На правах рукописи

Никольская Ольга Владимировна

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЦИКЛАХ НА РАССЛОЕННОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ СЕМЕЙСТВ К3 ПОВЕРХНОСТЕЙ

01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Владимир 2014

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии института прикладной математики и информатики, био- и нанотехнологий ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

Научный руководитель	**Танкеев Сергей Геннадьевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Зак Фёдор Лазаревич**, доктор физико-математических наук, ФГБУН «Центральный экономико-математический институт РАН», ведущий научный сотрудник лаборатории математической экономики
	Кузьмин Леонид Викторович, доктор физико-математических наук, ФГБУ «Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт"», ведущий научный сотрудник Института информационных технологий
Ведущая организация	**ФГБУН «Математический институт имени В. А. Стеклова РАН»**

Защита состоится 26 декабря 2014 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.002.03, созданного на базе ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова» по адресу: Российская Федерация, 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144, ауд. 426.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова» (150003, г. Ярославль, Полушкина Роща, 1) и на сайте ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова»:
http://www.rd.uniyar.ac.ru/upload/iblock/d9d/nikolskaya_kandidatskaya.pdf

Автореферат разослан "____"__________ 2014 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
кандидат ф.-м. наук, доцент Яблокова Светлана Ивановна

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Пусть X - гладкое проективное d-мерное многообразие над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, и пусть $H^{2i}_{\mathrm{alg}}(X, \mathbb{Q})$ – $\mathbb{Q}$-подпространство в $H^{2i}(X, \mathbb{Q})$, порожденное классами когомологий $\mathrm{cl}_X(Z) \in H^{2i}(X, \mathbb{Q})$ алгебраических циклов Z коразмерности i на X. Гипотеза Ходжа утверждает, что

$$H^{2i}_{\mathrm{alg}}(X, \mathbb{Q}) = H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{i,i}(X, \mathbb{C}) \quad \forall i,$$

где $H^{i,i}(X, \mathbb{C})$ компонента типа (i, i) разложения Ходжа[1]

$$H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=2i} H^{p,q}(X, \mathbb{C}).$$

Напомним, что линейное отображение $u^* : H^i(X, \mathbb{Q}) \to H^j(X, \mathbb{Q})$ называется *алгебраическим*, если оно является ограничением отображения $\bigoplus_k H^k(X, \mathbb{Q}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^*(X, \mathbb{Q}) \to H^*(X, \mathbb{Q})$, индуцированного элементом $\mathbb{Q}$-векторного пространства $H^*_{\mathrm{alg}}(X \times X, \mathbb{Q})$[2]. Другими словами, отображение u^* алгебраическое, если существует алгебраический цикл Z с коэффициентами в поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (конечная формальная линейная комбинация с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ алгебраических подмногообразий на $X \times X$), для которого $u = \mathrm{cl}_{X \times X}(Z)$ и

$$u^* : H^*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^*} H^*(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{w \mapsto w \smile u} H^*(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{2*}} H^*(X, \mathbb{Q}),$$

где $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : X \times X \to X$ - канонические проекции, линейные операторы $\mathrm{pr}_1^*, \mathrm{pr}_{2*}$ определены формулами $\mathrm{pr}_1^*(w) = w \otimes 1$ $(1 \in \mathbb{Q} = H^0(X, \mathbb{Q}))$, $\mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{cl}_X(x) \otimes w) = w$ ($x \in X$ - некоторая точка, $\mathrm{cl}_X(x) \in H^{2d}(X, \mathbb{Q})$ - образующая 1-мерного пространства $H^{2d}(X, \mathbb{Q})$, $w \in H^k(X, \mathbb{Q})$ и $\mathrm{pr}_{2*}(H^k(X, \mathbb{Q}) \otimes H^j(X, \mathbb{Q})) = 0$ для $k \neq 2d$, причем по теореме Кюннета $H^*(X \times X, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{k,j} H^k(X, \mathbb{Q}) \otimes H^j(X, \mathbb{Q})$).

Пусть H - гиперплоское сечение многообразия X (сечение X гиперплоскостью проективного пространства $\mathrm{P}^n \supset X$). Обозначим через L оператор Лефшеца на $H^*(X, \mathbb{Q})$, определенный формулой $Lx = \mathrm{cl}_X(H) \smile x$. Согласно сильной теореме Лефшеца отображение

$$L^{d-i} : H^i(X, \mathbb{Q}) \to H^{2d-i}(X, \mathbb{Q})$$

[1] **Hodge W. V.D.** The topological invariants of algebraic varieties. Proceedings of International Congress of Mathematicians. 1952. V. 1. P. 182-192.

[2] **Kleiman S.L.** Algebraic cycles and the Weil conjectures. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas.* North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968. P. 359-386.

является изоморфизмом для любого $i \leq d$. Пусть $\Lambda^{d-i} : H^{2d-i}(X,\mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^i(X,\mathbb{Q})$ изоморфизм, обратный к L^{d-i}. Если для всех $i \leq d$ изоморфизм Λ^{d-i} алгебраический, то говорят, что для X верна стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца[3].

Для $j \geq 0$ имеется примитивное разложение Лефшеца:

$$H^j(X,\mathbb{Q}) = \bigoplus_{k \geq max(0,j-d)} L^k P^{j-2k}(X),$$

где $P^i(X) = H^i(X,\mathbb{Q}) \cap \operatorname{Ker} L^{d-i+1}$ $(i \leq d)$ – примитивная часть $H^i(X,\mathbb{Q})$[4]. В частности, любой элемент $x \in H^j(X,\mathbb{Q})$ однозначно записывается в следующем виде:

$$x = \sum_{k \geq max(0,j-d)} L^k x_{j-2k},$$

где $x_{j-2k} \in P^{j-2k}(X)$. Это разложение позволяет определить абстрактный оператор степени -2:

$$\Lambda x = \sum_{k \geq max(1,j-d)} L^{k-1} x_{j-2k}.$$

Стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца утверждает, что оператор Λ алгебраический[5]. Обозначим через ${}^{\mathrm{c}}\Lambda$ двойственный оператор для L в классической теории Ходжа[6]. Тогда

$${}^{\mathrm{c}}\Lambda\, x = \sum_{k \geq \max(1,j-d)} k(d-j+k+1) L^{k-1} x_{j-2k}$$

и гипотеза $B(X)$ эквивалентна алгебраичности ${}^{\mathrm{c}}\Lambda$[7].

Гипотеза $B(X)$ эквивалентна алгебраичности абстрактного оператора $*$, определенного формулой

$$*x = \sum_{k \geq \max(0,j-d)} (-1)^{(j-2k)(j-2k+1)/2} L^{d-j+k} x_{j-2k}.$$

Из $B(X)$ следует гипотеза $D(X)$ о совпадении численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов на X. Более того, $B(X) \Leftrightarrow$

[3] **Grothendieck A.** Standard conjectures on algebraic cycles. *Algebraic Geometry*, Internatioal Colloguium (Bombay, 1968). London: Oxford University Press, 1969. P. 193-199.

[4] **Чжэнь Ш.-Ш.** *Комплексные многообразия.* М.: Иностранная литература, 1961. 240 с.

[5] **Grothendieck A.** Standard conjectures on algebraic cycles. *Algebraic Geometry*, Internatioal Colloguium (Bombay, 1968). London: Oxford University Press, 1969. P. 193-199.

[6] **Гриффитс Ф., Харрис Дж.** *Принципы алгебраической геометрии.* М.: Мир, 1982. 2 т.

[7] **Kleiman S.L.** Algebraic cycles and the Weil conjectures. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas.* North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968. P. 359-386.

$D(X \times X)$ и $B(X) \Rightarrow C(X)$, где $C(X)$ утверждает алгебраичность компонент Кюннета класса диагонали $\Delta_X \hookrightarrow X \times X$[8]. Кроме того, $B(X)$ эквивалентна полупростоте $\mathbb{Q}$-алгебры $\mathcal{A}(X)$ алгебраических соответствий[9].

Стандартная гипотеза $B(X)$ типа Лефшеца верна для многообразий Грассмана, кривых, поверхностей и абелевых многообразий[10], а также для всех гладких 3-мерных проективных многообразий размерности Кодаиры < 3 (называемых также 3-мерными многообразиями неосновного типа)[11]. В частности, она верна для всех комплексных 3-мерных эллиптических многообразий. Кроме того, $B(X)$ выполняется для голоморфных симплектических многообразий, являющихся деформациями точечных схем Гильберта K3 поверхностей [12], а также для некоторых 4-мерных эллиптических многообразий [13] и компактификаций минимальных моделей Нерона [14].

С другой стороны, $D(X)$ верна для многообразий размерности не более 4[15] и для потенциально простых абелевых схем простой относительной размерности над гладкой проективной кривой[16]. Наконец, $C(X)$ верна для всех гладких проективных многообразий над конечными полями[17]. Все эти гипотезы совместимы с моноидальными преобразованиями вдоль замкнутых гладких неприводимых центров[18]. С другой стороны, И. Андре свел гипотезу Ходжа для абелевых многообразий к стандартной гипотезе $B(X)$ для всех абелевых схем $\pi : X \to C$ над гладкими проективными кривыми[19].

[8]**Kleiman S.L.** Algebraic cycles and the Weil conjectures. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas.* North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968. P. 359-386.

[9]**Танкеев С.Г.** О численной эквивалентности алгебраических циклов на потенциально простых абелевых схемах простой относительной размерности. *Известия РАН. Серия математическая.* 2005. Т. 69. № 1. С. 145–164.

[10]**Kleiman S.L.** Algebraic cycles and the Weil conjectures. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas.* North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968. P. 359-386.

[11]**Танкеев С.Г.** О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий. II. *Известия РАН. Серия математическая.* 2011. Т. 75. № 5. С. 177-194.

[12]**Charles F., Markman E.** The standard conjectures for holomorphic symplectic varieties deformation equivalent to Hilbert shemes of K3 surfaces. *Compositio Mathematika.* 2013. V. 149. № 3. P. 481-494.

[13]**Танкеев С.Г.** О стандартной гипотезе для комплексных 4-мерных эллиптических многообразий. *Известия РАН. Серия математическая.* 2012. Т. 76. № 5. С. 119–142.

[14]**Танкеев С.Г.** О стандартной гипотезе для комплексных 4-мерных эллиптических многообразий и компактификаций минимальных моделей Нерона. *Известия РАН. Серия математическая.* 2014. Т. 78. № 1. С. 181–214.

[15]**Lieberman D.I.** Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds. *American Journal of Mathematics.* 1968. V. 90. № 2. P. 366–374.

[16]**Танкеев С.Г.** О численной эквивалентности алгебраических циклов на потенциально простых абелевых схемах простой относительной размерности. *Известия РАН. Серия математическая.* 2005. Т. 69. № 1. С. 145–164.

[17]**Katz N.M., Messing W.** Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields. *Inventiones Mathematicae.* 1974. V. 23. № 1. P. 73–77.

[18]**Танкеев С.Г.** Моноидальные преобразования и гипотезы об алгебраических циклах. *Известия РАН. Серия математическая.* 2007. Т. 71. № 3. С. 197–224.

[19]**André Y.** Pour une théorie inconditionnelle des motifs. *Institut des Hautes Études Scientifiques Publications Mathématiques.* 1996. V. 83. P. 5-49.

Цели и задачи

Целью настоящей работы является доказательство гипотезы Ходжа и стандартной гипотезы типа Лефшеца для расслоенного квадрата гладкого проективного неизотривиального семейства $K3$ поверхностей над гладкой проективной кривой при условии, что ранг решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое семейства является нечётным простым числом; гипотеза Ходжа доказана для расслоенного произведения двух неизотривиальных семейств $K3$ поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой C при условии, что для любой точки s кривой хотя бы один из слоев семейств над этой точкой не имеет особенностей, ранг решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое первого семейства является нечетным числом, отличным от ранга решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое второго семейства.

Научная новизна

В работе впервые исследованы алгебраические циклы на расслоенном произведении двух 1-параметрических семейств $K3$ поверхностей (с вырождениями) над гладкой проективной кривой в свете гипотезы Ходжа и стандартной гипотезы $B(X)$ Гротендика.

Все полученные в работе результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и могут найти применение в алгебраической геометрии, диофантовой геометрии и теории чисел. Они могут быть полезны при чтении специальных курсов студентам математических факультетов университетов.

Методология и методы исследования

В работе используются методы теории Ходжа, развитые в работах П. Делиня[20] и С.Цуккера[21].

Положения, выносимые на защиту

1. Доказательство гипотезы Ходжа и стандартной гипотезы типа Лефшеца для расслоенного квадрата гладкого проективного неизотривиального семейства $K3$ поверхностей над гладкой проективной кривой при условии, что

[20] **Делинь П.** Теория Ходжа. II. *Математика. Сборник переводов иностранных статей.* 1973. Т. 17. № 5. P. 3-56.

[21] **Zucker S.** Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 cohomology in the Poincaré metric. *Annals of Mathematics*(2). 1979. V. 109. № 3. P. 415-476.

ранг решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое семейства является нечётным простым числом.

2. Доказательство гипотезы Ходжа для расслоенного произведения двух неизотривиальных семейств $K3$ поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой C при условии, что для любой точки s кривой хотя бы один из слоев семейств над этой точкой не имеет особенностей, ранг решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое первого семейства является нечётным числом, отличным от ранга решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое второго семейства.

Степень достоверности и апробация работы

Результаты исследования прошли апробацию на следующих конференциях:
– Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2-7 июля 2010 года),
– Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 1-5 июля 2011 года),
– Рождественская математическая встреча с П. Делинем 8-10 января 2012 года, посвящённая XX-летию Независимого Московского университета,
– Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 29 июня - 4 июля 2012 года),
– Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 5-9 июля 2013 года),
– Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам,(Суздаль, 4-9 июля 2014 года).

Публикации автора

По тематике исследования опубликовано 8 работ, в том числе три работы в журналах из перечня ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, трёх глав, содержащих 14 параграфов, заключения и списка литературы из 40 наименований. Текст диссертации изложен на 104 страницах.

Краткое содержание работы

Основные результаты диссертации:

1. Доказательство гипотезы Ходжа и стандартной гипотезы типа Лефшеца для расслоенного квадрата гладкого проективного неизотривиального семейства $K3$ поверхностей над гладкой проективной кривой при условии, что ранг решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое семейства является нечётным простым числом.

2. Доказательство гипотезы Ходжа для расслоенного произведения двух неизотривиальных семейств $K3$ поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой C при условии, что для любой точки s кривой хотя бы один из слоев семейств над этой точкой не имеет особенностей, ранг решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое первого семейства является нечетным числом, отличным от ранга решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое второго семейства.

Глава 1 содержит обзор работ и основных результатов по теме диссертации, известных из литературы. В этой же главе приводятся основные понятия и обозначения, используемые в диссертации.

В **§ 1** приведены краткие сведения о группах и алгебрах Ли (включая классификацию простых алгебр Ли над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел), а также их линейных представлениях.

В **§ 2** рассматриваются классические результаты о структурах Ходжа, группах Ходжа и классах Пуанкаре.

В **§ 3** изучается точная последовательность рациональных структур Ходжа

$$0 \to H^2(C, R^{n-2}\pi_*\mathbb{Q}) \to \mathrm{Ker}[H^n(X,\mathbb{Q}) \to H^0(C, R^n\pi_*\mathbb{Q})] \to H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{Q}) \to 0,$$

индуцированна спектральной последовательностью Лере.

В **§ 4** приведены некоторые сведения о $K3$ поверхностях и поверхностях Куммера, дано определение группы Ходжа $K3$ поверхности.

В **§ 5** обсуждаются эквивалентные формулировки стандартной гипотезы $B(X)$ типа Лефшеца, гипотезы $D(X)$ о совпадении численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов на X, гипотезы $C(X)$ об алгебраичности компонент Кюннета класса диагонали.

В **§ 6** рассматриваются фундаментальная группа кривой, представление монодромии, высшие прямые образы $R^i\pi_*\mathbb{Q}$ постоянного пучка $\mathbb{Q}$.

В **главе 2** содержатся доказательства основных результатов диссертации:

Теорема 1. *Пусть* $\pi_k : X_k \to C$ $(k = 1, 2)$ *– проективное неизотривиальное семейство* $K3$ *поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой* C*. Предположим, что множества* $\Delta_k = \{\delta \in C \mid \mathrm{Sing}(X_{k\delta}) \neq \varnothing\}$ $\quad (k = 1, 2)$ *не пересекаются.*

Если для общих геометрических слоев X_{1s} и X_{2s} выполнены следующие условия:

(i) $\operatorname{rank} \mathrm{NS}(X_{1s})$ *является нечётным числом;*

(ii) $\operatorname{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) \neq \operatorname{rank} \mathrm{NS}(X_{2s})$,

то для любой гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

Если, кроме того, морфизмы π_1 и π_2 гладкие, $p_k = 22 - \operatorname{rank} \mathrm{NS}(X_{ks})$ $(k = 1, 2)$ – нечётные простые числа и $p_1 \neq p_2$, то для $X_1 \times_C X_2$ верна стандартная гипотеза Гротендика об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа.

Здесь общность точки $s \in C$ означает, что она принадлежит множеству $C \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$, где $\Delta_{\mathrm{countable}}$ - счётное подмножество, зависящее от семейств π_k; мы можем также предполагать, что функции $s \mapsto \operatorname{rank} \mathrm{NS}(X_{ks})$ $(k = 1, 2)$ постоянны на множестве $C \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$.

Теорема 2. *Пусть C - гладкая проективная кривая над полем комплексных чисел, $\pi_1 : X_1 \to C$ - гладкое проективное неизотривиальное семейство $K3$ поверхностей, причем для общего геометрического слоя X_{1s} число $22 - \operatorname{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) = p_1$ является нечётным простым. Тогда для расслоенного квадрата $X = X_1 \times_C X_1$ верны гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа.*

В **§ 7** рассматриваются некоторые дополнительные сведения, восходящие к Ю.Г. Зархину, о группе Ходжа $K3$ поверхности и ее линейном представлении в 2-мерных когомологиях.

Пусть S гладкая проективная поверхность типа $K3$. Рассмотрим разложение Ходжа

$$H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = H^{2,0}(S, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(S, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(S, \mathbb{C}),$$

где $H^{p,q}(S, \mathbb{C})$ - пространство гармонических форм типа (p, q). Известно, что $H^{2,0}(S, \mathbb{C}) \widetilde{\to} H^0(S, \Omega^2_S)$, $\quad H^{0,2}(S, \mathbb{C}) \widetilde{\to} H^2(S, \mathcal{O}_S)$ являются одномерными пространствами над $\mathbb{C}$.

Пусть $U^1 = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}$ - единичная окружность. Определим ее действие в $H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ следующим образом: $e^{i\theta}$ действует на $H^{p,q}(S, \mathbb{C})$ как умножение на число $e^{i\theta(p-q)}$. В итоге мы получаем морфизм групп

$$U^1 \xrightarrow{h} \mathrm{GL}(H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}),$$

где $h(e^{i\theta})(w_{2,0} + w_{1,1} + w_{0,2}) = e^{2i\theta} w_{2,0} + w_{1,1} + e^{-2i\theta} w_{0,2}$ на пространстве $H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$.

По определению, *группой Ходжа $K3$* поверхности S называется наименьшая алгебраическая $\mathbb{Q}$-подгруппа $\mathrm{Hg}(S) \hookrightarrow \mathrm{GL}(H^2(S, \mathbb{Q}))$, группа $\mathbb{R}$-точек которой содержит $h(U^1)$.

По теореме Лефшеца о дивизорах имеем:

$$H^2(S,\mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(S)} = H^2(S,\mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(S,\mathbb{C}) = \mathrm{NS}(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S),$$

где $\mathrm{NS}(S)$ группа Нерона–Севери поверхности S, совпадающая с группой Пикара $\mathrm{Pic}(S)$. Она порождается классами когомологий алгебраических кривых, лежащих на S.

Пусть $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ – ортогональное дополнение к $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)$ в $H^2(S,\mathbb{Q})$ относительно билинейного спаривания

$$<\,,\,>\colon H^2(S,\mathbb{Q})\times H^2(S,\mathbb{Q}) \xrightarrow{x\times y\mapsto x\smile y} H^4(S,\mathbb{Q}) \widetilde{\to} \mathbb{Q}(-2) \xrightarrow[\sim]{(2\pi i)^2} \mathbb{Q}.$$

Это $\mathbb{Q}$–пространство трансцендентных классов когомологий в $H^2(S,\mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)\oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$. Из описания Ю.Г. Зархиным группы $\mathrm{Hg}(S)$ известно, что $\mathrm{Hg}(S)$-модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ простой и $E = E(S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(S)}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ – вполне вещественное поле $E_0 = E_0(S)$ или мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля E_0. Пусть

$$\Phi : \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}\times \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \xrightarrow{x\times y\mapsto \alpha} E$$

– спаривание, определяемое формулой

$$< ex, y > = \mathrm{tr}_{E/\mathbb{Q}}(e\alpha) \quad \text{для всех} \quad e\in E.$$

Если $E = E_0$, то группа $\mathrm{Hg}(S)$ полупростая,

$$\mathrm{Hg}(S) = \mathrm{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}(\mathrm{SO}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp},\Phi)),$$

где $\mathrm{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}(\mathrm{SO}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp},\Phi))$ получается из E_0-группы $\mathrm{SO}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp},\Phi)$ ограничением поля скаляров до $\mathbb{Q}$. Лемма Шура и равенство

$$E\otimes\overline{\mathbb{Q}} = \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(S)}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}\otimes\overline{\mathbb{Q}}$$

дают разложение

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}\otimes\overline{\mathbb{Q}} = V_1\oplus\cdots\oplus V_e,$$

где $e = [E:\mathbb{Q}]$, $V_i = V_i(S)$ $(i = 1,\ldots,e)$ – неприводимые попарно неизоморфные ортогональные $\mathrm{Hg}(S)\otimes\overline{\mathbb{Q}}$-модули, образ канонического морфизма $\mathrm{Hg}(S)\otimes\overline{\mathbb{Q}}\to\mathrm{GL}(V_i)$ совпадает с $\mathrm{SO}(V_i)$, группа Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ транзитивно переставляет $V_1,\ldots,V_e$. Следовательно,

$$\mathrm{Hg}(S)\otimes\overline{\mathbb{Q}} \widetilde{\to} \prod_{i=1}^{e}\mathrm{SO}(V_i).$$

Пара

$$\left(\text{тип } \mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(S)\otimes\overline{\mathbb{Q}},\ \ \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}\otimes\overline{\mathbb{Q}}\right)$$

принимает одно из следующих значений:

$$\Big(A_1\times\cdots\times A_1=A_1^e,\ \ E(2\omega_1^{(1)})\oplus\cdots\oplus E(2\omega_1^{(e)})\Big),$$
$$\text{если}\quad \dim V_i=3;$$
$$\Big(A_1\times\cdots\times A_1=A_1^{2e},\ \ E(\omega_1^{(1)}+\omega_1^{(2)})\oplus\cdots\oplus E(\omega_1^{(2e-1)}+\omega_1^{(2e)})\Big),$$
$$\text{если}\quad \dim V_i=4;$$
$$\Big(B_n\times\cdots\times B_n=B_n^e,\ \ E(\omega_1^{(1)})\oplus\cdots\oplus E(\omega_1^{(e)})\Big),$$
$$\text{если}\quad \dim V_i=2n+1,\quad n\geq 2;$$
$$\Big(D_n\times\cdots\times D_n=D_n^e,\ \ E(\omega_1^{(1)})\oplus\cdots\oplus E(\omega_1^{(e)})\Big),$$
$$\text{если}\quad \dim V_i=2n,\quad n\geq 3,$$

где через $E(\omega_1^{(i)})$ обозначается стандартное неприводимое представление со старшим весом $\omega_1^{(i)}$ (в обозначениях Н.Бурбаки) i-го простого фактора типа A_1, B_n или D_n полупростой алгебры Ли $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(S)\otimes\overline{\mathbb{Q}}$.

Лемма Г.А. Мустафина[22]. *Пусть* $\rho: g\to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}V$ *— точное* $\mathbb{Q}$*-неприводимое представление* $\mathbb{Q}$*-полупростой алгебры Ли* g*, и пусть* $g_{\mathbb{C}}=g_1\times\ldots\times g_e$ *— разложение на простые факторы комплексификации* g*, где* $e=\dim_{\mathbb{Q}}(Z(\mathrm{End}_g V))$*,* $Z(\mathrm{End}_g V)$ *— центр алгебры* $\mathrm{End}_g V$*. Тогда алгебра Ли* g $\mathbb{Q}$*-проста.*

Согласно лемме Мустафина, алгебра Ли $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(S)$ является $\mathbb{Q}$-простой, если $\dim V_i\neq 4$. Напомним, что $\mathbb{Q}$-алгебра Ли называется $\mathbb{Q}$-простой, если она не имеет нетривиальных идеалов, определённых над $\mathbb{Q}$.

Предположим, что $E\neq E_0$. Тогда $\mathrm{Hg}(S)=\mathrm{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}(\mathrm{U}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp},\Phi))$, где $\mathrm{U}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp},\Phi)$ – унитарная группа E-векторного пространства $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ относительно эрмитовой формы Φ[23]; другими словами, $\mathrm{U}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp},\Phi)=\{A\in\mathrm{GL}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}/E_0)\mid \Phi(Ax,Ay)=\Phi(x,y)\quad \forall x\ \forall y\in\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}\}$.

В этом случае легко проверить, что полупростая часть $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(S)^{\mathrm{ss}}\otimes\overline{\mathbb{Q}}$ редуктивной алгебры Ли $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(S)\otimes\overline{\mathbb{Q}}$ является произведением $e_0=e/2$ экземпляров простой алгебры Ли типа A_n $(n\geq 1)$ и $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(S)^{\mathrm{ss}}\otimes\overline{\mathbb{Q}}$-модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}\otimes\overline{\mathbb{Q}}$ допускает разложение

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}\otimes\overline{\mathbb{Q}}=E(\omega_1^{(1)})\oplus E(\omega_n^{(1)})\oplus\cdots\oplus E(\omega_1^{(e_0)})\oplus E(\omega_n^{(e_0)}),$$

где $E(\omega_1^{(i)})$ – стандартное неприводимое представление алгебры Ли типа A_n в $(n+1)$-мерном пространстве над $\overline{\mathbb{Q}}$ и $E(\omega_n^{(i)})=E(\omega_1^{(i)})^{\vee}$ – представление,

[22]**Мустафин Г.А.** Семейства алгебраических многообразий и инвариантные циклы. *Известия АН СССР. Серия математическая.* 1985. Т. 49. № 5. С. 948-978.

[23]**Zarhin Yu.G.** Hodge groups of $K3$ surfaces. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1983. V. 341. P. 193-220.

двойственное стандартному (оно изоморфно n-й внешней степени стандартного представления).

В **§ 8** содержится доказательство гипотезы Ходжа для расслоенного произведения $X = X_1 \times_C X_2$ двух семейств $K3$ поверхностей при некоторых ограничениях на особые слои морфизмов $\pi_k : X_k \to C$ и ранги групп Нерона–Севери общих геометрических слоев. Вычисления основаны на следующей лемме:

Лемма 8.2. *Пусть* $\pi_k : X_k \to C$ *проективное неизотривиальное семейство* $K3$ *поверхностей (возможно с вырождениями) над гладкой проективной кривой, причем для точки* $s \in C'$, *общей в смысле Ходжа для каждого из семейств* $\pi_k : X_k \to C$, *выполнены следующие условия:*

(i) $\operatorname{rank} \mathrm{NS}(X_{1s})$ *является нечётным числом;*

(ii) $\operatorname{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) \neq \operatorname{rank} \mathrm{NS}(X_{2s})$.

Тогда

$$\mathrm{Hom}_{\pi_1(C',s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) = 0.$$

Используя результаты С.Цуккера[24], получаем точную последовательность $\mathbb{Q}$-структур Ходжа

$$0 \to H^2(C, \mathbb{Q}) \to H^2(X_k, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^2\pi_{k*}\mathbb{Q}) \to 0,$$

где $H^2(C, \mathbb{Q})$ порождается алгебраическим классом $\mathrm{cl}_{X_k}(X_{ks})$ слоя X_{ks} (и, следовательно, имеет тип Ходжа $(1,1)$).

Лемма 8.4. *Рациональная структура Ходжа* $H^0(C, R^2\pi_{k*}\mathbb{Q})$ *имеет тип* $(1,1)$.

Лемма 8.5. *Имеем:* $H^2(X_k, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$, $\quad H^2(X, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$.

Согласно сильной теореме Лефшеца $H^4(X_k, \mathbb{Q}) = H^2(X_k, \mathbb{Q}) \smile \mathrm{cl}_{X_k}(H_k)$, где H_k – гиперплоское сечение многообразия X_k. Поэтому из леммы 8.5 следует, что пространство $H^4(X_k, \mathbb{Q})$ порождается алгебраическими классами когомологий.

Существует каноническое сюръективное отображение ограничения

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k) = H^2(X_k, \mathbb{Q}) \to H^0(C', R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}).$$

Поэтому элементы из $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})$ поднимаются до алгебраических классов из $H^2(X_k, \mathbb{Q})$. С другой стороны, элементы пространства $H^4(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$ поднимаются до алгебраических классов из $H^4(X_k, \mathbb{Q})$, потому что каноническое отображение ограничения $H^4(X_k, \mathbb{Q}) \to H^4(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$ сюръективно по теореме Делиня[25].

Пространство $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами алгебраических классов в $H^4(X, \mathbb{Q})$, лежащих в $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1) \smile \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_2)$, $\quad H^4(X_1, \mathbb{Q})$, $\quad H^4(X_2, \mathbb{Q})$,

[24] **Zucker S.** Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 cohomology in the Poincaré metric. *Annals of Mathematics*(2). 1979. V. 109. № 3. P. 415-476.

[25] **Делинь П.** Теория Ходжа. II. *Математика. Сборник переводов иностранных статей.* 1973. Т. 17. № 5. P. 3-56.

где $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$ отождествляется с образом $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$ при каноническом отображении $q_k^* : H^2(X_k, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$, определённом проекцией $X = X_1 \times_C X_2 \xrightarrow{q_k} X_k$ и $H^4(X_k, \mathbb{Q})$ отождествляется с образом $H^4(X_k, \mathbb{Q})$ при каноническом отображении $q_k^* : H^4(X_k, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^4(X, \mathbb{Q})$. В частности, имеется точная последовательность рациональных структур Ходжа

$$\begin{aligned} 0 \to (i_\Delta f)_* \left[H^2(Z, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(Z, \mathbb{C})\right] \to \left[H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})\right] \\ \to H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \to 0. \end{aligned}$$

Теорема Лефшеца о дивизорах на гладком (возможно, несвязном) многообразии Z показывает, что эта последовательность имеет вид

$$0 \to (i_\Delta f)_* \, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(Z) \to \left[H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})\right] \to H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \to 0.$$

Поскольку $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами алгебраических классов на X, то $H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})$ порождается классами когомологий алгебраических циклов коразмерности 2 на X. Значит, для X верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

В **§ 9** содержится доказательство гипотезы $B(X)$ в случае, когда морфизмы π_k гладкие, числа $p_k = 22 - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{ks})$ $(k = 1, 2)$ – нечётные простые и $p_1 \neq p_2$. Заметим, что p_k суть ранг решётки трансцендентных классов когомологий на X_{ks}.

Используя идею доказательства теоремы 8.3 в работе Танкеева С.Г.[26], можно легко показать, что существует *алгебраический* изоморфизм

$$H^1(C, R^6\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}),$$

определённый алгебраическим классом $\iota_*(\mathrm{cl}_{X \times_C X}(Z))$, где $\iota : X \times_C X \hookrightarrow X \times X$ - каноническое вложение.

Значит, алгебраический класс $\iota_*(\mathrm{cl}_{X \times_C X}(Z))$ даёт *алгебраический* изоморфизм

$$H^7(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^3(X, \mathbb{Q}).$$

Кроме того, существуют алгебраические изоморфизмы

$$\begin{aligned} H^{10}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \mathbb{Q}), \qquad H^9(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbb{Q}), \\ H^8(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Q}), \qquad H^6(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^4(X, \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

определённые соответственно алгебраическими циклами Пуанкаре

$$\wp(H^i(X, \mathbb{Q})) \in \left[H^i(X, \mathbb{Q}) \otimes H^i(X, \mathbb{Q})\right]^{\mathrm{Aut}(H^i(X,\mathbb{Q}),\Phi)^0},$$

где $\Phi : H^i(X, \mathbb{Q}) \times H^i(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \mapsto < x \smile y \smile \mathrm{cl}_X(H)^{5-i} >} \mathbb{Q}$ - форма поляризации на X и группа $\mathrm{Aut}(H^i(X, \mathbb{Q}), \Phi)^0$ диагонально действует на $H^i(X, \mathbb{Q}) \otimes H^i(X, \mathbb{Q})$

[26]**Танкеев С.Г.** О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий. II. *Известия РАН. Серия математическая.* 2011. Т. 75. № 5. С. 177-194.

(напомним, что по доказанному в § 8 пространства $H^2(X,\mathbb{Q})$ и $H^4(X,\mathbb{Q})$ порождаются алгебраическими классами). Значит, $B(X)$ верна[27].

В **§ 10** доказываются гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза $B(X)$ для расслоенного квадрата $X = X_1 \times_C X_2$ гладкого неизотривиального семейства $\pi_1 : X_1 \to C$ $K3$ поверхностей при условии, что $p_1 = 22 - \operatorname{rank} \mathrm{NS}(X_{1s})$ – нечётное простое число для общего геометрического слоя X_{1s}.

Достаточно доказать гипотезу Ходжа для $X = X_1 \times_C X_1$, потому что тогда гипотеза $B(X)$ легко проверяется с помощью метода из § 9.

Для *общей в смысле Ходжа* точки $s \in C$ пространство $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является абсолютно неприводимым $\mathrm{Hg}(X_{1s})$-модулем[28], поэтому группа

$$\mathrm{Hg}(X_{1s}) = \mathrm{SO}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}))^{\perp}, \Phi)$$

- простая алгебраическая группа типа $B_{\frac{p_1-1}{2}}$.

Из результатов § 8 имеем: $H^2(X_1,\mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1)$, $H^4(X_1,\mathbb{Q})$, $H^2(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q})$ и $H^2(X,\mathbb{Q})$ порождены классами алгебраических циклов.

Пространство $H^4(X_{1s} \times X_{1s},\mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X_{1s} \times X_{1s},\mathbb{C})$ порождается классами пересечений дивизоров и классом диагонали $\Delta_{X_{1s}} \hookrightarrow X_{1s} \times X_{1s}$ (в частности, гипотеза Ходжа выполнена для $X_{1s} \times X_{1s}$).

Заметим, что в силу результатов Окамото[29] класс

$$\mathrm{cl}_{X_{1s}\times X_{1s}}(\Delta_{X_{1s}}) \in H^4(X_{1s} \times X_{1s},\mathbb{Q})$$

не когомологичен сумме пересечений дивизоров с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Значит, образ

$$\mathrm{cl}_{X_1\times_C X_1}(\Delta_{X_1}) \in H^4(X_1 \times_C X_1,\mathbb{Q}) = H^4(X,\mathbb{Q})$$

при каноническом сюръективном морфизме $H^4(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$ не когомологичен сумме пересечений дивизоров, потому что

$$H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^4(X_{1s} \times X_{1s},\mathbb{Q})^{\pi_1(C,s)} \subset H^4(X_{1s} \times X_{1s},\mathbb{Q})$$

суть образ $H^4(X,\mathbb{Q})$ при каноническом морфизме ограничения

$$H^4(X,\mathbb{Q}) \to H^4(X_{1s} \times X_{1s},\mathbb{Q}).$$

Обозначим через Δ_{X_1} диагональ в $X_1 \times_C X_1 = X$.

Отображение $H^4(X,\mathbb{Q}) \to H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$ сюръективно по теореме Делиня[30].

[27]**Kleiman S.L.** Algebraic cycles and the Weil conjectures. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas.* North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968. P. 359-386.

[28]**Танкеев С.Г.** Об арифметике и геометрии общего гиперповерхностного сечения. *Известия РАН. Серия математическая.* 2002. Т. 66. № 2. С. 173–204.

[29]**Okamoto M.** On a certain decomposition of 2-dimensional cycles on a product of two algebraic surfaces. *Proceeding of Japan Academy.* Series A. 1981. V. 57. № 6. P. 321-325.

[30]**Делинь П.** Теория Ходжа. II. *Математика. Сборник переводов иностранных статей.* 1973. Т. 17. № 5. P. 3-56.

Из этого результата следует, что $H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$ порождено образами пересечений дивизоров на X и образом класса $\mathrm{cl}_{X_1\times_C X_1}(\Delta_{X_1}) = \mathrm{cl}_X(\Delta_{X_1})$ в $H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$. Гипотеза Ходжа для X следует из того, что $H^2(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) = H^2(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q})$ порождается классами пересечений дивизоров на множителях расслоенного произведения $X = X_1 \times_C X_1$ и, следовательно, на X.

В главе 3 мы доказываем следующие основные результаты:

Теорема 3. *Пусть* $\pi_k : X_k \to C$ $(k = 1, 2)$ *– проективные неизотривиальные семейства* $K3$ *поверхностей (возможно с вырождениями) над гладкой проективной кривой* C. *Предположим, что общие геометрические слои* X_{1s}, X_{2s} *удовлетворяют следующим условиям*:

(i) *кольцо* $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ *– мнимое квадратичное расширение поля* $\mathbb{Q}$,

(ii) $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18$,

(iii) $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{2s})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ *– вполне вещественное поле или* $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) < \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$.

Тогда для любой гладкой проективной модели X *расслоенного произведения* $X_1 \times_C X_2$ *верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.*

Теорема 4. *Для проективных неизотривиальных семейств* $\pi_k : X_k \to C$ $K3$ *поверхностей (возможно с вырождениями) над гладкой проективной кривой* C *предположим, что общие геометрические слои* X_{1s}, X_{2s} *удовлетворяют хотя бы одному из следующих условий*:

(i) $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s})$ *является нечетным числом*, $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$;

(ii) $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18$, $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$, $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$.

Тогда для любой гладкой проективной модели X *расслоенного произведения* $X_1 \times_C X_2$ *верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.*

Теорема 5. *Гипотеза Ходжа верна для гладкой модели* X *расслоенного квадрата* $X_1 \times_C X_1$, *если семейство* $K3$ *поверхностей* $\pi_1 : X_1 \to C$ *неизотривиальное и для общего геометрического слоя* X_{1s} *выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(iii) $p_1 = 22 - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s})$ *– нечетное простое число;*

(iv) $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18$ *и* $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$.

Теоремы 3-5 можно рассматривать как важные шаги в доказательстве стандартной гипотезы Гротендика $B(X)$ (типа Лефшеца) об алгебраичности оператора Ходжа "звездочка" и гипотетического существования мотивного разложения Чжоу-Лефшеца для некоторых гладких комплексных проективных многообразий X, которое обсуждается в работе Виала[31].

В **§ 11** рассматриваются представления монодромии, ассоциированные с гладкими семействами K3 поверхностей.

[31] **Vial Ch.** Projectors on the intermediate algebraic Jacobians. *New York Journal of Mathematics*. 2013. V. 19. P. 793-822.

11.2. Лемма. *Если для общих геометрических слоёв X_{1s}, X_{2s} кольцо* $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})}\,\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ *– мнимое квадратичное расширение поля* $\mathbb{Q}$, $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18$, *причём* $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{2s})}\,\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ *– вполне вещественное поле или* $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) < \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$, *то*

$$\mathrm{Hom}_{\pi_1(C',s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) = 0.$$

В **§ 12** изучается геометрия гладких моделей расслоенных произведений семейств K3 поверхностей с умножениями из мнимого квадратичного поля и доказывается теорема 3.

12.2. Замечание. Если $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18$ и кольцо $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})}\,\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = K$ является мнимым квадратичным полем для некоторой точки $s \in C'$, общей в смысле Ходжа для гладкого семейства $K3$ поверхностей $\pi_1' : X_1' \to C'$, то можно считать, что для любой точки $t \in C' \backslash \Delta_{\mathrm{countable}}$ имеется равенство $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1t})}\,\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t})^{\perp} = K$.

В **§ 13** изучаются алгебраические циклы на гладкой модели расслоенного произведения семейств K3 поверхностей и доказывается теорема 4.

13.3. Лемма. *Пусть $\pi_k : X_k \to C$ проективное неизотривиальное семейство $K3$ поверхностей (возможно с вырождениями) над гладкой проективной кривой, причем для точки $s \in C'$, общей в смысле Ходжа для каждого из семейств $\pi_k : X_k \to C$, выполнены следующие условия*: $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18$, $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})}\,\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$, $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$.

Тогда $\mathrm{Hom}_{\pi_1(C',s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) = 0$.

В силу леммы 13.3 точная последовательность

$$0 \to (i_{\Delta} f)_*\, H^2(Z, \mathbb{Q}) \to H^4(X, \mathbb{Q}) \to H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \to 0$$

рациональных структур Ходжа дает точную последовательность $\mathbb{Q}$-структур Ходжа

$$\begin{aligned} 0 \to (i_{\Delta} f)_*\, [H^2(Z, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(Z, \mathbb{C})] \to [H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})] \\ \to H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \to 0. \end{aligned}$$

Теорема Лефшеца о дивизорах на гладком (возможно, несвязном) многообразии Z показывает, что эта последовательность имеет вид

$$0 \to (i_{\Delta} f)_*\, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(Z) \to [H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})] \to H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \to 0.$$

По доказанному выше $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами алгебраических классов на X, поэтому $H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})$ порождается классами когомологий алгебраических циклов коразмерности 2 на X. Значит, для X верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах и теорема 4 доказана.

В **§ 14** аналогично доказывается теорема 5.

Заключение

Гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика (типа Лефшеца) являются наиболее интересными гипотезами современной алгебраической геометрии, поэтому развитие подходов к этим гипотезам является важной задачей.

На будущее желательно получить доказательство стандартной гипотезы для гладкой проективной модели расслоенного произведения двух 1-праметрических семейств $K3$ поверхностей (возможно, с вырождениями). Это потребует специальной техники разрешения особенностей расслоенного произведения. Основные идеи доказательств, по-видимому, могут быть усилены для решения более трудных задач. Таким образом, потенциал диссертации далеко не исчерпан.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ

[1] Никольская, О.В. Об алгебраических циклах на расслоенном произведении семейств К3 поверхностей /О.В. Никольская// *Известия РАН. Серия математическая.* – 2013. – Т. 77. – № 1. – С. 145–164.

[2] Никольская, О.В. О геометрии гладкой модели расслоенного произведения семейств К3 поверхностей /О.В. Никольская// *Математический сборник РАН.* – 2014. – Т. 205. – № 2. – С. 123–130.

[3] Никольская, О.В. Об алгебраических классах когомологий на гладкой модели расслоенного произведения семейств К3 поверхностей /О.В. Никольская// *Математические заметки.* – 2014. – Т. 96. – № 5. – С. 738–746.

Другие публикации:

[4] Никольская, О.В. О геометрии расслоенного произведения двух гладких семейств $K3$ поверхностей /О.В. Никольская// Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2-7 июля 2010 года). Тезисы докладов. – 2010. – С. 139–140.

[5] Никольская, О.В. Об алгебраических циклах на расслоенном произведении гладких семейств К3 поверхностей /О.В. Никольская// Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 1-5 июля 2011 года). Тезисы докладов. – 2011. – С. 150–152.

[6] Никольская, О.В. Об алгебраических циклах на гладкой модели расслоенного произведения семейств К3 поверхностей /О.В. Никольская// Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 29 июня - 4 июля 2012 года). Тезисы докладов. – 2012. – С. 128–129.

[7] Никольская, О.В. О циклах на гладкой модели расслоенного произведения семейств К3 поверхностей /О.В. Никольская// Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 5-9 июля 2013 года). Тезисы докладов. – 2013. – С. 177–179.

[8] Никольская, О.В. Об алгебраических циклах на гладкой модели расслоенного произведения семейств К3 поверхностей с вырождениями рационального типа /О.В. Никольская// Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, (Суздаль, 4-9 июля 2014 года). Тезисы докладов. – 2014. – С. 126–127.