаотическая динамика нейронной сети, сеть была подвергнута дополнительному анализу. Исследовалась таблица зависимости вектора состояния нейронной сети от текущей итерации, и такая же таблица зависимости разности состояний возмущенной и невозмущенной систем.

Последовательность состояний нейронной сети исследовалось на периодичность. Для этого использовался следующий алгоритм: пусть имеется последовательность величин  $x_1, x_2, \dots, x_N$  (в работе – последовательность норм вектора состояния нейронной сети, количество значений достигало 500000). Далее для членов последовательности проверялось равенство:  $x_k = x_{2k}$ , если для некоторого  $k$  равенство выполняется, то делается вывод о периодичности последовательности (при этом  $k$  кратно периоду).

При таком анализе для большинства комбинаций параметров, при которых допускалось наличие хаотической динамики сети, периода не обнаружено (в том числе для достаточно большого количества итераций). Таким образом, было получено еще одно подтверждение возможному наличию сложного поведения соответствующих нейронных сетей.

При исследовании нейронной сети на трех нейронах также рассматривалась траектория вектора состояний нейросети в течение итеративного процесса, то есть множество точек:  $M(\mathbf{N}) = (X_1(k), X_2(k), X_3(k))$  ( $k = t_0, \dots, t_0 + T_a$ ), где  $t_0$  – количество

«скрытых» итераций,  $T_a$  – время наблюдения,  $(X_1(k), X_2(k), X_3(k))$  – вектор состояния нейросети на  $k$ -й итерации. Если для нейронной сети  $\mathbf{N}$  при данных значениях параметра характерна периодическая динамика, то множество  $M(\mathbf{N})$  состоит из некоторого количества отдельных точек в трехмерном пространстве состояний (причем явно выделялись отдельные точки, из которых состоит множество, даже при больших значениях периметра). При этом количество точек, из которых состоит  $M(\mathbf{N})$ , равно длине периода колебания вектора состояния нейронной сети.

Для нейронной сети с хаотической динамикой траектория вектора состояния сети выглядела совершенно иначе.

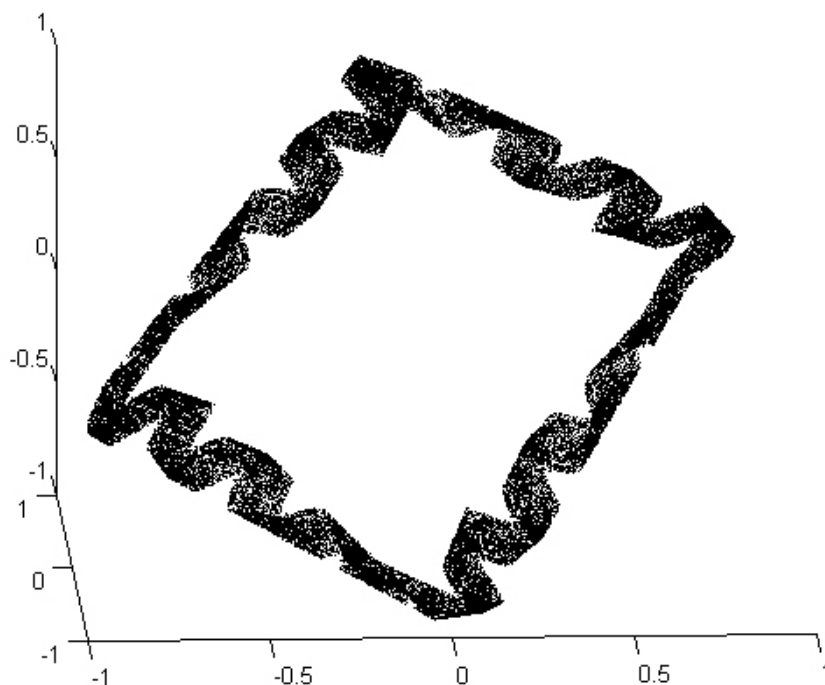


Рис. 1.8: Траектория вектора состояния нейронной сети при  $p_0 = -0.09$ ,  $p_1 = -0.91$

Также для различных параметров подсчитывалось значение показателя энтропии, что также является характеристикой динамики нейронной сети.

#### 1.4.4 Анализ возмущенной системы

В ходе анализа различных диаграмм, отражающих зависимость показателя энтропии от значений параметров, было выявлено наличие параметров, при которых показатель энтропии высок или, напротив, низок (этим параметрам соответствова-

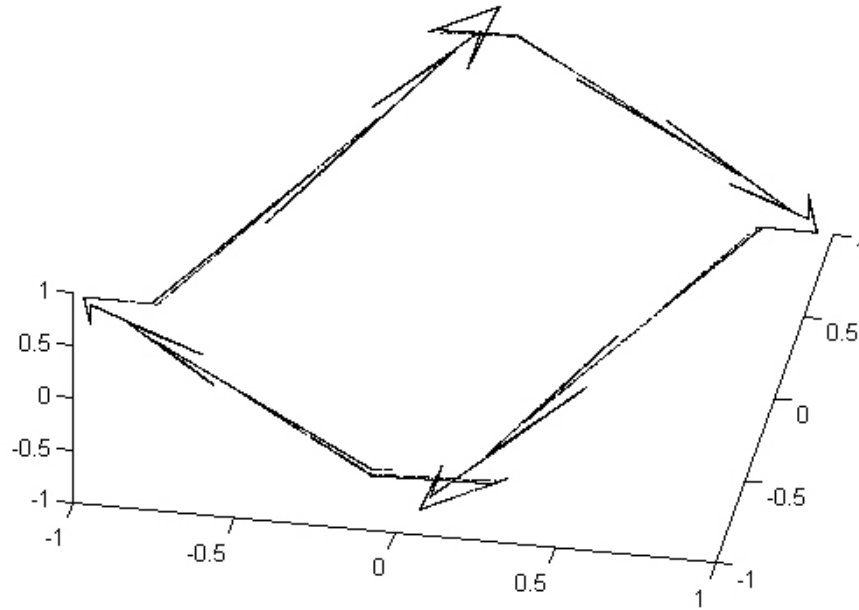


Рис. 1.9: Траектория вектора состояния нейронной сети при  $p_0 = -1.05$ ,  $p_1 = 0$

ли области различной яркости на двумерной карте энтропии, полосы из столбцов различной высоты на одномерном графике энтропии, различный вид участков диаграммы Фейгенбаума). Далее был проведен анализ нейронной сети уже для фиксированных параметров (весов), направленный на выявление циклов с различным периодом. В ходе такого анализа был подтвержден периодический характер колебаний при некоторых значениях параметров. Например, периодические колебания с небольшими значениями периода соответствуют следующим комбинациям параметров-весов:  $p_0 = 0.05$ ,  $p_1 = -0.3$  (период равен 4),  $p_0 = 0$ ,  $p_1 = 1.05$  (период равен 6), подтверждено наличие циклов с большими значениями периода, как, например, при  $p_0 = 0$ ,  $p_1 = 1$  (период равен 17),  $p_0 = 0.5$ ,  $p_1 = 0.2$  (период равен 119).

Однако для некоторых значений параметра (например, при  $p_0 = -0.09$ ,  $p_1 = -0.91$ , или при  $p_0 = -1.05$ ,  $p_1 = 0$ ), для которых значение показателя энтропии высоко, при анализе таблицы значений вектора состояния обнаружить наличие периода не удалось даже при увеличении числа скрытых итераций до  $t_0 = 10000$  и увеличении времени наблюдения до  $T_a = 50000$  и более. Это дает основание предполагать хаотический характер поведения вектора состояния нейронной сети при данных значениях

параметров.

Далее рассматривалась нейронная сеть с фиксированными параметрами-весами и другими общими параметрами, и исследовалось поведение ее вектора состояния при небольших изменениях начального состояния. При таком анализе нейронная сеть первоначально совершает  $t_0$  скрытых итераций (в работе чаще всего использовалось значение  $t_0 = 512$ ), вектор состояния нейросети после осуществления скрытых итераций обозначим  $X_0$  ( $X(t_0) = X_0$ , будем называть этот вектор исходным состоянием). Далее рассматривалось значение вектора состояния  $\tilde{X}_0 = X_0 + \delta X_0$ , то есть возмущенное состояние, отличающееся на величину  $\delta X_0$  (вектор  $\delta X_0$  будем называть отклонением исходного состояния, он будет иметь сравнительно небольшую норму). После этого в течение некоторого времени наблюдения отдельно рассматривается поведение одной и той же по своей структуре нейронной сети, но с различными значениями исходного состояния ( $X_0$  и  $\tilde{X}_0$  соответственно), при этом будем следить за векторами  $X(t)$  и  $\tilde{X}(t)$  и нормой их разности ( $X(t)$  и  $\tilde{X}(t)$  – вектора состояния нейросети при значении вектора исходного состояния  $X_0$  и  $\tilde{X}_0$  соответственно, разность  $X(t) - \tilde{X}(t)$  будем обозначать как  $\delta X(t)$ ) в течение некоторого времени наблюдения  $T_a$  ((чаще всего в работе было использовано значение  $T_a = 5000$ )).

На рис.9-14 приведены графики зависимости нормы вектора  $\delta X(t)$  от текущей итерации.

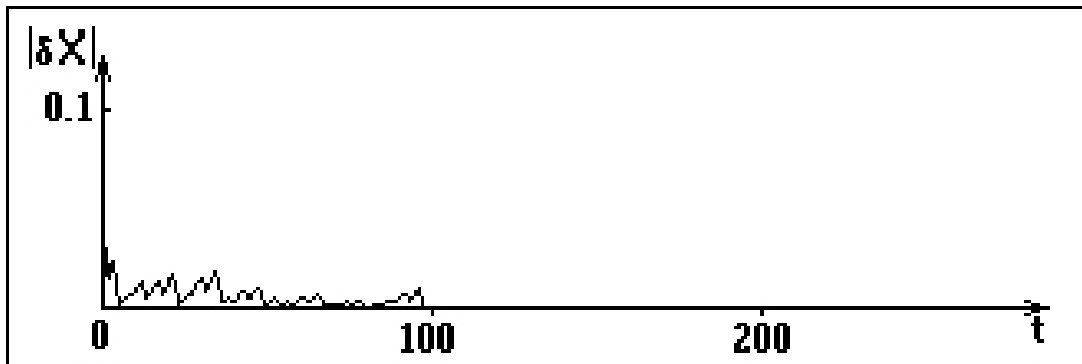


Рис. 1.10: График нормы текущего отклонения  $\delta X(t)$  при  $\delta X_0 = 10^{-2} \cdot (1, 2, 2)^T$ ,  $p_0 = 0.5$ ,  $p_1 = 0.2$

Серия экспериментов показала, что для значений параметров, при которых вектор состояния нейронной сети совершает периодические колебания, разность  $X(t) -$

$\tilde{X}(t)$  через несколько итераций становится равной нулевому вектору, далее векторы состояния  $X(t)$  и  $\tilde{X}(t)$  совпадают. Это подтвердил также анализ таблицы зависимости значений векторов  $X(t)$  и  $\tilde{X}(t)$  и их разности  $X(t) - \tilde{X}(t)$  от текущей итерации.



Рис. 1.11: График нормы текущего отклонения  $\delta X(t)$  при  $\delta X_0 = 10^{-2} \cdot (1, 1, 1)^T$ ,  $p_0 = 0$ ,  $p_1 = 1$

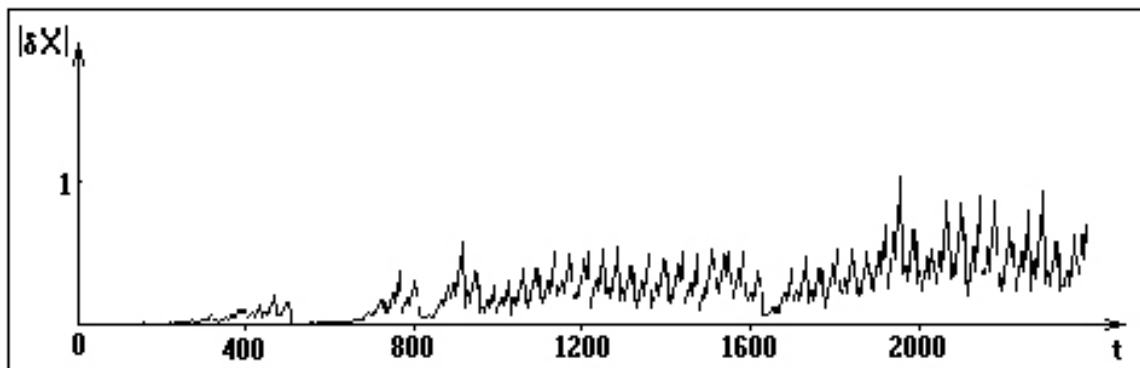


Рис. 1.12: График нормы текущего отклонения  $\delta X(t)$  при  $\delta X_0 = 10^{-3} \cdot (1, 1, 1)^T$ ,  $p_0 = -0.09$ ,  $p_1 = -0.91$

Анализ проводился для комбинаций параметров, при которых вектор состояния нейронная сеть совершает периодические колебания с различным периодом, в ходе этого анализа наблюдалось совпадение векторов  $X(t)$  и  $\tilde{X}(t)$  после некоторого промежутка времени при близких значениях исходного вектора, при этом число итераций, за которое разность  $X(t) - \tilde{X}(t)$  становилась равной нулевому вектору, в среднем было больше у нейросетей, совершающих периодические колебания с большим периодом.

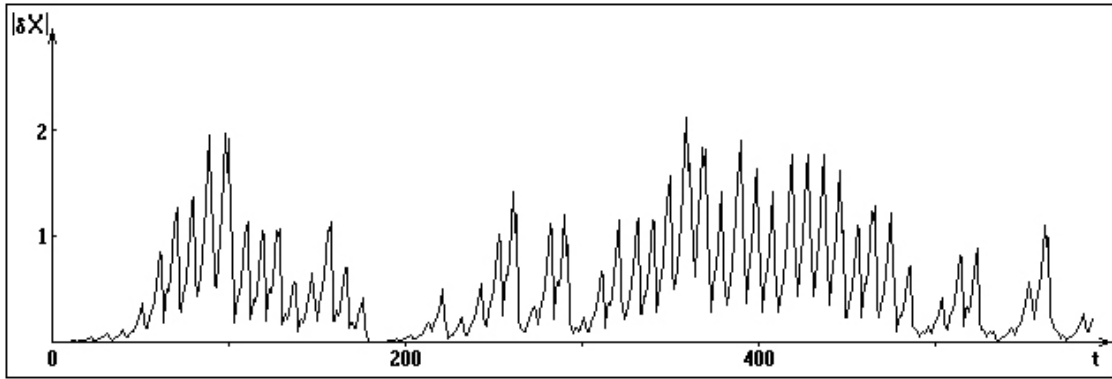


Рис. 1.13: График нормы текущего отклонения  $\delta X(t)$  при  $\delta X_0 = 10^{-3} \cdot (1, 1, 1)^T$ ,  $p_0 = -1.05$ ,  $p_1 = -0$

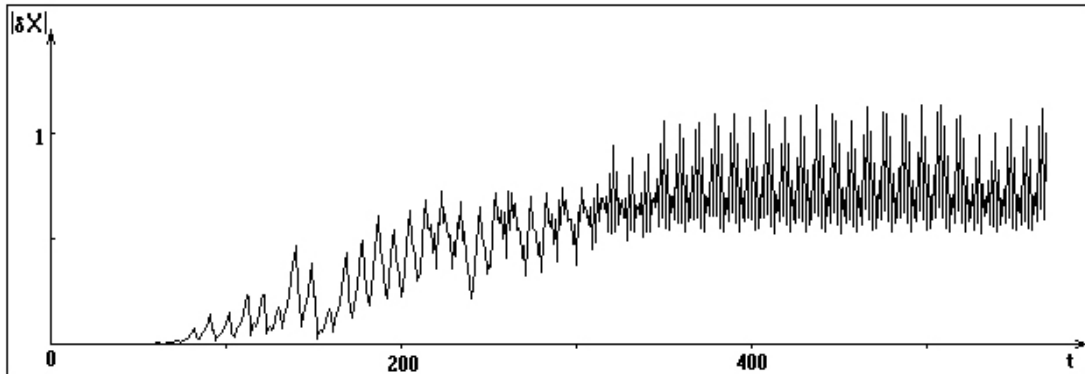


Рис. 1.14: График нормы текущего отклонения  $\delta X(t)$  при  $\delta X_0 = 10^{-4} \cdot (1, 1, 1)^T$ ,  $p_0 = -1.05$ ,  $p_1 = -0$

Для значений параметров, при которых поведение вектора состояния нейронной сети расценивалось как хаотической (наибольшие значения показателя энтропии) результаты данного анализа отличались от результатов анализа сети с периодической динамикой. При рассмотрении нейросетей с хаотической динамикой норма разности между векторами состояния  $X(t)$  и  $\tilde{X}(t)$  не обращалась в нуль даже при большом числе итераций (см. рис.8-11). Дополнительно также был проведен анализ таблицы зависимости разности  $X(t) - \tilde{X}(t)$  от текущей итерации, при котором время наблюдения достигало значения  $T_a = 500000$ , который дал аналогичные результаты (разность  $X(t) - \tilde{X}(t)$  в течение времени наблюдения не обращалась в нуль).

Таким образом, на основании проведенного анализа можно сделать вывод, что для нейронной сети, динамика которой периодическая, ее вектор состояния при воз-

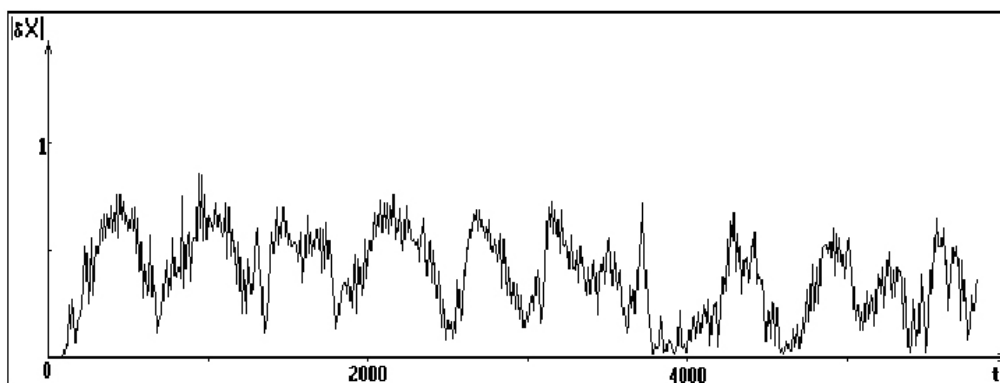


Рис. 1.15: График нормы текущего отклонения  $\delta X(t)$  при  $\delta X_0 = 10^{-5} \cdot (1, 1, 1)^T$ ,  $p_0 = -1.05$ ,  $p_1 = -0$

мушенном исходном состоянии при малой величине возмущения сходится за конечное число итераций к вектору состояния сети с невозмущенным исходным состоянием; напротив, для сети с хаотической динамикой разница между векторами состояния при возмущенном и невозмущенном исходном состоянии не сходится к нулевому вектору.

## 1.5 Результаты анализа модели

В ходе работы было проведено исследование нескольких простых моделей нейронных сетей как на основе формальных нейронов Мак-Каллока-Питтса, так и на потоковых нейронах. Используя разработанную программу, в ходе серии численных экспериментов удалось получить следующие основные результаты:

1. Показана неустойчивость состояния равновесия для некоторого класса сетей на трех нейронах Мак-Каллока – Питтса с нулевым вектором смещения.
2. Для некоторых сетей на основе нейронов Мак-Каллока – Питтса получено численное подтверждение наличия хаотического режима.
3. Исследована глобальная характеристика динамики нейронной сети — энтропия — для нейронной сети при различных значениях весов, построены диаграммы зависимости показателя энтропии от значений параметров (одномерный график энтропии, двумерная карта энтропии, диаграмма Фейгенбаума). В

ходе анализа диаграмм выявлены значения параметров, при которых энтропия соответствующей нейронной сети мала или, напротив, велика. На двумерной карте энтропии выделены области, для которых при соответствующих значениях весов нейросеть совершает периодические колебания, а также значения параметров, при которых поведение вектора состояния сети расценивалось как хаотическое.

4. Рассмотрено различие в динамике нейронной сети при различных значениях вектора смещения и параметра функции активации. Изменения отслежены на диаграммах зависимости показателя энтропии от значений весов. Отмечено сокращение зон хаоса при увеличении нормы вектора смещения и параметра  $m$  функции активации, склонность к периодической динамике вектора состояния при этом, а также деформация двумерной карты энтропии при увеличении параметра  $m$ .
5. Рассмотрено поведение вектора состояния нейронной сети с высокими значениями показателя энтропии, в ходе чего не удалось обнаружить периодического характера поведения вектора состояния даже при больших значениях скрытого периода и времени наблюдения, динамика такой сети формально была названа хаотической. Наряду с этим, рассмотрена нейронная сеть при значениях параметров, при которых энтропия сети невысока. Для таких значений параметров удалось выявить периодический характер поведения вектора состояния и установить величину периода; выявлены колебания с различной величиной периода.
6. Проведен анализ поведения вектора состояния нейронной сети при малых отклонениях вектора исходного состояния. Для нейросетей с периодической динамикой отмечена устойчивость вектора состояния сети к малым возмущениям начального состояния. Для нейросети с хаотической динамикой норма разности векторов состояния для случаев возмущенного и невозмущенного исходного состояния не становилась равной нулю за период наблюдения даже при увеличении периода наблюдения.



Таким образом, рассмотренная нейронная сеть обладает теми свойствами, которые мы требовали от системы на данном этапе: простотой структуры и наличием параметров, при которых возможна хаотическая динамика, что позволяет использовать в дальнейшем полученную сеть для моделирования когнитивных процессов (в том числе и в случае нерегулярной динамики отдельных элементов).

## Глава 2

# Синхронизация сетей в дискретной модели

В данной главе рассматривается модель взаимодействующих нейронных сетей как способ имитирования процессов запоминания. Исследованные в первой главе нейронные сети на трех нейронах рассматриваются как автогенераторы импульсной активности. Ставится задача исследования процессов синхронизации сетей с различным типом взаимодействия. Выявляются параметры, при которых динамика взаимодействующих нейронных сетей синхронизируется, для несинхронизирующихся сетей исследуются особенности установившегося режима.

### 2.1 Математическая модель взаимодействующих нейронных сетей

Отдельный элемент нейронной сети позволяет смоделировать некоторые особенности функционирования биологического нейрона. В качестве объекта моделирования импульсной активности выбрана простая нейронная сеть на основе формального нейрона Мак-Каллока–Питтса, динамика которой была исследована ранее.

Память как основа процессов обучения и мышления включает в себя четыре тесно связанных между собой процесса: запоминание, хранение, узнавание, воспроизведение. Для моделирования происходящих в мозге когнитивных процессов рассматриваются системы взаимодействующих элементов, при этом ключевая роль отво-

дится процессам синхронизации нейронных ансамблей (в частности предполагается, что именно такой механизм имеют процессы запоминания в кратковременной памяти [7]), а также обратным процессам распада такого рода структур (аналог процессов забывания, разрушения образа). Можно допустить, что на динамическом этапе (кратковременная память) возникают динамические структуры, архитектура которых определяется комплексом внешних и внутренних факторов. Однако процесс этот затухающий, благодаря чему информация удерживается в кратковременной памяти ограниченное время, поэтому анализ процессов десинхронизации также имеет большое значение.

В соответствии с данными положениями, следующим этапом исследования динамики сетей являлся анализ взаимодействующих нейронных сетей. При этом рассматривалась пара нейросетей описанного выше вида с одинаковым количеством нейронов в каждой из них. Первая нейронная сеть функционирует автономно, выходные значения данной нейросети подаются на ее входы без изменений, а также, возможно, частично подаются на вход другой нейронной сети (будем называть первую нейронную сеть передатчиком). Соответственно, вторую нейронную сеть, на вход которой подается комбинация собственного выхода и выхода сети-передатчика, будем называть приемником. В ходе исследования рассматриваются взаимодействующие нейронные сети с различными параметрами, а также различные виды организации связи между сетью-передатчиком и сетью-приемником.

В работе рассматриваются два типа воздействия передатчика на приемник: постоянное и случайное (вероятностное).

### 2.1.1 Модель сети с постоянным воздействием

Рассмотрим пару взаимодействующих нейронных сетей описанного ранее класса одной размерности (с одинаковым количеством нейронов), но, возможно, с различными значениями параметров сети (синаптических весов и вектора смещения). При этом первая сеть (передатчик) будет просто генерировать выходные значения, а ее выходные значения будут подаваться на ее вход без изменений. На вход второй сети (приемника) будут подаваться выходы первой сети с некоторым коэффициентом  $\alpha$ , а также собственные выходы в предыдущий момент времени с коэффициентом  $1 - \alpha$ .

Состояние первой сети (передатчика) в момент времени  $t$  будем обозначать  $X(t)$ , состояние второй сети (приемника) обозначим через  $Y(t)$ . Динамику такой системы взаимодействующих нейронных сетей можно описать следующим рекуррентным соотношением:

$$\begin{cases} X(t+1) = F(W_1 \cdot X(t) + I_1), \\ Y(t+1) = F(W_2 \cdot (\alpha X(t) + (1-\alpha)Y(t)) + I_2). \end{cases}$$

Несложно убедиться, что при  $\alpha = 0$  мы просто получаем пару автономных (невзаимодействующих) нейронных сетей. При  $\alpha$  отличном от 0 нас будет интересовать вопрос синхронизации данных нейронных сетей.

Как и при исследовании устойчивости сети к возмущениям начального состояния, в данной ситуации сети изначально функционируют изолированно (иначе говоря, считаем, что при  $t = 0, 1, \dots, t_0$  передатчик не оказывает воздействия на приемник, то есть в этот промежуток времени коэффициент  $\alpha$  равен 0). В дальнейшем, при  $t = t_0 + 1, \dots, t_0 + T_a$  рассматриваем взаимодействующие сети (коэффициент  $\alpha$  отличен от 0 и не меняется в течение времени наблюдения), в течение этого времени рассматривается величина  $\delta(t) = \|X(t) - Y(t)\|$ , то есть норма отклонения вектора состояния передатчика от состояния приемника.

Если величина  $\delta(t)$  за время наблюдения сходится к 0, то будем говорить, что наступила синхронизация данных нейронных сетей, в противном случае считаем, что синхронизации не произошло. В случае синхронизации также исследуется устойчивость данного режима к малым возмущениям вектора текущего состояния одной из сетей. Данный анализ был проведен как для сетей с регулярной динамикой (состояние которых сходится к некоторому циклу), так и сетей, в которых предполагалось наличие хаотического режима. При этом параметры передатчика и приемника рассматривались как одинаковыми, так и различными.

### 2.1.2 Модель сети со случайным воздействием

Особое внимание в работе уделено изучению обобщенной схемы взаимодействия нейронных сетей, где воздействие передатчика на приемник не является постоянным. В этом случае в каждый момент времени передатчик с постоянной вероятностью  $p$  воздействовал на приемник аналогично описанному выше случаю взаимодействия (с

коэффициентом  $\alpha$ ), а с вероятностью  $1 - p$  сети в данный момент времени функционировали автономно.

Динамика такой пары передатчик-приемник может быть условно описана следующим образом:

$$\begin{cases} X(t+1) = F_1(W_1 \cdot X(t) + I_1), \\ Y(t+1) = F_2(W_2 \cdot (\xi X(t) + (1 - \xi)Y(t)) + I_2), \end{cases}$$

где  $\xi$  — случайная величина, принимающая значения  $\alpha$  и  $0$  с вероятностями  $p$  и  $1 - p$  соответственно. Величина  $\xi$  определяет случайный коэффициент воздействия передатчика на приемник. Очевидно, в случае  $\xi \equiv \alpha$  (что соответствует случаю  $p = 1$ ) мы получим рассмотренную выше пару сетей с постоянным воздействием. В работе рассматривался случай взаимодействия нейронных сетей с одинаковыми параметрами ( $W_1 = W_2$ ,  $I_1 = I_2$ ,  $F_1 = F_2$ ).

Для такого типа взаимодействия также рассматривается вопрос, при каких значениях параметров  $\alpha$  и  $p$  наблюдается синхронизация передатчика и приемника. С этой целью был проведен численный эксперимент, описание которого приводится ниже.

Изначально сети (передатчик и приемник) с различными начальными состояниями функционируют автономно (то есть в моменты времени  $t = 0, 1, \dots, t_0$  вес связи  $\alpha$  от передатчика к приемнику равен  $0$ ), при этом сети за данный промежуток времени (по ходу эксперимента использовалось значение  $t_0 = 512$ ) сети входят в некоторый установившийся режим (периодический или более сложный).

Далее в каждый последующий момент времени вычисляется вероятность того, что передатчик будет воздействовать на приемник. При этом снимается значение со стандартного генератора псевдослучайных чисел и, если это значение оказывается меньше заданного значения  $p$ , выход передатчика с коэффициентом  $\alpha$  суммируется с выходом приемника с коэффициентом  $1 - \alpha$  и подается на вход приемника, иначе (если значение, снятое с датчика случайных чисел оказывается не меньше  $p$ ) на вход приемника подается в чистом виде только собственный выход в предыдущий момент времени (то есть, на данном этапе определяется, будет ли в данный момент времени передатчик воздействовать на приемник с некоторым коэффициентом или нет).

В таком режиме сети функционируют в течение некоторого времени наблюдения  $T_a$  и в том случае, если после этого на протяжении некоторого времени норма разно-

сти между векторами состояния передатчика и приемника не превосходила малого параметра  $\epsilon$ , полагалось, что для данных значений  $p$ ,  $\alpha$  и для данных начальных состояний наступила синхронизация сетей.

Для того чтобы снизить вероятность ложных предположений о синхронизации сетей (в случае случайной синхронизации сетей для данных начальных состояний), указанный эксперимент при данных значениях параметров  $p$  и  $\alpha$  проводился для серии начальных значений передатчика и приемника, и заключение о синхронизации сетей выносилось только в том случае, когда сети при данных  $p$  и  $\alpha$  синхронизировались при любых рассматриваемых начальных состояниях.

## 2.2 Результаты анализа процесса синхронизации

Рассмотрим случай, когда передатчик и приемник представляют собой нейронные сети с одинаковыми параметрами (матрицей синаптических весов, вектором смещения и активационной функцией). При этом начальные состояния сетей выбирались различными, после чего сети, как и было описано ранее, совершали  $t_0$  скрытых итераций автономно, после чего передатчик начинал воздействовать на приемник с некоторым коэффициентом  $\alpha$ .

В том случае, если коэффициент воздействия приемника на передатчик ( $\alpha$ ) достаточно велик (как правило, больше 0,15), наблюдалась синхронизация рассматриваемых нейронных сетей как для сетей с регулярной динамикой, так и с хаотической. При этом скорость синхронизации увеличивалась с ростом  $\alpha$ . Для меньших значений коэффициента  $\alpha$  (меньше 0,1) сети с регулярной динамикой, как правило, сходились к некоторому регулярному режиму, при этом синхронизации не наступало. Сети с хаотической динамикой при значениях коэффициента  $\alpha$  больше 0,01 в течение времени наблюдения синхронизировались (при этом рассматривалось максимальное время синхронизации для различных значений векторов начального состояния, компоненты которых в ходе эксперимента принимали значения в диапазоне от -1 до 1 с некоторым шагом). При малых значениях коэффициента  $\alpha$  (меньше 0,01) устойчивой синхронизации не наблюдалось.

Таким образом, можно предположить существование некоторого порогового зна-

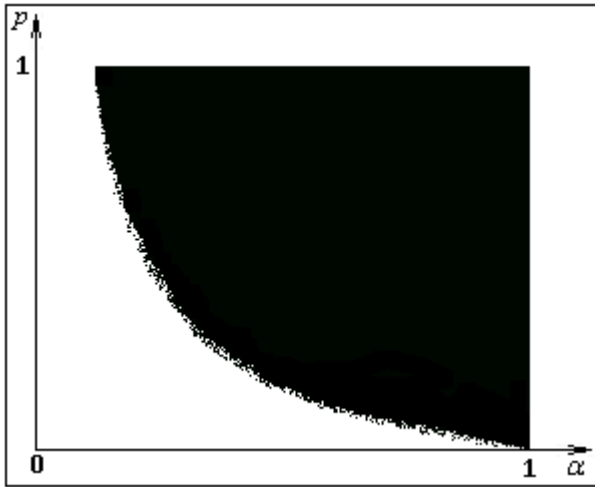


Рис. 2.1: Диаграмма синхронизации нейронной сети

чения  $\alpha$  (для каждой из рассмотренных систем), начиная с которого наблюдается устойчивая синхронизация взаимодействующих сетей.

Результаты анализа представлялись в виде диаграммы, при этом черные точки с координатами  $(p, \alpha)$  соответствуют устойчивой синхронизации сетей для данных значений параметров  $p$  и  $\alpha$ , белые точки — отсутствию синхронизации сетей за время наблюдения для данных значений параметров взаимодействия. В результате было получено численное подтверждение выдвинутого предположения о существовании некоторого порогового значения  $\alpha$  веса связи между приемником и передатчиком на уровне 0.05-0.15, начиная с которого наблюдается устойчивая синхронизация сетей.

При этом стоит особо отметить, что в случае взаимодействия сетей второго типа данное пороговое значение претерпевало малые изменения при снижении вероятности воздействия передатчика на приемник ( $p$ ) с 1 до 0,5, и синхронизируемость передатчика и приемника определялась преимущественно значением коэффициента воздействия  $\alpha$ .

Анализ по данной схеме также был проведен и для сетей различной структуры (рассматривались передатчик и приемник с различными матрицами синаптических весов  $W_1$  и  $W_2$ ), при этом также были рассмотрены две схемы взаимодействия сетей. В данном случае синхронизации не наступало (в том числе и при рассмотрении больших значения параметров  $\alpha$  и  $p$  соответственно). Таким образом, результаты вычислительного эксперимента позволили сделать вывод, что синхронизация сетей

характерна для пары нейронных сетей (передатчика и приемника) с одинаковыми параметрами.

Отметим, что данное свойство нейронных сетей (в том числе с хаотической динамикой) может быть использовано для передачи информации. При этом синхронизации передатчика и приемника будет соответствовать значение «0», отсутствию синхронизации за время наблюдения соответствует значение «1» в двоичной системе [2, 3]. Соответственно, для передачи информации достаточно изменить один из параметров передатчика (при этом параметры передатчика будут отличаться от параметров приемника и синхронизация сетей не наступит). При этом удобно использовать такие исходные параметры приемника и передатчика, для которых характерна хаотическая динамика рассматриваемых нейронных сетей.

## 2.3 Анализ процессов десинхронизации

Анализ процессов синхронизации во взаимодействующих нейронных сетях дает подход к пониманию процессов запоминания в биологических нервных системах. Однако стоит отметить, что ярко выраженная избыточность поступающей в мозг информации (по отношению к реальной способности мозга ее усвоить и запомнить) делает весьма важным в такой ситуации процесс забывания. Причиной забывания могут стать разные факторы, связанные как с самим материалом, его восприятием, так и с отрицательными влияниями других раздражителей, действующих непосредственно вслед за заучиванием (феномен ретроактивного торможения, угнетения памяти).

Как уже отмечалось, процесс запоминания связан с образованием в нервной системе ансамблей когерентно функционирующих нейронов. Соответственно, процесс забывания можно связать с распадом нейронных ансамблей, что при моделировании выражается в десинхронизации взаимодействующих нейронов.

Таким образом, ставится задача изучения особенностей процессов потери синхронизации в рассмотренной ранее паре из двух взаимодействующих нейронных сетей. При этом отдельно рассматривается вопрос о возможности установления сложных (хаотических) режимов при взаимодействии двух нейронных сетей с периодической



динамикой.

Ранее было показано, что синхронизация в рассмотренной модели не наблюдалась при малых значениях коэффициента воздействия (или при малых значениях математического ожидания этого воздействия в случае со случайным воздействием передатчика на приемник). Задачи десинхронизации будут рассматриваться для системы с постоянным воздействием.

Рассматривается пара нейронных сетей, динамика которой описывается приведенным ранее соотношением:

$$\begin{cases} X(t+1) = F(W_1 \cdot X(t) + I_1), \\ Y(t+1) = F(W_2 \cdot (\alpha X(t) + (1 - \alpha)Y(t)) + I_2), \end{cases}$$

где  $\alpha$  — малый постоянный коэффициент воздействия передатчика на приемник (в ходе численного анализа рассматриваются случаи  $\alpha = 0.05$  и  $\alpha = 0.025$ ).

Учитывая то, что интерес будет представлять процесс разрушения навязанного передатчиком режима, первоначально имитируется процесс синхронизации. На данном этапе передатчик изолированно функционирует в течение некоторого времени  $t = 0, 1, \dots, t_0$ . После этого рассматривается синхронизированная с ним нейронная сеть-приемник той же структуры с тем же (текущим) начальным состоянием (в момент времени  $t = t_0$  приемник представляет из себя копию передатчика). В ходе численного эксперимента рассматривалось значение  $t_0 = 512$ .

Далее состояние передатчика или приемника (в работе рассматриваются оба этих случая) подвергается малому возмущению: например, вектор начального состояния приемника рассматривался равным  $Y(t_0 + 1) = Y(t_0) + \delta Y$ . Таким образом, в этот момент вектора состояний передатчика и приемника отличаются на малую величину  $\delta Y$ . Эту ситуацию можно рассматривать как незначительное внешнее воздействие на приемник, которое привело к малому рассогласованию.

После малого рассогласования начального состояния передатчика и приемника эти взаимодействующие нейронные сети функционируют в течение времени  $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_0 + T_c$ . При малых значениях коэффициента воздействия обратной синхронизации сетей не наблюдается, однако в течение этого времени предполагается возможное установление некоторого предельного режима работы, характер которого предстоит выявить.

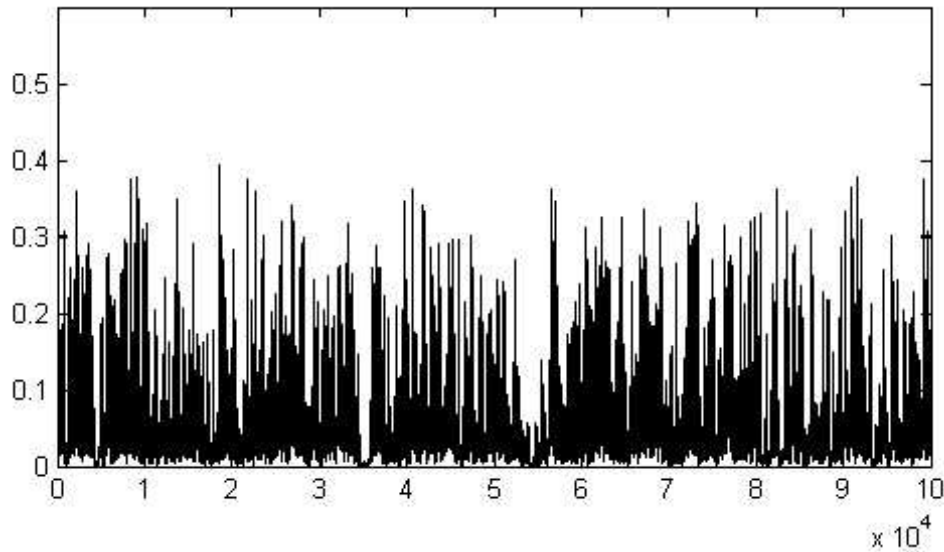


Рис. 2.2: Десинхронизация взаимодействующих нейронных сетей с хаотической динамикой

Для определения характера установившегося режима функционирования пары десинхронизированных сетей (для грубого подтверждения рассинхронизации) использовался следующий метод:

1. Рассматривается наблюдаемый параметр  $Z(t) = g(X(t), Y(t))$  отражающий состояние пары взаимодействующих передатчика и приемника (также в качестве наблюдаемого параметра на некоторых этапах вычислительного эксперимента использовались компоненты рассматриваемой пары сетей; например, в качестве такого параметра можно выбрать  $Z(t) = |X_1(t) - Y_1(t)|$  — разность состояний первых нейронов передатчика и приемника).
2. Начальные состояния нейронных сетей выбираются с условием  $0 < \|X(0) - Y(0)\| < \varepsilon_1$ .
3. Взаимодействующие нейронные сети рассматриваются на временном промежутке  $t \in [0, T]$ , достаточным критерием отсутствия синхронизации в данном эксперименте считается условие  $\max(Z(t) | t \in [T - t_*, T]) > \varepsilon_2$ .

Вычислительные эксперименты по анализу десинхронизации нейронных сетей проводились при значении параметров  $\varepsilon_1 = 10^4$ ,  $\varepsilon_2 = 10^3$ ,  $T \in [10^4, 10^5]$ ,  $t_* = 20$ . В ходе серии экспериментов, проведенных по упомянутой методике, было численно

подтверждено отсутствие синхронизации нейронных сетей при выбранных значениях параметров.

В качестве дополнительного численного подтверждения отсутствия синхронизации нейронных сетей при отмеченных значениях коэффициента  $\alpha$  был использован подход, основанный на оценке старшего характеристического показателя Ляпунова для величины рассогласования  $Z(t) = \|X(t) - Y(t)\|$ , где через  $X(t)$  и  $Y(t)$  обозначены векторы состояния нейронной сети-передатчика и сети-приемника.

Для оценки старшего ляпуновского показателя использовался метод, предложенный в [134] (алгоритм Розенштейна). На основе данного подхода для решения рассмотренной задачи был реализован вычислительный эксперимент по следующему плану:

1. Рассматривается пара взаимодействующих нейронных сетей описанной ранее структуры при значениях параметров, для которых численно показано наличие хаотического режима в динамике соответствующей сети, и близком к нулю начальном состоянии. Первая нейронная сеть (передатчик) функционирует в течение  $T_0$  итераций (предполагается, что в течение данного времени происходит выход сети на некоторый установившийся режим функционирования), вторая нейронная сеть (приемник) полностью синхронизирована с первой ( $Y(t) = X(t)$ ), взаимодействие на данном этапе отсутствует. Время окончания данного процесса объявляется начальным (нулевым) моментом времени для реализации дальнейшего алгоритма, а соответствующее значение  $X$  — начальным состоянием сети-передатчика.
2. Далее нейронные сети объединяются в пару (передатчик-приемник) с воздействием передатчика на приемник с постоянным коэффициентом  $\alpha$ , состояние сети-приемника  $Y(0)$  задается с соблюдением условия  $0 < \|X(0) - Y(0)\| < \varepsilon_1$  (малое возмущение по отношению к состоянию передатчика).
3. Рассматривается последовательность  $Z(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , где  $Z(t) = X(t) - Y(t)$  — вектор рассогласований между нейронами взаимодействующих сетей. В качестве наблюдаемого параметра выбирается  $z_t = \|Z(t)\|$ .
4. Для каждого из целочисленных параметров  $i \in [1, I]$  и каждого  $j \in [0, T - i]$

вычисляются следующие вспомогательные характеристики:

$$d_j(0) = \min_{k \neq j} \|z_j - z_k\|,$$

$$d_j(i) = \{\|z_{j+i} - z_{m+i}\| \mid m : \|z_j - z_m\| = \min_{k \neq j} \|z_j - z_k\|\}.$$

5. Для всех указанных значений  $i \in [1, I]$  вычисляются вспомогательные оценки ляпуновских показателей:

$$\tilde{\lambda}(i) = \frac{1}{i(T-i)} \sum_{j=1}^{T-i} \ln \frac{d_j(i)}{d_j(0)}.$$

6. Рассматривается последовательность  $\tilde{\lambda}(i)$ ,  $i \in [1, I]$ . В данной последовательности выделяется наиболее выраженный длинный линейный участок, угловой коэффициент соответствующей прямой рассматривается как оценка старшего характеристического показателя Ляпунова. Положительное значение данного показателя соответствует экспоненциальному разбеганию состояний нейронных сетей, входящих во взаимодействующую пару, и интерпретируется как неустойчивость соответствующего синхронного режима (рассинхронизация) при данных значениях параметров.

Серия вычислительных экспериментов проводилась для значений параметров  $p_0 = -1.05$ ,  $p_1 = 0$ ,  $\varepsilon_1 \in [10^{-4}, 10^{-3}]$ ,  $d \in [0.01, 0.1]$ ,  $T_0 = 10^4$ ,  $T \in [250, 10^6]$ . Для проведения экспериментов использовалась авторская модификация реализации алгоритма Розенштейна для пакета MATLAB R2012b, верификация алгоритма и результатов эксперимента осуществлялась с помощью программного пакета нелинейного анализа временных рядов TISEAN 3.0.0 [121].

На рисунке 2.3 показан результат реализации алгоритма Розенштейна для оценки старшего ляпуновского показателя в данной задаче (точками отображаются вспомогательные оценки параметров  $\tilde{\lambda}(i)$ , пунктиром выделен наибольший линейный участок). Отметим также, что для оценки ляпуновского показателя как характеристики скорости расхождения траекторий в данной задаче (для взаимодействующих нейронных сетей указанного вида) практическое значение имеют относительно малые

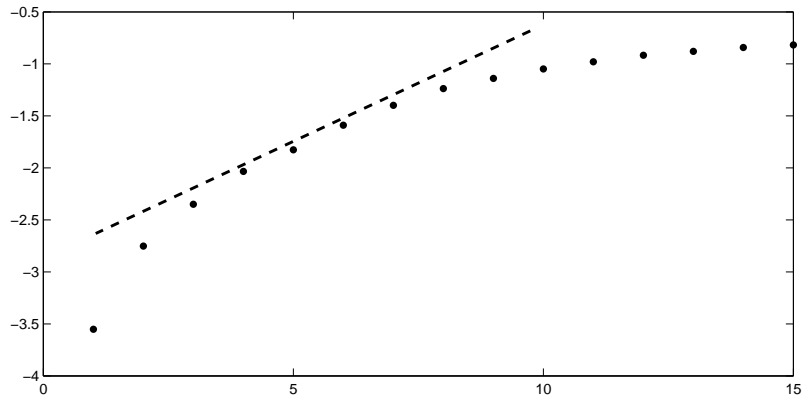


Рис. 2.3: Последовательность вспомогательных оценок  $\tilde{\lambda}(i)$  и линейный участок последовательности

значение параметра  $i$  ( $i < 10$ ) в силу особенностей активационной функции (большие значения состояния сети обрезаются до  $\pm 1$ , соответственно расхождение траекторий ограничено сверху, а после итераций расхождение траекторий перестает быть монотонным).

Таким образом, проведенный численный анализ пары взаимодействующих нейронных сетей позволил достигнуть следующих результатов:

1. Установлена синхронизация нейронных сетей при больших (превышающих некоторую пороговую величину) значениях коэффициента воздействия передатчика на приемник (навязывание режима импульсации), что может быть интерпретировано как имитация процессов запоминания. При этом данного результата удалось достигнуть для достаточно простой формальной модели нейронной сети. Также достигнутый для сетей с хаотической динамикой результат можно использовать как базу для дальнейшего изучения возможности передачи информации на хаотическом носителе.
2. Отмечено отсутствие синхронизации передатчика и приемника при малых значениях коэффициента воздействия, в том числе и десинхронизация сетей для малых возмущений текущего состояния одной из взаимодействующих нейронных сетей, что интерпретируется как разрушение синхронизированной системы (ансамбля) нейронов и рассматривается как имитация процессов забывания при ослаблении синаптической связи.

3. Изучен характер динамики рассогласования между нейронными сетями (разности текущих состояний передатчика и приемника) для сетей с различной динамикой. Рассогласование десинхронизированных нейросетей с хаотической динамикой неустойчиво (экспоненциально расходится). Для взаимодействующих нейронных сетей с периодической динамикой хаотической динамики вектор рассогласования не выявлено (неотделимые от нулевого значения).

## Глава 3

# Анализ сети осцилляторов на основе импульсной модели нейрона

В главе рассматриваются сети из нейроподобных элементов, основанных на дифференциальных уравнениях с запаздыванием. В качестве базовой математической модели рассматриваются импульсная модель нейрона на основе уравнения с одним запаздыванием, а также модель на основе уравнения с двумя запаздываниями. Данные подходы к моделированию нейрона позволяют добиться высокой степени биологической адекватности при имитации импульсной активности нервных клеток. Элементы нейронных сетей на основе рассмотренных моделей нейронов (осцилляторов) объединяются в сети с диффузионной связью между нейронами: в первом случае (для импульсной модели) исследуется пара взаимодействующих нейронов, во втором случае рассматривается цепь нейронов, в которой диффузионно связаны только соседние элементы. Проводится численный анализ процессов, происходящих в данной модели сети: устойчивых режимов периодической активности, особенности режимов волновой активности при изменении параметров сети (в том числе коэффициента диффузии).

### 3.1 Математическая модель нейронной сети

Любая математическая модель нейрона строится на основе некоторых биологических предпосылок — либо она имитирует общие характерные особенности нервной

клетки (способность к генерации импульса под воздействием других аналогичных элементов), либо может явно или неявно отражать проходящие в нейроне или группе нейронов нейрофизиологические процессы (в том числе протекание ионов различных видов через клеточную мембрану, химические процессы, связанные с передачей импульса, процессы распространения нервного импульса по нервной клетке).

В данной части работы рассмотрим модель, основанную на анализе происходящих в нервной системе физико-химических процессов [60, 61], моделирующую основные особенности импульсной активности отдельного нейрона (возможность генерировать высокоамплитудный импульс, переход к состоянию невосприимчивости к внешним воздействиям, восстановление мембранного потенциала). В дальнейшем рассмотрим обобщение данной модели [25, 26], в целом основанное на тех же нейробиологических предпосылках, но обладающей более богатой динамикой (в том числе возможностью генерировать группы высокоамплитудных нервных импульсов).

### 3.1.1 Биологическая справка

Биологический нейрон (нервная клетка) является основным элементом нервной системы животных. В настоящее время выделяют большое количество типов нервных клеток, но несмотря на различие в структуре и особенностях функционирования, всем клеткам такого типа присущи следующие общие структурные особенности: они состоят из центральной части (клеточного тела) и отходящих от него отростков (древовидного аксона, далеко тянущегося от тела клетки и участвующего в процессе передачи импульса от нейрона, и дендритов, представляющих из себя сеть трубчатых выростов и создающих физическую поверхность, на которую поступают сигналы от других нейронов).

Нейрон окружен мембраной, состоящей из двух слоев липидных молекул. Динамика нейрона характеризуется мембранным потенциалом (разностью потенциалов между поверхностями мембраны нейрона), который характеризует состояние нейрона [92]. Подобно другим клеткам, нейрон способен к поддержанию состава внутренней среды, при этом можно обратить внимание на различие в концентрациях ионов калия и натрия по обе стороны мембраны (внутренняя среда нейрона значительно более богата калием, внешняя среда — наоборот). Калиевые и натриевые ионы



способны проникать через мембрану, используя механизмы так называемых насосов [99, 107].

Внутренность нейронного аксона имеет отрицательный потенциал по отношению к внешней среде. Проницаемость мембраны зависит от ее поляризации (мембранного потенциала), при этом она различна для разного типа ионов. Распространение нервного импульса сопровождается резкими изменениями величины проницаемости мембраны для ионов калия и натрия. Процесс поступления ионов натрия в нервную клетку является самоусиливающимся, при этом проникновение большого количества положительно заряженных ионов меняют характер поляризации мембраны. Последующий после этого вывод нейтронов калия из нервной клетки (запаздывающий по отношению к лавинообразному транспорту натриевых нейтронов) производит обратное действие. Процесс резкого изменения мембранного потенциала носит название потенциала действия и выражает импульсную активность отдельного нейрона.

Таким образом, биологический нейрон, возможно под влиянием внешнего воздействия, способен к генерации высокоамплитудного импульса короткой продолжительности (спайка). Сгенерированный импульс распространяется по аксону и его ответвлениям и через особого рода контакты (синапсы) воздействует на другие нейроны, вызывая в нем процессы возбуждения или торможения.

Помимо описанного циклического процесса генерации отдельного короткого высокоамплитудного нервного импульса (спайка) и последующего относительно длительного периода невосприимчивости, в биологической нервной системе также отмечается наличие иного режима импульсной активности: при некоторых условиях нейрон способен генерировать плотную группу (пачку) интенсивных импульсов примерно одинаковой амплитуды, после чего наступает «спокойный» временной промежуток восстановления мембранного потенциала. Эта особенность импульсации нейрона получила название “bursting behavior” (см. [104, 105, 119, 132]), в настоящее время изучение роли таких режимов импульсной активности в когнитивных процессах представляет большой интерес.

### 3.1.2 Моделирование импульсной активности нейрона

Одним из направлений моделирования биологических систем является разработка и изучение особенностей динамики математических моделей биологического нейрона и систем взаимосвязанных нейроподобных элементов (нейронных сетей). За последние десятилетия появилось несколько таких математических моделей, в том числе сочетающих относительную простоту описания и высокую степень биологической адекватности (т.е. наличие специфических режимов функционирования, свойственных особенностям электрической активности биологического прототипа).

Развитие средств и методов анализа элементов нервной системы, накопление данных о сложной функциональной организации нейрона и проходящих в нервной системе процессах позволило построить ряд математических моделей, описывающих импульсную активность.

Широкое распространение получила описательная модель Ходжкина-Хаксли [91, 115], построенная на основе динамики транспорта ионов различного типа через мембрану. Модель представляет систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, при этом первое уравнение выражает баланс протекающих через мембрану упомянутых уже токов калия и натрия, а также играющих роль утечки ионов хлора. Остальные три уравнения системы Ходжкина-Хаксли описывают характер зависимости калиевой, натриевой и хлорной проводимости мембраны от потенциала. Реализация упомянутого ранее феномена запаздывания калиевого тока по отношению к натриевому достигается соответствующим выбором параметров уравнений, описывающих значение величины проводимости.

Существуют также модификации данной модели, задействующие большее количество протекающих через мембрану токов.

Модель Ходжкина-Хаксли является достаточно адекватным математическим описанием происходящих в нейроне процессов передачи импульсов, однако достаточно сложна для аналитического исследования, что в том числе значительно сужает область ее применимости. Попытки упрощения приводили к разработке некоторых производных феноменологических моделей, однако простота достигалась как правило ценой некоторой потери в плане биологической адекватности.

## Импульсная модель нейрона

Определенного рода компромиссом между попытками упростить модель, описывающую нейронную активность, и сохранением биологической интерпретируемости является введенная В.В. Майоровым и И.Ю. Мышкиным в работах [37, 60, 61] импульсная модель нейрона, основанная на дифференциальном уравнении с запаздыванием.

В работе будем рассматривать нейронные сети на основе данной импульсной модели, а также обобщения данной модели, позволяющие реализовать более широкий класс режимов импульсной активности нейрона.

Рассматриваемая модель нейрона также построена на основе анализа калиевого и натриевого токов [60]. Мембранный потенциал нейрона описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{u}(t) = \lambda(-1 - f_{Na}(u(t)) + f_K(u(t-1))) u(t). \quad (1)$$

Здесь  $u(t)$  — мембранный потенциал нейрона (при этом уровень наибольшей поляризации мембраны — состояние гиперполяризации — принято за начало отсчета). За единицу времени принята величина запаздывания калиевого тока по отношению к натриевому. Функции  $f_{Na}$  и  $f_K$  описывают состояние натриевых и калиевых каналов соответственно (натриевую и калиевую проводимость), параметр  $\lambda$  характеризует скорость восстановления мембранного потенциала.

Биологические соображения и результаты анализа проходящих в нейроне процессов позволяют предположить, что  $f_{Na}$  и  $f_K$  — достаточно гладкие положительные функции, быстро сходящиеся к 0. В соответствии с [37] будем рассматривать данные функции сходящимися к 0 при  $u \rightarrow \infty$  быстрее, чем  $u^{-(1+\gamma)}$  (здесь  $\gamma$  — положительный параметр).

Для возможности реализации специфического импульсного режима активности также в соответствии с [37] выбираются параметры:  $\alpha = f_K(0) - f_{Na}(0) - 1 > 0$ ,  $\alpha_1 = f_K(0) - 1 > 0$ ,  $\alpha_2 = f_{Na}(0) + 1$ . Также предполагается, что параметр  $\lambda \gg 1$ .

Пусть  $C[-1, 0]$  — пространство непрерывных на  $[-1, 0]$  функций,  $S \subset C[-1, 0]$  — подмножество функций  $\varphi(x)$  таких, что  $0 < \varphi(s) \leq \frac{1}{\lambda} e^{\frac{\lambda \alpha}{2} s}$  (при  $s \in [-1, 0]$ ).

Обозначим через  $u_\varphi(t)$  решение уравнения (3.1) с начальным условием  $u_\varphi(s) \equiv \varphi(s)$  (при  $s \in [-1, 0]$ ).

В [37] показано, что при выполнении данных условий существует функция  $\varphi_0(s) \in S$  и положительное число  $T$ , такие, что  $u_{\varphi_0}(s + T) \equiv \varphi_0(s)$  (при  $s \in [-1, 0]$ ), то есть существует периодическое решение уравнения (3.1).

Также ранее [61] показано, что при достаточно больших значениях  $\lambda$  имеют место следующие асимптотические оценки:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= e^{\lambda(\alpha_1 t + o(1))}, & t \in [\delta, 1 - \delta], \\
 u(t) &= e^{\lambda(\alpha_1 C - t + 1 + o(1))}, & t \in [1 + \delta, T_1 - \delta], \\
 u(t) &= e^{\lambda(-\alpha_2(t - T_1) + o(1))}, & t \in [T_1 + \delta, T_1 + 1 - \delta], \\
 u(t) &= e^{\lambda(\alpha(t - T_1 - 1) - \alpha_2 + o(1))}, & t \in [T_1 + 1 + \delta, T_2],
 \end{aligned} \tag{2}$$

где значения  $T_1$  и  $T_2$ , вообще говоря, зависят от начальной функции  $\varphi$ .

Таким образом, динамика периодического решения уравнения (3.1) отражает основные особенности импульсной активности нейрона: быстрый рост мембранного потенциала (импульс, спайк), быстрое падение мембранного потенциала до уровня, ниже начального (короткая продолжительность спайка и деполяризация), сравнительно длительный процесс роста мембранного потенциала. Динамика данной модели нейрона-автогенератора (импульсной модели) за последнее время хорошо изучена: обоснована устойчивость решения при больших значениях параметра [17, 24], построены достаточно точные асимптотические оценки длины периода [63].

На основе описанной модели нейрона рассматриваются более сложные структуры (нейронные сети) с различными вариантами взаимодействия между элементами (изучаются модели нейронных сетей с химическим и электрическим взаимодействием). Для данных моделей нейронных сетей интерес представляют различные особенности динамики соответствующих решений: синхронизация импульсной активности нейронов сети, возникновение и распад устойчивых волновых режимов в динамике нейронов, возможность возникновения сложных (в том числе хаотических) режимов при определенных значениях параметров. Параметры, при которых выявляются соответствующие режимы в динамике мембранных потенциалов нейронов, также выявлены в ряде работ (например, [17, 24]).

## Модель нейрона на основе уравнения с двумя запаздываниями

В соответствии с теми же основными исходными положениями, что положены в основу исходной импульсной модели нейрона, в работе [25] предложена модифицированная математическая модель, описывающая динамику нейрона. Фактически, отличием данной модели является введение малого запаздывания в функцию, описывающую проницаемость мембраны нейрона для ионов натрия. Таким образом, модифицированной математической моделью, описывающей динамику мембранного потенциала нервной клетки, является дифференциальное уравнение с двумя запаздываниями, которое можно записать в следующем виде:

$$\dot{u}(t) = \lambda [f(u(t-h)) - g(u(t-1))] u(t). \quad (3)$$

Аналогично исходной модели, положительная функция  $u(t)$  описывает мембранный потенциал нейрона, положительный параметр  $\lambda$  характеризует скорость восстановления мембранного потенциала, функции  $f(u)$  и  $g(u)$  отражают соответственно натриевую и калиевую проводимость (зависящую от текущей величины мембранного потенциала проницаемость мембраны нейрона для положительных ионов соответствующего вида). Предполагается, что  $f(u)$  и  $g(u)$  — достаточно гладкие функции ( $f(u), g(u) \in C_2[0, +\infty)$ ), причем  $f(0) = 1, g(0) = 0$ , а также выполняются асимптотические оценки:

$$\begin{aligned} f(u) &= -a_0 + O(1/u), & g(u) &= b_0 + O(1/u), \\ u f'(u) &= O(1/u), & g(u) &= b_0 + O(1/u), \\ u^2 f''(u) &= O(1/u), & u^2 g''(u) &= O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что модель, описываемая уравнением 1 является частным случаем данной модифицированной модели, поэтому описанные ранее характерные особенности динамики возникают и в данном случае. Как было показано в работе [25], при больших значениях параметра  $\lambda$  уравнение 3 имеет орбитально экспоненциально устойчивый цикл, причем при определенных ограничениях на параметры на отрезке времени длины периода такое решение имеет серию из нескольких подряд идущих высокоамплитудных всплесков, после которых происходит медленное восстановление мембранного потенциала (типичный график такого решения представлен на рисунке 3.1).

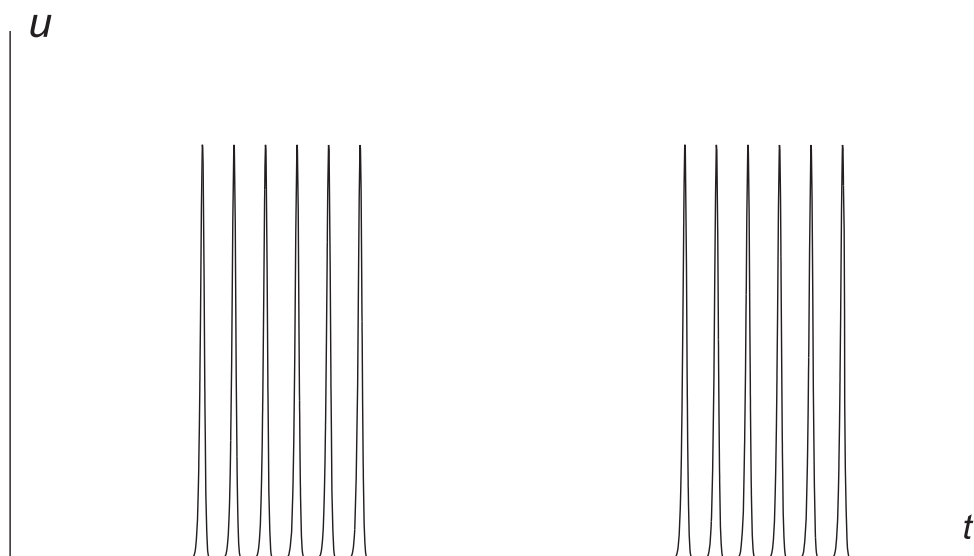


Рис. 3.1: График периодического решения уравнения 3 с условиями 4

Таким образом, рассмотренное уравнение 3 можно использовать для моделирования bursting-эффекта в биологических нервных системах.

### 3.1.3 Модели нейронных сетей на основе уравнения с запаздыванием

#### Сети на основе импульсной модели нейрона

Нейроподобные элементы, модель которых описана выше, объединяются в систему взаимодействующих нейронов. Для импульсной модели нейрона в работах [37–42,60,61] предложены подходы к моделированию нейронных сетей на основе электрического взаимодействия (при этом в уравнение, описывающее изменение мембранного потенциала, добавляются слагаемые, соответствующие разности потенциалов между отдельными нейронами сети), а также химического синапса (в данном случае предлагается модель, отражающая процессы изменения ионной проницаемости мембраны нейрона под действием особого класса химических веществ (нейромедиаторов), а также особенности восстановления медиаторов в синапсе и, соответственно, изменения восприимчивости нейрона к внешнему воздействию).

Накопленные во второй половине XX века нейрофизиологические данные о функционировании головного мозга позволили сделать выводы о связи механизмов про-

цессов внимания и памяти с характерными особенностями динамики групп (ансамблей) нейронов. В биологических нейронных сетях синхронизация импульсной активности является естественным процессом и возникает уже для пары взаимодействующих нейронов [1]. В работах [7, 57] отмечается ведущая роль образования ансамблей синхронно (когерентно) функционирующих нейронов в процессах запоминания, возникновение ансамблей с синхронизированной импульсной активностью отмечено при исследовании процессов восприятия [1]. С учетом отмеченной в [37, 61] адекватности импульсной модели нейроподобного элемента биологическому нейрону есть основания предполагать аналогичные синхронизационные процессы в рассматриваемых моделях нейронной сети и интерпретировать синхронизацию нейронов в модели как модель простейших нейрофизиологических процессов в нервной системе животных.

На основе описанной выше импульсной модели нейрона будем рассматривать нейронную сеть из двух импульсных нейронов, элементы которой связаны посредством так называемого электрического синапса (диффузная связь), в соответствии с предложенной в [42, 61] моделью взаимодействия такого рода. В случае связи на основе электрического синапса показатель взаимодействия между нейронами пропорционален разности мембранных потенциалов нейронов, воздействие предполагается в некотором смысле симметричным (величина воздействия второго нейрона на первый равна по модулю и противоположна по знаку обратному воздействию). Соответственно, нейронная сеть описывается системой следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= \lambda(-1 - f_{Na}(u_1(t)) + f_K(u_1(t-1)))u_1(t) + d(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2(t) &= \lambda(-1 - f_{Na}(u_2(t)) + f_K(u_2(t-1)))u_2(t) + d(u_1 - u_2), \end{aligned} \quad (5)$$

где через  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  обозначены мембранные потенциалы нейронов. Параметр  $d \geq 0$  (показатель диффузии) в данном случае определяет выраженность связи между нейронами.

### Сети на основе уравнения с двумя запаздываниями

Далее в работе будет рассматриваться одна из таких нейросетевых структур — цепь одинаковых элементов описанного вида, в которой каждый нейрон связан с двумя соседними нейронами. Модель такой нейронной цепи в соответствии с [25]

описывается системой:

$$\dot{u}_j = d[u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}] + \lambda [f(u_j(t-h)) - g(u_j(t-1))] u, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Положительный параметр  $d$  (коэффициент диффузии) характеризует величину связи между соседними нейронами цепи. Для удобства описания полагаем, что  $u_0 = u_1$ ,  $u_{m+1} = u_m$ .

В работе [25] для исследования данной системы предлагается выполнить следующие замены:

$$u_j = \exp\left(\frac{x_j}{\varepsilon}\right), \quad j = 1, \dots, m; \quad (7)$$

$$y_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{\varepsilon}, \quad j = 1, \dots, m-1; \quad (8)$$

где  $\varepsilon = \lambda^{-1}$ .

Данные замены позволяют привести первое (диффузионное) слагаемое системы (6) к следующему виду:

$$y_j = d(\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp y_{j-1}) \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (9)$$

С учетом соответствующих граничных условий из (6) отметим, что  $y_0 = y_m = 0$ .

Рассмотрим систему (6) с периодическим импульсным воздействием:

$$\begin{aligned} y_j(h + kT_0 + 0) &= y_j(h + kT_0 - 0) - (1 + a_0)y_j(kT_0), \\ y_j(t_0 + h + kT_0 + 0) &= y_j(t_0 + h + kT_0 - 0) - (1 + 1/a_0)y_j(t_0 + kT_0), \\ y_j(1 + kT_0 + 0) &= y_j(1 + kT_0 - 0) - b_0y_j(kT_0), \\ y_j(1 + t_0 + kT_0 + 0) &= y_j(1 + t_0 + kT_0 - 0) - (b_0/a_0)y_j(t_0 + kT_0), \\ k &= 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь параметры  $a_0$  и  $b_0$  выбираются из условий (4),  $b_0 > 1 + a_0$ ,  $t_0 = h(1 + 1/a_0)$ ,  $T_0 = h(2 + a_0 + 1/a_0)$ . Параметр  $n$  задает количество всплесков в серии высокоамплитудных спайков нейрона (ранее такое поведение описывалось как *bursting*), при этом в работе [25] показано, что при выполнении условия

$$\frac{1}{(n+1)(2+a_0+1/a_0)} < h < \frac{1}{n(2+a_0+1/a_0)+2+1/a_0} \quad (11)$$

уравнение, описывающее динамику нейрона, будет иметь устойчивое периодическое решение именно с таким количеством всплесков на периоде. Параметр  $T_* = (n +$



1)( $T_0 + b_0 t_0$ ) определяет длину периода соответствующего решения. Параметр  $\sigma_0$  задает левую границу начального отрезка для уравнения (3) (рассматривается начальный временной отрезок  $[-\sigma_0; 0]$ ).

Пусть данная система имеет начальные условия:

$$(y_1, \dots, y_{m-1}) \Big|_{t=-\sigma_0} = (z_1, \dots, z_{m-1}). \quad (12)$$

Рассмотрим отображение из  $\mathbb{R}^{m-1}$  в  $\mathbb{R}^{m-1}$ :

$$z \rightarrow \Phi(z) = (y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z)) \Big|_{t=T_*-\sigma_0}. \quad (13)$$

Для данного отображения в работе [25] доказана теорема о соответствии его экспоненциально устойчивой или дихотомичной неподвижной точке  $z = z_*$  релаксационного цикла системы (6) при малых  $\varepsilon$ . Также в [25] показано, что при малых  $d$  отображение (13) имеет как минимум  $m$  экспоненциально устойчивых неподвижных точек, что соответствует наличию  $m$  экспоненциально орбитально устойчивых пространственно неоднородных циклов (автоволн) у системы, описывающей динамику нейронной цепи (отметим также, что система (6) имеет и устойчивый однородный цикл  $u_1 = u_2 = \dots = u_m$ ). Наличие данных режимов интерпретируется как наблюдение феномена буферности в данной нейросетевой модели.

В то же время, интерес представляют следующие проблемы, связанные с изучением особенностей динамики модели нейронной цепи (6) и соответствующего отображения (13):

1. Проблема существования в системе (6) других автоволновых режимов, отличных от описанных в [25].
2. Проблема выявления областей устойчивости выявленных автоволновых режимов.
3. Сценарии потери устойчивости неподвижных точек отображения (13) при изменении коэффициента диффузии.

В следующем разделе будет предложено описание вычислительных экспериментов, направленных на изучение отмеченных проблем.

## 3.2 Численное моделирование динамики нейронной сети

В данном разделе будут описаны вычислительные эксперименты, направленные на изучение особенностей динамики нейронных сетей рассмотренного выше вида (сети на основе импульсной модели нейрона и цепь нейронов на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием).

### 3.2.1 Анализ процессов синхронизации в паре диффузионно связанных нейронов

В ходе вычислительного эксперимента рассматривается пара диффузионно связанных осцилляторов, модель которых основана на уравнении с запаздыванием (описанная выше импульсная модель нейрона). Для исследования представленной системы уравнений, описывающих динамику нейронных сетей, использовался явный метод Эйлера для уравнения с запаздыванием с постоянным шагом, выбор шага осуществлялся с использованием критерия Рунге (для заданной погрешности). Исследуется система из двух нейронов, состояние которых описывается парой  $(u_1(t), u_2(t))$  (значения мембранных потенциалов двух нейронов). Функции  $(u_1(t), u_2(t))$  рассматриваются на некоторой решетке: единичный временной отрезок разбивается на  $m$  одинаковых отрезков узлами с шагом  $h = \frac{1}{m}$ , набор значений  $(u_1(t), u_2(t))$  в рассматриваемых узлах разбиения отражает состояние мембранного потенциала соответственно первого и второго нейрона на отрезке длиной 1.

При анализе сети с моделью взаимодействия на основе электрического синапса очередные значения состояния системы пересчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1^{k+1} &= u_k + h(\lambda(-1 - f_{Na}(u_1^k) + f_K(u_1^{k+1}))u_1^k + d(u_2^k - u_1^k)), \\ u_2^{k+1} &= u_k + h(\lambda(-1 - f_{Na}(u_2^k) + f_K(u_2^{k+1}))u_2^k + d(u_1^k - u_2^k)), \end{aligned} \quad (14)$$

(индексы рассматриваются по модулю  $m$ ). Данные рекуррентные соотношения можно рассматривать как дискретный аналог исходной системы уравнений.

Проводимый над дискретной моделью нейронной сети вычислительный эксперимент можно условно разделить на два этапа.

1. На первом этапе эксперимента нейроны с одинаковыми наборами параметров и начальными функциями предварительно рассматривались изолированно (без воздействия друг на друга) в течение времени  $t \in [0, t_0]$ . Функционирование нейронов в течение этого временного промежутка описывается следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} u_1^{k+1} &= u_k + \lambda(-1 - f_{Na}(u_1^k) + f_K(u_1^{k+1}))u_1^k, \\ u_2^{k+1} &= u_k + \lambda(-1 - f_{Na}(u_2^k) + f_K(u_2^{k+1}))u_2^k. \end{aligned} \quad (15)$$

2. На втором этапе вычислительного эксперимента в момент времени  $t_0$  состояние первого нейрона подвергается малому возмущению (к значениям  $u_1^t$  прибавляется малое значение  $\delta(t)$ ), синаптическая связь активизируется (нейроны объединяются в сеть) и в дальнейшем в период времени  $[t_0, T]$  рассматривается система из двух нейронов. Для нейронных сетей на данном этапе эксперимента исследовался вопрос синхронизации нейронов (сходимости к нулю разности их мембранных потенциалов). В качестве критерия синхронизации рассматривалось условие  $\max_{t \in [T-\tau, T]} |u_1(t) - u_2(t)| < \varepsilon$ .

Рассматривались сети из двух однотипных нейронов: параметр  $\lambda$  и функции  $f_{Na}$  и  $f_K$  для данных нейронов выбирались одинаковыми. В ходе вычислительного эксперимента значение параметра  $\lambda$  выбиралось равным 3 и 4, при моделировании в соответствии с отмеченными в разделе 1 условиями функции  $f_{Na}$  и  $f_K$  рассматривались следующего вида:  $f_K(u) = 3e^{-u^2}$ ,  $f_{Na}(u) = e^{-u^2}$ .

Начальное состояние системы задается следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1^k &\equiv \varphi_1(-1 + kh), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \\ u_2^k &\equiv \varphi_2(-1 + kh), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (16)$$

В качестве  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в соответствии с условиями (6) из предыдущего раздела рассматривались константы и функции вида  $\varphi_i(t) = Ae^{Bt}$  для значений  $A \in (0, 0.25)$ ,  $B \in (0, 0.2)$ . В ходе анализа сети с моделью взаимодействия на основе электрического синапса значение параметра  $d$  (коэффициента воздействия одного нейрона на другой) в выбиралось в диапазоне  $d \in (0, 5]$  (при этом воздействие в рассматриваемой модели предполагается симметричным).

Численный анализ рассмотренной нейронной сети (пары нейронов) с диффузной связью (модель взаимодействия на основе электрического синапса) позволил выявить особенности происходящих в данной сети процессов при различных значениях коэффициента диффузии (параметра  $d$ ).

При больших значениях параметра  $d$  ( $d > 0.43$  для  $\lambda = 3$ ) наблюдалась синхронизация мембранных потенциалов взаимодействующих нейронов, при этом время синхронизации уменьшалось с ростом  $d$ . При значениях  $d > 1$  синхронизация нейронов отмечалась и при больших возмущениях (рассматривались в том числе нейроны, состояние которых в момент времени  $t_0$  задавалось соотношением  $u_2(t) = u_1(t - T^*/2)$ , где  $T^*$  — период установившихся колебаний мембранного потенциала изолированного нейрона-автогенератора  $u_1(t)$ ; для отмеченных в разделе 4 параметров системы значение  $T^* \approx 20$ ).

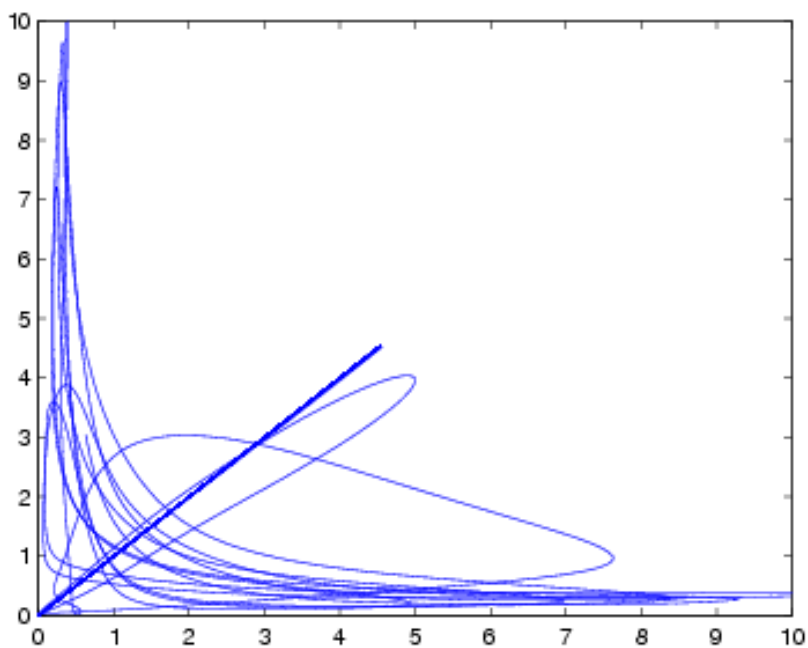


Рис. 3.2: Синхронизация нейронов при большом значении коэффициента воздействия ( $d = 0,45$ )

На рисунке 3.2 приведен характер поведения (траектория) пары взаимодействующих для рассмотренного выше случая. Синхронизации нейронов на диаграмме со-

ответствует прямолинейный участок вдоль биссектрисы угла между координатными осями.

При значениях величины синаптической связи  $d < 0,43$  синхронизация нейронов в течение рассматриваемого промежутка времени не наступала (в том числе при увеличении длины промежутка до  $T = 10^3 T^*$ ).

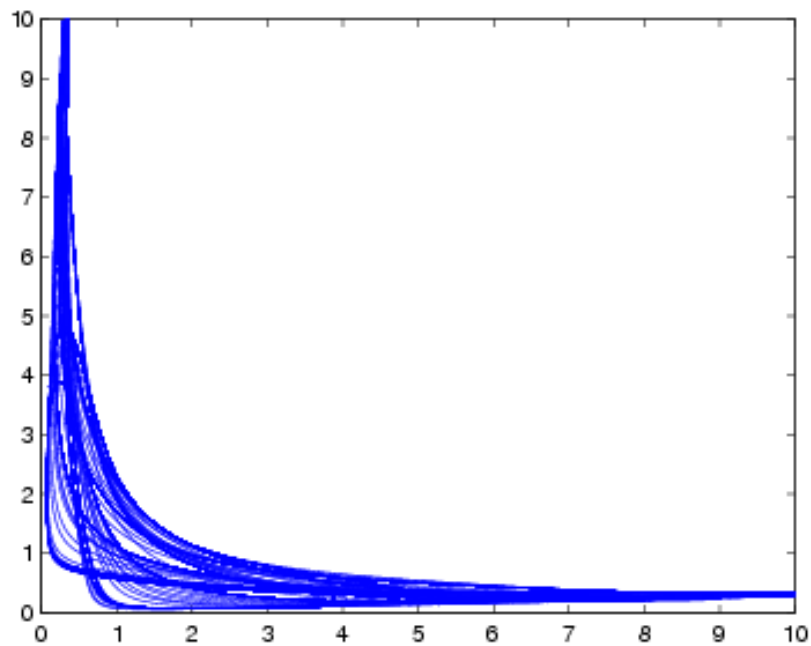


Рис. 3.3: Траектория системы взаимодействующих нейронов при малой величине диффузной связи

В этом случае при некоторых значениях параметров устанавливалась периодическая динамика вектора состояния нейронной сети (пары значений текущих мембранных потенциалов  $(u_1(t), u_2(t))$ ). При этом для значений  $d \in (0, 25; 0.42)$  возникали сложные колебательные режимы, пример которых приведен на рисунке 3.3. Для малых значений коэффициента воздействия ( $d < 0,1$ ) отмечены процессы десинхронизации нейронной активности в нейронной сети при незначительных возмущениях текущего состояния одного из нейронов.

Вопрос синхронизации в сети с отмеченными типами взаимодействия рассматривался также при увеличении параметра скорости восстановления мембранного по-

тенциала ( $\lambda$ ). Для сетей с диффузионным взаимодействием отмечено уменьшение порогового значения коэффициента диффузионной связи ( $d$ ), начиная с которого наблюдалась устойчивая синхронизация нейронов сети (так для параметра  $\lambda = 3,25$  синхронизация нейронов наблюдалась при  $d > 0,25$ , а для  $\lambda = 3,5$  синхронизация отмечена уже при  $d > 0,17$ ).

Отметим, что во второй главе аналогичные процессы синхронизации были отмечены для дискретных моделей нейронных сетей на основе формального нейрона Мак-Каллока–Питтса с периодической динамикой при одностороннем воздействии сети-передатчика (генератора) на сеть-приемник.

Приведенные выше результаты вычислительного эксперимента позволяют сделать следующие выводы:

1. Выявлены режимы синхронизации взаимодействующих нейронов, связанных на основе электрического синапса: численно установлено наличие параметров, при которых динамика состояния мембранного потенциала одного нейрона повторяет аналогичную динамику вектора состояния второго нейрона рассматриваемой сети. С учетом отмеченного в [37, 61] соответствия импульсной модели нейрона биологическому прототипу, можно с высокой степенью биологической адекватности интерпретировать процессы синхронизации нейронных сетей как образование ансамблей синхронно работающих нейронов. Накопленные во второй половине XX века данные о нейрофизиологических механизмах функционирования головного мозга и роли данных механизмов в когнитивных процессах [1, 7, 57] позволяют интерпретировать выявленные для рассматриваемых в работе нейронных сетей процессы синхронизации как адекватный аналог процессам запоминания в биологических нейронных сетях (нервной системе).
2. Рассмотрены особенности динамики пары взаимодействующих нейронов для случаев слабой синаптической связи: отмечена возможная нерегулярность (непериодичность) в динамике нейронов для определенных параметров, что позволяет предположить возможное наличие аналогичных сложных режимов функционирования естественных (биологических) нервных систем.
3. Отмечена десинхронизация импульсной активности пары нейронов при малых

значениях коэффициента синаптического воздействия, что в соответствии с [7] интерпретируется как распад нейронного ансамбля при ослаблении взаимодействия и моделирует процесс забывания в такого рода структурах.

### 3.2.2 Анализ волновых процессов в нейронной цепи

В данном разделе будут описаны вычислительные эксперименты, направленные на изучение отмеченных выше вопросов о структуре, устойчивости и особенностях потери устойчивости волновых процессов в нейронной сети на основе модели с двумя запаздываниями.

#### Численное моделирование отображения

Рассмотрим модель цепи из  $m = 4$  нейронов-осцилляторов. Как уже было отмечено выше, анализ особенностей динамики данной системы (выявление и анализ автоволновых режимов) сводится к изучению решений соответствующего уравнения (6) для рассогласований  $(y_1, y_2, y_3)$  и динамики отображения (13).

Задача численного моделирования отображения (13) предполагает реализацию алгоритма вычисления значения  $\Phi(z)$  по заданному начальному значению  $z$ . Это предполагает численное решение системы (6) с условиями (7) на промежутке  $[-\sigma_0, T_* - \sigma_0]$ .

Отметим, что замены, обратные (4) и (5), сводят уравнение (6) к исходному виду:

$$\dot{u}_j = d[u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}]. \quad (17)$$

Замена  $u(t) = w(dt)$  сводит данную систему к виду

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -w_1 + w_2, \\ \dot{w}_j &= w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}, \quad j = 2, \dots, m-1, \\ \dot{w}_m &= w_{m-1} - w_m. \end{aligned} \quad (18)$$

При этом несложно убедиться в том, что

$$y_j(t) = \frac{x_{j+1}(t) - x_j(t)}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon(\ln u_{j+1}(t) - \ln u_j(t))}{\varepsilon} = \ln \frac{u_{j+1}(t)}{u_j(t)} = \ln \frac{w_{j+1}(dt)}{w_j(dt)}. \quad (19)$$

Систему (11) перепишем в следующем виде:

$$\dot{w} = Dw, \quad (20)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Собственные значения данной матрицы равны  $(-(2 + \sqrt{2}), -2, -(2 - \sqrt{2}), 0)$ . Им соответствуют собственные вектора:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -(1 + \sqrt{2}) \\ 1 + \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \\ -(1 + \sqrt{2}) \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Соответственно, общее решение системы (13) выглядит так:

$$\begin{aligned} w(t) &= C_1 \exp(-(2 + \sqrt{2})t)v_1 + C_2 \exp(-2t)v_2 + C_3 \exp(-(2 - \sqrt{2})t)v_3 + C_4 v_4 = \\ &= C_4(\alpha_1 \exp(-(2 + \sqrt{2})t)v_1 + \alpha_2 \exp(-2t)v_2 + \alpha_3 \exp(-(2 - \sqrt{2})t)v_3 + v_4). \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом соотношения (12) получаем следующее общее решение системы (6):

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \ln \frac{-\alpha_1 \exp(-(2 + \sqrt{2})dt)(1 + \sqrt{2}) - \alpha_2 \exp(-2dt) + \alpha_3 \exp(-(2 - \sqrt{2})dt) + 1}{\alpha_1 \exp(-(2 + \sqrt{2})dt) + \alpha_2 \exp(-2dt) + \alpha_3 \exp(-(2 - \sqrt{2})dt)(1 + \sqrt{2}) + 1}, \\ y_2(t) &= \ln \frac{\alpha_1 \exp(-(2 + \sqrt{2})dt)(1 + \sqrt{2}) - \alpha_2 \exp(-2dt) - \alpha_3 \exp(-(2 - \sqrt{2})dt) + 1}{-\alpha_1 \exp(-(2 + \sqrt{2})dt)(1 + \sqrt{2}) - \alpha_2 \exp(-2dt) + \alpha_3 \exp(-(2 - \sqrt{2})dt) + 1}, \\ y_3(t) &= \ln \frac{-\alpha_1 \exp(-(2 + \sqrt{2})dt) + \alpha_2 \exp(-2dt) - \alpha_3 \exp(-(2 - \sqrt{2})dt)(1 + \sqrt{2}) + 1}{\alpha_1 \exp(-(2 + \sqrt{2})dt)(1 + \sqrt{2}) - \alpha_2 \exp(-2dt) - \alpha_3 \exp(-(2 - \sqrt{2})dt) + 1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Параметры  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  вычисляем для заданных значений начального состояния

$$y(0) = y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0)^T. \quad (25)$$

Подставляя  $t = 0$  и условие (18) в систему (17), находим  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2} + \exp(y_1^0))\alpha_1 + (1 + \exp(y_1^0))\alpha_2 + ((1 + \sqrt{2}) \exp(y_1^0))\alpha_3 + (\exp(y_1^0) - 1) &= 0, \\ (1 + \sqrt{2})(1 + \exp(y_2^0))\alpha_1 + (\exp(y_2^0) - 1)\alpha_2 - (1 + \exp(y_2^0))\alpha_3 + (1 - \exp(y_2^0)) &= 0, \\ -(1 + (1 + \sqrt{2})(\exp(y_3^0)))\alpha_1 + (1 + \exp(y_3^0))\alpha_2 + (\exp(y_3^0) - 1 - \sqrt{2})\alpha_3 + (1 - \exp(y_3^0)) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$



Далее строим решение системы (13) с необходимыми начальными условиями  $y^0$  в виде (17) при вычисленных значениях коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Опишем алгоритм вычисления значения  $\Phi(z)$  для заданного аргумента  $z$ :

1. Разбиваем промежуток  $[-\sigma_0, T_* - \sigma_0]$  на интервалы точками  $kT_0, h + kT_0, t_0 + kT_0, t_0 + h + kT_0, 1 + kT_0, 1 + t_0 + kT_0$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ).
2. Начальное значение при  $t = -\sigma_0$  (в левой границе первого интервала) равно  $z$ .
3. На каждом из полученных интервалов строим решение по формуле (17), находя коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  из системы (19) по начальному значению в левой границе соответствующего интервала и выбирая в качестве нулевого значения времени левую границу соответствующего интервала. Вычисляем значение построенного решения в правой границе интервала, находим начальное значение для следующего интервала:
  - если правой границей интервала служит точка вида  $kT_0$  или  $t_0 + kT_0$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), то начальным значением на следующем интервале является значение построенного решения в границе текущего интервала; значение в точке  $kT_0$  (или  $t_0 + kT_0$ ) запоминается для дальнейшего пересчета состояний по формулам (7);
  - если правой границей интервала служит точка вида  $h + kT_0, t_0 + h + kT_0, 1 + kT_0, 1 + t_0 + kT_0$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), то начальное значение на следующем интервале строится по формулам (7) для соответствующего значения правой границы.
4. Значение  $\Phi(z)$  вычисляется как значение решения, построенного на последнем интервале, в точке  $T_* - \sigma_0$  (правой границе последнего интервала).

### Выделение устойчивых неподвижных точек

Система (6), описывающая динамику цепи диффузионно связанных нейроподобных осцилляторов, имеет очевидный синхронный колебательный режим  $u_1(t) = u_2(t) = \dots = u_m(t) = u_*(t)$ , где  $u_*(t)$  — решение уравнения (2), соответствующее автоколебательному режиму отдельного нейрона. Помимо этого в работе [25] показано, что в

системе (6) при малых значениях коэффициента диффузии (параметра  $d$ ) существуют еще  $m$  устойчивых колебательных режимов, соответствующих  $m$  неподвижным точкам отображения (13). Также в [25] приводится асимптотика данных неподвижных точек в зависимости от значений параметров системы.

Для численного нахождения неподвижных точек была проведена серия вычислительных экспериментов по следующему плану:

1. Формировалась случайная (псевдослучайная) выборка из  $M$  начальных значений отображения в области, содержащей асимптотические оценки неподвижных точек, полученные в [25].
2. Для каждого из начальных значений  $z_i^0$  рассматривался его образ под действием  $q$  итераций отображения (13):  $z_i^q = \Phi^q(z_i^0)$ , где  $\Phi^0(z) = z$ ,  $\Phi^j(z) = \Phi(\Phi^{j-1}(z))$  при  $j \in \mathbb{N}$ . Численное моделирование отображения проводилось по изложенному выше алгоритму.
3. Множество значений  $z_i^q$  визуально разбивалось на кластеры, предположительно соответствующие неподвижным точкам отображения (так как основной задачей данного эксперимента был поиск устойчивых неподвижных точек, то полагалось, что начальные значения попадают в область притяжения одной из устойчивых неподвижных точек отображения (13), а в случае их экспоненциальной устойчивости образы  $z_i^q$  выбранных начальных значений будут образовывать соответствующие кластеры).
4. Из каждого выявленного кластера выбиралась одна точка, для которой проводился численный анализ сходимости последовательности итераций отображения (13) с выбранной начальной точкой  $z_i^q$ . Для этого рассматривалась последовательность  $z_i^{q+s}$  ( $s \in \mathbb{N}$ ), в качестве критерия сходимости к неподвижной точке рассматривалось условие  $|z_i^{q+s} - z_i^{q+s+r}| < \varepsilon_0$  при всех  $1 \leq r \leq S$  для заданного  $\varepsilon_0 \ll 1$  и выбранных фиксированных параметров (итераций)  $s$  и  $S$ .

Серия вычислительных экспериментов проводилась для различных значений параметров  $a_0$  и  $b_0$  системы (6) (для различных классов параметров из [25]) при фиксированном  $\lambda = 130$ . Параметры  $n$  и  $h$  выбирались в зависимости от остальных

параметров системы для обеспечения существования устойчивого bursting-режима составляющих цепь осцилляторов (например,  $n = 5$ ,  $h = 1/26$  при  $a_0 = 2$ ,  $b_0 = 4.2$ ). Значения коэффициента диффузии  $d$  выбирались из отрезка  $[0.05; 1.0]$ . Параметры итерационного процесса для набора начальных состояний:  $M \in [10^2; 10^4]$ ,  $q \in [1; 20]$ ,  $\max(s) \in [10; 300]$ ,  $S = 10$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-5}$ . Для проведения вычислительного эксперимента использовался разработанный автором пакет программ для среды MATLAB R2012b.

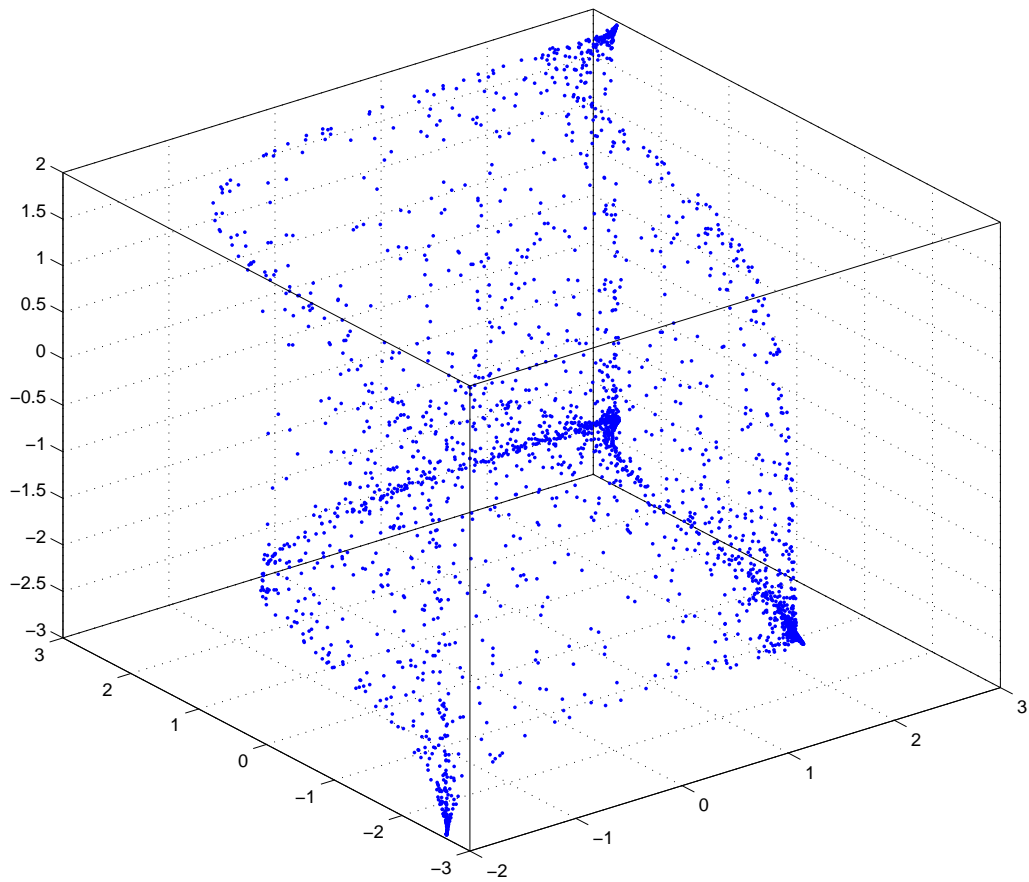


Рис. 3.4: Начальный этап итерационного процесса для поиска устойчивых неподвижных точек

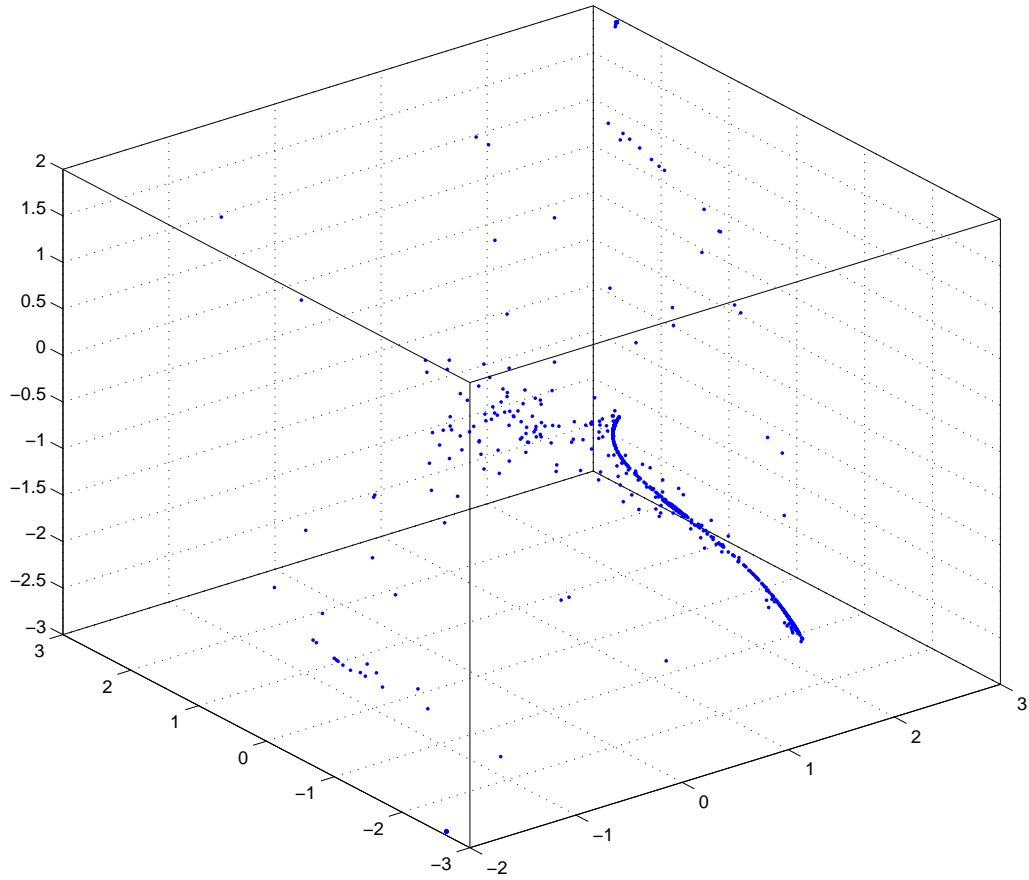


Рис. 3.5: Выделение областей устойчивости в итеративном процессе

На рисунках 3.4, 3.5, 3.6 показан процесс сходимости случайного облака точек (начальных значений) к неподвижным точкам отображения (13) (соответственно, после 1, 5 и 10 итераций).

Выделим некоторые результаты описанных численных экспериментов для сети из 4 нейронов.

1. При малых значениях коэффициента диффузии (для описанных выше параметров:  $d < 0.31$ ) численно подтверждено наличие устойчивых состояний равновесия отображения (13), описанных в работе [25]: нулевое состояние, соответствующее синхронному режиму динамики цепи нейронов (6), а также четыре состояния равновесия с описанной асимптотикой, разбивающиеся на пары симметричных (состояния  $z^1 = (z_1^1, \dots, z_{m-1}^1)$  и  $z^2 = (z_1^2, \dots, z_{m-1}^2)$  будем называть

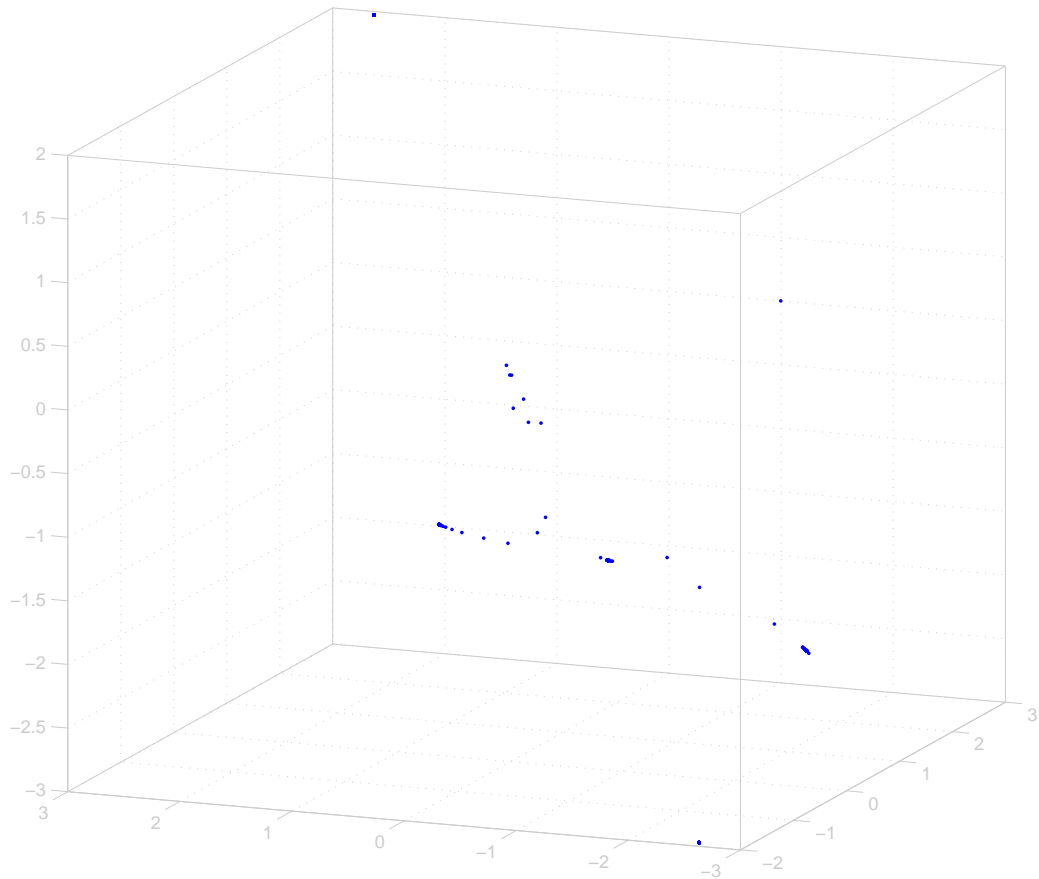


Рис. 3.6: Сходимость случайного облака точек к неподвижным точкам в итеративном процессе

симметричными, если  $z_i^2 = -z_{m-i}^1$ ,  $z_i^1 = -z_{m-i}^2$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ , — фактически, симметрия здесь соответствует рассмотрению той же нейронной цепи, только с обратной нумерацией входящих в неё нейронов-осцилляторов).

2. Дополнительно при тех же значениях коэффициента  $d$  выявлено еще одно устойчивое самосимметричное состояние равновесия отображения (13) вида  $(c, 0, -c)$  (при  $c > 0$ ).
3. Для значений  $0.31 < d < 0.448$  количество состояний равновесия сократилось на два: остается устойчивое нулевое состояние равновесия, два симметричных состояния равновесия и одно самосимметричное (пункт 2).

4. Для значений  $0.448 < d < 0.565$  остается устойчивое нулевое состояние равновесия и два симметричных состояния равновесия (из пункта 1).
5. При коэффициенте диффузии  $d > 0.565$  отображение (13) имеет только нулевое устойчивое состояние равновесия.

Среди полученных результатов особо отметим выявление нового состояния равновесия отображения (13) и численное подтверждение его устойчивости, что соответствует новому выявленному устойчивому режиму в динамике системы (6).

### Области устойчивости и сценарии потери устойчивости

Наличие различного количества неподвижных точек отображения (13) для рассмотренных в предыдущем разделе диапазонов значений коэффициента диффузии позволяют поставить задачу изучения расположения данных точек при изменении параметра  $d$ , устойчивости данных точек, а также особенностей потери их устойчивости, то может интерпретироваться как разрушение соответствующих колебательных режимов в нейронной сети. Так как некоторые особые точки разбиваются на пары симметричных (в силу симметрии модели нейронной сети относительно смены порядка нумерации нейронов), то также можно предположить, что Для численного изучения отмеченных проблем проводится серия вычислительных экспериментов следующей структуры:

1. Выделение набора неподвижных точек для фиксированного значения коэффициента диффузии  $d_1$  (используется алгоритм, описанный в предыдущем разделе):  $Z_1^0, Z_2^0, \dots, Z_K^0$ .
2. Последовательно рассматриваются значения коэффициента  $d$  из диапазона от  $d_1$  до некоторого заданного  $d_2$  с фиксированным шагом  $h_d$ . При каждом таком значении параметра  $d$  для каждой текущей неподвижной точки  $Z_k^i$  ( $k = 1, \dots, K$ ) рассматривается последовательность из  $M$  итераций отображения (13). Таким образом, для последовательности значений коэффициента диффузии  $d^i$  ( $d^0 = d_1, d^{i+1} = d^i + h_d$ ) рассматриваются последовательности точек  $Z_k^i$  (где  $k = 1, \dots, K$ ; при этом  $Z_k^{i+1} = \Phi^M(Z_k^{i+1})$ ).

3. Для каждой последовательности  $Z_k^i$  условие  $|Z_k^{i+1} - Z_k^i| \leq \varepsilon_1$  для некоторого  $i$  интерпретируется как сохранение устойчивости неподвижной точки при изменении  $d = d^i \rightarrow d^{i+1}$  (полагается, что в случае сохранения устойчивости стационарная точка для предыдущего рассмотренного значения  $d = d^i$  попадает в область притяжения некоторой стационарной точки для текущего  $d = d^{i+1}$ ). Соответственно, выполнение условия  $|Z_k^{i+1} - Z_k^i| > \varepsilon_1$  расценивается как потеря устойчивости неподвижной точки (в этом случае представляет интерес дальнейшее поведение последовательности  $Z_k^i$ ).

Вычислительные эксперименты по изучению расположения устойчивых неподвижных точек отображения (13) и потери их устойчивости при изменении коэффициента диффузии проводились при тех же параметрах, что и в ходе поиска неподвижных точек. Параметр  $h_d$  выбирался в промежутке  $[10^{-5}; 10^{-2}]$ , точность при оценке устойчивости неподвижной точки при пересчете коэффициента диффузии:  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ , количество итераций для сходимости к новой неподвижной точке:  $K \in [10; 100]$ .

Проведенные по описанному алгоритму вычислительные эксперименты для нейронной сети (цепи) на 4 нейронах и, соответственно, 3 рассогласованиях между ними дали следующие основные результаты:

1. Для значений коэффициента диффузии из интервала  $d \in (0.1; 0.31)$  отображение (13) имеет 6 устойчивых неподвижных точек: нулевую точку (соответствует синхронному режиму), самосимметричную (соответствует синхронной динамике средних нейронов), пару симметричных точек, соответствующих рассогласованиям одного знака при переходе от нейрона к нейрону, а также еще одну пару симметричных точек, соответствующих рассогласованиям разных знаков. В районе  $d = 0.309$  последняя пара неподвижных точек теряет устойчивость, при этом данные неподвижные точки попадают в область притяжения самосимметричной неподвижной точки отображения.
2. В ходе дальнейшего увеличения коэффициента диффузии при  $d = 0.448$  теряет устойчивость самосимметричная неподвижная точка, окрестности данной точки попадают в область притяжения устойчивой нулевой неподвижной точки.
3. При  $d = 0.565$  теряет устойчивость оставшаяся пара неподвижных точек (со-

ответствующая рассогласованиям одного знака), точки в окрестностях данных неподвижных точек оказываются в области притяжения нулевой неподвижной точки, которая остается единственным устойчивым состоянием равновесия.

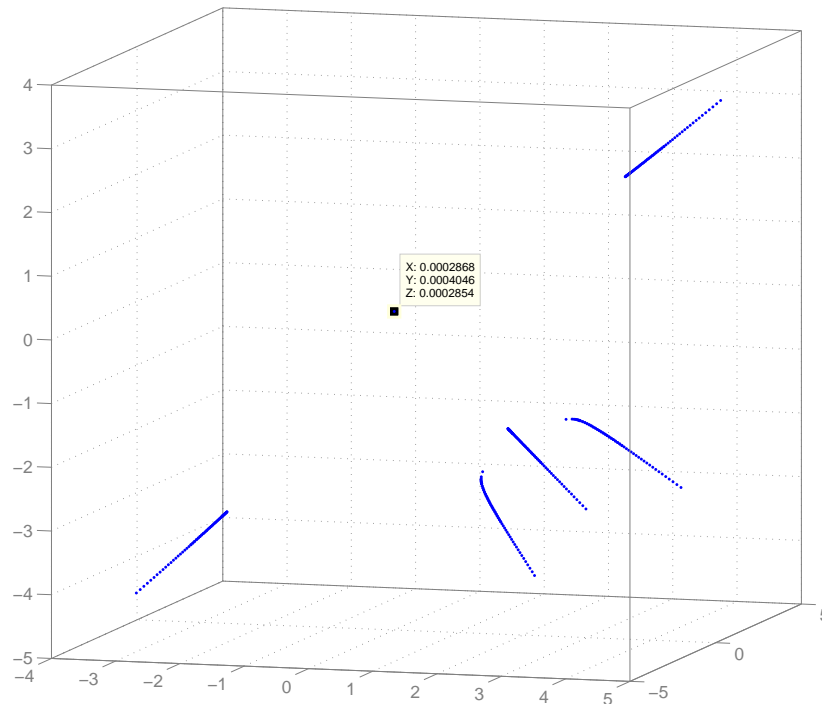


Рис. 3.7: Траектории неподвижных точек отображения ( $0.25 < d < 0.31$ )

На рисунке 3.7 показаны траектории неподвижных точек отображения при изменении коэффициента диффузии (результат описанного выше вычислительного эксперимента при  $0.25 < d < 0.31$ ): нулевой неподвижной точки, самосимметричной точки (прямолинейный точечный участок в правой нижней области графика), пары симметричных неподвижных точек с рассогласованиями разных знаков и пары симметричных неподвижных точек с рассогласованиями одного знака (прямолинейные точечные участки в левой нижней и правой верхней области графика).



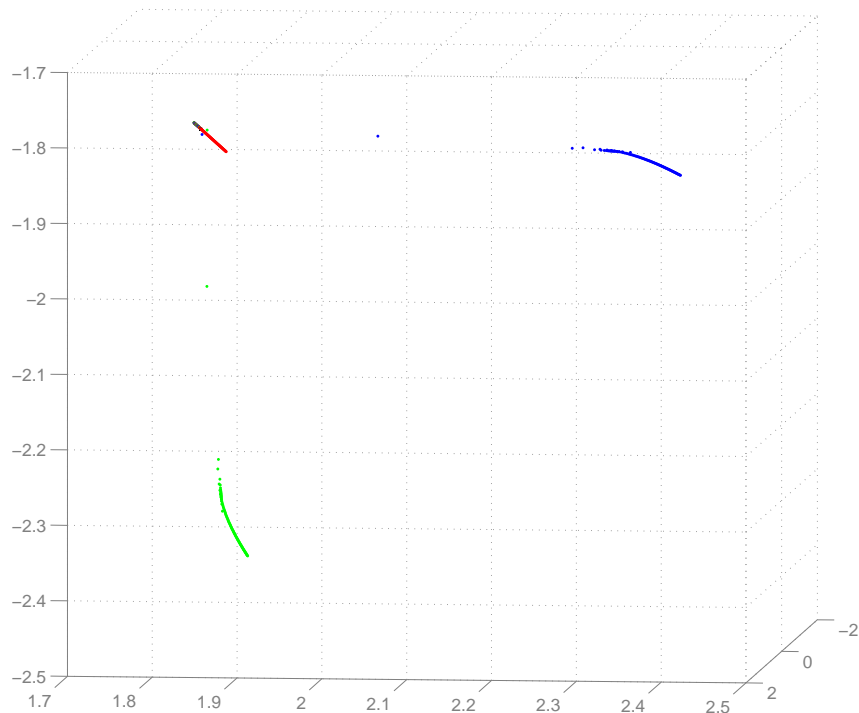


Рис. 3.8: Потеря устойчивости неподвижными точками ( $0.3 < d < 0.32$ )

Пример процесса потери устойчивости парой симметричных неподвижных точек с рассогласованиями разных знаков показан на рисунке 3.7: указанные особые точки теряют устойчивость при переходе через  $d = 0.309$ , попадая при этом в область асимптотической устойчивости самосимметричной неподвижной точки (ее прямолинейная траектория заметна в левой верхней области графика).

Таким образом, с ростом коэффициента диффузии при переходе через отдельные критические точки происходит разрушение устоявшегося периодического режима импульсной активности и качественная перестройка динамики рассматриваемой нейронной цепи (переход к новому устойчивому периодическому режиму).

## Заключение

В работе рассмотрены нейронные сети различной структуры. Численный анализ нейронной сети на основе простой дискретной модели формального нейрона показал наличие различных режимов функционирования, в том числе и возникновение хаотической динамики нейронной сети при определенных значениях параметров. Исследование взаимодействующих нейронных сетей позволило установить наличие параметров, при которых наблюдается синхронизация нейронных сетей (в том числе и хаотической динамикой), что влечет прямые биологические аналогии, а также рассмотреть процессы десинхронизации взаимодействующих систем.

Для импульсной модели нейрона основные результаты получены в ходе анализа процессов, происходящих в нейронной сети (цепи) из нескольких нейронов, модель которых основана на уравнении с двумя запаздываниями: для таких нейроподобных элементов характерна пачечная генерация высокоамплитудных импульсов (так называемый *bursting-эффект*), а в сетях из связанных элементов такого типа возможно существование нескольких устойчивых режимов волновой активности (явление буферности). Численный анализ таких нейронных сетей позволил выявить новые устойчивые волновые режимы (сходимость к одному из таких режимов может быть интерпретирована как процесс запоминания в нейросетевых структурах), а также описать процессы потери устойчивости данных режимов (интерпретируемые как процесс забывания). Таким образом, анализ нейронных сетей различной структуры со сложной динамикой позволил сделать вывод о возможности моделирования когнитивных процессов, происходящих в нервной системе.

В ходе исследования получены следующие основные результаты:

1. Отмечено существование устойчивых периодических режимов в нейронной сети на основе формального нейрона, доказана неустойчивость нулевого состояния равновесия в такой нейросетевой модели.
2. Выявлены параметры нейронной сети на основе формальной модели нейрона, при которых динамика сети обладает свойствами детерминированного хаоса.
3. Отмечено наличие порогового значения коэффициента воздействия дискретного генератора импульсов на базе нейронной сети на приемник, разделяющего

случаи синхронизации и десинхронизации в системе.

4. Выделены режимы синхронизации в паре нейронов, связанных электрическими синапсами, а также отмечены явления потери устойчивости синхронного режима в такой нейронной сети.
5. Выявлены устойчивые режимы волновой активности в цепи диффузионно связанных нейроподобных элементов, модель которых основана на дифференциальном уравнении с двумя запаздываниями.
6. Для той же модели нейронной цепи выделены области устойчивости соответствующих режимов волновой активности в зависимости от величины коэффициента диффузии.

# Литература

- [1] *Абарбанель, Г. Д.* Синхронизация в нейронных ансамблях / *Г. Д. Абарбанель, М. И. Рабинович, А. Сельверстон* // *Успехи физических наук*, 1996.— Т. 116, № 4. — С. 363–390.
- [2] *Андреев, Ю. В.* Динамические системы с хаосом как среда для записи, хранения и обработки информации / *Ю. В. Андреев, Ю. Л. Бельский, А. С. Дмитриев, Д. А. Куминов* // *Известия ВУЗов, Радиофизика*, 1994, т.37, с.1003–1019.
- [3] *Бельский, Ю. Л.* Передача информации с помощью детерминированного хаоса / *Ю. Л. Бельский, А. С. Дмитриев* // *Радиотехника и электроника*, 1993, Т.38, №7, с.1310–1315.
- [4] *Бендерская, Е. Н.* Применение хаотической нейронной сети для решения задач кластеризации / *Е. Н. Бендерская, С. В. Жукова* // *Сборник докладов второй всероссийской конференции «Управление и информационные технологии УИТ-2004»*, том 1, Пятигорск, 2004 г.- с. 306-309.
- [5] *Бендерская, Е. Н.* Обработка текстовой информации с использованием хаотической нейронной сети / *Е. Н. Бендерская, С. В. Жукова* // *Материалы Всероссийской научной конференции «Квантитативная лингвистика: исследования и модели (КЛИМ-2005)»*, Новосибирск, 2005. — с. 271–282.
- [6] *Бехтерев, В. М.* Работа головного мозга в свете рефлексологии / *В. М. Бехтерев* — Л., 1926. — 99 с.
- [7] *Бехтерева, Н. П.* Здоровый и больной мозг человека / *Н. П. Бехтерева* — М.: Наука, 1980. — 208 с.

- [8] *Богомолов, Ю. В.* О хаотическом поведении одной модели нейронной сети / *Ю. В. Богомолов* // Моделирование и анализ информационных систем. Т.9, №2. Ярославль, 2003. С. 35–40.
- [9] *Богомолов, Ю. В.* О динамике одной модели нейронной сети / *Ю. В. Богомолов* // Современные проблемы математики и информатики Вып.6 — Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2004. С.87–96
- [10] *Богомолов, Ю. В.* Динамика одной модели нейронной сети / *Ю. В. Богомолов* // Нейроинформатика и ее приложения: Материалы XII Всероссийского семинара, Красноярск, 2004. С. 24-25
- [11] *Богомолов, Ю. В.* Синхронизация нейронных сетей с различной динамикой / *Ю. В. Богомолов* // «НЕЙРОИНФОРМАТИКА -2005», VII всероссийская научно-техническая конференция. Сб. науч. тр. В 2-х частях. Ч.2. М.: МИФИ, 2005. С. 11–16.
- [12] *Богомолов, Ю. В.* О синхронизации взаимодействующих нейронных сетей с различной динамикой / *Ю. В. Богомолов* // Современные проблемы математики и информатики Вып.7 /Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2005
- [13] *Богомолов, Ю. В.* О синхронизации сетей с различными типами взаимодействия / *Ю. В. Богомолов* // «НЕЙРОИНФОРМАТИКА-2006», VIII всероссийская научно-техническая конференция. Сб. науч. тр. В 3-х частях. Ч.3. М.: МИФИ, 2006. С. 30–38.
- [14] *Богомолов, Ю. В.* Хаотическая синхронизация нейронных сетей / *Ю. В. Богомолов* // Современные проблемы математики и информатики Вып.8 /Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2006
- [15] *Богомолов, Ю. В.* Об устойчивости модели нейрона на основе уравнения с запаздыванием / *Ю. В. Богомолов* // «НЕЙРОИНФОРМАТИКА -2007», IX всероссийская научно-техническая конференция. Сб. науч. тр. В 3-х частях. Ч.3. М.: МИФИ, 2007. С. 132–137.

- [16] *Богомолов, Ю. В.* Анализ устойчивости модели нейрона-автогенератора / *Ю. В. Богомолов* // «Математические методы в технике и технологиях». Материалы 20 международной научной конференции. Ярославль, 2007
- [17] *Богомолов, Ю. В.* Устойчивость одной модели нейрона на основе уравнения с запаздыванием / *Ю. В. Богомолов* // Модел. и анализ информ. систем., 2007, Т. 14, №2, С.27–29
- [18] *Богомолов, Ю. В.* Синхронизация в системе двух нейронов с диффузной связью / *Ю. В. Богомолов* // «НЕЙРОИНФОРМАТИКА -2008», X всероссийская научно-техническая конференция. Сб. науч. тр. В 3-х частях. М.: МИФИ, 2008
- [19] *Богомолов, Ю. В.* О синхронизации в нейронной сети на основе импульсной модели нейрона / *Ю. В. Богомолов* // Модел. и анализ информ. систем., 2008, Т. 15, №2, С.3–9
- [20] *Богомолов, Ю. В.* Об устойчивости состояния равновесия одной модели нейронной сети / *Ю. В. Богомолов* // Модел. и анализ информ. систем., 2014, Т. 21, №3, С.55–61
- [21] *Боннер, Р. Е.* Некоторые методы классификации / *Р. Е. Боннер* // Автоматический анализ изображений.— М.: Мир, 2002.— С. 205–234.
- [22] *Вапник, В. Н.* Теория распознавания образов / *В. Н. Вапник, А. Ф. Червоненкис* — М.:Наука, 1974. — 416 с.
- [23] *Галушкин, А. И.* Синтез многослойных систем распознавания образов / *А. И. Галушкин* — М.: Энергия, 1974. — 367 с.
- [24] *Глызин, С. Д.* Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа / *С. Д. Глызин, Е. О. Киселева* // Модел. и анализ информ. систем., 15:2 (2008), С.75–88
- [25] *Глызин, С. Д.* Дискретные автоволны в нейронных системах / *С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов* // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012, том 52, № 5, с. 840–858

- [26] *Глызин, С.Д.* Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 5. С. 684–701.
- [27] *Глызин, С.Д.* Релаксационные колебания электрически связанных нейроподобных осцилляторов с запаздыванием / *С.Д. Глызин* // Модел. и анализ информ. систем., 17:2 (2010), С.28–47
- [28] *Головко, В.А.* Нейросетевые методы обработки хаотических процессов / *В.А. Головко* // Научная сессия МИФИ–2005. VII всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика–2005»: Лекции по нейроинформатике. — М.: МИФИ, 2005. — С.43–91
- [29] *Головко, В.А.* Нейронные сети: обучение, организация и применение / *В.А. Головко, под ред. проф. А.И. Галушкина* — М.: ИПРЖР, 2001. — 256 с.
- [30] *Горбань, А.Н.* Обучение нейронных сетей / *А.Н. Горбань* — М.: СП ПараГраф. 1991. — 160 с.
- [31] *Гусельников, В.И.* Ритмическая активность головного мозга / *Гусельников, В.И., А.Я. Сутин* — М.: Изд. МГУ, 1968. — 252 с.
- [32] *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / *Б.П. Демидович* — М.: Наука, 1967. — 472 с.
- [33] *Джури, Э.* Инноры и устойчивость динамических систем / *Э. Джури* — М.: Наука, 1979г. — 304 с.
- [34] *Дударь, З.В.* Семантическая нейронная сеть, как формальный язык описания и обработки смысла текстов на естественном языке / *З.В. Дударь, Д.Е. Шуклин* // Радиоэлектроника и информатика. Х.: Изд-во ХТУРЭ, 2000. — No 3. С. 72-76.
- [35] *Ежов, А.А.* Нейрокомпьютинг и его применения в экономике и бизнесе / *А.А. Ежов, С.А. Шумский* — М.: МИФИ, 1998. — 222с.
- [36] *Ижикевич, Е.М.* О возможной роли хаоса в нейросистемах / *Е.М. Ижикевич, Г.Г. Малинецкий* — ДАН, 1992, т.326, №4, с.626–632

- [37] *Кащенко, С. А.* Исследование дифференциально-разностных уравнений, моделирующих импульсную активность нейрона / *С. А. Кащенко, В. В. Майоров* // Математическое моделирование. 1993, т.5. N 12, с. 13–25.
- [38] *Кащенко, С. А.* Исследование колебаний в кольцевых нейронных системах / *С. А. Кащенко, В. В. Майоров, И. Ю. Мышкин* // Докл. Российской АН, 1993. т. 333, N 5, с. 594.
- [39] *Кащенко, С. А.* Распространение волн в простейших кольцевых нейронных структурах / *С. А. Кащенко, В. В. Майоров, И. Ю. Мышкин* // Математическое моделирование, 1995, т. 7. N 12, с. 3–18.
- [40] *Кащенко, С. А.* Волновые образования в кольцевых нейронных системах / *С. А. Кащенко, В. В. Майоров, И. Ю. Мышкин* // Математическое моделирование, 1997, т. 9. N 3, с. 29–39.
- [41] *Кащенко, С. А.* Волновые структуры в кольцевых системах из однородных нейронных модулей / *С. А. Кащенко, В. В. Майоров* // Докл. Российской АН. 1995. Т. 342. N 3. С. 318–321.
- [42] *Кащенко, С. А.* Модели волновой памяти / *С. А. Кащенко, В. В. Майоров* — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. — 288 с.
- [43] *Князева, Е. Н.* Методы нелинейной динамики в когнитивной науке / *Е. Н. Князева* // Синергетика и психология. Тексты. Выпуск 3. Когнитивные процессы — М.: Когито-центр. 2004. С.29–48
- [44] *Комбс, А.* Сознание: Хаотическое и странно-аттракторное / *А. Комбс* // Синергетика и психология. Тексты. Выпуск 1. Методологические вопросы. — М.: Когито-центр. 2004. С.49–60
- [45] *Коновалов, Е. В.* Устойчивый колебательный режим в нейронной сети обобщенных нейронных автоматов-детекторов / *Е. В. Коновалов* // Модел. и анализ информ. систем., 14:2 (2007), С.30–35



- [46] *Короткин, А. А.* Классифицирующие свойства нейронов с альтернативными синапсами / *А. А. Короткин, А. В. Панкратов* // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль. 1997. Вып.4. С.118–123.
- [47] *Короткин, А. А.* Математические модели искусственных нейронных сетей. Учебное пособие / *А. А. Короткин* — Ярославль, ЯрГУ, 2000 — 54 с.
- [48] *Кохонен, Т.* Ассоциативная память / *Т. Кохонен* — М.: Мир, 1980. — 239 с.
- [49] *Кохонен, Т.* Ассоциативные запоминающие устройства / *Т. Кохонен* — М.: Мир, 1982. — 384 с.
- [50] *Кроновер, Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / *Р. М. Кроновер* — М.: Постмаркет, 2000. — 352 с.
- [51] *Кузнецов, С. П.* Динамический хаос (курс лекций) / *С. П. Кузнецов* — М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001. — 296 с.
- [52] *Лебедев, А. Н.* Расчет закономерностей зрительного восприятия по частотным характеристикам электроэнцефалограммы / *А. Н. Лебедев, В. А. Луцкий* // Эргономика. Труды ВНИИТЭ. 1972. Вып. 4. С. 95-134.
- [53] *Лебедев, А. Н.* Память человека, ее механизмы и границы / *А. Н. Лебедев* // Исследование памяти. М.: Наука, 1990. С. 104–118
- [54] *Лебедев, А. Н.* О нейрофизиологических основах восприятия и памяти / *А. Н. Лебедев* // Психологический журнал, 1992. — Т.13, №2. — С. 30–41.
- [55] *Ливанов, М. Н.* Пространственная организация процессов головного мозга / *М. Н. Ливанов* — М.: Наука, 1972. — 181 с.
- [56] *Ливанов, М. Н.* Пространственно-временная организация потенциалов и системная деятельность головного мозга. Избранные труды / *М. Н. Ливанов* — М.: Наука, 1989. — 400 с.
- [57] *Ливанов, М. Н.* Психологические аспекты феномена пространственной синхронизации потенциалов. / *М. Н. Ливанов, Н. Е. Свидерская* // Психол. журн. 1984. 5(5): 71–83.

- [58] *Лукьянов, А. В.* Схемотехническая модель цифрового нейрона, работающего со средним значением стохастического потока / *А. В. Лукьянов* // Микроэлектроника, 2001.— Т.30, №.1. — С.63–67.
- [59] *Лукьянов, А. В.* Поточковый нейрон с альтернативными синапсами / *А. В. Лукьянов* // Моделирование и анализ информационных систем. 2000. Т. 7, № 1. С. 6–15.
- [60] *Майоров, В. В.* Об одной модели функционирования нейронной сети / *В. В. Майоров, И. Ю. Мышкин* // Модел. динам. попул., Н.Новгород, 1990, С.70–78.
- [61] *Майоров, В. В.* Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием / *В. В. Майоров, И. Ю. Мышкин* // Математическое моделирование, 1990, т.2, №11, С. 64–76.
- [62] *Майоров, В. В.* Самоорганизация колебаний в кольцевой системе из однородных нейронных модулей. Часть 1. Модель нейронов и взаимодействия между ними / *В. В. Майоров* // Изв. вузов, Прикладная нелинейная динамика, т. 3, №4, 1999, с.87–96.
- [63] *Майоров, В. В.* Поправка к периоду решения уравнения, моделирующего динамику мембранного потенциала нейрона / *В. В. Майоров, М. Л. Мячин, И. В. Парамонов* // Модел. и анализ информ. систем., 2008. — Т. 15, № 2, С. 61–66
- [64] *Мак-Каллок, У.* Символическое изображение нейрона в виде некоторой логической функции / *У. Мак-Каллок* // В кн. Самоорганизующиеся системы. М., Мир, 1964, С.358–378.
- [65] *Маматов, Ю. А.* Поточковый нейрон на цифровых элементах / *Ю. А. Маматов, С. Ф. Булычев, А. К. Карлин, А. Н. Малков, Д. С. Папазов, Г. П. Штерн* — Нейрокомпьютер. 1993. — № 3,4. — С. 23–31.
- [66] *Маматов, Ю. А.* Цифровая реализация потокового нейрона / *Ю. А. Маматов, С. Ф. Булычев, А. К. Карлин и др.* // Радиотехника и электроника. 1995. №11. С.1652–1660

- [67] *Маматов, Ю. А.* Обучение потокового нейрона / *Ю. А. Маматов, Е. А. Тимофеев, Г. П. Штерн*— Нейрокомпьютер. 1995. — № 1,2. — С.5–8
- [68] *Маматов, Ю. А.* Схемотехнические модели построения потоковых нейронов на базе цифровой техники / *Ю. А. Маматов, С. Ф. Бульчев, А. К. Карлин, Е. А. Тимофеев, Г. П. Штерн* // Микроэлектроника, т.25, №1, 1996. — С.3–8
- [69] *Мелик-Гайказян, И. В.* Мелик-Гайказян Н.В., Тарасенко В.Ф. Методология моделирования нелинейной динамики сложных систем / *И. В. Мелик-Гайказян, Н. В. Мелик-Гайказян, В. Ф. Тарасенко* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 272 с.
- [70] *Минский, М.* Перцептроны / *М. Минский, С. Пейперт* — М.: Мир, 1971. — 264 с.
- [71] Нейрокомпьютеры в системах обработки сигналов. Кн. 9 / *Под ред. Ю. В. Гуляева и А. И. Галушкина* — М.: Радиотехника, 2003. — 224 с.
- [72] Нейронные сети: история развития теории. Кн.5: Учеб.пособие для вузов / *Под общей ред. А. И. Галушкина, Я. З. Цыпкина* — М.:ИПРЖР, 2001 — 840 с.
- [73] *Павлов, И. П.* Ответ физиолога психологам / *И. П. Павлов* — Полн. собр. соч. Т. 3, кн. 2. М-Л: Изд-во АН СССР, 1952.
- [74] *Престон, К.* Дафф Дж.Б., Левьяльди С. и др. Основы клеточной логики с приложениями к обработке изображений в медицине / *К. Престон, Дж. Б. Дафф, С. Левьяльди и др.* // Тр. Ин-та инж. по электротехн. и электронике. М., 1979. Т.67. №5. С.149–185
- [75] *Розенблат, Ф.* Принципы нейродинамики / *Ф. Розенблат* — М.: Мир, 1965, 480 с.
- [76] *Самарин, А. И.* Формирование сенсомоторных отношений при активном взаимодействии автономной системы с внешней средой / *А. И. Самарин* // Сб. научных трудов Всероссийской научно-технической конференции «Нейроинформатика – 99». Ч.2.М.: МИФИ. 1999. С.172–180.

- [77] *Тарасенко, Р. А.* Предварительная оценка качества обучающей выборки для нейронных сетей в задачах прогнозирования временных рядов / *Р. А. Тарасенко, В. А. Крисилов* // Труды Одесского политехнического университета, 2001. — Вып.1 (13) — С. 90–93.
- [78] *Терехов, С. А.* Вейвлеты и нейронные сети. Лекция для школы-семинара «Современные проблемы нейроинформатики» / *С. А. Терехов* — МИФИ, Москва, 2001.
- [79] *Терехов, С. А.* Лекции по теории и приложениям искусственных нейронных сетей / *С. А. Терехов* — Снежинск, 1994-1998.
- [80] *Терехов, С. А.* Нейронные сети в моделировании сложных инженерных систем / *С. А. Терехов, А. В. Квичанский, Н. Н. Федорова, Е. В. Диянкова, С. А. Диянкова, А. М. Чупрунов* // Научно-практическая конференция «Дни науки–2001», Озерск, 2001.
- [81] *Терехов, С. А.* К задаче заполнения пропусков в таблицах данных / *С. А. Терехов, Е. В. Диянкова* // VII Семинар «Нейроинформатика и ее приложения», Красноярск, 2000.
- [82] *Тимофеев, Е. А.* Моделирование нейрона, передающего информацию плотностью потока импульсов / *Е. А. Тимофеев* // Автоматика и телемеханика, 1997, №3, С. 190–199.
- [83] *Тимофеев, Е. А.* Состоятельная оценка энтропии мер и динамических систем / *Е. А. Тимофеев* // Матем. заметки, 77:6 (2005), С.903–916
- [84] *Тимофеев, Е. А.* Статистически оцениваемые инварианты мер / *Е. А. Тимофеев* // Алгебра и анализ, 17:3 (2005), 204–236
- [85] *Тимофеева, Н. Е.* Экономный алгоритм нахождения средних минимальных расстояний / *Н. Е. Тимофеева* // Модел. и анализ информ. систем., 14:3 (2007), С.50–52
- [86] *Уоссермен, Ф.* Нейрокомпьютерная техника: теория и практика / *Ф. Уоссермен* — М.: Мир, 1992. — 240 с.

- [87] *Федорова, Н. Н.* Нейросетевые аппроксимации поверхности отклика в задачах оптимизации сложных инженерных систем / *Н. Н. Федорова, С. А. Терехов* // Научная Сессия МИФИ-2002, Москва, 2002.
- [88] *Фриман, У. Дж.* Динамика мозга в восприятии и сознании: творческая роль хаоса / *У. Дж. Фриман* // Синергетика и психология. Тексты. Выпуск 3. Когнитивные процессы. — М.: Когито-центр. 2004. С.13–28
- [89] *Хайрер, Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений / *Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер* — Т. 1. М.: Мир, 1990.
- [90] *Хакен, Г.* Синергетика мозга / *Г. Хакен*// Синергетика и психология. Тексты. Выпуск 3. Когнитивные процессы — МГСУ «Союз», 1997. С.34–63
- [91] *Ходжкин, А. Л.* Нервный импульс / *А. Л. Ходжкин* — М.: Мир, 1965. -125 с.
- [92] *Ходоров, Б. И.* Проблема возбудимости / *Б. И. Ходоров* — Л., 1969. — 304 с.
- [93] *Хорнак, Дж.* Основы МРТ [электронный ресурс] / *Дж. Хорнак* // Режим доступа: <http://eva.cmts.msu.ru/Hornak/index.html> – Загл. с экрана
- [94] *Шабаршина, Г. В.* Проведение возбуждения по кольцевой структуре нейронных клеточных автоматов / *Г. В. Шабаршина* // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 1994, № 2. С 116–121.
- [95] *Шеррингтон, Ч.* Интегративная деятельность нервной системы / *Ч. Шеррингтон* — Л: Наука, 1969.
- [96] *Шустер, Г.* Детерминированный хаос / *Г. Шустер* — М.: Мир, 1988.
- [97] *Экклс, Дж.* Физиология синапсов / *Дж. Экклс* — М.: Мир, 1966. — 395 с.
- [98] *Adrian, E. D.* Electrical activity of the nervous system / *E. D. Adrian* // Arch. Neurol. and Psychiatr., 1934, v.34, №6, p.1125–1136
- [99] *Armstrong, C. M.* The inner quaternary ammonium ion receptor in potassium channels of the node of Ranvier / *C. M. Armstrong, B. Hille* // J Gen Physiol. 1972 Apr;59(4):388–400.

- [100] *Armstrong, C. M.* Ionic pores, gates, and gating currents / *C. M. Armstrong* // Q Rev Biophys. 1974 May;7(2):179–210.
- [101] *Benettin, G.* Kolmogorov entropy and numerical experiments / *G. Benettin, L. Galgani, J. M. Strelcyn* // Phys. Rev. 1976. V. A14. P. 2338-2345.
- [102] *Benettin, G.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them, part 1: theory / *G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. M. Strelcyn* // Meccanica, 9-20 (1980)
- [103] *Carpenter, G. A.* Pattern Recognition by Self-Organizing Neural Networks / *G. A. Carpenter, S. Grossberg* // Cambridge, MA, MIT Press, 1991.
- [104] *Chay, T. R.* Bursting, beating, and chaos in an excitable membrane model / *T. R. Chay, J. Rinzel* // Biophys. J., 47:3 (1985), 357–366
- [105] *Coombes, S.* Bursting: the genesis of rhythm in the nervous system / *S. Coombes, P. C. Bressloff* // World Scientific Publishing Company, 2005
- [106] *Dogaru, R.* Robust Oscillations and Bifurcations in Cellular Neural Networks / *R. Dogaru, A. T. Murgan, D. Ioan* // Proceedings of IEEE Int. Workshop on Cellular Neural Networks and Their Applications, (CNNA'94), pp.297–302, Rome, 1994.
- [107] *Doyle, D.* The structure of the potassium channel: Molecular basis of K<sup>+</sup> conduction and sensitivity / *D. Doyle, J. Cabral, R. Pfuetzner, A. Kuo, J. Gulbis, S. Cohen, B. Chait, R. MacKinnon* // Science, 1998.
- [108] *Drucker, H.* Improving Generalization Performance Using Backpropagation / *H. Drucker, Y. L. Cun* // IEEE Transactions on Neural Networks, Vol.3, N5, 1992, pp.991-997.
- [109] *FitzHugh, R.* Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane / *R. FitzHugh* // Bull. Math. Biophysics, 17, 1955 p.257–278
- [110] *FitzHugh, R.* Impulses and physiological states in models of nerve membrane / *R. FitzHugh* // Biophysical Journal, 1:445–466, 1961.

- [111] *Fukushima, K.* A Neural Network for Visual Pattern Recognition / *K. Fukushima*  
// Computer, Vol.21, No.3, 1988, pp.65–75
- [112] *Gilev, S. E.* On completeness of the class of functions computable by neural networks  
/ *S. E. Gilev, A. N. Gorban* // Proc. of the World Congress on Neural Networks  
(WCNN'96). Sept. 15-18, 1996, San Diego, CA, Lawrence Erlbaum Associates, 1996.  
pp.984–991.
- [113] *Hebb, D.* Organization of behavior / *D. Hebb* — New York: Science Edition. 1961.
- [114] *Hindmarsh, J. L.* A model of neuronal bursting using three coupled first order  
differential equations / *J. L. Hindmarsh, R. M. Rose* Proc R Soc London, Ser.B Biol  
Sci, 1984, v.221 p.87–102.
- [115] *Hodgkin, A. L.* A quantitative description of membrane current and its applications  
to conduction and excitation in nerve / *A. L. Hodgkin, A. F. Huxley* J. Physiol.  
London, v.117: p.500–544, 1952.
- [116] *Hopfield, J. J.* Neural networks and physical systems with emergent collective  
computational abilities / *J. J. Hopfield* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1982. V.79.  
№8. P. 2554–2558.
- [117] *Hopfield, J. J.* Computing with Neural Circuits: a Model / *J. J. Hopfield, D. W. Tank*  
// Science, Vol.233, 1986, p.625–633
- [118] *Hornik, L.* Multilayer feedforward networks are universal approximators /  
*L. Hornik, M. Stinchcombe, H. White* Neural Networks. 1989. Vol. 2. PP. 359 - 366.
- [119] *Izhikevich, E.* Neural excitability, spiking and bursting / *E. Izhikevich* // Internat.  
J. Bifurcation and Chaos, 10:6 (2000), p.1171–1266
- [120] *Jeenbekov, A. A.* Processing the massive data in holographic associative memory /  
*A. A. Jeenbekov, K. M. Jumaliev, A. A. Sarybaeva* // Proceedings of the international  
seminar “Holography and optical information processing”. — Bishkek, September 2–4,  
1997. — P. 47–50.
- [121] *Kantz, H.* Nonlinear Time Series Analysis, 2nd edition / *H. Kantz, T. Schreiber* —  
Cambridge University Press, Cambridge, 2004 — 388 pages.

- [122] *Kohonen, T.* Self-organization and associative memory / *T. Kohonen* // Series in Information Sciences, vol. 8. Berlin: Springer Verlag. 1984.
- [123] *Kuramoto, Y.* Chemical Oscillations, Waves and Turbulence / *Y. Kuramoto* // Springer Series in Synergetics, vol.19. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [124] *De Lange, E.* Neuron models of the generic bifurcation type : network analysis and data modeling / *E. De Lange* //The'se EPFL, no 3617 (2006)
- [125] *Lebedev, A. N.* The wave model of memory / *A. N. Lebedev, V. V. Mayorov, I. Y. Myshkin* // Neurocomputers and attention. vol.1, Manshester, 1990, p.53-59.
- [126] *Malki, H. A.* Using the Karhunen-Loe'Ve Transformation in the Back-Propagation Training Algorithm / *H. A. Malki, A. Moghaddamjoo* // IEEE Transactions on Neural Networks, Vol.2, N1, 1991, pp.162–165.
- [127] *McCulloch , W. S.* A logical calculus of ideas immanent in nervous activity / *W. S. McCulloch , W. A. Pitts* // Bull. Math. Biophys., 1943. No.5. PP.115-133.
- [128] *McCulloch , W. S.* Agathe Tyche of nevous nets — the lucky reckoners / *W. S. McCulloch* // Proc. Symposium on Mechanization of Thought Prozesses, N.P.L., Teddington, 1958
- [129] *McEllice, R.* Capacity of the Hopfield associative memory / *R. McEllice, E. Posner et al.* // IEEE Trans.on Inf.Theory. vol.33, pp.461–482 (1987).
- [130] *Muller, B.* Neural Networks: an introduction / *B. Muller, J. Reinhart* — Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.
- [131] *Nagumo, J.* An active pulse transmission line simulating nerve axon / *J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa* // Proceedings of the IRE, 50:2061–2070, 1962.
- [132] *Rabinovich, M. I.* Dynamical principles in neuroscience / *M. I. Rabinovich, P. Varona, A. I. Selverston, H. D. I. Abarbanel* // Rev. Mod. Phys. 78:4, 2006. — p.1213–1265.



- [133] *Rosenblatt, F.* The perceptron: a probabilistic model for information storage and organization in the brain / *F. Rosenblatt* // Psychological Review, 1958. №65. P. 386–408.
- [134] *Rosenstein, M. T.* A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets / *M. T. Rosenstein, J. J. Collins, C. J. De Luca* // Physica D, 1993. №65. P. 117–134.
- [135] *Rumelhart, D. E.* Parallel Distributed Processing / *D. E. Rumelhart, J. L. McClelland* // Explorations in the Microstructure of Cognition Vol 1,2. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1986.
- [136] *Scow, J.* The Na, K-pump / *J. Scow* // Methods Enzymol. 1988. V. 156. P. 1-125; The Na, K-ATPase // J. Bioenerg. Biomembr. 1992. V. 24. № 3.
- [137] *Timofeev, E. A.* Algorithm for Efficient Entropy Estimation / *E. A. Timofeev* // Модел. и анализ информ. систем., 20:2 (2013), 178–185
- [138] *Tomlison, M. S.* DNNA: A digital neural networks architecture / *M. S. Tomlison, D. J. Walker* // Proc. Int. Neural Networks Conf (INNC-1990). Vol.2. 1990. P.589-592
- [139] *Widrow, B.* 30 years of adaptive neural networks: perceptron, madaline, and backpropagation / *B. Widrow, M. A. Lehr* // Proceedings of the IEEE, vol. 78, No. 9, September, 1990, p. 1415-1442.
- [140] *Wilson, H. R.* Excitatory and Inhibitory Interactions in Localized Populations of Model Neurons / *H. R. Wilson, J. D. Cowan* // Biophysical J., v. 12, pp. 1–24, 1972.
- [141] *Wolf, A.* Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series / *A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano* // Physica. 1985. V. D16. P. 285–317.

# Приложение

## Исходные коды программ для реализации вычислительных экспериментов

В данном приложении к диссертационной работе приводятся тексты некоторых разработанных автором программ для реализации вычислительных экспериментов в системе MATLAB 2012b.

### 1 Моделирование пары связанных нейронных сетей на основе дискретной модели

Приводится текст программы для моделирования процессов синхронизации и десинхронизации в нейронной сети на основе модели формального нейрона МакКаллока–Питтса. Программа выполняется в системе MATLAB 2012b.

```
function [XVal YVal ZVal NormVal] = discrsyn1(varargin)
    \% Реализация дискретного отображения (N итераций)
    \%
    \% Сигнатура функции:
    \%     discrsyn2014(Th, TN, TS, TSkips, p0, p1, Eps, d)
    \%
    \% Описание аргументов:
    \% Th:     количество скрытых итераций;
    \% TN:     количество итераций;
    \% p0, p1: параметры системы;
    \% Eps:    возмущение;
    \% d:     диффузия;
    NArg=length(varargin);
    Th = varargin{1};
    TN = varargin{2};
    TS = varargin{3};
```

```

TSkips = varargin{4};
p0 = varargin{5};
p1 = varargin{6};
Eps = varargin{7};
d = varargin{8};
X0 = 0.001*(2*rand(3,1)-1);
W = [1, -1, 0; 1, p0, -1; 0, 1, p1];
for i = 1:Th
    X0 = f(W*X0);
end;
Y0 = X0 + Eps*(2*rand(3,1)-1);
for i = 1:TN
    X0 = f(W*X0);
    Y0 = f( W * (d*X0+(1-d)*Y0) );
end;
X(:,1)=X0;
Y(:,1)=Y0;
Z(:,1)=X0-Y0;
NormVal(1) = norm(Z(:,1));
for i = 1:TS
    X1 = X(:,i);
    Y1 = Y(:,i);
    for j=1:TSkips
        X1 = f(W*X1);
        Y1 = f( W * (d*X1+(1-d)*Y1) );
    end;
    X(:,i+1) = f(W*X1);
    Y(:,i+1) = f( W * (d*X1+(1-d)*Y1) );
    Z(:,i+1) = X(:,i+1) - Y(:,i+1);
    NormVal(i+1) = norm(Z(:,i+1));
end;

```

```

XVal = X;
YVal = Y;
ZVal = Z;
end
function [outvalue] = f(varargin)
    u=varargin{1};
    y = u;
    for j=1:3
        y(j)=0.5*(abs(u(j)+1)-abs(u(j)-1));
    end;
    outvalue = y;
end

```

## 2 Моделирование итераций отображения, основанного на математической модели нейронной сети с двумя запаздываниями по времени

Приводится исходный текст программы для поиска и численного анализа устойчивости неподвижных точек отображения, основанного на системе дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями, моделирующей импульсную активность нейронной цепи. Программа выполняется в системе MATLAB 2012b.

```

function [YVal YValAll] = impexpl(varargin)
    \% Реализация импульсной системы (4 осциллятора) в явном виде
    \%
    \% Сигнатура функции:
    \%     impexpl(N, d, [z1, z2, z3])
    \%
    \% Описание аргументов:
    \% N:             количество шагов (по периоду)
    \% d:             коэффициент диффузии

```

```

\% [z1, z2, z3]: начальные значения;
\%
\% Пример использования:
\%      impexpl(0, 5, 0.001, [3.3 -2.2 0])
N = varargin{1};
d = varargin{2};
Z = varargin{3};
YValAll = zeros(3,1);
lambda = 130;
h = 1/26;
a0 = 2;
b0 = 4;
n = 5;
a = sqrt(2)+1;
L = [-(2+sqrt(2)); -2; -(2-sqrt(2)); 0];
V1 = [1; -a; a; -1];
V2 = [1; -1; -1; 1];
V3 = [a; 1; -1; -a];
V4 = [1; 1; 1; 1];
t0 = h*(1+1/a0);
T0 = h*(2+a0+1/a0);
Ts = (n+1)*(T0+b0*t0);
s0=0.005;
th = 0.0001;
Tall = 0;
for j=1:3
    Y(j)=0;
    for k=0:n
        YkT0(j, (k+1))=0;
        Yt0kT0(j, (k+1))=0;
    end;
end;

```

```

end;
Y = Y';
for NValue = 1:N
    \% Промежуток от -s0 до 0
    Alp = Alphas(Z);
    t = s0;
    U = Alp(1)*exp(L(1)*d*t)*V1 + Alp(2)*exp(L(2)*d*t)*V2 + ...
Alp(3)*exp(L(3)*d*t)*V3 + V4;
    Y(1) = log(U(2)/U(1));
    Y(2) = log(U(3)/U(2));
    Y(3) = log(U(4)/U(3));
    Tall = Tall+s0;
    for k = 0:n \% (n+1) всплесков
        \% сохранили y_j(k*T0)
        YkT0(:,(k+1)) = Y;
        Z = Y;
        \% промежуток (k*T0, h+k*T0]
        t = h;
        Tall = Tall+t;
        Alp = Alphas(Z);
        U = Alp(1)*exp(L(1)*d*t)*V1 + Alp(2)*exp(L(2)*d*t)*V2 + ...
Alp(3)*exp(L(3)*d*t)*V3 + V4;
        Y(1) = log(U(2)/U(1));
        Y(2) = log(U(3)/U(2));
        Y(3) = log(U(4)/U(3));
        \% значение в точке h+k*T0+0
        Z = Y - (1+a0)*YkT0(:,(k+1));
        \% промежуток (h+k*T0, t0+k*T0]
        t = t0-h;
        Tall = Tall+t;
        Alp = Alphas(Z);

```

```

        U = Alp(1)*exp(L(1)*d*t)*V1 + Alp(2)*exp(L(2)*d*t)*V2 + ...
Alp(3)*exp(L(3)*d*t)*V3 + V4;
        Y(1) = log(U(2)/U(1));
        Y(2) = log(U(3)/U(2));
        Y(3) = log(U(4)/U(3));
        \% сохраняем y_j(t0+k*T0)
        Yt0kT0(:,(k+1)) = Y;
        Z = Y;
        \% промежуток (t0+k*T0, t0+h+k*T0]
        t = h;
        Tall = Tall+t;
        Alp = Alphas(Z);
        U = Alp(1)*exp(L(1)*d*t)*V1 + Alp(2)*exp(L(2)*d*t)*V2 + ...
Alp(3)*exp(L(3)*d*t)*V3 + V4;
        Y(1) = log(U(2)/U(1));
        Y(2) = log(U(3)/U(2));
        Y(3) = log(U(4)/U(3));
        \% значение в точке t0+h+k*T0+0
        Z = Y - (1+1/a0)*Yt0kT0(:,(k+1));
        \% промежуток (t0+h+k*T0, (k+1)*T0]
        t = T0 - t0 - h;
        Tall = Tall+t;
        Alp = Alphas(Z);
        U = Alp(1)*exp(L(1)*d*t)*V1 + Alp(2)*exp(L(2)*d*t)*V2 + ...
Alp(3)*exp(L(3)*d*t)*V3 + V4;
        Y(1) = log(U(2)/U(1));
        Y(2) = log(U(3)/U(2));
        Y(3) = log(U(4)/U(3));
end;
        \% Промежуток от (n+1)*T0 до 1
        Z = Y;

```

```

t = 1-(n+1)*T0;
Tall = Tall+t;
Alp = Alphas(Z);
U = Alp(1)*exp(L(1)*d*t)*V1 + Alp(2)*exp(L(2)*d*t)*V2 + ...
Alp(3)*exp(L(3)*d*t)*V3 + V4;
    Y(1) = log(U(2)/U(1));
Y(2) = log(U(3)/U(2));
Y(3) = log(U(4)/U(3));
for k = 0:n \% еще (n+1) всплесков
    \% значение в точке 1+k*T0+0
    Z = Y - b0*YkT0(:,(k+1));
    \% промежуток (1+k*T0, 1+t0+k*T0]
    t = t0;
    Tall = Tall+t;
    Alp = Alphas(Z);
    U = Alp(1)*exp(L(1)*d*t)*V1 + Alp(2)*exp(L(2)*d*t)*V2 + ...
Alp(3)*exp(L(3)*d*t)*V3 + V4;
    Y(1) = log(U(2)/U(1));
Y(2) = log(U(3)/U(2));
Y(3) = log(U(4)/U(3));
    \% значение в точке 1+t0+k*T0+0
    Z = Y - (b0/a0)*Yt0kT0(:,(k+1));
    \% промежуток (1+t0+k*T0, 1+(k+1)*T0]
    t = T0-t0;
    Tall = Tall+t;
    Alp = Alphas(Z);
    U = Alp(1)*exp(L(1)*d*t)*V1 + Alp(2)*exp(L(2)*d*t)*V2 + ...
Alp(3)*exp(L(3)*d*t)*V3 + V4;
    Y(1) = log(U(2)/U(1));
Y(2) = log(U(3)/U(2));
Y(3) = log(U(4)/U(3));

```



```

end;
Z = Y;
t = Ts-1-(n+1)*T0-s0;
Tall = Tall+t;
Alp = Alphas(Z);
U = Alp(1)*exp(L(1)*d*t)*V1 + Alp(2)*exp(L(2)*d*t)*V2 + ...
Alp(3)*exp(L(3)*d*t)*V3 + V4;
Y(1) = log(U(2)/U(1));
Y(2) = log(U(3)/U(2));
Y(3) = log(U(4)/U(3));
Z = Y;
YValAll(:,NValue) = Y;
end;
YVal = Z;
end
function [outvalue] = Alphas(varargin)
u=varargin{1};
a = sqrt(2)+1;
bt = exp(u);
A = [(a+bt(1)), (1+bt(1)), (a*bt(1)-1); a*(bt(2)+1),...
(bt(2)-1), -(bt(2)+1); (-1-a*bt(3)), (bt(3)+1), (bt(3)-a)];
B = [1-bt(1); bt(2)-1; bt(3)-1];
L = [-(2+sqrt(2)); -2; -(2-sqrt(2)); 0];
V1 = [1; -a; a; -1];
V2 = [1; -1; -1; 1];
V3 = [a; 1; -1; -a];
V4 = [1; 1; 1; 1];
Alp = inv(A)*B;
outvalue = Alp;
end

```

### 3 Оценка статэнтропии по выделенной последовательности строк

Приводится текст программы — основной модель вычисления вспомогательных показателей для построения оценки статэнтропии динамической системы, описывающей дискретную модель нейронной сети.

```
var inf,rho:text;
s:array[1..100] of string;
k,i,j,t1,t2,stl,mid:integer;
sumr,midr,entr,beta,leng,rnk:double;
s1,s2,s3:string;
longsum,longrnk:longint;
begin
  write('String length = ');read(stl);
  write('k = ');read(k);
  write('beta = ');read(beta);
  assign(inf,'input.txt'); reset(inf);
  assign(rho,'rho.txt'); rewrite(rho);
  for i:=1 to 2*k+1 do readln(inf,s[i]);
  {1..k}
  for i:=1 to k do
  begin
    t1:=stl+1;
    s1:=s[i];
    s2:=s[i+k];
    for j:=1 to stl do
      if not (s1[j]=s2[j]) then begin t1:=j; break; end;
    writeln(rho,t1);
  end;
  while not eof(inf) do
  begin
```

```

s1:=s[k+1];
s2:=s[1];
s3:=s[2*k+1];
t1:=stl+1;
for j:=1 to stl do
  if not (s1[j]=s2[j]) then begin t1:=j; break; end;
t2:=stl+1;
for j:=1 to stl do
  if not (s1[j]=s3[j]) then begin t2:=j; break; end;
if t1<t2 then writeln(rho,t1) else writeln(rho,t2);
readln(inf,s1);
for i:=1 to 2*k do s[i]:=s[i+1];
s[2*k+1]:=s1;
end;
for i:=k+1 to 2*k+1 do
begin
  t1:=stl+1;
  s1:=s[i];
  s2:=s[i-k];
  for j:=1 to stl do
    if not (s1[j]=s2[j]) then begin t1:=j; break; end;
  writeln(rho,t1);
end;
reset(rho);
sumr:=0;
leng:=0;
rnk:=0;
longsum:=0;
longrnk:=0;
while not eof(rho) do
begin

```

```
leng:=leng+1;
read(rho,mid);
{if mid>0 then begin sumr:=sumr+exp(beta*ln(mid)); rnk:=rnk+ln(mid); end;}
if mid>0 then begin longrnk:=longrnk+mid; end;
end;
{mid:=sumr/leng;}
midr:=longrnk/leng;
{rnk:=rnk/leng;}
rnk:=longrnk*ln(beta)/leng;
{entr:=ln(sumr)/rnk;}
entr:=ln(leng)/rnk;
writeln('Mid.rho = ',midr);
writeln('r_n(k) = ',rnk);
writeln('Entropy = ', entr);
close(inf);
close(rho);
end.
```