На правах рукописи

Алешин Сергей Владимирович

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДИФФУЗИЕЙ И ОТКЛОНЕНИЯМИ АРГУМЕНТОВ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2015

Работа выполнена на кафедре математического моделирования федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Кащенко Сергей Александрович,

Официальные оппоненты: Малинецкий Георгий Геннадьевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН; заведующий отделом моделирования нелинейных процессов;

Нефедов Николай Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», заведующий кафедрой математики.

Ведущая организация — Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук.

Защита состоится «11» декабря 2015 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 при Ярославском государственном университете им П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1. и на официальном сайте организации: http://www.uniyar.ac.ru

Автореферат разослан «__» ноября 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Глызин С.Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Уравнения типа «реакция–диффузия» являются модельными для широкого класса задач нелинейной динамики и находят применение в большом числе физических и биологических приложений (радиофизика, оптоэлектроника, гидродинамика и популяционная динамика). Одним из простейших представителей уравнений такого типа, сохраняющих, тем не менее, их ключевые свойства, является логистическое уравнение с диффузией и отклонениями аргументов. Изучение этого уравнения современными аналитическими и, согласованными с аналитическими, численными методами, выполненное в диссертации, позволило найти и описать ряд новых явлений. Этим определяется актуальность проведенного в работе исследования.

Цели работы

Объектами исследования диссертационной работы являются распределенные по пространству и времени динамические системы. Изучаются основные качественные свойства их решений. Для одного из наиболее важных представителей этого класса — логистического уравнения с диффузией и отклонениями пространственного и временного аргументов выполнен численный анализ, основанный на предваряющем его применении асимптотических методов. Целью исследования было получить описание качественного поведения задач данного класса, используя современные бифуркационные асимптотические и, согласованные с ними, численные методы. Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Рассмотрено логистическое уравнение с запаздыванием; исследована его локальная динамика; определены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия, а также численно проиллюстрированы полученные аналитические результаты.

2. Исследована задача распространения волны плотности в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией. Выделены значения запаздывания при которых качественно меняется профиль волны.

3. Изучена динамика распространения волны плотности в логистическом уравнении с отклонением пространственной переменной и диффузией. Выделены значения отклонения при которых качественно меняется профиль волны.

4. Разработан алгоритм вычисления инвариантных размерностных характеристик для дифференциальных уравнений с запаздыванием. Разработанный метод протестирован на логистическом уравнении с запаздыванием. Проиллюстрирована применимость алгоритма к задачам с запаз-

дыванием, для которых возможно наличие режима гиперхаоса (логистическое уравнение с двумя запаздываниями, уравнения диффузионного взаимодействия пары близких осцилляторов нейронного типа без учета и с учетом запаздывания в цепочке связи между осцилляторами, системы уравнений Ланга-Кобаяши и Стюарта-Ландау).

Методология и методы исследования

В работе используются известные бифуркационные асимптотические методы исследования систем дифференциальных уравнений. Методика их применения хорошо развита и изложена в большом числе работ. Следует отметить, что при всем этом развитие аналитических методов для анализа систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием очевидным образом отстает от потребностей приложений, а методики, разработанные для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, часто оказываются неприменимыми. В силу принципиальной сложности данных систем особую значимость приобретает разработка новых методов исследования качественного поведения решений и применение, согласованных с ними, численных методов.

Научная новизна

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Выполнены локальный и связанный с ним численный анализ логистического уравнения с запаздыванием. Получена асимптотика устойчивого цикла изучаемой задачи.

2. Проведено качественное исследование логистического уравнения с диффузией и отклонениями временного и пространственного аргументов вблизи единичного состояния равновесия. Выполнено подробное численное исследование распространения волны концентрации в логистическом уравнении с диффузией и отклонениями временной и пространственной переменных.

3. Разработан алгоритм вычисления ляпуновских экспонент для дифференциальных уравнений с запаздыванием. Рассчитаны ляпуновские экспоненты и ляпуновская размерность аттрактора нескольких задач с запаздываниями, обладающих решениями со сложным нерегулярным поведением.

Положения, выносимые на защиту

1. На основе построения квазинормальной формы сингулярно возмущенного логистического уравнения с запаздыванием получена асимптотика его устойчивого цикла.

2. В задаче о распространении волны возмущения, описываемой логистическим уравнением с диффузией и запаздыванием, найдены промежутки значений запаздывания, для которых профиль волны качественно отличается.
3. Для логистического уравнения с диффузией и отклонением пространственной переменной в задаче о распространении волны возмущения от начального импульса определены значения отклонения, для которых профили волны качественно отличаются.
4. Разработан и протестирован алгоритм вычисления инвариантных размерностных характеристик для дифференциальных уравнений с запаздыванием. Выполнен численный эксперимент по расчету ляпуновских экспонент и ляпуновской размерности для нескольких задач с запаздываниями, обладающих решениями со сложным нерегулярным поведением.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая и практическая значимость проведенного диссертационного исследования заключается в том, что используемые в работе методы и полученные в диссертации результаты могут быть использованы для решения широкого круга задач нелинейной динамики в математической экологии, биологии и физике.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты получены автором самостоятельно. Постановка задач и интерпретация результатов, представленных в диссертационной работе, выполнялись совместно с научным руководителем. Из работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию включены результаты, полученные лично автором при исследовании поставленных задач.

Апробация работы

Результаты работы были представлены на следующих научных семинарах и конференциях:

1. International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond September 6–10, 2015, Moscow, Russia.
2. Расширенный научный семинар «Методы суперкомпьютерного моделирования» на базе «Интеркосмос» ИКИ РАН в г. Таруса 21–23 апреля 2015 г.
3. Международный научный семинар «Актуальные проблемы математической физики» г. Москва, МГУ, 2014 г.
4. Расширенный научный семинар «Методы суперкомпьютерного моделирования» на базе «Интеркосмос» ИКИ РАН в г. Таруса 1–3 октября 2014 г.

5. Международная конференция «Нелинейные явления в задачах современной математики и физики», посвященная 210-летию Демидовского университета, Ярославль, 4–5 декабря 2013 г.

В ходе работы над диссертацией разработан программный комплекс «Оценка показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом», получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2013619678, Москва, 2013.

Частично результаты диссертационной работы получены при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00158).

Кроме того, результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре «Нелинейная динамика и синергетика» кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Публикации

По теме диссертации автором опубликовано 9 статей и тезисов докладов, в том числе 3 статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, содержащего 112 наименований и трех приложений. Диссертация содержит 36 рисунков, две таблицы. Общий объем диссертации составляет 92 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** приводится общая характеристика работы, обосновывается актуальность выбранного направления исследования, приводится краткий обзор литературы по исследуемой в работе тематике, описываются цели и постановки основных задач работы, отмечается научная новизна и значимость результатов, выносимых на защиту, а также описывается общая структура диссертационной работы.

Кратко изложим содержание работы.

В **первой главе** диссертационной работы рассмотрено логистическое уравнение с запаздыванием[1]:

$$\dot{u} = \lambda[1 - \alpha u - (1-\alpha)u(t-1)]u, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{1}$$

Начальные функции $\varphi \in C[-1, 0]$ для уравнения (1) предполагаются неотрицательными. В этом случае начальная задача Коши разрешима и решение не отрицательно при $t > 0$. Нулевое состояние равновесия является

[1] *Wright, E. M.* A non-linear differential equation / *E. M. Wright* // J. Reine Angew. Math. 1955.Vol. 194. №1–4, P. 66–87.

неустойчивым. Для определения устойчивости единичного состояния равновесия описываются возможные случаи расположения корней характеристического уравнения

$$\mu = -\lambda[\alpha + (1-\alpha)\exp(-\mu)]. \tag{2}$$

Хорошо известны следующие три утверждения[2].

Лемма 1. *Пусть* $\alpha > \dfrac{1}{2}$. *Тогда все корни (2) имеют отрицательные вещественные части.*

Лемма 2. *Пусть* $\alpha < \dfrac{1}{2}$. *Тогда все корни (2) удовлетворяют неравенству*

$$\operatorname{Re}\mu \leqslant \ln\frac{b}{a}.$$

Лемма 3. *Пусть выполнено неравенство* $\alpha < 1/2$. *Тогда найдется такое* $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha)$, *что при* $\lambda < \lambda_0(\alpha)$ *все корни (2) имеют отрицательные вещественные части, а при* $\lambda > \lambda_0(\alpha)$ *у уравнения (2) существует корень с положительной вещественной частью.*

Пусть

$$\lambda = \lambda_0(\alpha_0) + \varepsilon\lambda_1, \quad \alpha = \alpha_0 + \varepsilon\lambda_1, \tag{3}$$

где ε — малый параметр:

$$0 < \varepsilon \ll 1. \tag{4}$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (2) имеет пару чисто мнимых корней $\mu_{1,2} = \pm i\omega$ $(\omega > 0)$, а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части. При условиях (3),(4) имеет место бифуркация Андронова–Хопфа: это означает, что в достаточно малой (и не зависимой от ε) окрестности $u_0 \equiv 1$ уравнение (1) имеет локальное устойчивое двумерное инвариантное интегральное многообразие. На нем это уравнение представимо (при выполнении некоторых условий типа невырожденности) в виде комплексного уравнения первого порядка

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon a_1 \xi + d|\xi|\xi + O(\varepsilon^2 + |\xi|^2), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 = -[1-(1-\alpha_0)\lambda_0\exp(-i\omega)]^{-1}\cdot[\lambda_1(1+(1-\alpha_0)\exp(-i\omega)) +{}\\ +\lambda_0\alpha_1(1+\exp(-i\omega))],\\ d = -\lambda_0^2[1-\lambda_0(1-\alpha_0)\exp(-i\omega)]^{-1}\cdot[2\alpha_0+(1-\alpha_0)(\exp(i\omega)+\exp(-2i\omega))]\times\\ \times(1-\alpha_0)i\sin\omega\cdot[2i\omega+\alpha_0\lambda_0+(1-\alpha_0)\lambda_0]\exp(-2i\omega)]^{-1}. \end{aligned}$$

[2] *Kashchenko, S.A.* Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation / *S.A. Kashchenko* // Automatic Control and Computer Science. 2013. Vol. 47, №7. P. 470–494.

На основе анализа нормальной формы (5) может быть сформулированно следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{Re} a_1 > 0$ *и* $\operatorname{Re} d < 0$. *Тогда существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *уравнение (1) имеет орбитально асимптотически устойчивое периодическое решение* $u_0(t,\varepsilon) = 1+\varepsilon^{1/2}\rho_0\cos[(\omega+\varepsilon\varphi_0+o(\varepsilon^2)t]+o(\varepsilon)$ *периода* $T(\varepsilon) = 2\pi\omega^{-1}(1+\varepsilon\varphi_0\omega^{-1}+o(\varepsilon^2))$.

Далее в работе строится квазинормальная форма в сингулярно возмущенном случае. Основное предположение состоит в том, что выполнено условие

$$\lambda^{-1} = \varepsilon \ll 1, \quad \nu = c\varepsilon^2 \tag{6}$$

и

$$\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_{k_0} + \varepsilon\lambda_{k_1} + \varepsilon^2\lambda_{k_2} + \ldots,$$

где

$$\begin{gathered}\lambda_{k_0} = \pi(2k+1)i, \quad \lambda_{k_1} = -2\pi(2k+1)i,\\ \lambda_{k_2} = -2\pi^2(2k+1)^2 + 4\pi(2k+1)i - 2c.\end{gathered}$$

Для определения неизвестной амплитуды $\xi(\tau,y)$ получаем уравнение:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + 2\frac{\partial\xi}{\partial y} - c\xi + \xi^2\frac{\partial\xi}{\partial y} \tag{7}$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, y+1) \equiv -\xi(\tau,y). \tag{8}$$

Отметим, что решения $\xi(\tau,y)$ рассматриваются при $\tau > 0$ как функции по y из соболевского пространстве $W_2^2(0,1)$ с антипериодическими краевыми условиями. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть краевая задача (7), (8) имеет при всех* $\tau > \tau_0$ *ограниченное вместе с производными по* τ *и по* y *решение* $\xi_0(\tau,y)$. *Тогда, уравнение (1) имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon^{5/2})$ *решение* $u(t,\varepsilon) = 1+v_0(t,\varepsilon)$, *для которого* $v_0(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\xi_0(\tau,y) - \varepsilon^2\xi_0^2(\tau,y)\dfrac{\partial\xi_0(\tau,y)}{\partial y}$ *и* $\tau = \varepsilon^2 t$, $y = (1-2\varepsilon)t$.

В следующем разделе выполнен локальный анализ нулевого состояния равновесия, для этого краевую задачу (7), (8) преобразуем к виду:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \alpha\xi + \xi^2\frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad \xi(\tau,x+1) \equiv -\xi(\tau,x). \tag{9}$$

Для задачи (9) выполнено следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha < 0$ *и пусть решение краевой задачи (9) определено при всех* $\tau \geqslant \tau_0$ *и является непрерывно дифференцируемым по* τ *и* y. *Тогда*

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_0^2 \xi^2(\tau,y)dy = 0.$$

При условии $\alpha < \pi^2$ нулевое состояние равновесия краевой задачи (9) асимптотически устойчиво. При выполнении неравенства $\alpha > \pi^2$ нулевое решение в (9) неустойчиво. Для краевой задачи (7), (8) в случае

$$\alpha = \pi^2 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{10}$$

выписана нормальная форма и получена асимптотика устойчивого цикла:

$$\xi \approx 2\sqrt[4]{8\varepsilon}\cos(\pi x + \pi\sqrt{8\varepsilon}\tau + \gamma) + O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{11}$$

Также сформулирована следующая теорема о соответствии.

Теорема 4. *Найдется такое положительное значение ε_0, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (9) имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл с асимптотикой (11).*

В следующем разделе главы обсуждаются результаты численного анализа краевой задачи (9). Подробно описаны условия проведения опытов и вычислительной процедуры. Выписана, полученная в результате дискретизации, разностная схема. Отмечено, что описанные в предыдущих разделах аналитические свойства решений задачи (9), хорошо согласуются с результатами численных экспериментов. В частности, численно анализируется задача об устойчивости состояния равновесия задачи (9), исследовано соответствие полученных численно и аналитически амплитуды и периода устойчивого периодического режима. Проиллюстрировано решение типа «бегущей волны».

Выделим основные результаты первой главы. При $\alpha \sim 1/2$ и $\lambda \gg 1$ локальные динамические свойства описываются нелокальным поведением решений специальной нелинейной краевой задачи параболического типа (9). Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. При значениях $\alpha < 0$ все решения стремятся к нулю. При $0 < \alpha < \pi^2$ аналитически установлено, что нулевое состояние равновесия устойчиво, и соответственно при численном анализе получено, что все решения стремятся к нулю. При $\alpha = \pi^2 + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$ — из состояния равновесия рождается устойчивый цикл. Приведена его асимптотика. При $\alpha > \pi^2$ — численные исследования показали, что имеется единственное устойчивое периодическое решение. При относительно больших α ($\alpha \approx \pi^2 + 2$) этот цикл имеет релаксационную структуру.

Во **второй главе** диссертационной работы рассмотрена задача распространения волны плотности в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией (уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова[3] с запаздыванием):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u(t-h, x)], \tag{12}$$

[3] *Колмогоров, А. Н.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме / *А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов* // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика. 1937. Т. 1. №6. С. 1–26.

Хорошо известно, что для ряда стандартных граничных условий, в частности, для периодических

$$u(t, x+T) \equiv u(t, x), \tag{13}$$

полученная краевая задача имеет пространственно однородное решение при $h > \pi/2$. При условии близости параметра h к $\pi/2$, а также при $h \gg 1$ это решение устойчиво. Если же значения h и T одновременно достаточно велики, то возможна потеря устойчивости решения $u_0(t)$ и возникновение сложных пространственно неоднородных структур[4].

В первом разделе главы разобран случай близости запаздывания h к $\pi/2$ в предположении, что верно соотношение $h = \pi/2 + \varepsilon h_1$ где $0 < \varepsilon \ll 1$. Если дополнительно предположить, что для параметра T в (13) выполнено условие $T \gg 1$, то динамика краевой задачи (12), (13) существенно усложняется. Поведение решений в малой окрестности состояния равновесия $u_0 \equiv 1$ тогда в главном определяется нелокальным поведением решений нормализованного комплексного уравнения — уравнения Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \sigma\delta\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + h_1\delta\xi + d|\xi|^2\xi, \tag{14}$$

$$\xi(\tau, y+1) \equiv \xi(\tau, y). \tag{15}$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$, $y = T^{-1}x$ — новые временная и пространственная переменные, $\sigma = T^{-2}\varepsilon^{-1}$ — величина порядка единицы, $\delta = (4-2\pi i)/(4+\pi^2)$, $d = -2(3\pi - 2 + i(\pi+6))/(20+5\pi^2)$. Решения краевых задач (12), (13) и (14), (15) связаны формулой

$$u(t, x) = 1 + \varepsilon^{1/2}[\xi(\tau, y)\exp(it) + \overline{\xi}(\tau, y)\exp(-it)] + O(\varepsilon). \tag{16}$$

Динамические свойства (14), (15) существенно зависят от параметра σ. Например, при достаточно малых σ все простейшие периодические решения вида $\rho_m \exp(2\pi i m y + i\varphi_m \tau)$, $(m = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ неустойчивы.

В следующем разделе рассмотрен вопрос о поведении решений с начальными условиями из некоторой достаточно малой, но независимой от ε окрестности состояния равновесия $u_0 \equiv 1$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\Big[1 - u\Big(t - \frac{\pi}{2} - \varepsilon, x\Big)\Big]. \tag{17}$$

При его исследовании получено уравнение типа Гинзбурга-Ландау для определения $\xi(\tau, y)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \delta\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \delta\xi + d|\xi|^2\xi, \tag{18}$$

[4] *Wu, J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations / *J. Wu.* New York, Springer-Verlag, 1996.

где δ и d определяются по тем же формулам, что и в (14). Отметим, что $\operatorname{Re}\delta > 0$ и $\operatorname{Re} d < 0$, поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть уравнение (18) имеет ограниченное при $\tau \to +\infty$ и при $y \to \pm\infty$ решение $\xi_0(\tau, y)$. Тогда уравнение (17) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3/2})$ решение $u(t, x, \varepsilon)$, для которого*

$$u(t, x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/2}[\xi_0(\tau, y)\exp(it) + \overline{\xi}_0(\tau, y)\exp(-it)] + \\ + \varepsilon\Big[\frac{2-i}{5}\xi^2(\tau, y)\exp(2it) + \frac{2+i}{5}\overline{\xi}^2(\tau, y)\exp(-2it)\Big] + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Учитывая полученные результаты, в следующем разделе рассмотрены некоторые свойства уравнения распространения волны. Выполним в уравнении (12) замену в виде бегущей волны $u(t, x) = w(2t \pm x)$ и перейдем к новому времени $s = 2t \pm x$, тогда для переменной $w(s)$ имеем следующее уравнение второго порядка с запаздыванием:

$$w'' - 2w' + w[1 - w(s - 2h)] = 0, \tag{19}$$

где штрихом обозначена производная по переменной s. Свойства устойчивости нулевого решения уравнения (19) не зависят от h, это решение неустойчиво, ему соответствует кратный корень равный единице. Свойства устойчивости единичного состояния равновесия определяются расположением корней характеристического квазиполинома

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 - 2\lambda - \exp(-2h\lambda). \tag{20}$$

Доказаны следующие утверждения.

Лемма 4. *Квазиполином $P(\lambda)$ имеет при $0 < h < h_1^*$ ровно три вещественных корня: один положительный и два отрицательных, а при $h > h_1^*$ — единственный положительный вещественный корень. Здесь $h_* = (\lambda_* - 1)/(\lambda_*^2 - 2\lambda_*) \approx 0.56077$, а λ_* является корнем трансцендентного уравнения $\lambda^2 - 2\lambda - \exp((2 - 2\lambda)/(\lambda - 2))$.*

Лемма 5. *Все корни квазиполинома $P(\lambda)$, кроме одного вещественного положительного, лежат при $0 < h < h_2^*$ в левой комплексной полуплоскости. Здесь*

$$h_2^* = \frac{\arccos(-\sqrt{5} + 2)}{2\sqrt{\sqrt{5} - 2}} \approx 1.86173. \tag{21}$$

При $h = h_2^*$ на мнимую ось выходит пара чисто мнимых корней $\lambda = \pm i\omega_0$, причем

$$\omega_0 = \sqrt{\sqrt{5} - 2} \approx 0.48587. \tag{22}$$

В окрестности решения $w(s) \equiv 1$ найдена асимптотика цикла, ответвляющегося от этого решения при $h = h_2^* + \mu$, где $0 < \mu \ll 1$. В этом случае верно следующее утверждение.

Лемма 6. *Существует такое $\mu_0 > 0$, что для всех $0 < \mu < \mu_0$ уравнение (19) имеет дихотомичный цикл, неустойчивое многообразие которого одномерно, а асимптотика задается формулой*

$$w(s,\mu) = 1 + 2\sqrt{-\mu\varphi_0/d_0}\cos((\omega_0 + \mu(\psi_0 - c_0\varphi_0/d_0))s + \gamma) + O(\mu), \qquad (23)$$

где $\varphi_0 + i\psi_0 = \dfrac{2\omega_0^2(-1+i\omega_0)}{P'(i\omega_0)}$, $d_0 + ic_0 = \dfrac{1}{P'(i\omega_0)}\Bigg(2\omega_0^2(1-\omega_0^2-2i\omega_0) + b\Big((\omega_0^2+2i\omega_0)^2 - \dfrac{1}{\omega_0^2+2i\omega_0}\Big)\Bigg)$, $b = \dfrac{\omega_0^2+2i\omega_0}{4\omega_0^2+4i\omega_0+(\omega_0^2+2i\omega_0)^2}$ *и γ — произвольная константа, определяющая фазовый сдвиг вдоль цикла. Приближенные значения коэффициентов равны $\varphi_0 + i\psi_0 \approx 0.136807 - 0.20660i$ и $d_0 + ic_0 \approx -0.04429 - 0.03664i$.*

В следующем разделе диссертационной работы приведены результаты численного исследование распространения волн концентрации в уравнении (12) на некотором отрезке $[a,b]$ от локализованного по пространству начального возмущения. При этом разница $|a-b|$ выбиралась достаточно большой для того, чтобы можно было проследить за распространением волны от начального момента до момента встречи фронта волны с границами a или b. Подробно описаны условия проведения опытов и вычислительной процедуры. Выписана, полученная в результаты дискретизации, разностная схема. Описание поведения уравнения (12) с запаздыванием проведено в сравнении с классическим уравнением КПП без запаздывания. В работе приведены результаты численного эксперимента, полученные при значениях запаздывания 0, 1, 1.6, 1.7, 1.8 и 2, которые являются наиболее показательными для исследования структуры фронта распространения волны. Построены изображения плотности распределения решения уравнения КПП с запаздыванием и разрезы в различных плоскостях, позволяющие уточнить процесс распространения волны и зарождения осцилляций на границе фронта и в центральной ее части.

Выделим основные результаты второй главы.

Для выяснения некоторых особенностей качественного поведения решений уравнения КПП с запаздыванием было построено уравнение Гинзбурга–Ландау, которое описывает динамические свойства этого уравнения вблизи состояния равновесия $u_0 \equiv 1$.

Изучение уравнения распространения волны (19) позволило найти критические значения параметра запаздывания, при которых, по-видимому, меняется структура пространственного распределения решения задачи.

Численный анализ, выполненный с учетом аналитических результатов, позволил выделить следующие промежутки значений запаздывания: промежуток, на котором поведение решений уравнения с запаздыванием близко

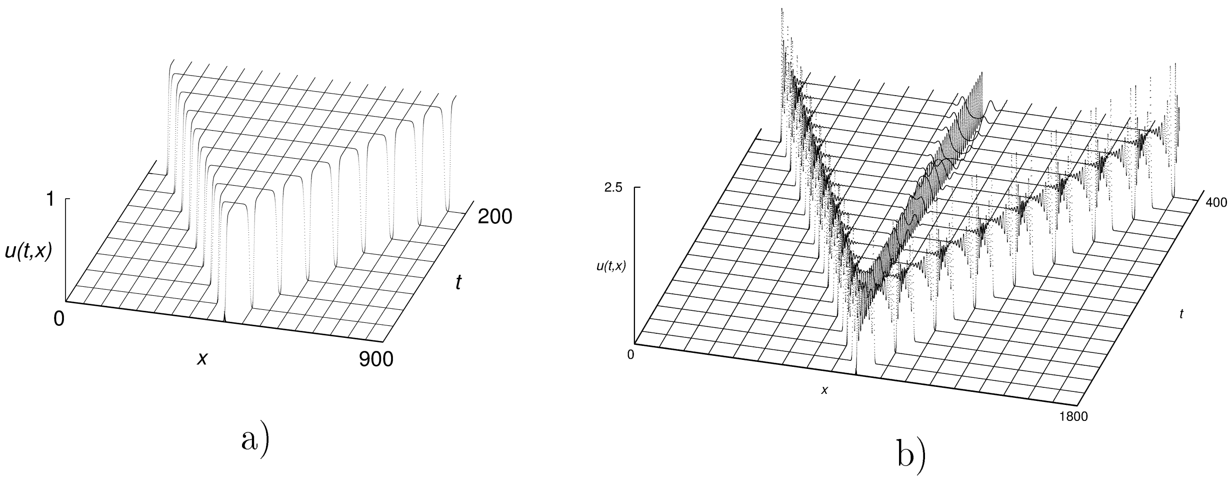

Рис. 1. Распространение волны в уравнении КПП с запаздыванием a) $h = 0$; b) $h = 1.6$

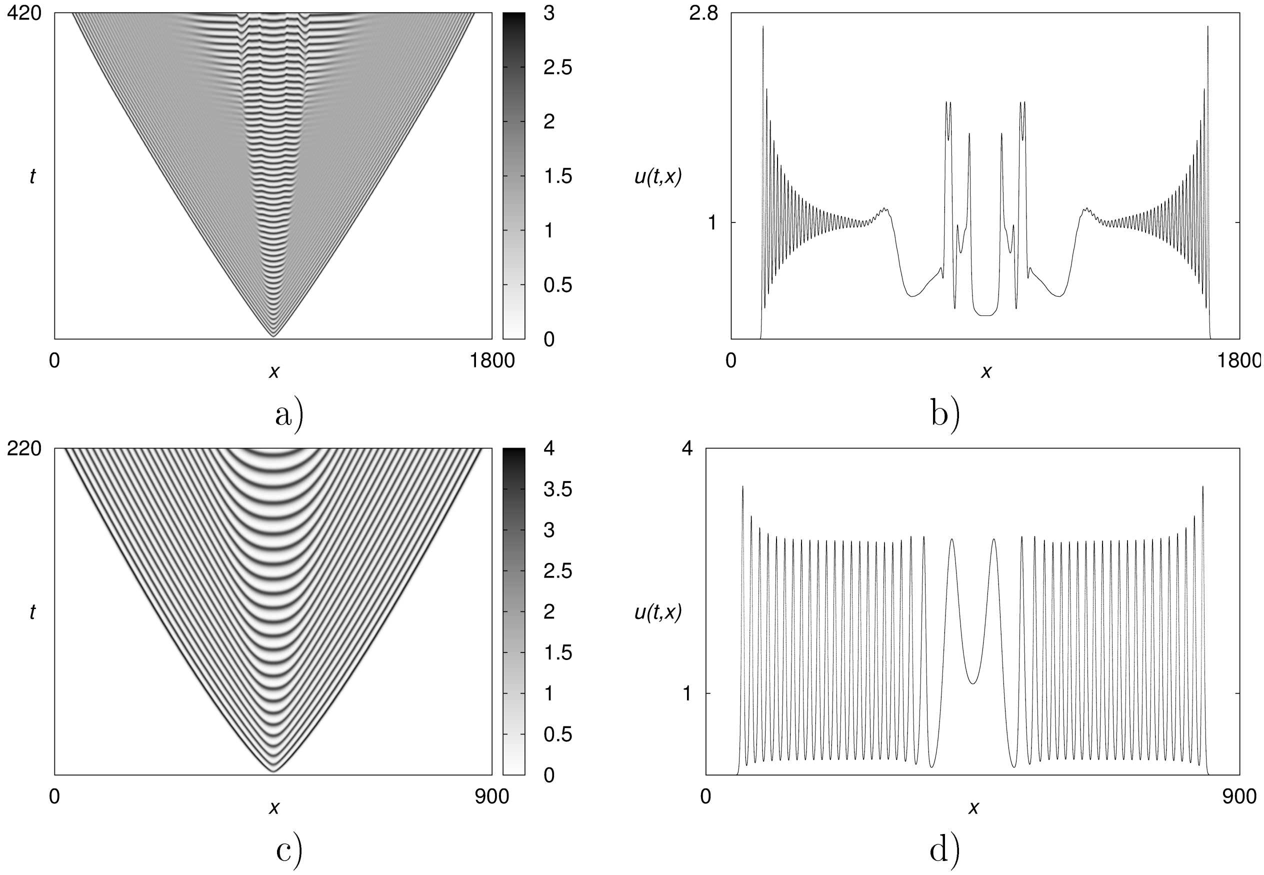

Рис. 2. Решение уравнения КПП с запаздыванием a) плотность распределения $u(t, x)$ в оттенках серого при $h = 1.8$: b) разрез при $t = 400$ и $h = 1.8$; c) плотность распределения $u(t, x)$ в оттенках серого при $h = 2$; d) разрез при $t = 200$ и $h = 2$

к их поведению в задаче без запаздывания (рисунок 1a); промежуток значений запаздывания, при которых в центре области распространения волны появляются участки решения со сложным пространственным распределением (рисунок 1b); найдены значения h, при которых в пространственном распределении решения сохраняются участки, где решение стремится к единице (рисунки 2a и 2b); найден промежуток значений запаздывания, при которых вся область распространения волны заполнена интенсивными колебаниями по пространственной и временной переменным (рисунки 2c и 2d).

В **третьей главе** диссертационной работы рассмотрена задача распространения волны плотности в логистическом уравнении с отклонением пространственной переменной и диффузией:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u(t, x - h)]. \tag{24}$$

Для уравнения (24) с периодическими краевыми условиями построена нормальная форма и найдены условия существования и устойчивости соответствующих неоднородных режимов. Кроме того, проанализировано уравнение профиля волны и найдены условия возникновения у него колебательных режимов.

Как и в случае уравнения с запаздывания (12), выполним в уравнении (24) замену в виде бегущей волны $u(t, x) = w(2t \pm x)$ и перейдем к новому времени $s = 2t \pm x$, тогда для переменной $w(s)$ имеем следующее уравнение второго порядка с запаздыванием:

$$w'' - 2w' + w[1 - w(s - h)] = 0, \tag{25}$$

где штрихом обозначена производная по переменной s. Проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям второй главы, не трудно выписать характеристический квазиполином

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 - 2\lambda - \exp(-h\lambda). \tag{26}$$

Для него определены критические значения $h_1^* \approx 1.12154$ и $h_2^* \approx 3.72346$ вдвое большие, чем приведенные в леммах 4, 5 и выполнены аналогичные леммам 4, 5 утверждения.

Рассматривая окрестность решения $w(s) \equiv 1$ уравнения (25), получим аналогичное лемме 6 утверждение.

Лемма 9. *Пусть $h = h_2^* + \mu$, где $0 < \mu \ll 1$, тогда существует такое $\mu_0 > 0$, что для всех $0 < \mu < \mu_0$ уравнение (25) имеет дихотомичный цикл, неустойчивое многообразие которого одномерно, а асимптотика задается формулой*

$$w(s, \mu) = 1 + 2\sqrt{-\mu\varphi_0/d_0}\cos((\omega_0 + \mu(\psi_0 - c_0\varphi_0/d_0))s + \gamma) + O(\mu), \tag{27}$$

где $\varphi_0 + i\psi_0 \approx 0.136807 - 0.20660i$ *и* $d_0 + ic_0 \approx -0.04429 - 0.03664i$ *и* γ *— произвольная константа, определяющая фазовый сдвиг вдоль цикла.*

В следующем разделе рассмотрено логистическое уравнение с диффузией и отклонением (24), дополненное периодическими краевыми условиями

$$u(t,x) = u(t+T), \tag{28}$$

где $T > 0$ — период. В этой ситуации фазовым пространством задачи (24), (28) будем считать соболевское пространство T-периодических функций $W_2^2(0,T)$. Для исследования устойчивости состояния равновесия $u(t,x) \equiv 1$ краевой задачи (24), (28) линеаризуем ее на этом решении и перейдем к краевой задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v(t, x-h), \quad v(t,x) = v(t+T). \tag{29}$$

Если в (29) выполнить разложение по пространственным модам, то на каждой из мод, после замены $v(t,x) = \exp\lambda \exp i\omega x$ получаем уравнение

$$\lambda = -\omega^2 - \exp i\omega h. \tag{30}$$

Не трудно найти критические значения величин λ и h:

$$h^* = 2.791544, \quad \omega^* = 0.88077, \tag{31}$$

такие, что при $h < h^*$ состояние равновесия $u(t,x) \equiv 1$ краевой задачи (24), (28) асимптотически устойчиво. При условии, что $h = h^* + \varepsilon$ и $T = 2\pi/\omega^*$, выполнено следующее утверждение.

Лемма 10. *Пусть* $h = h^* + \varepsilon$, *где* $0 < \varepsilon \ll 1$, *тогда существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *краевая задача* (24), (28) *имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл, асимптотика которого задается формулой* $u(t,x,\varepsilon) = 1 + \sqrt{\varepsilon} u_0(t,\tau,x) + O(\varepsilon)$, *где* $u_0(t,\tau,x) = z(\tau)\exp\big(i(\omega_0 t + \omega^* x)\big) + \bar{z}(\tau)\exp\big(-i(\omega_0 t + \omega^* x)\big)$, $\omega_0 = \sin\omega^* h^*$ *и медленная переменная* z *заменена выражением (23), в котором* $\varphi_0 + i\psi_0 \approx 0.5558 - 0.6833i$, $d_0 + ic_0 \approx -0.3004 + 0.6165i$ *и* γ *— произвольная константа, определяющая фазовый сдвиг вдоль цикла.*

В следующем разделе проведен численный анализ уравнения КПП с пространственным отклонением (24) на некотором отрезке $[a,b]$ от локализованного по пространству начального возмущения. При этом разница $|a-b|$ выбиралась достаточно большой для того, чтобы можно было проследить за распространением волны от начального момента до момента встречи фронта волны с границами a или b. Подробно приведены описания условий проведения опытов и вычислительной процедуры. Выписана, полученная в результаты дискретизации, разностная схема. Описание поведения уравнения с отклонением проведено в сравнении с классическим уравнением КПП без отклонения. В последнем разделе третьей главы приведены результаты численного эксперимента, полученные при значениях отклонения 1.2, 2.7, 2.81 и 3, которые являются наиболее показательными для исследования структуры фронта распространения волны. Построены изображения плотности распределения решения уравнения КПП с отклонением и разрезы в различных плоскостях, позволяющие уточнить процесс распространения волны и возникновения осцилляций на границах фронтов. Подробно рассмотрено пространственное распределение решения при $h = 2.81$. График решения $u(t, x)$ при $t = 4500$ был разбит на три части с различной структурой (рисунок 4). Используя полученное пространственное распределение решения при данном значении t были сосчитаны корреляционный интеграл и корреляционная размерность каждой части.

Выделим основные результаты третьей главы.

Изучение уравнения распространения волны (25) позволило найти критические значения параметра отклонения, при которых существенно меняется вид пространственного распределения решения задачи.

Для выяснения некоторых особенностей качественного поведения решений уравнения КПП с отклонением было изучено уравнение (24) с периодическими краевыми условиями вблизи состояния равновесия $u_0 \equiv 1$. Это позволило выяснить характер потери устойчивости пространственно однородного решения этой задачи и найти асимптотику режимов, возникающих при этом.

Численный анализ, выполненный с учетом аналитических результатов, позволил выделить следующие промежутки значений отклонения: промежуток, на котором поведение решений уравнения с отклонением близко к их поведению в задаче без отклонения; промежуток значений отклонения, при которых на левом фронте области распространения волны появляются участки с колебаниями, затухающими к единице (рисунок 3 и 4); промежуток значений отклонения, при которых вся область распространения волны заполняется интенсивными колебаниями решения со сложным пространственным распределением. Найдены статистические характеристики (корреляционный интеграл) этих режимов.

Нерегулярные режимы решений, рассмотренных в предыдущих главах требуют дополнительного изучения. С этой целью в **четвертой главе** диссертационной работы рассмотрен вопрос вычисления некоторых инвариантных характеристик (ляпуновских экспонент) для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Анализ спектра показателей Ляпунова широко применяется для исследования сложной динамики в системах обыкновенных дифференциальных уравнений и в моделях, сводящихся к отображениям. Случаи, когда их удается найти аналитически, являются исключительно редкими. Для вычисления старшего показателя обычно применяют метод Бенеттина. Дальнейшее развитие данный метод получил с добавлением перенормировки начальных условий по алгоритму Грама-Шмидта,

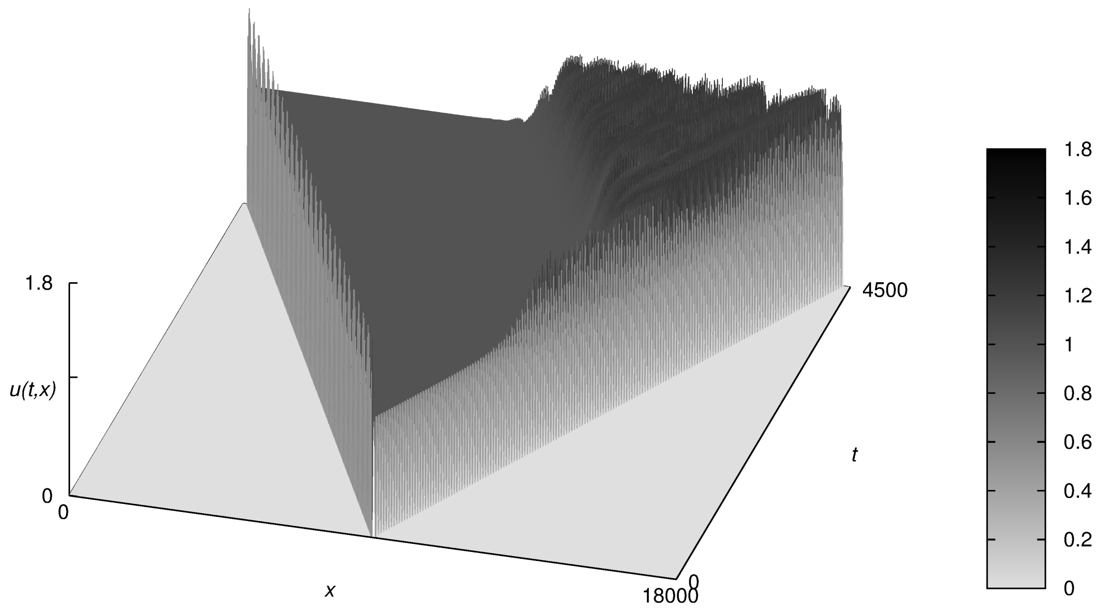

Рис. 3. Распространение волны в уравнении КПП с отклонением при $h = 2.81$

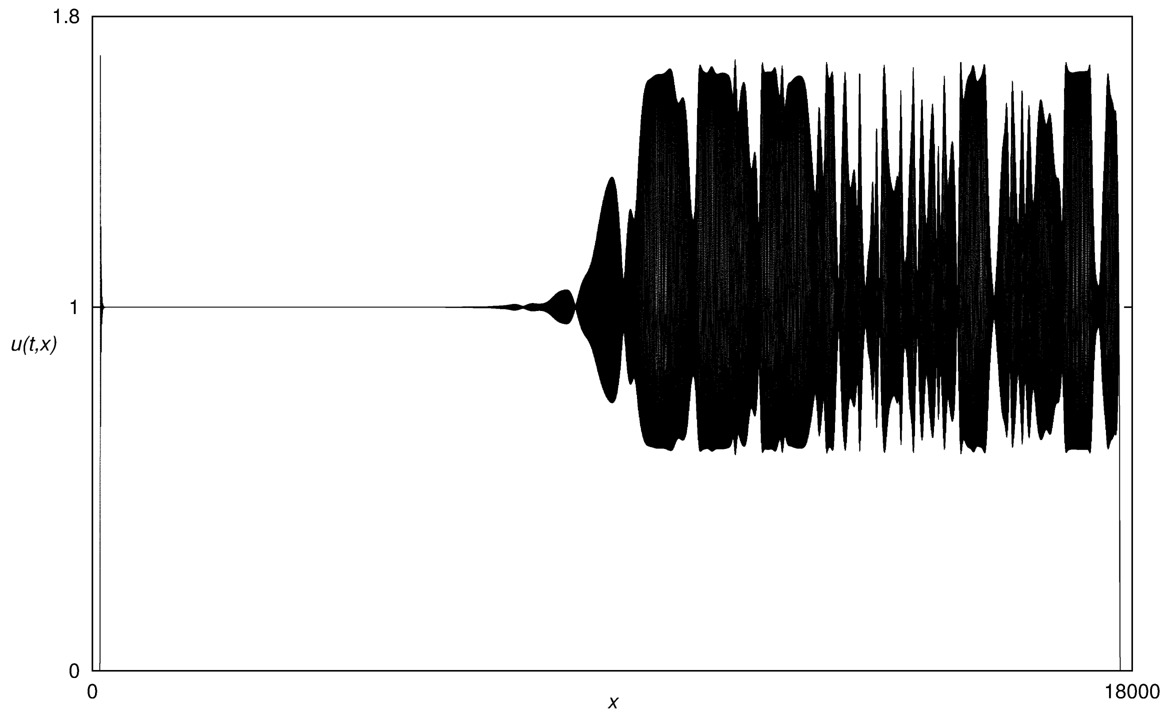

Рис. 4. Пространственное распределение решения уравнения КПП с отклонением при $t = 4500$ и отклонении $h = 2.81$

что позволило вычислять спектр показателей Ляпунова. В конечномерном случае, по теореме Оселедеца[5], линеаризованная на аттракторе система вида

$$dx/dt = A(t)x, \tag{32}$$

где $x \in R^n$, а $A(t)$ — $n \times n$ матрица, всегда является правильной по Ляпунову, что позволяет эффективно вычислять ляпуновские экспоненты. В случае уравнений с запаздывающим аргументом и краевых задач такую теорему доказать не удается. Поэтому при разработке алгоритмов вычисления ляпуновских экспонент важно иметь модельное уравнение с запаздыванием, для которого их спектр может быть определен каким-либо другим способом. Наличие такой задачи позволяет протестировать разработанный алгоритм и убедиться в его работоспособности.

В начале главы приводятся описание вычислительной процедуры. Алгоритм основан на усовершенствованном методе Бенеттина с перенормировкой начальных условий по алгоритму Грама-Шмидта, а именно в следовании за траекториями решений в течениие небольших промежутков времени и вычисление скоростей их расхождения с последующим усреднением этих значений по всему аттрактору.

Далее приводятся результаты тестирования разработанного алгоритма на логистическом уравнении с запаздыванием в случае устойчивого единичного состояния равновесия. Показана близость значений ляпуновских экспонент, вычисленных в соответствии с предложенным алгоритмом и по корням характеристического квазимногочлена уравнения. Показано, что точность вычисления показателей существенно зависит от величины выбранного разбиения.

В последнем разделе главы применение алгоритма проиллюстрировано на некоторых задачах с запаздыванием. В частности, приводятся результаты численного моделирования: для логистического уравнения с двумя запаздываниями[6], для системы уравнений диффузионного взаимодействия пары близких осцилляторов нейронного типа[7] и для такой же системы с учетом запаздывания в цепочке связи между осцилляторами[8].

Отдельно выделим результаты работы алгоритма в случае системы уравнений Ланга-Кобаяши[9]

$$\frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma e^{i(\omega-\omega_0)t}E(t-h), \quad \frac{dZ}{dy} = Q - Z - (1+Z)|E|^2, \tag{33}$$

[5] *Оселедец, В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем / *В.И. Оселедец* // Труды Моск. матем. об-ва. 1968. Т. 19. С. 197–231

[6] *Глызин, С.Д.* Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона / *С.Д. Глызин* // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, №3. С. 29–42.

[7] *Глызин, С.Д.* Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа / *С.Д. Глызин, Е.О. Киселева* // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, №2. С. 75–88.

[8] *Глызин, С.Д.* Учет запаздывания в цепочке связи между осциляторами / *С.Д. Глызин, Е.О. Киселева* // Моделирование и анализ информационных систем. 2010. Т. 17, №2. С. 133–143.

[9] *Глазков, Д.В.* Особенности динамики модели Ланга-Кобаяши в одном критическом случае / *Д.В. Глазков* // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, №2. С. 36–45.

и уравнения Стюарта-Ландау[10]

$$\dot{z}(t) = z(t) - (1 - i\beta) z(t) |z(t)|^2 + k e^{i\theta} z(t - \tau), \tag{34}$$

где $z(t)$ — комплексная функция. Для них получены значения параметров, при которых наблюдается гиперхаотическая динамика (см. рисунки 5 и 6).

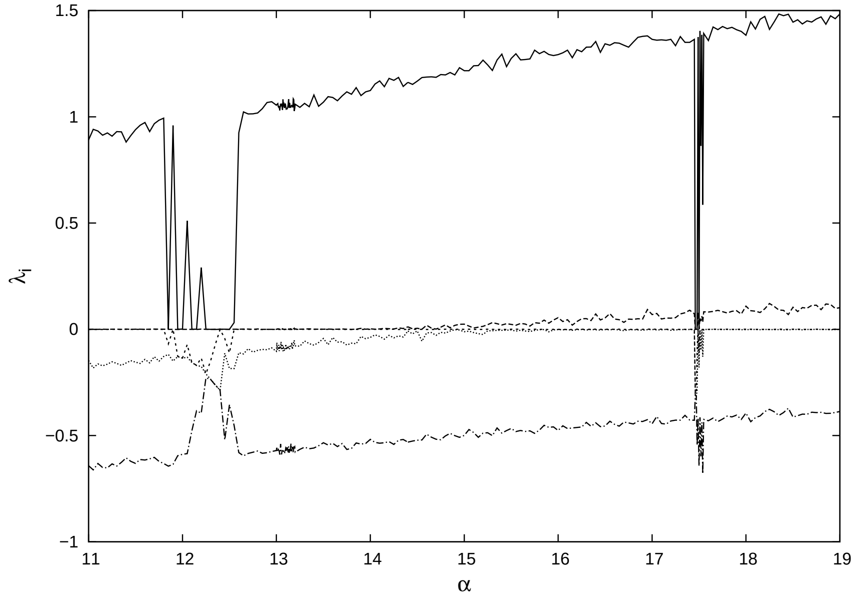

Рис. 5. Зависимость первых пяти показателей Ляпунова уравнения Ланга-Кобаяши от параметра α при $Q = 10$, $v = 2$, $\gamma = 2$, $\omega_0 = 0.3$, $\omega = 1$, $h = 1$

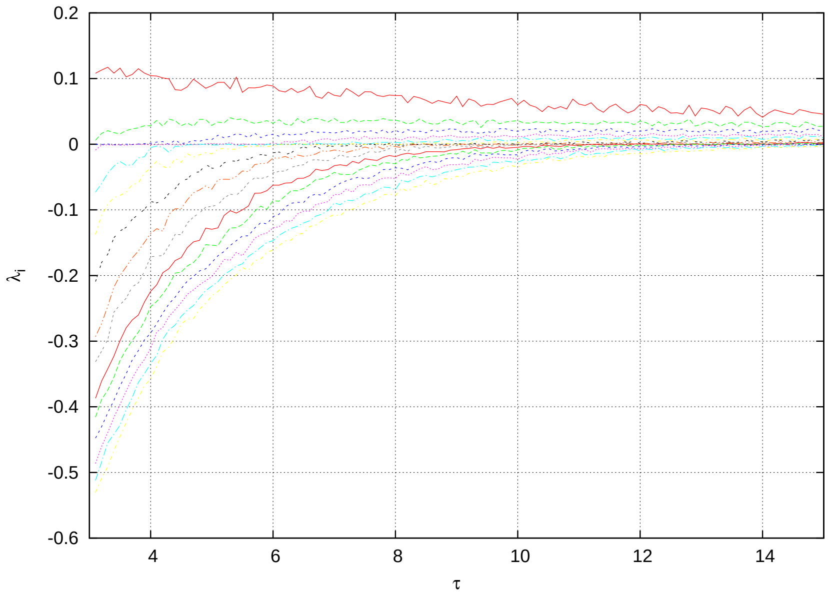

Рис. 6. Зависимость первых пятнадцати показателей Ляпунова уравнения Стюарта-Ландау от запаздывания τ при $\beta = 4$ и $k = 1.5$

[10] *Yanchuk, S.* Delay and periodicity / *S. Yanchuk, P. Perlikowski* // Phys. Rev. E.79.046221, 2009.

Выделим основные результаты четвертой главы. Разработан вычислительный алгоритм и получены результаты его тестирования на логистическом уравнении с запаздыванием. Проиллюстрировано применение алгоритма к ряду динамических систем с запаздыванием, в частности, приводятся результаты численного моделирования для уравнений Ланга-Кобаяши и Стюарта-Ландау, для которых получены значения параметров, соответствующих гиперхаотической динамике.

В **заключении** обобщаются результаты диссертационной работы, приводятся возможные направления развития и формулируются выводы.

В **приложении A** приводятся фрагменты исходного кода программного комплекса «Оценка показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом» на языке Java.

В **приложении B** приведен пример сохраненной вычислительной задачи для программного комплекса.

В **приложении C** приведено описание графического интерфейса пользователя программного комплекса.

Основные результаты и выводы

В диссертационной работе рассмотрено логистическое уравнение с запаздыванием; исследована его локальная динамика; определены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия, а также численно проиллюстрированы полученные аналитические результаты.

Проведено исследование задачи распространения волны плотности в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией. Выделены значения запаздывания, при которых качественно меняется профиль волны.

Изучена динамика распространения волны плотности в логистическом уравнении с отклонением пространственной переменной и диффузией. Выделены значения отклонения, при которых качественно меняется профиль волны.

Разработан алгоритм вычисления инвариантных размерностных характеристик для дифференциальных уравнений с запаздыванием. Проиллюстрирована применимость алгоритма к задачам с запаздыванием, для которых возможно наличие режима гиперхаоса (логистическое уравнение с двумя запаздываниями, уравнения диффузионного взаимодействия пары близких осцилляторов нейронного типа с учетом и без учета запаздывания в цепочке связи между осцилляторами, системы уравнений Ланга-Кобаяши и Стюарта-Ландау). На основе алгоритма оценки спектра показателей Ляпунова был создан программный комплекс, для которого получено свидетельство о регистрации в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам Российской Федерации.

Список публикаций по теме диссертации

Публикации в перечне ведущих рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК

1. *Алешин, С.В.* Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова с запаздыванием / *С.В. Алешин, С.Д. Глызин, С.А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, №2. С. 304–321.
2. *Алешин, С.В.* Численный анализ бегущих волн уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова с запаздывающим аргументом. О работе семинара «Нелинейная динамика» / *С.В. Алешин* // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, №6. С. 176–178.
3. *Алешин, С.В.* Локальная динамика логистического уравнения, содержащего запаздывание / *С.В. Алешин, С.А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, №1. С. 73–88.

Работы, опубликованные в других изданиях

4. *Алешин, С.В.* Численный анализ уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова / *С.В. Алешин, С.А. Кащенко* // Сборник тезисов докладов Международный научный семинар Актуальные проблемы математической физики, Москва, МГУ, 2014 г., с 95–96.
5. *Алешин, С.В.* Оценка инвариантных числовых показателей аттракторов систем дифференциальных уравнений с запаздыванием / *С.В. Алешин* // Вычислительные технологии в естественных науках: методы суперкомпьютерного моделирования. 1–3 окт. 2014, Россия, Таруса: сб. тр. / Под ред. Р.Р. Назирова, Л.Н. Щура. М.: ИКИ РАН, 2014. С. 10–17.
6. *Алешин, С.В.* Вычисление инвариантных характеристик хаотического аттрактора Ланга–Кобаяши / *С.В. Алешин* // Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова. Серия Естественные науки, №2, 2013.
7. *Алешин, С.В.* Численный анализ генерации гиперхаоса в уравнении Стюарта-Ландау / *С.В. Алешин* // Международная конференция «Нелинейные явления в задачах современной математики и физики», посвященная 210-летию Демидовского университета, Ярославль, 4–5 декабря 2013 г., тезисы докладов, с. 4–8.
8. *Алешин, С.В.* Численный анализ генерации гиперхаоса в модели Ланга–Кобаяши / *С.В. Алешин* // Современные проблемы математики и информатики. Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Выпуск 13. Ярослалвь 2013. с. 21–28.
9. *Алешин, С.В.* Вычисление спектра показателей Ляпунова для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / *С.В. Алешин* // Заметки по информатике и математике. 2012. №4. С. 7–12.

Подписано в печать 26.09.15 Формат 60x84/16
Тираж 100 экз. Заказ 17/15.
Отдел оперативной полиграфии ЯрГУ
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.