На правах рукописи

ЗАВОДЧИКОВ МИХАИЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ

МОДУЛИ СТАБИЛЬНЫХ ПУЧКОВ РАНГА ДВА С КЛАССАМИ ЧЕРНА $\mathbf{C}_1 = -1$, $\mathbf{C}_2 = 2$, $\mathbf{C}_3 = 0$ НА ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ярославль
2012

Работа выполнена на кафедре геометрии
Ярославского государственного педагогического университета
им.К.Д.Ушинского

Научный руководитель -	доктор физико-математических наук, профессор **Тихомиров Александр Сергеевич**
Официальные опоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Краснов Вячеслав Алексеевич** ЯРГУ им.П.Г.Демидова, профессор кафедры математического анализа
	доктор физико-математических наук, доцент **Артамкин Игорь Вадимович** ГУ Высшая школа экономики, профессор кафедры дискретной математики
Ведущая организация -	Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых

Защита состоится 25 мая 2012 г. в 11 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.002.03 при Ярославском госудадственном университете им. П.Г.Демидова по адресу: 150008, г.Ярославль, ул.Союзная, 144, аудитория 426.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского госудадственного университета им. П.Г.Демидова.

Автореферат разослан "_____"____________ 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Яблокова С.И.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Пространство модулей - это один из основных объектов изучения современной алгебраической геометрии, который появился в связи с проблемой классификации алгебраических объектов, таких как алгебраические кривые, поверхности, многообразия, векторные расслоения и когерентные пучки. Актуальность изучения пространств модулей обусловлена приложениями в дифференциальной геометрии, топологии и теоретической физике.

Например, в калибровочной теории пространства инстантонов с зарядом n интерпретируются как подмножества многообразий модулей стабильных векторных расслоений E ранга 2 на $\mathbb{CP}^3$ с классами Черна $c_1 = 0$ и $c_2 = n$, удовлетворяющих условию $\mathrm{H}^1(E(-2)) = 0$. Проблема классификации неприводимых компонент пространств модулей пучков ранга два на 3-мерном проективном пространстве с произвольными классами Черна в настоящий время далека от завершения. Поэтому рассмотрение частных случаев является актуальным исследованием, которое может помочь в развитии средств для решения общей проблемы.

Маруяма[1] показал, что для стабильных векторных расслоений с фиксированным многочленом Гильберта над проективным алгебраическим многообразием существует грубое пространство модулей и оно алгебраично. Для поверхностей это было доказано Гизекером[2].

Геометрия пространств модулей $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2; c_1, n, 0)$ стабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения с классами Черна $c_1 = 0$ или -1, $c_2 = n$, $c_3 = 0$ на трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ к настоящему моменту изучена только для малых n. А именно при $c_1 = 0$ полная классификация всех компонент пространства $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2; 0, n, 0)$ получена лишь

[1]**Maruyama M.** *Moduli of stable sheaves II.* J. Math. Kyoto Univ. 18, 1978, 557-614.

[2]**Gieseker D.** *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface.* – Ann. of Math., 1977, v. 106, p.45-60.

для $n=1$ Бартом[3] и Уивером[4] и для $n=2$ Хартсхорном и Ле Потье[5]. При $c_1=-1$ число n принимает только четные значения, и известно, что для любого четного n пространство модулей $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,n,0)$ непусто и содержит компоненту $\overline{\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,n)}$, которая является замыканием открытого множества $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,n)$ локально свободных пучков. Р.Хартсхорн и И.Сольс[6] показали, что пространство модулей $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)$ стабильных локально свободных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1=-1$, $c_2=2$ на $\mathbb{P}^3$ является неприводимым неособым рациональным многообразием размерности 11. Х.Мезегер, И.Сольс и С.А.Стрёмме[7] описали замыкание $\overline{\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)}$ многообразия $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)$ в схеме $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,0)$.

Цель работы

Целью диссертационной работы является классификация всех неприводимых компонент схемы модулей $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,0)$.

Основные методы исследования

В работе используется техника универсальных семейств, конструкция Серра и техника Quot-схем для описания множеств стабильных пучков с классами Черна $c_1=-1$, $c_2=2$ и $c_3=0$ на $\mathbb{P}^3$.

Научная новизна

В работе впервые описаны все неприводимые компоненты схемы модулей стабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения с классами Черна $c_1=-1$, $c_2=2$ и $c_3=0$ на трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$.

Теоретическая и практическая значимость

Настоящая работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения схем модулей полустабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения на $\mathbb{P}^3$.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на семинаре по алгебраической

---

[3]**W. Barth** *Some properties of stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^n$* – Mathematische Annalen v.226, pp. 125-150.

[4]**Wever G.P.** *The moduli of a class of rank 2 vector bundles on projective 3-space.* – Thesis, Univ. Calif. Berkley, 1977.

[5]**J. Le Potier.** *Systémes coherents et structures de nuveau.* – Astérisque, 1993.

[6]**Hartshorne R. Sols I.** *Stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1=-1, c_2=2$ (English).* // J. Reine Angew. Math. 325, 145-152 (1981).

[7]**Meseguer J., Sols I., Stromme S. A.** *Compactification of a family of vector bundles on $\mathbb{P}^3$ (English).* 18th Scand. Congr. Math., Proc., Aarhus 1980, Prog. Math. 11, 474-494 (1981).

геометрии при кафедре алгебры Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д.Ушинского в 2007, 2009 годах, на всероссийских школах-конференциях по алгебраической геометрии и комплексному анализу в 2008 и 2009 годах, на конференции "Чтения Ушинского"(Ярославль, 2004, 2006, 2009, 2010), на международных конференциях "Колмогоровские Чтения - V,VIII"(Ярославль, 2007, 2010).

Публикации автора

Результаты диссертации опубликованы в четырех статьях, вышедших в журналах, рекомендованных ВАК РФ. Они указаны в списке литературы в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. В первой главе имеется 4 параграфа, первый из которых имеет два пункта, во второй главе - 4 параграфа; первый, третий и четвертый параграфы имеют по два пункта. Список литературы состоит из 23 наименований. Общий объем диссертации - 86 страниц.

Краткое содержание работы

Основной результат диссертации. В работе рассматривается схема модулей Гизекера-Маруямы $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 2, 0)$ стабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на $\mathbb{P}^3$. Через $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1, 2)$ обозначается схема модулей локально свободных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на $\mathbb{P}^3$. В схеме M выделяются следующие подмножества пучков с особенностями:

$$\mathcal{M}_1 = \{[\mathcal{E}] \in \mathrm{M} \mid \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \simeq \mathbf{k}_x,\ \text{где}\, x - \text{некоторая точка в}\ \mathbb{P}^3\}, \tag{1}$$

$$\mathcal{M}_2 = \{[\mathcal{E}] \in \mathrm{M} \mid \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \simeq \mathbf{k}_x \oplus \mathbf{k}_y,\ \text{где}\ x\ \text{и}\ y\ -\ \text{различные точки в}\ \mathbb{P}^3\}, \tag{2}$$

и

$$\mathcal{M}_3 = \{[\mathcal{E}] \in \mathrm{M} \mid \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_m(1),\ \text{где}\ m\ -\text{некоторая прямая в}\ \ \mathbb{P}^3\}. \tag{3}$$

Основной результат диссертации сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. M *является объединением четырех неприводимых компонент* $\overline{\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)}$, $\overline{\mathcal{M}}_1$, $\overline{\mathcal{M}}_2$ *и* $\overline{\mathcal{M}}_3$, *где* $\overline{\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)}$, $\overline{\mathcal{M}}_1$, $\overline{\mathcal{M}}_2$ *и* $\overline{\mathcal{M}}_3$ *суть замыкания множеств* $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ *и* $\mathcal{M}_3$, *размерности которых равны 15, 19 и 11 соответственно.*

Глава 1. В этой главе рассматриваются все стабильные когерентные пучки без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на пространстве $\mathbb{P}^3$, имеющие нульмерные особенности.

В пункте **1.1.1** вводятся необходимые обозначения. Даются определения множеств пучков $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Формулируется следующая теорема - основной результат главы **1**.

Теорема 2. *1). Замыкание* $\overline{\mathcal{M}}_1$ *в* M *множества пучков* $\mathcal{M}_1$, *определенного в* (1), *является неприводимой 15-мерной компонентой в* M.

2). Замыкание $\overline{\mathcal{M}}_2$ *в* M *множества пучков* $\mathcal{M}_2$, *определенного в* (2), *является неприводимой 19-мерной компонентой в* M.

3). Все пучки $\mathcal{E} \in \mathrm{M} \setminus \mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)$ *с нульмерными особенностями лежат в* $\overline{\mathcal{M}}_1 \cup \overline{\mathcal{M}}_2$.

Перейдем к описанию основных этапов доказательства теоремы 2, проводимых в настоящей главе.

В пункте **1.1.2** рассматриваются пучки $[\mathcal{E}] \in \mathrm{M}$, входящие в точные тройки:

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathcal{E}^{\vee\vee} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{Q} \to 0, \tag{4}$$

где $\mathrm{can} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee}$ - канонический морфизм, а пучок $\mathcal{Q} = \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$ имеет размерность 0. Вычисление классов Черна пучков $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ дает равенства:

$$c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = -1, \quad c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2, \quad c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2l(\mathcal{Q}), \quad 1 \leq l(\mathcal{Q}) \leq 2, \tag{5}$$

где $l(\mathcal{Q})$ – длина артинова пучка $\mathcal{Q}$.

В параграфе **1.2** рассматриваются множество пучков $\mathcal{M}_1$, определенное в (1), и подмножество M_{1r} рефлексивных пучков в схеме модулей $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,2)$. На $\mathbb{P}^3 \times \mathrm{M}_{1r}$ существует универсальное семейство $\mathbb{F}$ стабильных рефлексивных пучков. По этому семейству строится семейство $\mathbb{E}$ пучков из $\mathcal{M}_1$ с базой $\mathbf{P}(\mathbb{F})$, где $\mathcal{M}_1$ - множество пучков, определенное в (1).

Доказывается, что модулярный морфизм $f : \mathbf{P}(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}$, $t \mapsto [\mathbb{E}|_{t\times\mathbb{P}^3}]$ является биекцией на свой образ, совпадающий с $\mathcal{M}_1$. Тем самым, $\mathcal{M}_1$ - локально замкнутое подмножество в M.

Предложение 2. *Схема* $\mathbf{P}(\mathbb{F})$ *неприводима.*

Из предложения 2 и предыдущих результатов следует неравенство $\dim \mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M} \geq \dim f(\mathbf{P}(\mathbb{F})) = 15$, где $\mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M}$ - касательное пространство в точке $[\mathcal{E}]$ к схеме модулей M. Далее, по конструкции схемы $\mathbf{P}(\mathbb{F})$ общие пучки $\mathcal{E}$ семейства $\mathbb{E}$ включаются в точные тройки:

$$0 \to \mathcal{I}_x(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_{l_1\cup l_2} \to 0, \qquad (6)$$

где l_1 и l_2 - скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$, а $x \notin l_1 \cup l_2$ – точка в $\mathbb{P}^3$, составляют открытое подмножество в $\mathcal{M}_1$.

Предложение 3. *Для пучков* $\mathcal{E}$ *из точной тройки (6) выполняется неравенство* $\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \leq 15$.

Предложение 3 вместе с равенством $\mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M} = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$, и предыдущим неравенством на размерность $\mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M}$, означают, что замыкание $\overline{\mathcal{M}}_1$ множества $\overline{\mathcal{M}}_1$ в схеме M является неприводимой компонентой размерности 15. Это дает утверждение 1 теоремы 2.

В параграфе **1.3** рассматривается множество пучков $\mathcal{M}_2$, определенное в (2). Строится семейство $\mathbb{E}$ пучков из $\mathcal{M}_2$ с базой $\mathbf{P}$, которая определяется явно с помощью многообразия модулей M_{2r} рефлексивных пучков с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 4$ на $\mathbb{P}^3$. Доказывается, что модулярный морфизм $f : \mathbf{P} \to \mathrm{M}$, определяемый семейством $\mathbb{E}$, является биекцией на свой образ, совпадающий с $\mathcal{M}_2$. Тем самым, $\mathcal{M}_2$ - локально замкнутое подмножество в M.

Предложение 4. *Схема* $\mathbf{P}$ *неприводима. Тем самым, и* $\mathcal{M}_2 = f(\mathbf{P})$ *неприводимо.*

Предложение 4 и предыдущие результаты влекут неравенство $\dim \mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M} \geq \dim \mathcal{M}_2 = 19$ для $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}_2$. Далее, по конструкции семейства $\mathbb{E}$ общие пучки $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}_2$ включаются в точные тройки

$$0 \to \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_C \to 0, \qquad (7)$$

где C - коника в $\mathbb{P}^3$.

Предложение 5. *Для пучков $\mathcal{E}$ из точной тройки (7) выполняется неравенство* $\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \leq 19$.

Предложение 5 и предыдущее неравенство на $\dim \mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M}$ показывают, что $\overline{\mathcal{M}}_2$ является неприводимой компонентой размерности 19 в схеме M. Это составляет утверждение 2 теоремы 2.

В параграфе **1.4** доказывается, что все пучки $\mathcal{E} \in \mathrm{M}$ с нульмерными особенностями лежат в $\overline{\mathcal{M}}_1 \cup \overline{\mathcal{M}}_2$. Для этого рассматривается множество пучков

$$\mathcal{M}_0 = \{[\mathcal{E}] \in \mathrm{M} \mid \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \text{ - артинов пучок длины } 2\}.$$

Формулы (1) и (5) показывают, что множество пучков из M с нульмерными особенностями есть $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_0$. В этом параграфе строится семейство $\mathbf{E}$ пучков из $\mathcal{M}_0$ с неприводимой базой T, которая определяется явно как открытое подмножество проективного расслоения со слоем $\mathbb{P}^{21}$ над Quot-схемой $\mathrm{Quot}(2\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2), 2)$. Доказывается, что модулярный морфизм $f : T \to \mathrm{M}$, определяемый семейством $\mathbf{E}$, является сюръекцией T на $\mathcal{M}_0$.

Далее с использованием техники Quot-схем доказывается, что T неприводимо и, тем самым, замыкание $\overline{\mathcal{M}}_0$ в M множества $\mathcal{M}_0$ неприводимо. Поэтому включение $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_0$, вытекающее из определения этих множеств, и тот факт, что $\overline{\mathcal{M}}_2$ - неприводимая компонента в M, дают следующее предложение.

Предложение 6. $\mathcal{M}_0 \subset \overline{\mathcal{M}}_0 = \overline{\mathcal{M}}_2$*; тем самым, все пучки с нульмерными особенностями лежат в* $\overline{\mathcal{M}}_1 \cup \overline{\mathcal{M}}_2$.

Это предложение составляет утверждение 3 теоремы 2.

Глава 2 содержит описание всех стабильных когерентных пучков без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на $\mathbb{P}^3$, имеющих одномерные особенности. Рассматриваются следующие множества пучков в схеме модулей M:

$$\mathcal{M}_3 = \{[\mathcal{E}] \in \mathrm{M} \mid \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_m(1), \text{ где } m \text{ – некоторая прямая в } \mathbb{P}^3\}; \quad (8)$$

$$\mathcal{M}_4 = \{[\mathcal{E}] \in \mathrm{M} \mid \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \simeq \mathcal{Q}, \text{ где пучок } \mathcal{Q} \text{ включается тройку (10)}\}; \quad (9)$$

$$0 \to \mathbf{k}_x \to \mathcal{Q} \to \mathcal{O}_m \to 0, \quad (10)$$

где x - некоторая точка в $\mathbb{P}^3$, а m - некоторая прямая в $\mathbb{P}^3$;

$$\mathcal{M}_5 = \{[\mathcal{E}] \in \mathrm{M} \mid \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \simeq \mathcal{Q},\ \text{где } \mathcal{Q} \text{ - пучок из точной тройки (12)}\}; \qquad (11)$$

$$0 \to \mathcal{Q}_0 \to \mathcal{Q} \to \mathcal{O}_m(-1) \to 0, \qquad (12)$$

где $\mathcal{Q}_0$ - артинов пучок длины 2, а m - некоторая прямая в $\mathbb{P}^3$. Основным результатом главы 2 является следующая теорема.

Теорема 3. *1). Замыкание $\overline{\mathcal{M}_3}$ множества $\mathcal{M}_3$ в схеме модулей* M *есть неприводимая компонента в* M.

2). Множество $\mathcal{M}_4$ лежит в $\overline{\mathcal{M}_1}$ и не образует неприводимой компоненты в M*, где $\mathcal{M}_1$ – множество пучков, определенное в (1).*

3). Множество $\mathcal{M}_5$ лежит в $\overline{\mathcal{M}_2}$ и не образует неприводимой компоненты в M*, где $\mathcal{M}_2$ – множество пучков, определенное в (2).*

Утверждения 1), 2) и 3) теоремы 3 доказываются в параграфах 2.2, 2.3 и 2.4 соответственно. Ниже приводится краткое описание основных этапов доказательства этой теоремы.

В пункте **2.1.1** вводятся необходимые обозначения. В пункте **2.1.2** рассматривается пучки $[\mathcal{E}] \in \mathrm{M}$, включающиеся в точные тройки вида (4) такие, что $\dim \mathcal{Q} = 1$. По определению множество всех таких пучков, то есть пучков, имеющих одномерные особенности, есть объединение $\mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_4 \cup \mathcal{M}_5$. Вычисление классов Черна пучков $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ для $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_4 \cup \mathcal{M}_5$ дает равенства:

$$c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = -1,\ c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 1,\ c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 1. \qquad (13)$$

Доказывается, что для пучков $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_4 \cup \mathcal{M}_5$ пучки $\mathcal{Q} = \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$ из (4) включаются в точные тройки вида:

$$0 \to \mathcal{Q}_0 \to \mathcal{Q} \to \mathcal{O}_m(n) \to 0, \qquad (14)$$

где $\mathcal{Q}_0$ - некоторый нульмерный пучок. Определяются возможные значения n и вид пучка $\mathcal{Q}_0$. Как оказалось, возможны три случая:

$$1)\ l(\mathcal{Q}_0) = 0,\ n = 1;\ 2)\ l(\mathcal{Q}_0) = 1,\ n = 0;\ 3)\ l(\mathcal{Q}_0) = 2,\ n = -1.$$

Случаю 1) соответствует множество пучков $\mathcal{M}_3$, случаю 2) - $\mathcal{M}_4$, случаю 3) - $\mathcal{M}_5$. Таким образом, $\mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_4 \cup \mathcal{M}_5$ есть множество пучков с одномерными особенностями. Согласно предложению 6 пучки $\mathcal{E}$ из M, с нульмерными особенностями, лежат в объединении $\overline{\mathcal{M}}_1 \cup \overline{\mathcal{M}}_2$. Пучки без особенностей, то есть локально свободные пучки, описываются схемой $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)$. Так как особенности пучков из M не более чем одномерны, то из предыдущих результатов вытекает следующее предложение.

Предложение 9. *Схема модулей* M *есть объединение множеств* $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2) \cup \mathcal{M}_1 \cup \overline{\mathcal{M}}_2 \cup \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_4 \cup \mathcal{M}_5$.

В параграфе **2.2** рассматривается множество пучков $\mathcal{M}_3$. Основным результатом параграфа является следующее предложение, влекущее утверждение 1 теоремы 3.

Предложение 10. *1). Множество* $\mathcal{M}_3$ *является 11-мерным неприводимым подмножеством в схеме модулей* M. *2).* $\overline{\mathcal{M}}_3$ *есть неприводимая компонента размерности 11 в* M.

Для доказательства предложения 10 строится семейство пучков $\mathbb{E}$ с 11-мерной базой Π, которая определяется явно с помощью схемы модулей рефлексивных пучков с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$ на $\mathbb{P}^3$. В параграфе **2.2** доказывается, что схема Π неприводима и биективно отображается на $\mathcal{M}_3$ посредством модулярного морфизма f, определяемого семейством $\mathbb{E}$. Тем самым, множество $\mathcal{M}_3$ неприводимо и имеет размерность 11. Отсюда вытекает утверждение 1 предложения 10.

Предложение 11. *Для пучков* $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}_3$ *выполняется равенство* $\mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M} = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) = \mathbf{k}^{11}$.

Из предложения 11 и равенства $\dim \mathcal{M}_3 = 11$ вытекает, что $\overline{\mathcal{M}}_3$ - неприводимая компонента размерности 11 в M, что дает утверждение 2 предложения 10.

В параграфе **2.3** рассматривается множество $\mathcal{M}_4$ пучков $\mathcal{E}$, определенное в (9). Основным результатом параграфа является следующее предложение.

Предложение 12. *1). Множество* $\overline{\mathcal{M}}_4$ *лежит в* $\overline{\mathcal{M}}_1$ *как собственное подмножество. 2). Тем самым,* $\overline{\mathcal{M}}_4$ *не является неприводимой компонентой в схеме модулей* M.

Опишем схему доказательства предложения 12. В пункте **2.3.1** строится плоское семейство $\mathbf{E}_4$ пучков из M с базой W, которая явно описывается с помощью Quot-схем. Доказывается, что схема W неприводима и ее образ при модулярном морфизме $f : W \to \mathrm{M}$, определяемом семейством $\mathbf{E}_4$, есть

$\mathcal{M}_4$. Отсюда вытекает следующее предложение.

Предложение 18. *Замыкание* $\overline{\mathcal{M}}_4$ *множества* $\mathcal{M}_4$ *в* M *неприводимо.*

В пункте **2.3.2** доказывается, что множество пучков $\mathcal{M}_4$ лежит в неприводимой компоненте $\overline{\mathcal{M}}_1$. Для этого строится неприводимая схема Ω, точками которой являются наборы $(l, y, m, x, < \xi >)$, где l и m - прямые в $\mathbb{P}^3$, x и y - точки в $\mathbb{P}^3$, а $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l\cup y}, \mathcal{I}_{m\cup x}(-1))$. Далее рассматривается в Ω открытое плотное подмножество $\Omega^* = \{\omega = (l, y, m, x, < \xi >) \in \Omega \mid \xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l\cup y}, \mathcal{I}_{m\cup x}(-1)) \smallsetminus \delta(\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_{l\cup y}, \mathcal{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_x))\}$, где δ - связывающий гомоморфизм в точной последовательности Ext-групп, индуцированной точной тройкой $0 \to \mathcal{I}_{m\cup x}(-1) \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_x \to 0$. На $\mathbb{P}^3 \times \Omega^*$ определен пучок $\mathbb{E}$ такой, что его ограничение $\mathcal{E}_\omega = \mathbb{E}_{|\mathbb{P}^3\times\omega}$ для произвольной точки $\omega = (l, y, m, x, < \xi >) \in \Omega^*$ получается как расширение:

$$0 \to \mathcal{I}_{m\cup x}(-1) \to \mathcal{E}_\omega \to \mathcal{I}_{l\cup y} \to 0, \tag{15}$$

задаваемое элементом $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l\cup y}, \mathcal{I}_{m\cup x}(-1)) \smallsetminus \delta(\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_{l\cup y}, \mathcal{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_x))$. Тем самым, определен морфизм $\nu : \Omega^* \to \mathrm{M}, \omega \mapsto [\mathcal{E}_\omega]$. В $\mathcal{M}_4$ рассматривается в плотное подмножество пучков $\mathcal{M}_4^* = \{[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}_4 \mid \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \simeq \mathbf{k}_x \oplus \mathcal{O}_m\}$, где m - прямая, а $x \notin m$ - точка. В этом пункте доказывается, что морфизм $\nu : \Omega^* \to \mathcal{M}_4^*$ сюръективен.

В пункте **2.3.3** рассматриваются точные тройки вида: $0 \to \mathcal{I}_{m\cup x}(-1) \to \mathcal{I}_{l\sqcup m} \to \mathbf{k}_x \oplus \mathcal{I}_{y,\mathbb{P}^2}(-1) \to 0$, где $x \notin m \cup \mathbb{P}^2$, а $y = m \cap \mathbb{P}^2$. Для фиксированных прямой $l \subset \mathbb{P}^2$ и точки $y \in \mathbb{P}^2$ однозначно с точностью до пропорциональности определена сюръекция $\eta : \mathcal{I}_{l\cup y} \to \mathbf{k}_x \oplus \mathcal{I}_{y,\mathbb{P}^2}(-1)$, ядро которой есть пучок $\mathcal{I}_x(-1)$. Тем самым, имеется коммутативная диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_x(-1) \arrow[r] & \mathcal{I}_{l\cup y} \arrow[r, "\eta"] \arrow[u] & \mathbf{k}_x \oplus \mathcal{I}_{z,\mathbb{P}^2}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_x(-1) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{I}_{m\cup l} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & \mathcal{I}_{m\cup x}(-1) \arrow[r, equal] \arrow[u] & \mathcal{I}_{m\cup x}(-1) \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0, \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\tag{16}
$$

в которой $\mathcal{E}$ - некоторый пучок ранга 2. Вертикальная средняя тройка в этой диаграмме совпадает с точной тройкой типа (15), то есть $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}_4^*$. С другой стороны, центральная горизонтальная тройка:

$$0 \to \mathcal{I}_x(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_{m\cup l} \to 0. \tag{17}$$

показывает, что $[\mathcal{E}] \in \overline{\mathcal{M}}_1$. Далее строится неприводимое многообразие Υ, точками которого являются наборы $(l, y, m, x, \mathbb{P}^2, <\tau>)$, где $\tau \in \mathrm{Ext}^1(\mathbf{k}_x \oplus \mathcal{I}_{y,\mathbb{P}^2}(-1), \mathcal{I}_{m\cup x}(-1))$. Для произвольной точки $u = (l, y, m, x, \mathbb{P}^2, <\tau>) \in \Upsilon$ элемент τ определяет правую вертикальную тройку в (16), а сюръекция η в (16) определяется тройкой $(l, y, \mathbb{P}^2)$ согласно сказанному выше. Определено отображение $\mu : \Upsilon \to \Omega : (l, y, m, x, \mathbb{P}^2, <\tau>) \mapsto (l, y, m, x, <\xi>)$, где ξ - элемент группы $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l\cup y}, \mathcal{I}_{m\cup x}(-1))$, задающий центральную вертикальную тройку в диаграмме (16) как расширение. Далее доказывается, что морфизм μ доминантен, и рассматривается прообраз Υ^* множества $\Omega^* \subset \Omega$ при отображении μ. В силу доминантности μ, плотности Ω^* в Ω, неприводимости Ω и Υ, подмножество Υ^* является открытым и плотным в Υ. По построению морфизм $\mu_{|\Upsilon^*} : \Upsilon^* \to \Omega^*$ доминантен. Отсюда в силу сюръективности ν композиция $\nu \circ \mu : \Upsilon^* \stackrel{\nu\circ\mu}{\to} \mathcal{M}_4^* \hookrightarrow \mathcal{M}_4$ также доминантна. По конструкции для произвольной точки $u \in \Upsilon^*$ пучки $[\mathcal{E}] = (\nu \circ \mu)(u)$ включаются в тройки вида (17) и принадлежат $\overline{\mathcal{M}}_1$. Отсюда следует, что $\mathcal{M}_4 \subset \overline{\mathcal{M}}_1$. Так как $\dim \mathcal{M}_4 = 13$, а $\dim \overline{\mathcal{M}}_1 = 15$, то $\overline{\mathcal{M}}_4$ не является компонентой в схеме модулей M. Это дает доказательство предложения 12.

В параграфе **2.4** доказывается, что множество пучков $\mathcal{M}_5$, определенное в

(11), не является компонентой в схеме модулей M, откуда вытекает теорема 3. Основным результатом параграфа является следующее предложение.

Предложение 16. *1). $\mathcal{M}_5 \subset \overline{\mathcal{M}}_2$.*

2). $\overline{\mathcal{M}}_5$ не составляет компоненты в схеме M.

Опишем схему доказательства предложения 16. В пункте **2.4.1** доказывается, что множество $\overline{\mathcal{M}}_5$ неприводимо. Строится плоское семейство $\mathbf{E}$ пучков из $\mathcal{M}_5$, с неприводимой базой W, которая явно определяется с помощью Quot-схем. Доказывается, что образ схемы W при модулярном морфизме f, определяемом семейством $\mathbf{E}$, есть $\mathcal{M}_5$. Далее доказывается, что схема W неприводима. Отсюда вытекает следующее предложение.

Предложение 18. *Множество $\overline{\mathcal{M}}_5$ неприводимо.*

В пункте **2.4.2** проводятся рассуждения параллельные рассуждениям в пункте **2.3.2** с заменой $\mathcal{M}_1$ на $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_4$ на $\mathcal{M}_5$.

Сначала в этом пункте доказывается, что множество пучков $\mathcal{M}_5$ лежит в неприводимой компоненте $\overline{\mathcal{M}}_2$. Для этого строится неприводимая схема Ω, точками которой являются наборы $(l, m, x_1, x_2, <\xi>)$, где l и m – прямые в $\mathbb{P}^3$, x_1 и x_2 – точки в $\mathbb{P}^3$, а $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_l, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1))$. Далее рассматривается в Ω открытое плотное подмножество $\Omega^* := \{\omega = (l, m, x_1, x_2, <\xi>) \in \Omega | \xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_l, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1)) \setminus \delta(\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_l, \mathcal{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}))\}$, где δ - связывающий гомоморфизм в точной последовательности Ext-групп $0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_l, \mathcal{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_l, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1)) \xrightarrow{v} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_l, \mathcal{O}(-1)) \to 0$, индуцированный точной тройкой $0 \to \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1) \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2} \to 0$. На $\mathbb{P}^3 \times \Omega^*$ определяется пучок $\mathbb{E}$ такой, что его ограничение $\mathcal{E}_\omega = \mathbb{E}_{|\mathbb{P}^3\times\omega}$ на произвольную точку $\omega = (l, m, x_1, x_2, <\xi>) \in \Omega^*$ есть средний член расширения:

$$0 \to \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1) \to \mathcal{E}_\omega \to \mathcal{I}_l \to 0, \tag{18}$$

задаваемого элементом $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_l, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1)) \setminus \delta(\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_l, \mathcal{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}))$. Тем самым, определен морфизм $\nu : \Omega^* \to \mathrm{M}, \omega \mapsto [\mathcal{E}_\omega]$. В $\mathcal{M}_5$ рассматривается открытое плотное множество пучков $\mathcal{M}_5^* := \{[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}_5 \mid \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2},\ x_1 \neq x_2\}$. Далее доказывается, что Ω посредством морфизма ν сюръективно отображается на $\mathcal{M}_5^*$.

Затем в пункте **2.4.2** рассматривается $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$-пучок $\mathcal{G} = \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$

и произвольное нетривиальное расширение:

$$0 \to \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1) \to \mathcal{X} \to \mathcal{G} \to 0, \tag{19}$$

где m и l - скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$, x_1 и x_2 - точки в $\mathbb{P}^3$, не лежащие ни на m, ни на l, а $\mathbb{P}^2$ - произвольная плоскость, проходящая через l и не содержащая точек x_1 и x_2. Для произвольного нетривиального расширения (19) пучок $\mathcal{X}$ - является пучком без кручения ранга 1 с $c_1(\mathcal{X}) = 0$. Поэтому $\mathcal{X}$ - пучок идеалов $\mathcal{I}_Z$ некоторой подсхемы Z в $\mathbb{P}^3$. Очевидно, что $Z = m \cup m'$ - распавшаяся коника, где прямые m и m' пересекаются в точке $m \cap \mathbb{P}^2$. Итак, имеется расширение $0 \to \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1) \to \mathcal{I}_{m\cup m'} \to \mathcal{G} \to 0$. Так как $l \subset \mathbb{P}^2$ и $x_1, x_2 \notin \mathbb{P}^2$, то однозначно с точностью до пропорциональности определена сюръекция $\eta : \mathcal{I}_l \to \mathcal{G}$, ядро которой есть пучок $\mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)$. Это с предыдущим расширением дает коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1) \arrow[r] & \mathcal{I}_l \arrow[u] \arrow[r, "\eta"] & \mathcal{G} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1) \arrow[u, equal] \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{I}_{m\cup m'} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & & \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1) \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1) \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0, \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{20}$$

в которой $\mathcal{E}$ - некоторый пучок ранга 2, а средняя вертикальная тройка в этой диаграмме совпадает с точной тройкой (18). Центральная горизонтальная тройка показывает, что $\mathcal{E} \in \overline{\mathcal{M}}_2$, поскольку $m \cup m'$ - коника. Далее строится многообразие Υ, точками которого являются наборы $(l, m, x_1, x_2, \mathbb{P}^2, \tau)$, где $\tau \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1))$. Для произвольного точки $y = (l, m, x_1, x_2, \mathbb{P}^2, \tau) \in \Upsilon$ элемент τ определяет правую вертикальную тройку в (20), а сюръекция η в (20) определяется парой $(l, \mathbb{P}^2)$, согласно сказанному выше. Тем самым, определен морфизм $\mu : \Upsilon \to \Omega, (l, m, x_1, x_2, \mathbb{P}^2, \tau) \mapsto (l, m, x_1, x_2, < \xi >)$, где ξ - элемент группы $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_l, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1))$, задающий центральную вертикальную тройку в диаграмме (20) как расширение.

Далее в этом пункте доказывается, что морфизм μ доминантен. Доказательство этого утверждения проводится с помощью вычисления Ext-групп, соответствующих расширений, участвующих в диаграмме (20). Рассматривается множество Υ^* - прообраз множества $\Omega^* \subset \Omega$ при морфизме μ, которое в силу неприводимости Υ является открытым плотным подмножеством в Υ. Тем самым, морфизм $\mu : \Upsilon^* \to \Omega^*$ доминантен. Поэтому в силу предложения 18 композиция $\nu \circ \mu : \Upsilon^* \xrightarrow{\nu\circ\mu} \mathcal{M}_5^* \hookrightarrow \mathcal{M}_5$ также доминантна. Отсюда ввиду того, что пучок $[\mathcal{E}]$ в диаграммы (20) принадлежит $\overline{\mathcal{M}}_2$, следует, что $\mathcal{M}_5 \subset \overline{\mathcal{M}}_2$. Тем самым, верно утверждение 1 предложения 16. Так как $\dim \mathcal{M}_5 = 15$, а $\dim \overline{\mathcal{M}}_2 = 19$, то $\overline{\mathcal{M}}_5$ не является компонентой в M. Отсюда следует утверждение 2 предложения 16. Теперь из предложений 10, 12 и 16 вытекает теорема 3.

Из теорем 2 и 3 следует основной результат настоящей диссертации - теорема 1.

Основное положение, выносимое на защиту

Схема модулей $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,0)$ стабильных когерентных пучков ранга два с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ является объединением четырех неприводимых компонент размерностей 11, 11, 15 и 19.

Публикации автора по теме диссертации

1. **Заводчиков М.А.** *О некотором семействе когерентных пучков ранга 2 без кручения с классами Черна* $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ *на трехмерном проективном пространстве (Часть I).* // Ярославский педагогический вестник. - 2011. - т.**3** (Естественные науки), №3.- С.45-54.

2. **Заводчиков М.А.** *О некотором семействе когерентных пучков ранга 2 без кручения с классами Черна* $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ *на трехмерном проективном пространстве (Часть II).*// Ярославский педагогический вестник. - 2011. - т.**3** (Естественные науки), №4.- С.25-35.

3. **Заводчиков М.А.** *Новые компоненты схемы модулей стабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения на трехмерном проективном*

пространстве $\mathbb{P}^3$*.* // Моделирование и анализ информационных систем.- 2012.- т. **19**, №2. - С.5 - 18.

4. **Заводчиков М.А.** *Компоненты схемы модулей стабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения на трехмерном проективном пространстве.* // Ярославский педагогический вестник. - 2012. - т.**3** (Естественные науки), №1.- С.23-39.