

ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации Ольги Владимировны Никольской ”Об алгебраических циклах на расслоенном произведении семейств КЗ поверхностей”

Гипотеза Ходжа, характеризующая алгебраические классы когомологий на гладком проективном комплексном многообразии как рациональные классы, представленные гармоническими формами типа (p, p) , и стандартная гипотеза Гротендика (типа Лефшеца) об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа находятся в центре внимания современной алгебраической геометрии. Несмотря на то, что эти гипотезы сформулированы в 1952 и 1968 годах соответственно, имеется довольно мало примеров многообразий, для которых они доказаны. Например, гипотеза Ходжа доказана для всех многообразий размерности ≤ 3 , для всех простых абелевых многообразий простой размерности, но до сих пор не доказана для произведения двух КЗ-поверхностей.

Стандартная гипотеза следует из гипотезы Ходжа для квадрата рассматриваемого многообразия и кажется специалистам более доступной для исследования, потому что эквивалентна гипотезе о совпадении численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов на квадрате рассматриваемого многообразия; она доказана для всех кривых, поверхностей, абелевых многообразий, для всех трехмерных многообразий размерности Кодаиры < 3 (называемых также многообразиями неосновного типа). для деформаций точечных схем Гильберта КЗ-поверхности (параметризующих конечные подсхемы фиксированной длины), для некоторых 4-мерных эллиптических многообразий и компактификаций минимальных моделей Нерона абелевой схемы относительной размерности 3 над аффинной кривой при условии, что во всех бесконечно удаленных точках редукция общего схемного слоя имеет мультипликативный тип.

Выбор темы диссертации вызван желанием исследовать алгебраические классы когомологий на гладкой 5-мерной модели расслоенного произведения двух семейств КЗ-поверхностей (возможно, с вырождениями)

над гладкой проективной кривой. Напомним, что КЗ-поверхность - это односвязная поверхность с тривиальным каноническим классом.

О.В.Никольская занимается этой темой более 7 лет (начиная с 3-го курса университета) и достигла значительных успехов на этом пути. Первоначально рассматривались простейшие примеры применения теоремы Делиня о полупростоте глобального представления монодромии и хорошо известной леммы Шура, а также классификации Ю.Г.Зархиным возможных типов групп Ходжа КЗ-поверхностей (нетривиально действующих на трансцендентной части рациональных когомологий степени 2 и действующих тривиально на алгебраических классах (т.е. на классах, порожденных классами алгебраических кривых, лежащих на рассматриваемой КЗ-поверхности)). Постепенно была осознана необходимость включения в игру гипотезы Ходжа, которая (к удивлению научного руководителя) была доказана для гладкой модели расслоенного произведения двух неизотривиальных семейств КЗ-поверхностей при слабых ограничениях на ранги групп Нерона - Севери общих геометрических слоев (совпадающих в данном случае с группами Пикара классов обратимых пучков). Дело в том, что ранг группы Нерона - Севери не обязан быть постоянным на гладких слоях семейства КЗ-поверхностей, но он становится постоянным после выбрасывания из 1-мерной базы семейства некоторого счетного подмножества $\Delta_{\text{countable}}$.

Семейство КЗ-поверхностей (с вырождениями) над кривой называется неизотривиальным, если среди его гладких слоев имеются хотя бы два неизоморфных слоя.

В диссертации доказаны следующие основные теоремы:

Теорема 1. Пусть $\pi_k : X_k \rightarrow C$ ($k = 1, 2$) - проективное неизотривиальное семейство КЗ-поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой C . Предположим, что множества $\Delta_k = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{k\delta}) \neq \emptyset\}$ ($k = 1, 2$) не пересекаются.

Если для общих геометрических слоев X_{1s} и X_{2s} выполнены следующие условия:

- (i) $\text{rank NS}(X_{1s})$ является нечетным числом;
- (ii) $\text{rank NS}(X_{1s}) \neq \text{rank NS}(X_{2s})$,

то для любой гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

Если, кроме того, морфизмы π_1 и π_2 гладкие, $p_k = 22 - \text{rank NS}(X_{ks})$ ($k = 1, 2$) - нечетные простые числа и $p_1 \neq p_2$, то для $X_1 \times_C X_2$ верна стандартная гипотеза Гротендика об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа.

Здесь общность точки $s \in C$ означает, что она принадлежит мно-

жеству $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$, где $\Delta_{\text{countable}}$ - счетное подмножество, зависящее от семейств π_k ; мы можем также предполагать, что функции $s \mapsto \text{rank NS}(X_{ks})$ ($k = 1, 2$) постоянны на множестве $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$.

Теорема 2. Пусть C - гладкая проективная кривая над полем комплексных чисел, $\pi_1 : X_1 \rightarrow C$ - гладкое проективное неизотривальное семейство КЗ поверхностей, причем для общего геометрического слоя X_{1s} число $22 - \text{rank NS}(X_{1s}) = p_1$ является нечетным простым. Тогда для расслоенного квадрата $X = X_1 \times_C X_1$ верны гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа.

Кроме того, в главе 3 доказаны некоторые обобщения этих результатов.

Основные результаты диссертации опубликованы в Известиях РАН (серия математическая), Математическом сборнике, Математических заметках, а также неоднократно докладывались на конференциях.

Если теория кривых и поверхностей в основном базируется на теореме Римана - Роха, то в теории многомерных многообразий существенную роль играют сложные вопросы бирациональной геометрии, к которым добавляются представления монодромии, ассоциированные с гладкими семействами над 1-мерной базой, а также теория групп и алгебр Ли, действующих в когомологиях слоев, как это показано в работах Ю.Г.Зархина. Возникающий в многомерной геометрии вопрос о том, какие многообразия следует считать интересными, в основном связан с физикой (в частности, с теорией струн). Конечно же, в первую очередь это эллиптические многообразия, а также расслоения на абелевы многообразия и КЗ-поверхности. Работа О.В.Никольской показывает, как можно справиться с геометрией расслоений на КЗ-поверхности. Поэтому потенциал этой работы высок, особенно при исследовании таких вопросов, как гипотеза Тэйта об алгебраических циклах на многообразиях над конечнопорожденными полями (являющаяся аналогом гипотезы Ходжа), стандартная гипотеза типа Кюннета об алгебраичности компонент Кюннета диагонали, существование мотивных разложений Чжоу - Лефшеца (которыми особенно интересуются европейские математики).

В процессе работы над диссертацией О.В.Никольская проявила высокую работоспособность, усвоила несколько сложных теорий и сумела применить их в комплексе для решения поставленных задач. Диссертация выполнена самостоятельно, полученные результаты достоверны и имеют высокую ценность для дальнейшего развития теории.

Результаты диссертации могут быть использованы при чтении спецкурсов по алгебраической геометрии, при исследовании тонких вопросов

диофантовой геометрии и многомерного комплексного анализа.

Считаю, что О.В.Никольская заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры алгебры и геометрии
института прикладной математики и информатики,
био- и нанотехнологий ФГБОУ ВПО
"Владимирский государственный университет имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича
Столетовых"

Танкеев С.Г.

28 сентября 2014 года

Адрес: 600000, г. Владимир, ул. Горького, 87

Телефон: 8(4922)479900

E-mail: tankeev@vlsu.ru

