ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени
Н. Г. Чернышевского»

На правах рукописи
УДК 511.3

Матвеев Владимир Алексеевич

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЙЛЕРОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. т. н., профессор
В. Н. Кузнецов

Саратов, 2015

Оглавление

Введение **4**

1. Аналитические свойства одного класа эйлеровых произведений и оценка одного класса сумматорных функций **15**

1.1. Аналитические свойства одного класса рядов Дирихле с ограниченной сумматорной функцией коэффициентов и оценка одного класса сумматорных функций 16

1.2. Обобщённые характеры числовых полей. Аналитические свойства эйлеровых произведений и оценка одного класса сумматорных функций, определяемых обобщёнными характерами . . 32

2. Аналог гипотезы Н. Г. Чудакова для обобщённых характеров числовых полей и доказательство этой гипотезы для главных обобщённых характеров **44**

3. О нулях L-функций Дирихле числовых полей **52**

3.1. Расширенная гипотеза Римана для L-функций Дирихле числовых полей 52

3.1.1. О взаимосвязи расширенной гипотезы Римана для классических L-функций Дирихле и расширенной гипотезы Римана L-функций Дирихле числовых полей 53

3.1.2. Об одном эквиваленте расширенной гипотезы Римана для L-функций Дирихле числовых полей 55

3.2. Аппроксимационный подход в задаче определения нулей L-функций Дирихле числовых полей 61

3.2.1. Аппроксимационные теоремы для L-функций Дирихле числовых полей 62

3.2.2. К задаче численного определения нулей L-функций Дирихле числовых полей 67
3.3. Аппроксимационный подход в задаче аналитического продолжения L-функций Дирихле числовых полей 74
3.4. Об одном подходе получения плотностных теорем для нулей L-функций Дирихле числовых полей 77

Заключение **82**

Список литературы **84**

Введение

Диссертационная работа посвящена изучению аналитических свойств определённых классов эйлеровых произведений и приложению полученных результатов в ряде задач теории L-функций Дирихле числовых полей.

Основные задачи, которые изучались в данной работе, следующие.

1. Изучить аналитические свойства эйлеровых произведений

$$f(s) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

где χ — конечнозначные характеры, заданные на полугруппе целых идеалов кольца целых элементов числового поля $\mathbb{K}$ ($[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] < \infty$), имеющие ограниченную сумматорную функцию

$$S(x) = \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} \chi(\mathfrak{a}) = \sum_{n \leqslant x} a_n, \tag{2}$$

где произведение берётся по всем простым идеалам поля $\mathbb{K}$, а $N\mathfrak{a}$ — норма $\mathfrak{a}$.

Замечание 1. В работе показано существование конечнозначных характеров χ, отличных от нуля почти для всех простых идеалов $\wp$ и имеющих сумматорную функцию (2), удовлетворяющую оценке вида $S(x) = \alpha x + O(1)$.

По аналогии с числовыми характерами, такие характеры получили название *обобщённых характеров числовых полей:* главных в случае $\alpha \neq 0$ и неглавных в противном случае.

2. Определить дополнительные условия, при которых имеет место оценка

$$S_t(x) = \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} \chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{it} = O(1), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $\chi(\mathfrak{a})$ — неглавный обобщённый характер поля $\mathbb{K}$.

Замечание 2. Оценками сумматорных функций вида (3) в случае неглавных обобщённых числовых характеров занимались Н. Г. Чудаков и Б. М. Бредихин. В работе [45] было показано, что для неглавных числовых характеров Дирихле имеет место оценка

$$S_t(x) = \sum_{n\leqslant x} \chi(n)n^{it} = O(1).$$

3. Третья задача, стоящая перед автором, заключалась в исследовании аналога гипотезы Н. Г. Чудакова для обобщённых характеров числовых полей, который был высказан в данной работе и который предполагает, что обобщённый характер числового поля является характером Дирихле этого поля, т.е. для которого существует целый идеал $\mathfrak{m}$ этого поля, такой, что для всех главных целых идеалов (α), сравнимых с единичным идеалом по модулю $\mathfrak{m}$, $\chi((\alpha)) = 1$.

Замечание 3. В случае обобщённых числовых характеров подобное предположение известно как гипотеза Н. Г. Чудакова, которая была высказана Н. Г. Чудаковым в 1958 году [47], [46]. Эта гипотеза была доказана в 1964 году для главных обобщённых характеров (см. [6]). Вопрос об окончательном решении этой гипотезы до сих пор остаётся открытым.

4. Четвёртая задача заключается в изучении ряда вопросов относительно нулей L-функций Дирихле числовых полей, т.е. эйлеровых произведений вида (1) с характерами Дирихле числовых полей. К таким вопросам относятся вопросы, связанные с расширенной гипотезой Римана о нулях L-функций Дирихле числовых полей; вопросы, связанные с численным определением нетривиальных нулей L-функций Дирихле; вопросы, связанные с плотностью распределения нулей L-функций Дирихле.

Замечание 4. Расширенная гипотеза Римана о нулях L-функций Диризле числовых полей, так же, как и расширенная гипотеза Римана о нулях классических L-функций Дирихле, т.е. эйлеровых произведений вида (1) с числовыми характерами Дирихле, утверждает, что нетривиальные нули L-функций лежат на критической прямой.

Отметим, что подобные задачи в случае числовых характеров изучались в работе [34], где в основе решения ряда задач теории классических L-функций Дирихле лежало изучение аналитических свойств определённых классов рядов Дирихле. Такой подход позволил получить ряд новых результатов и доказать иными методами известные результаты, например, получить плотностные теоремы для нулей L-функций Дирихле способом, отличным от известного ранее (например, доказательство Бэклунда, приведённое в книге [38].

Основными методами при изучении аналитических свойств рядов Дирихле в работе [34] являлись: метод редукции к степенным рядам и аппроксимационный метод. Основные положения метода редукции к степенным рядам были разработаны в работах В. Н. Кузнецова [14], [12], [11]. Суть этого метода заключается в изучении взаимосвязи аналитических свойств рядов Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it,$$

и граничных свойств соответствующих (с теми же коэффициентами) степенных рядов

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Аппроксимационный метод заключается в построении последовательности полиномов Дирихле, быстро сходящихся к L-функции в критической полосе. При этом свойства полиномов Дирихле определяют свойства L-функций.

Нужно скзаать, что эти методы нашли применение и при решении задач в данной работе. Но в случае числовых полей потребовалось дальнейшее их развитие. Так, при исследовании в работе [34] аналитических свойств эйлерова произведения

$$f(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

где χ — неглавный обобщённый числовой характер, существенным моментом является тот факт, что коэффициенты соответствующего степенного ряда являются мультипликативными. В случае неглавного обобщённого характера числового поля $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} \neq \mathbb{Q}$) этот факт не имеет места, и в этом случае метод редукции к степенным рядам нуждается в доработке. Более того, в отличие от [34], при решении поставленных задач наряду с этими методами пришлось использовать результаты и методы алгебраической теории чисел.

Диссертационная работа состоит из из трёх глав. Первая глава посвящена решению первых двух поставленных выше задач. Во второй главе доказывается аналог гипотезы Н. Г. Чудакова для главных обобщённых характеров. Третья глава посвящена изучению вопросов, связанных с нулями L-функций числовых полей.

В **первой главе** диссертации изучаются аналитические свойства эйлеровых произведений вида (1) с обобщёнными характерами числовых полей. Получено условие, при котором сумматорная функция вида (3) является ограниченной.

В начале этой главы получено условие на коэффициенты a_n ряда Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it,$$

при которых сумматорная функция вида $S_t(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} a_n n^{it}$ ограничена единой константой для всех $t \in [t_1, t_2]$ (теорема 1.1).

Рассуждения, аналогичные тем, что приведены в книге [24] при доказательстве теоремы Рисса о сходимости ряда Дирихле на оси сходимости, позволили показать, что при условиях

1. $S(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} a_n = O(1)$;

2. ряд Дирихле $f_1(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^s}$, где $S(n) = \sum\limits_{k \leqslant n} a_k$, определяет функцию, непрерывную на отрезке $[t_1, t_2]$

при любом $t \in [t_1, t_2]$ имеет место оценка

$$S_t(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n n^{it} = O(1),$$

где константа зависит только от t_1 и t_2.

Отметим, что следствием этого утверждения является ограниченность на любом отрезке $[t_1, t_2]$ сумматорной функции вида

$$S_t(x) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n) n^{it},$$

где $\chi(n)$ — числовой характер Дирихле, т.е. конечнозначная мультипликативная функция натурального аргумента, для которой существует такое число m, что:

1. $\chi(n) = 0$ тогда и только тогда, когда $(n, m) > 1$;
2. $\chi(n + m) = \chi(n)$ для любого n.

Этот результат отличным от нашего способом был получен в работе Н. Г. Чудакова и Б. М. Бредихина [45].

Далее в данной работе показано, что при условии существования предела вида

$$\lim_{x \to 1-0} g(x) = \alpha_0,$$

где функция $g(x)$ определяется степенным рядом $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, соответствующим ряду Дирихле $f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, $s = \sigma + it$, коэффициенты которого имеют ограниченную сумматорную функцию, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Ряд Дирихле $f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ определяет функцию, голоморфную в полуплоскости $\sigma > 0$, и при любом $T \geqslant 2$ ограниченную в области $D_T: \ 0 < \sigma < 1, \ 2 < |t| < T$ константой, не зависящей от $s \in D_T$, а зависящей только от T.*

Во второй части этой главы показано существование обобщённых характеров числовых полей (теорема 1.4) и доказаны следующие утверждения.

Теорема 1.5. *Пусть χ — неглавный обобщённый характер числового поля $\mathbb{K}$. Тогда, если ряд Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it,$$

где $S(n) = \sum\limits_{N\mathfrak{a}\leqslant n} \chi(\mathfrak{a})$, *определяет функцию, непрерывную на оси* $\sigma = 1$, *то для любого отрезка* $[t_1, t_2]$ *и любого* $t \in [t_1, t_2]$

$$S_t(x) = \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} \chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{it} = O(1),$$

где константа в оценке зависит только от t_1 *и* t_2.

Теорема 1.6. *Пусть* χ *— обобщённый характер числового поля* $\mathbb{K}$. *Тогда степенной ряд*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - \alpha)x^n,$$

где $a_n = \sum\limits_{N\mathfrak{a}=n} \chi(\mathfrak{a})$, $S(x) = \sum\limits_{N\mathfrak{a}\leqslant x} \chi(\mathfrak{a}) = \alpha x + O(1)$, *имеет конечный предел вида*

$$\lim_{x\to 1-0} g(x).$$

Теорема 1.7. *Пусть* χ *— обобщённый характер числового поля* $\mathbb{K}$. *Тогда эйлерово произведение*

$$f(s) = \prod_{\wp}\left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1}, \quad s = \sigma + it \tag{4}$$

определяет функцию, голоморфную во всех точках полуплоскости $\sigma > 0$, *за исключением точки* $s = 1$, *где она имеет полюс первого порядка в случае главного обобщённого характера, и ограниченную в любой области* $0 < \sigma < 1$, $2 < t < T$ $(-T < t < -2)$ *константой, зависящей только от величины* T.

Замечание. Условие $|t| \geqslant 2$ связано только с методом доказательства теоремы 1.2. Можно показать ограниченность функции $f(s)$ в любой области $0 < \sigma \leqslant \sigma_1 < 1$, $|t| \leqslant T$, но мы в данной работе не приводим доказательство этого факта.

Теорема 1.8. *При условиях теоремы 1.7 эйлерово произведение* (4) *определяет функцию, голоморфную на оси* $\sigma = 0$ *в точках* $s = it$, $|t| \geqslant 2$.

Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [31], [28],

[27], [26], [33].

Вторая глава диссертации посвящена доказательству аналога гипотезы Н. Г. Чудакова в случае главных обобщённых характеров числовых полей. Основным результатом этой главы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2.1. *Главный обобщённый характер числового поля $\mathbb{K}$ является характером Дирихле этого поля.*

Далее в этой главе обсуждаются вопросы, связанные с доказательством аналога гипотезы Н. Г. Чудакова для неглавных обобщённых характеров числовых полей. Результат теоремы 2.1 опубликован в работе автора [26].

В **третьей главе**, в первую очередь, рассматриваются вопросы, связанные с расширенной гипотезой Римана для нулей L-функций Дирихле числовых полей. В начале главы указан достаточно широкий класс L-функций Дирихле, для которых расширенная гипотеза Римана является следствием соответствующей гипотезы для классических L-функций Дирихле. Это класс L-функций с норменными характерами, а именно, такими харатерами χ, для каждого из которых существует соответствующий числовой характер Дирихле χ_1, такой, что для любого простого идеала $\wp$

$$\chi(\wp) = \chi_1(N\wp).$$

Далее в этой главе доказано утверждение, которое является эквивалентом расширенной гипотезы Римана для L-функций Дирихле числовых полей.

Теорема 3.1. *Нетривиальные нули L-функции Дирихле $L(s, \chi, \mathbb{K})$ числового поля $\mathbb{K}$, где χ — неглавный характер, тогда и только тогда лежат на критической прямой, когда имеет место асимптотическая оценка вида:*

$$\sum_{\wp, N\wp \leqslant x} \chi(\wp) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

, где суммирование ведётся по простым идеалам поля $\mathbb{K}$, а ε — произвольное положительное число.

Отметим, что одним из следствий теоремы 3.1 является утверждение о существовании достаточно большого числа эйлеровых произведений, отличных от L-функций Дирихле, которые определяют функции, голоморфные в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$, с определённым условием на нули в этой полуплоскости.

Следствие. *Пусть $h(\mathfrak{a})$ — конечнозначная мультипликативная функция, заданная на полугруппе целых идеалов поля $\mathbb{K}$, значения которой отличаются от значений некоторого характера Дирихле χ числового поля $\mathbb{K}$ на множестве простых идеалов $\wp$, для которых*

$$\sum_{N\wp\leqslant x}{}' 1 = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Тогда эйлерово произведение

$$f(s) = \prod_{\wp}\left(1 - \frac{h(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1}, \quad s = \sigma + it$$

определяет функцию, голоморфную в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$, нули которой в этой полуплоскости совпадают с нуляи L-функции Дирихле $L(s, \chi, \mathbb{K})$.

Результаты теоремы 3.1 и её следствия опубликованы в работах автора [18], [30], [35].

Во втором разделе этой главы изучается аппроксимационный подход в задаче определения нетривиальных нулей L-функций Дирихле, заключающийся в построении последовательности полиномов Дирихле, нули которых, начиная с некоторого номера, совпадают в прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ |t| \leqslant T$ с нулями L-функции.

Отметим, что в случае классических L-функций Дирихле этот подход изучался в работе [34] Там был указан простой алгоритм построения аппроксимационных полиномов Дирихле $Q_n(s)$, и было показано, что для прямоугольника D_T нули полинома $Q_n(s)$ при $n = [2T]+1$ с учётом кратности совпадают с нулями L-функции Дирихле. Это позволило не только провести серию численных экспериментов, результаты которых говорят в пользу расширенной гипотезы Римана в классическом случае, но и определиться с новым подходом получения плотностных теорем для нулей L-функций Дирихле.

В нашем случае в этом направлении получены следующие результаты.

Теорема 3.2. *Существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, сходящаяся к L-функции Дирихле $L(s,\chi,\mathbb{K})$ в любом прямоугольнике D_T : $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ |t| \leqslant T$ со скоростью более высокой, чем любая степенная функция, т.е.*

$$||L(s,\chi,\mathbb{K}) - Q_n(s)||_{C(D_T)} = o\left(\frac{1}{n^m}\right) \qquad (5)$$

при любом натуральном m.

Замечание. Полиномы $Q_n(s)$, для которых будет иметь место утверждение теоремы 3.2, можно строить по схеме построения аппроксимационных полиномов, указанной в работе [34].

В случае L-функций Дирихле с норменными характерами Дирихле в работе доказаны

Теорема 3.3. *Пусть χ — норменный характер числового поля $\mathbb{K}$. Тогда существует последовательность полиномов Дирихле $Q_{n^m}(s)$ (степеней n^m), где $m = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, таких, что для любого прямоугольника $D_T : 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ |t| \leqslant T$ имеет место оценка вида*

$$||L(s,\chi,\mathbb{K}) - Q_{n^m}(s)||_{C(D_T)} = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right),$$

где $\rho > 1$.

Теорема 3.4. *При условиях теоремы 3.3 нули полинома $Q_{n^m}(s)$ в прямоугольнике D_T при $n = [2T] + 1$ совпадают с учётом кратности с нуляи L-функции Дирихле.*

Замечание. Последовательность полиномов $Q_{n^m}(s)$ в случае норменных характеров определяется разложением L-функции $L(s,\chi,\mathbb{K})$ в произведение классических L-функций Дирихле.

В конце этого раздела приводится пример построения полиномов $Q_{n^m}(s)$ по схеме, указанной в работе [34], т.е. аппроксимирующие полиномы определяются частичными суммами разложения функции $g(x)$, определённой соответствующим степенным рядом, на отрезке $[-1, 1]$ по полиномам Чебышева.

Результаты численного эксперимента позволяют высказать предположение о том, что утверждение теоремы 3.4 будет иметь место для произвольных характеров Дирихле.

Результаты теорем 3.2, 3.3 и 3.4 опубликованы в работах автора [29], [17].

В третьем разделе этой главы обсуждаются возможности аппроксимационного подхода в задаче аналитического продолжения L-функций Дирихле числовых полей.

В четвёртом разделе рассматриваются различные подходы получения плотностных теорем для нулей L-функций Дирихле числовых полей.

В случае норменных характеров аппроксимационный подход позволяет доказать следующий результат.

Теорема 3.6. *Для числа $N(T)$ нулей L-функции Дирихле $L(s,\chi,\mathbb{K})$, где χ — неглавный норменный характер, лежащих в прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ |t| \leqslant T$ (с учётом кратности), имеет место асимптотическое равенство*

$$N(T) = \frac{mT\ln T}{\pi} + O(T),$$

где $m = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.

В случае произвольных характеров числовых полей аппроксимационный подход не даёт желаемых результатов. В этом случае в работе предлагается иной подход, в основе которого лежат глубокие результаты алгебраической теории чисел, изложение которых можно найти в книгах [23], [2].

Пусть $L \supset \mathbb{K}$ — такое абелево расширение поля $\mathbb{K}$ минимальной степени, что характер Дирихле χ поля $\mathbb{K}$ согласован с характером $\widehat{\chi}$ группы Галуа этого расширения, т.е.

$$\chi(\wp) = \widehat{\chi}(F[\wp]),$$

где $F[\wp]$ — автоморфизм Фробёниуса для идеала $\wp$ при данном расширении.

Как следует из теории полей классов, такое расширение существует (см., например, [8]). Пусть $r = [L : \mathbb{Q}]$. При данных обозначениях в работе доказана

Теорема 3.7. *Для числа $N(T)$ нулей L-функции $L(s,\chi,\mathbb{K})$, лежащих в прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ |t| \leqslant T$, имеет место оценка*

$$N(T) = O\left(\frac{rT\ln T}{\pi}\right).$$

Замечание. В теореме 3.7 желательно получить оценку

$$N(T) = O\left(\frac{mT\ln T}{\pi}\right),$$

где $m = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.

Результаты теорем 3.6 и 3.7 опубликованы в работе автора [32].

1. Аналитические свойства одного класа эйлеровых произведений и оценка одного класса сумматорных функций

В этой главе изучаются аналитические свойства эйлеровых произведений

$$f(s) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1}, \quad s = \sigma + it, \tag{1.1}$$

где произведение берётся по всем простым идеалам кольца целых элементов числового поля $\mathbb{K}$ ($[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] < \infty$), χ — конечнозначный характер, заданный на полугруппе целых идеалов поля $\mathbb{K}$ с ограниченной сумматорной функцией $S(x) = \sum\limits_{N\mathfrak{a} \leqslant x} \chi(\mathfrak{a})$.

Показано, что такие характеры существуют и, по аналогии с числовыми характерами они получили название обобщённых характеров числовых полей.

Кроме того, в этой главе изучается задача оценки сумматорных функций вида

$$S_t(x) = \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} \chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{it}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

где χ — неглавный обобщённый характер числового поля, а суммирование ведётся по целым идеалам, норма которых не превосходит x.

1.1. Аналитические свойства одного класса рядов Дирихле с ограниченной сумматорной функцией коэффициентов и оценка одного класса сумматорных функций

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \ \sigma > 1, \tag{1.3}$$

где $S(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} a_n = O(1)$.

Метод суммирования Абеля даёт следующее представление для ряда (1.3):

$$f(s) = s \int_1^{\infty} \frac{S(u)}{u^{s+1}} du,$$

из которого следует аналитическое продолжение функции $f(s)$ в полуплоскость $\sigma > 0$.

В этом разделе для отдельных классов рядов (1.3) изучим поведение функций $f(s)$ при подходе к оси $\sigma = 0$. Кроме того, для некоторых классов рядов (1.3) получена оценка сумматорных функций вида

$$S_t(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n n^{it} \tag{1.4}$$

на отрезке $|t| \leqslant T$.

Следующий результат отражает связь между оценкой сумматорной функции (1.4) и поведением функции $f(s)$ при подходе к оси $\sigma = 0$.

Лемма 1.1. *Пусть при некотором действительном t для сумматорной функции* (1.4) *имеет место оценка*

$$|S_t(x)| = o(\ln x). \tag{1.5}$$

Тогда при подходе к точке $s = it$ функция ведёт себя следующим образом:

$$|f(\sigma + it)| = o\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

при $\sigma \to 0+$.

Доказательство. Пусть имеет место оценка (1.5). Тогда для любого ε найдётся такое число x_0, что при $x > x_0$ выполняется $|S_t(x)| < \varepsilon \ln x$.

Рассмотрим функцию $f_1(s) = f(s - it)$. Тогда при $s = \sigma + it$

$$f_1(\sigma) = \sigma \int\limits_1^\infty S_t(x) x^{-\sigma-1} dx.$$

Отсюда получаем:

$$|f_1(\sigma)| \leqslant \sigma \int\limits_1^{x_0} |S_t(x)| x^{-\sigma-1} dx + \sigma \int\limits_{x_0}^\infty |S_t(x)| x^{-\sigma-1} dx \leqslant$$

$$\leqslant \sigma C + \varepsilon\sigma \sup_{x=x_0} \frac{\ln x}{x^{\frac{\sigma}{2}}} \int\limits_{x_0}^\infty x^{-\frac{\sigma}{2}-1} dx \leqslant \sigma C + \varepsilon\sigma \frac{4}{\sigma^2 x_0} \leqslant \varepsilon \frac{C_1}{\sigma},$$

где константа C_1 не зависит от σ и ε. Здесь мы воспользовались тем фактом, что $\sup\limits_{x=x_0} \frac{\ln x}{x^{\frac{\sigma}{2}}}$ достигается в точке x_1, такой, что $\ln x_1 = \frac{2}{\sigma}$.

Последнее неравенство доказывает утверждение леммы 1.1. □

Отметим, что условие $S(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} a_n = O(1)$ не позволяет говорить о том, что на оси $\sigma = 0$ нет точек «типа полюса». Точка $s_0 = it_0$ называется точкой «типа полюса» для функции $f(s)$, если

$$\overline{\lim_{\sigma \to 0+}} f(\sigma + it_0) = \infty. \tag{1.6}$$

Тем более из ограниченности функции $S(x)$ не следует ограниченность функций $S_t(x)$.

Наша задача — получить условия, при которых сумматорные функции

$S_t(x)$ будут ограничены единой константой на отрезке $[t_1, t_2]$.

В работе автора [31] было получено такое условие, выраженное в терминах аналитических свойств ряда Дирихле

$$f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}, \text{ где } b_n = \frac{S(n)}{n} \text{ и } S(n) = \sum_{k \leqslant n} a_k. \tag{1.7}$$

В основе доказательства соответствующего утверждения лежат рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведённым в книге [24] при доказательстве теоремы Рисса о сходимости ряда Дирихле в точках голоморфности на оси сходимости.

Имеет место

Теорема 1.1. *Пусть ряд Дирихле* (1.7) *определяет функцию, голоморфную на границе прямоугольника* $0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. *Тогда для любого* $t \in [t_1, t_2]$ *для сумматорной функции* $S_t(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} a_n n^{-it}$ *имеет место оценка*

$$S_t(x) = O(1),$$

где константа зависит только от t_1 *и* t_2.

Доказательство. Запишем равенство, полученное в результате применения формулы суммирования Абеля:

$$\sum_{n \leqslant N} a_n n^{-\sigma - it} = \sum_{n=1}^{N-1} S(n+1)[n^{-\sigma - it} - (n+1)^{-\sigma - it}] + S(N)N^{-\sigma - it}.$$

Перейдём в этом равенстве к пределу при $\sigma \to 0$. Получим:

$$\sum_{n \leqslant N} a_n n^{-it} = \sum_{n=1}^{N-1} S(n)[n^{-it} - (n+1)^{-it}] + O(1), \tag{1.8}$$

где константа в $O(1)$ не зависит от σ и t.

Воспользуемся оценкой, доказанной в работе [5]:

$$n^{-it} - (n-1)^{-it} + itn^{-(1+it)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Из этой оценки и из равенства (1.8) следует, что

$$\sum_{n \leqslant N} a_n n^{-it} = \sum_{n-1}^{N-1} S(n) \frac{it}{n^{1+it}} + O(1), \tag{1.9}$$

где константа не зависит от N и t.

Исходя из условий утверждения, оценим сумму

$$\sum_{n=1}^{N} S(n) \frac{it}{n^{1+it}}.$$

Обозначим $b_n = \frac{S(n)}{n}$ и запишем ряд Дирихле (1.7) в виде

$$f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}, \quad \sigma > 0.$$

При каждом $s = \sigma + it,\ \sigma > 0$ имеем:

$$\left| f_1(s) - \sum_{n=1}^{N} b_n n^{-s} \right| = \lim_{p \to \infty} \left| \sum_{n=N+1}^{N+p} b_n n^{-s} \right|.$$

Дальнейшие рассуждения в какой-то степени повторяют рассуждения, приведённые в [24] на стр. 141–143.

Рассмотрим прямоугольник $-\alpha \leqslant \sigma \leqslant \alpha,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, в котором функция (1.7) голоморфна.

Рассмотрим ещё функцию

$$f_{1,\varepsilon_0}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^{1+\varepsilon_0}} \frac{1}{n^s}, \quad \alpha - 2\varepsilon_0 > 0.$$

Эта функция голоморфна в прямоугольнике

$$-\alpha_1 \leqslant \sigma \leqslant \alpha_1,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2,\ \text{где } \alpha_1 = \alpha - \varepsilon_0. \tag{1.10}$$

Далее, рассмотрим функцию

$$g_q(s) = q^s(s - it_1)(s - it_2)\left[f_{1,\varepsilon_0}(s) - \sum_{n=1}^{q} \frac{S(n)}{n^{1+\varepsilon_0}}\frac{1}{n^s}\right]. \tag{1.11}$$

Покажем, что на сторонах прямоугольника (1.10) функция $g_q(s)$ равномерно по s стремится к нулю при $q \to \infty$.

Пусть $\sigma > 0$. Имеем:

$$f_{1,\varepsilon_0}(s) - \sum_{n=1}^{q} \frac{S(n)}{n^{1+\varepsilon_0}}\frac{1}{n^s} = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=q+1}^{p} \frac{S(n)}{n^{1+\varepsilon_0}}\frac{1}{n^s}.$$

Обозначим $c_n = \frac{S(n)}{n^{1+\varepsilon_0}},\ A(k) = c_{q+1} + \ldots + c_k$. Тогда по формуле суммирования Абеля имеем:

$$\sum_{n=q+1}^{p} c_n n^{-s} = \sum_{n=q+1}^{p-1} A(n)(n^{-s} - (n_1)^{-s}) + A(p)p^{-s}.$$

Так как при достаточно больших q выполняется $|A(n)| < \varepsilon$, и так как

$$|n^{-s} - (n+1)^{-s}| = \left| s \int\limits_{n}^{n+1} u^{-s-1} du \right| \leqslant \frac{|s|}{\sigma}(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}),$$

то при $q \geqslant q_0$ получаем:

$$\left| \sum_{n=q+1}^{p} c_n n^{-s} \right| < \varepsilon \frac{|s|}{\sigma}(q+1)^{-\sigma}$$

и

$$\left| f_{1,\varepsilon_0}(s) - \sum_{n=1}^{q} c_n n^{-s} \right| < \varepsilon \frac{|s|}{\sigma} q^{-s}. \tag{1.12}$$

В силу оценки (1.12) при $\sigma > 0$ и $q \geqslant q_0$

$$|g_q(s)| \leqslant \varepsilon \frac{|s - it_1||s - it_2||s|}{\sigma}.$$

на стороне $\sigma = \alpha_1,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ отношение $\frac{|s|}{\sigma}$ ограничено, и, следовательно,

$$|g_q(s)| < \varepsilon C,$$

где константа C не зависит от q и ε.

На верхней стороне $0 \leqslant \sigma \leqslant \alpha_1,\ t = t_1$

$$\frac{|s - it_1|}{\sigma} = 1.$$

Аналогично и для нижней стороны.

Таким образом, на всём контуре при $\sigma > 0,\ q \geqslant q_0$

$$|g_q(s)| < \varepsilon C_1,$$

где константа C_1 не зависит от q и ε.

Пусть теперь $\sigma < 0$. Возьмём достаточно большое натуральное число $p < q$. В нашем прямоугольнике выполняется неравенство:

$$\left| f_{1,\varepsilon_0}(s) - \sum_{n=1}^{q} c_n n^{-s} \right| = \left| f_{1,\varepsilon_0}(s) - \sum_{n=1}^{p-1} c_n n^{-s} - \sum_{n=p}^{q} c_n n^{-s} \right| \leqslant$$
$$\leqslant M + \left| \sum_{n=p}^{q} c_n n^{-s} \right|,$$

где величина M зависит от p.

Так как

$$\sum_{n=p}^{q} c_n n^{-s} = \sum_{n=p}^{q-1} A(n)(n^{-s} - (n+1)^{-s}) + A(q) q^{-s},$$

где $|A(n)| < \varepsilon$ при выбранном p, то

$$\left|\sum_{n=p}^{q} c_n n^{-s}\right| \leqslant 2\varepsilon \frac{|s|}{|\sigma|} q^{-\sigma}.$$

Таким образом, для функции $g_q(s)$ получаем оценку

$$|g_q(s)| \leqslant |s - it_1||s - it_2| M q^{\sigma} + 2\varepsilon \frac{|s - it_1||s - it_2|}{|\sigma|}.$$

На сторонах прямоугольника при $\sigma < 0$ первое слагаемое в правой части мало, когда q значительно больше p, а второе слагаемое меньше, чем εC_2, где C_2 не зависит от q и ε. Следовательно, на сторонах прямоугольника (1.10)

$$|g_q(s)| < \varepsilon C_3,$$

где C_3 не зависит от q.

Это неравенство будет выполняться и внутри прямоугольника, в частности, на интервале $\sigma = 0,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. На этом интервале оно принимает вид

$$|t - t_1||t - t_2| \left| f_{1,\varepsilon_0}(it) - \sum_{n=1}^{q} c_n n^{it} \right| < \varepsilon C_3.$$

Тогда на меньшем отрезке $t_1' < t < t_2'$ равномерно имеет место предел:

$$\lim_{q \to \infty} \sum_{n=1}^{q} c_n n^{it} = f_{1,\varepsilon_0}(it),$$

или

$$\lim_{q \to \infty} \sum_{n=1}^{q} \frac{S(n)}{n^{1+\varepsilon_0}} n^{-it} = f_1(\varepsilon_0 + it), \tag{1.13}$$

где функция $f_1(s)$ — функция вида (1.7).

Так как на интервале $t_1' \leqslant t \leqslant t_2'$ равномерно

$$\lim_{\varepsilon_0 \to 0} f_1(\varepsilon_0 + it) = f_1(it),$$

то в силу (1.13) имеем оценку

$$\sum_{n=1}^{q} \frac{S(n)}{n} n^{-it} = O(1),$$

где константа не зависит от t, что в силу оценки (1.9) и завершает доказательство теоремы 1.1. $\square$

Приведём два следствия этого утверждения.

Следствие 1. *В формулировке теоремы 1.1 достаточно было потребовать непрерывности функции $f_1(s)$ на отрезке $\sigma = 1,\ t_1 \leqslant t \leqslant t$.*

Доказательство. Из принципа Шварца для аналитического продолжения для функции $f_1(s)$ (см., например, [25]), эта функция будет голоморфной на отрезке $\sigma = 0,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. $\square$

Следующее следствие касается случая, когда $a_n = \chi(n)$, где $\chi(n)$ — числовой характер Дирихле по некоторому модулю m, т.е. $\chi(n)$ — конечнозначная мультипликативная функция, для которой выполняются условия:

1. $\chi(n) = 0$, тогда и только тогда, когда $(n, m) > 1$;
2. $\chi(n + m) = \chi(n)$ для любых n.

Следствие 2. *Пусть $\chi(n)$ — числовой характер Дирихле. Тогда для любых t_1, t_2 и для всех $t \in [t_1, t_2]$ имеет место оценка вида*

$$S_t(x) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n) n^{it} = O(1),$$

где константа в оценке зависит только от t_1 и t_2.

Доказательство. Ясно, что голоморфность функции

$$f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n} \frac{1}{n^s}$$

на оси $\sigma = 0$ равносильна голоморфности функции

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^s} \tag{1.14}$$

на оси $\sigma = 1$.

В случае, когда $S(n) = \sum\limits_{k \leqslant n} \chi(k)$, то в силу периодичности последовательности $S(n)$ функция $f(s)$ вида (1.14) голоморфна, что, в силу теоремы 1.1 доказывает утверждение следствия 2. □

Отметим, что утверждение следствия 2 было доказано в работе [45], но метод доказательства этого утверждения отличен от нашего.

Следствие 3. *Пусть ряд Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it,\ \sigma > 1,\ \textit{где}\ S(n) = \sum_{k \leqslant n} a_k,$$

определяет функцию, непрерывную на отрезке $\sigma = 1,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. *Тогда для всех* $t \in [t_1, t_2]$ *имеет место оценка*

$$S_t(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n n^{it} = O(1),$$

где константа в оценка зависит только от t_1 *и* t_2.

Далее, укажем дополнительное условие на коэффициент a_n ряда Дирихле (1.3), при котором функция $f(s)$, определённая этим рядом, будет ограничена в любой области

$$D_T:\ 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ 2 \leqslant |t| \leqslant T. \tag{1.15}$$

В основе доказательства этого результата лежит метод редукции к степенным рядам.

Рассмотрим степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.16}$$

соответствующий ряду Дирихле (1.3), т.е. имеющий те же коэффициенты.

Метод редукции к степенным рядам устанавливает взаимосвязь между аналитическими свойствами ряда Дирихле (1.3) и граничным поведением соответствующего степенного ряда. Такая взаимосвязь устанавливается на основании изучения свойств прямого

$$f(s)\Gamma(s) = \int\limits_{1}^{\infty} g(e^{-x})x^{s-1}dx,$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера, $g(e^{-x}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$, и обратного

$$g(e^{-x}) = \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} f(s)\Gamma(s)x^{-s}ds, \quad b > 1,\ x > 0$$

преобразований Меллина.

При данных обозначениях имеет место

Теорема 1.2. *Пусть степенной ряд* (1.16), *соответствующий ряду Дирихле* (1.3), *имеет в точке* $z = 1$ *конечный односторонний предел вида*

$$\lim_{x\to 1-0} g(x).$$

Тогда функция $f(s)$, *определённая рядом Дирихле* (1.3), *аналитически продолжима в полуплоскость* $\sigma > 0$ *и для любого* $T > 0$ *ограничена в области* D_T *вида* (1.15), *т.е.*

$$||f(s)||_{C(D_T)} = O(1),$$

где константа в оценке не зависит от σ_0, *а зависит только от величины* T.

Доказательство. Воспользуемся формулой суммирования Абеля и получим для функции $f(s)$ следующее представление:

$$f(s) = s\int\limits_1^\infty \frac{S(u)}{u^{s-1}}du, \quad \sigma > 1,$$

где $S(x) = \sum\limits_{n\leqslant x} a_n$, что даёт аналитическое продолжение $f(s)$ в полуплоскость $\sigma > 0$.

Рассмотрим пробразование Меллина

$$f(s)\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx.$$

Разобьём последний интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int\limits_0^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx = \int\limits_1^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx + \int\limits_0^1 g(e^{-x})x^{s-1}dx.$$

По условию $g(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$. Пусть $P_n(x)$ — последовательность полиномов наилучшего приближения для $g(x)$ на этом отрезке. В силу того, что для $g(x)$ на интервале $(-1,1)$ определяется рядом с ограниченными коэффициентами, то, как показано в теореме 6.1 книги [8], последовательность коэффициентов полиномов $P_n(x)$ ограничена в совокупности, т.е. для всех n и $k \leqslant n$ существует константа M, такая, что для коэффициентов полиномов $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)}x^k$ имеет место неравенство $|\alpha_k^{(n)}| \leqslant M$.

Представим функцию $f(s)$ в виде

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\int\limits_1^\infty g(e^{-x})x^{s-1} + \int\limits_0^1 [g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})]x^{s-1}dx + \int\limits_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}dx\right).$$

Из этого представления при заданном $\sigma > 0$ следует оценка вида

$$|f(s)| \leqslant \frac{1}{|\Gamma(s)|}\left[C_0 + \frac{\varepsilon_n}{\sigma} + \left|\int\limits_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}dx\right|\right]. \tag{1.17}$$

Действительно, в силу того, что $g(e^{-x}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx},\ |a_n| < C$, интеграл $\int_1^{\infty} g(e^{-x})x^{s-1}dx$ абсолютно сходится при любом s. Величина ε_n в оценке (1.17) определяется как $||g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})||_{C[0,1]}$.

Из неравенства (1.17) при $n \geqslant n_0$ получаем неравенство вида

$$|f(s)| \leqslant \frac{1}{|\Gamma(s)|}\left[C_1 + \left|\int\limits_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}dx\right|\right], \tag{1.18}$$

где константа C_1 не зависит от σ.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 e^{-kx}x^{s-1}dx.$$

Применяя последовательно формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int\limits_0^1 e^{-kx}x^{s-1}dx = \frac{e^{-k}}{s} + \frac{ke^{-k}}{s(s+1)} + \frac{k^2e^{-k}}{s(s+1)(s+2)} + \dots$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}dx &= \int\limits_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} e^{-kx}x^{s-1}dx = \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int\limits_0^1 e^{-kx}x^{s-1}dx = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} e^{-x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+m)}.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора функции e^x:

$$e^x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m.$$

Проинтегрируем это равенство дважды по t от 0 до x:

$$\int_0^x e^t dt = e^x - 1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{x^{m+1}}{m+1},$$
$$\int_0^x (e^t - 1) dt = e^x - 1 - x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} = x^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+2)!}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+2)!}.$$

С учётом этого при $|t| \geqslant 2$ из равенства (1.19) следует

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{s(s+1)\dots(s+m)} \right| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m+2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{(m+2)!} = \\ = \frac{e^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}.$$

Таким образом,

$$\left| \int_0^1 P_n(e^{-x}) x^{s-1} dx \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k^{(n)}| e^{-k} \left(\frac{e^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} \right) \leqslant \\ \leqslant M \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{e^{-k}}{k^2} - \frac{e^{-k}}{k} \right) \leqslant M_1,$$

где величина M_1 не зависит от n и σ_0.

Отсюда в силу (1.18) получаем:

$$|f(s)| \leqslant \frac{1}{|\Gamma(s)|} [C_1 + M_1] \leqslant \frac{C}{|\Gamma(s)|},$$

где константа C не зависит от σ_0.

Таким образом, при $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ 2 \leqslant |t| \leqslant T$

$$|f(s)| = O(1),$$

где константа в оценке не зависит от σ_0, что и завершает доказательство теоремы 1.2. $\square$

Замечание. В формулировке теоремы 1.2 область D_T можно заменить на прямоугольник $D_T:\ 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ |t| \leqslant T$, если только найдётся такое числов $t, |t| \geqslant 2$, что:

1. $S_t(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} a_n n^{it} = O(1)$;
2. существует конечный предел вида

$$\lim_{x \to 1-0} g_t(x),$$

   где $g_t(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{it} x^n$.

Ниже будет доказан более общий результат, чем утверждение теоремы 1.2. Аналогичный результат в случае обобщённых числовых характеров приведён в работе [19].

Имеет место

Теорема 1.3. *При условиях теоремы 1.2 для любого прямоугольника D_T : $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ 2 \leqslant t \leqslant T\ (-T \leqslant t \leqslant -2)$ существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, равномерно сходящаяся к функции $f(s)$, заданной рядом Дирихле (1.3), в прямоугольнике D_T. При этом функция $f(s)$ является голоморфной, а последовательность $Q_n(s)$ равномерно сходится к $f(s)$ на отрезке $\sigma = 0,\ 2 \leqslant t \leqslant T\ (-T \leqslant t \leqslant -2)$.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 1.3 будем использовать обозначения и промежуточные результаты теоремы 1.2.

Пусть $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} x^k$ — многочлены наилучшего приближения функции $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ на отрезке $[-1, 1]$, и пусть $Q_n(s) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^{(n)}}{k^s}$ — соответствующие полиномы Дирихле. Тогда имеем:

$$Q_n(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left[\int\limits_1^{\infty} P_n(e^{-x}) x^{s-1} dx + \int\limits_0^1 P_n(e^{-x}) x^{s-1} dx \right]. \tag{1.20}$$

Первый интеграл абсолютно сходится при любом s, и, следовательно, в прямоугольнике D_T

$$\left| \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_1^{\infty} P_n(e^{-x}) x^{s-1} dx \right| < C_1,$$

где C_1 не зависит от σ_0 и n.

При доказательстве теоремы 1.2 было показано, что в прямоугольнике D_T

$$\left| \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{1} P_n(e^{-x}) x^{s-1} dx \right| < C_2,$$

где константа C_2 не зависит от σ_0 и n.

Отсюда в силу (1.20) получаем равномерную ограниченность всех полиномов $Q_n(s)$ в прямоугольнике D_T, т.е.

$$||Q_n(s)||_{C(D_T)} < C, \tag{1.21}$$

где константа C не зависит от σ_0 и n.

По теореме Витали [42] существует подпоследовательность полиномов Дирихле $Q_{n_k}(s)$, которая будет равномерно сходиться в любой открытой подобласти области $0 < \sigma < 1,\ 2 < t < T\ (-T < t < -2)$ к некоторой голоморфной функции $f_1(s)$.

Покажем, что при $\sigma \geqslant \sigma_0$ последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$ равномерно сходится к функции $f(s)$. Действительно, пусть полиномы $P_n(x) =$

$\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k$ сходятся к функции $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ на отрезке $[0,1]$ со скоростью ε_n ($\varepsilon_n \to 0$). Можно считать, что $a_0^{(n)} = 0$, т.к. $P_n(0) = a_0^{(n)} \to 0$ со скоростью, не меньшей, чем ε_n.

Пусть $P_n(x) = x^\lambda \widetilde{P_n}(x),\ g(x) = x^\lambda \widetilde{g}(x)$, где $0 < \lambda < 1$. Тогда на отрезке $[0,1]$ $\widetilde{P_n}(x)$ стремится к функции $\widetilde{g}(x)$ со скоростью ε_n ($\varepsilon_n \to 0$). Действительно, в противном случае это условие должно нарушаться на некоторой последовательности x_n, где $x_n \to 0$. Но это противоречит тому, что $\widetilde{P_n}(x_n)$ и $\widetilde{g}(x_n)$ стремятся к нулю, когда $x_n \to 0$.

Таким образом, при $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$ имеет место оценка

$$|f(s) - Q_n(s)| \leqslant \frac{1}{|\Gamma(s)|} \left(\int\limits_0^1 |g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})| x^{\sigma-1} dx + \right.$$
$$\left. + \int\limits_1^\infty e^{-\lambda x} |\widetilde{g}(e^{-x}) - \widetilde{P_n}(e^{-x})| x^{\sigma-1} dx \right) \leqslant \frac{\varepsilon_n}{\sigma_0} + C\widetilde{\varepsilon}_n,$$

где константа C не зависит от σ_0 и n. Следовательно, последовательность $Q_n(s)$ при $\sigma \geqslant \sigma_0$ равномерно сходится к функции $f(s)$.

В силу предыдущего последовательность $Q_{n_k}(s)$ равномерно сходится к функции $f(s)$ в любой области $0 < \sigma < 1,\ 2 < t < T$ ($-T < t < -2$).

Далее, рассмотрим последовательность $\sigma_k \to 0$ и последовательность отрезков $I_k:\ \sigma = \sigma_k,\ 2 \leqslant t \leqslant T$ ($-T \leqslant t \leqslant -2$). Рассмотрим также последовательность функций $f_n(t)$, заданную на отрезке $\sigma = 0,\ 2 \leqslant t \leqslant T$ ($-T \leqslant t \leqslant -2$), где $f_k(t) = Q_{n_k}(s)|_{I_k}$.

Последовательность функций $f_n(s)$ является равномерно ограниченной. Следовательно, существует подпоследовательность $f_{n_m}(t)$, равномерно сходящаяся к некоторой голоморфной функции $f(t)$.

Рассмотрим соответствующую подпоследовательность полиномов Дирихле $Q_{n_m}(s)$. Эта подпоследовательность сходится в любой подобласти области $0 < \sigma < 1,\ 2 < t < T$ ($-T < t < -2$) к функции $f(s)$, а на отрезке $\sigma = 0,\ 2 \leqslant t \leqslant T$ ($-T \leqslant t \leqslant -2$) — к непрерывной функции $f(t)$.

Таким образом, функция $f(s)$ голоморфна в области $0 < \sigma < 1,\ 2 < t <$

T $(-T < t < -2)$ и непрерывна на границе $\sigma = 0,\ 2 \leqslant t \leqslant T$ $(-T \leqslant t \leqslant -2)$. По принципу Шварца [25] аналитического продолжения получаем голоморфность функции $f(s)$ на границе $\sigma = 0,\ 2 \leqslant t \leqslant T$ $(-T \leqslant t \leqslant -2)$, что и завершает доказательство теоремы 1.3. $\square$

Замечание. Отметим, что из утверждения теоремы 1.3 выпадает отрезок $\sigma = 0,\ |t| < 2$, что связано с методом доказательства теоремы 1.2.

Отметим также, что из интегрального представления функции $f(s)$:

$$f(s) = s\int_{1}^{\infty} \frac{S(u)}{u^{s+1}}du$$

следует её ограниченность на отрезке $t = 0,\ 0 < \sigma < 1$.

1.2. Обобщённые характеры числовых полей. Аналитические свойства эйлеровых произведений и оценка одного класса сумматорных функций, определяемых обобщёнными характерами

В этом разделе изучаются аналитические свойства эйлеровых произведений вида (1.1):

$$f(s) = \prod_{\wp}\left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1}, \quad s = \sigma + it,$$

где χ — конечнозначный характер, заданый на полугруппе целых идеалов числового поля K, произведение берётся по всем простым идеалам, а $N\wp$ — норма идеала $\wp$.

В случае числовых характеров, т.е. конечнозначных мультипликативных функций натурального аргумента, аналитические свойства эйлеровых произведений изучались многими авторами (см. по этому поводу, например, [37]). Особо стоит выделить работы, связанные с известной проблемой обобщённых характеров. Эта проблема была поставлена Ю. В. Линником и Н. Г. Чудаковым в связи с задачей аналитического продолжения рядов Дирихле.

Подход Римана при решении задачи аналитического продолжения дзетафукнции, основанный на функциональном уравнении тета-функции (см., например, [9]), получил дальнейшее развитие и взят за основу в задаче аналитического продолжения классических L-функций Дирихле (см., например, [43]), в задаче аналитического продолжения L-функций Дирихле числовых полей [1], и во многих других задачах.

Уже в задаче аналитического продолжения L-функций Дирихле числовых полей Гекке пришлось разрабатывать сложный математический аппарат для реализации римановской идеи. В дальнейших работах этот аппарат усложнялся и связывался с изучением параболических форм.

Ю. В. Линник и Н. Г. Чудаков поставили перед собой задачу найти более простые подходы в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле. Начали они с классических L-функций Дирихле и стали изучать задачу аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными числовыми характерами χ, для которых выполняются условия:

1. $\chi(p) \neq 0$ почти для всех простых p;
2. $S(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} \chi(n) = \alpha x + O(1)$,

т.е. таких числовых характеров, которые в отличие от характеров Дирихле не обязаны обладать свойством периодичности. Такие характеры получили название обобщённых характеров (см. [47], [46]). У Н. Г. Чудакова встал вопрос о существовании обобщённых характеров, отличных от характеров Дирихле. В работе [45] было показано существование неконечнозначных характеров с ограниченной сумматорной функцией. В случае конечнозначных характеров Н. Г. Чудаков высказал предположение, которое известно как гипотеза Н. Г. Чудакова, о том, что всякий обобщённый характер является характером Дирихле. Гипотеза Н. Г. Чудакова была доказана в 1964 году В. В. Глазковым для главных ($\alpha \neq 0$) обобщённых характеров [6]. Это доказательство является элементарным, основано на изучении возможных значений обобщённых характеров и занимает много места. Основной недостаток этого доказательства заключается в том, что совершенно не видно путей его распространения на неглавные обобщённые характеры.

В 2014 году в работе [34] было получено аналитическое доказательство гипотезы Н. Г. Чудакова для главных обобщённых характеров, в основе которого лежали аналитические свойства эйлеровых произведений с обобщёнными характерами.

Есть основания надеяться, что на данном пути будет получено полное решение гипотезы Н. Г. Чудакова.

В данном разделе подобные вопросы рассматриваются для конечнозначных характеров числовых полей.

Во-первых, рассматривается вопрос существования характеров числовых полей, для которых ограничена сумматорная функция коэффициентов. Отметим, что даже для неглавных характеров Дирихле числовых полей известна [4] только оценка вида

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} \chi(\mathfrak{a}) = O\left(x^{1-\frac{1}{\nu}}\right),$$

где ν — некоторое натуральное.

Тем не менее, в работе автора [33] доказано существование характеров числовых полей с ограниченной сумматорной функцией. Прежде, чем формулировать и доказывать очередной результат, остановимся на некоторых определениях и обозначениях, связанных с характерами числовых полей.

Согласно работе [20], характер Дирихле χ числового поля $\mathbb{K}$ называется норменным, если существует числовой характер χ_1, такой, что для любого простого идеала поля $\mathbb{K}$ выполняется равенство

$$\chi(\wp) = \chi_1(N\wp).$$

В работе [20] рассматривается задача описания числовых полей $\mathbb{K}$, для которых существуют норменные характеры. В частности, если поле $\mathbb{K}$ есть композит циклических круговых расширений поля $\mathbb{Q}$ степеней $q_i^{n_i}$, где q_i — различные простые, то любой характер поля $\mathbb{K}$ является норменным. Для норменных характеров Дирихле поля $\mathbb{K}$ имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Пусть χ — неглавный норменный характер Дирихле число-*

вого поля $\mathbb{K}$. Тогда

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} \chi(\mathfrak{a}) = O(1),$$

где константа не зависит от x.

Доказательство. В работе [20] показано, что L-функция Дирихле

$$L(s,\chi,\mathbb{K}) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s}, \quad s = \sigma + it \tag{1.22}$$

в случае неглавного норменного характера χ раскладывается в конечное произведение L-функций Дирихле с неглавными числовыми характерами χ_i:

$$L(s,\chi,\mathbb{K}) = \prod_{i=1}^{r} L(s,\chi_i). \tag{1.23}$$

Пусть $g(z) = \sum\limits_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a}) x^{N\mathfrak{a}}$, и $g_i(z) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \chi_i(n) z^n$ — степенные ряды, соответствующие L-функциям $L(s,\chi,\mathbb{K})$ и $L(s,\chi_i)$, соответственно. В силу (1.23) имеет место равенство:

$$g(z) = g_1(z) \odot g_2(z) \odot \ldots \odot g_n(z), \tag{1.24}$$

где $g_i(z) \odot g_k(z)$ — произведение по Дирихле двух степенных рядов $g_i(z)$ и $g_k(z)$:

$$g_i(z) \odot g_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d,\ d|n} \chi_i(d) \chi_k\left(\frac{n}{d}\right) x^n.$$

Рассмотрим произведение по Дирихле двух сомножителей:

$$g(z) = g_1(z) \odot g_2(z).$$

Каждый из сомножителей определяет рациональную функцию, голоморфную в точке $z = 1$, и, следовательно, частичные суммы этих рядов ограничены на полуинтервале $[0,1)$.

Заметим, что ограниченность степенного ряда $g(x)$ при $x \to 1-0$ эквивалентна тому, что для любой точки $x < 1$ существует такое N, что при всех $n > N$ частичные суммы этого ряда $S_n(x)$ удовлетворяют неравенству

$$|S_n(x)| < M,$$

где константа M не зависит от n и x.

По условию для каждого x существует N, такое, что частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N_1} \chi_1(n)x^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{N_1} \chi_2(n)x^n$, где $N_1 > N$ и $N_2 > N$, ограничены константой M.

В силу абсолютной сходимости степенных рядов в единичном круге, представим $g(z)$ и $g_1(z) \cdot g_2(z)$, где используем обычное произведение степенных рядов, в виде:

$$g(z) = \lim_{\substack{N_1 \to \infty \\ N_2 \to \infty}} \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m) z^{nm}, \tag{1.25}$$

$$g_1(z) \cdot g_2(z) = \lim_{\substack{N_1 \to \infty \\ N_2 \to \infty}} \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m) z^{n+m}. \tag{1.26}$$

Отсюда в силу (1.25) для ограниченности сумматорной функции $S(x) = \sum\limits_{N\mathfrak{a} \leqslant x} \chi(\mathfrak{a})$ достаточно показать, что для любого $x \in [0, 1)$ существует N, такое, что

$$\left| \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m) x^{nm} \right| < M, \tag{1.27}$$

где $N_1 > N,\ N_2 > N$, и константа M не зависит от N и x.

В силу ограниченности $g_1(x) \cdot g_2(x)$ имеем:

$$\left| \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m) x^{n+m} \right| < M. \tag{1.28}$$

Покажем, что из оценки (1.28) следует оценка вида

$$\left| \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m) x^{n+m} x^{nm-(n+m)} \right| < M. \tag{1.29}$$

В силу абсолютной сходимости слагаемые суммы (1.29) можно расположить по возрастанию показателей степеней $x^{nm-(n+m)}$. Тогда, применяя к сумме (1.29) неравенство

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\alpha_n\right| \leqslant \lambda_1 \max_{N_1\leqslant N}\left|\sum_{n=1}^{N_1}\alpha_n\right|,$$

где $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_N$, которое получается в результате применения формулы суммирования Абеля, мы в силу (1.28) получим неравенство (1.29), что доказывает (1.27). Последнее завершает доказательство теоремы 1.4. □

Теорема 1.4 даёт основание по аналогии с числовым случаем ввести определение обобщённого характера поля $\mathbb{K}$. А именно, конечнозначный характер, заданный на полугруппе целых идеалов кольца целых элементов числового поля $\mathbb{K}$, назовём обобщённым характером поля $\mathbb{K}$, если выполняются условия:

1. $\chi(\wp)\neq 0$ почти для всех простых идеалов $\wp$;

2. $\sum\limits_{N\mathfrak{a}\leqslant x}\chi(\mathfrak{a})=\alpha x+O(1)$,

при этом назовём его главным обобщённым характером в случае $\alpha\neq 0$ и неглавным обобщённым характетром в случае $\alpha=0$.

Замечание. Можно показать, что если χ — неглавный обобщённый характер числового поля, а χ_0 — главный характер Дирихле этого поля, то $\chi_0\chi$ — главный обобщённый характер этого поля.

Расмотрим ряд Дирихле, заданный эйлеровым произведением с обобщённым характером числового поля:

$$f(s)=\prod_{\wp}\left(1-\frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1}=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\quad s=\sigma+it. \tag{1.30}$$

В случае неглавного обобщённого характера коэффициенты a_n ряда Дирихле (1.30) являются ограниченными, и они имеют ограниченную сумматорную функцию:

$$S(x)=\sum_{n\leqslant x}a_n=O(1). \tag{1.31}$$

Ограниченность сумматорной функции следует из того, что $S(x) = \sum\limits_{N\mathfrak{a}\leqslant x} \chi(\mathfrak{a}) = O(1)$.

В начале этой главы мы рассматривали аналитические свойства рядов Дирихле $f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ с ограниченными коэффициентами и ограниченной сумматорной функцией этих коэффициентов. В качестве следствия теоремы 1.1 мы получаем следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Пусть χ — неглавный обобщённый характер числового поля $\mathbb{K}$. Тогда если ряд Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1.32}$$

где $S(n) = \sum\limits_{N\mathfrak{a}\leqslant n} \chi(\mathfrak{a})$, определяет функцию, непрерывную на оси $\sigma = 1$, то для любого отрезка $[t_1, t_2]$ и $x \in [t_1, t_2]$

$$S_t(x) = \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} \chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{it} = O(1),$$

где константа в оценке зависит только от t_1 и t_2.

Замечание. Вопрос о поведении ряда (1.32) на оси $\sigma = 1$ остаётся открытым.

Утверждения теоремы 1.2 и теоремы 1.3 были получены при условии существования предела вида

$$\lim_{x\to 1-0} g(x),$$

где $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ — степенной ряд, соответствующий ряду Дирихле $f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$.

Покажем, что для ряда Дирихле вида (1.30) в случае неглавного обобщённого характера числового поля $\mathbb{K}$ такой предел существует.

В работе [34] был приведён следующий результат.

Пусть $h(n)$ — неглавный обобщённый числовой характер. Тогда степенной ряд

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) x^n \tag{1.33}$$

определяет функцию, имеющую конечный односторонний предел в точке $x = 1$, т.е. предел вида

$$\lim_{x \to 1-0} g(x).$$

Остановимся на основных моментах доказательства этого результата.

Рассмотрим пространства $C[0,1]$ и $C[0,1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$. Обозначим через $E_{n,\varepsilon}(g)$ и $E^*_{n,\varepsilon}(g)$ величины наилучшего приближения функции $g(x)$ вида (1.33) на отрезке $[0,1-\varepsilon]$ алгебраическими полиномами, степени которых не превосходят числа n, с произвольными коэффициентами в первом случае и мультипликативными коэффициентами во втором случае. В случае ограниченности или непрерывности функции $g(x)$ на отрезке $[0,1]$ соответствующие величины обозначим через $E_n(g)$ и $E^*_n(g)$. Сравнение этих величин изучалось в работе [15]. С этой целью был предложен аппроксимирующий подход, использующий аппарат сильно непрерывных ограниченных полугрупп операторов. Известно [40], [21], что наличие такой полугруппы операторов, действующих в банаховом пространстве, обеспечивает прямые и обратные теоремы приближения по собственным подпространствам, аналогичные классическим, но выраженные в терминах оператора, порождающего эту полугруппу операторов.

В данном случае, т.е. в случае степенных рядов вида (1.33), построение соответствующих полугрупп операторов позволило сначала сравнить величины $E_{n,\varepsilon}(g)$ и $E^*_{n,\varepsilon}(g)$ на отрезке $[0,1-\varepsilon]$, а затем в результате предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ сравнить величины $E_n(g)$ и $E^*_n(g)$ на отрезке $[0,1]$.

А именно, в работе [15] показано, что в случае существования конечных величин $E_n(g)$ и $E^*_n(g)$ имеют место оценки вида

$$C_1 \frac{E_{n,\varepsilon}(g)}{E^*_{n,\varepsilon}(g)} \leqslant \frac{E_n(g)}{E^*_n(g)} \leqslant C_2 \frac{E_{n,\varepsilon}(g)}{E^*_{n,\varepsilon}(g)}, \tag{1.34}$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от $g(x)$ и ε.

Там же [15] показано, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\frac{E_{n,\varepsilon}(g)}{E^*_{n,\varepsilon}(g)} = O(\ln^\varepsilon n). \tag{1.35}$$

В случае неглавного обобщённого характера величины $E_n(g)$ и $E^*_n(g)$ существуют, и оценки (1.34), (1.35) доказывают вышеприведённое утверждение.

В работе [34] было отмечено, что аппроксимационный подход, разработанный в [15], основанный на построении сильно непрерывных полугрупп операторов, действующих в соответствующих банаховых пространствах, позволяет получить соответствующие результаты в случае степенных рядов

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

где $\sum\limits_{n\leqslant x} a_n = O(1)$, а коэффициенты a_n однозначно определяются коэффициентами a_p (при простых номерах). На этом основании в работе [34] и приведено следующее утверждение.

Пусть $h(n)$ — главный обобщённый числовой характер. Тогда степенной ряд вида

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (h(n) - \alpha) x^n,$$

где $\sum\limits_{n\leqslant x} h(n) = \alpha x + O(1)$, определяет функцию, имеющую конечный односторонний предел в точке $x = 1$.

Рассмотрим степенной ряд

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \tag{1.36}$$

где $a_n = \sum\limits_{N\mathfrak{a}=n} \chi(\mathfrak{a})$, и где χ — неглавный обобщённый характер числового поля $\mathbb{K}$. Обозначим через P' множество чисел вида p^{f_p}, где p — простое, а f_p — индекс инерции простого p при расширении $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$, т.е. если простой идеал $\wp$ поля $\mathbb{K}$ лежит над простым числом p, то $N\wp = p^{f_p}$. Обозначим через N' множество натуральных, порождённых множеством P'. Ясно, что ряд (1.36) можно записать в следующем виде:

$$g(x) = \sum_{n \in N'} a_n x^n. \tag{1.37}$$

Для рядов (1.37) имеем:

1. $\sum\limits_{\substack{n \in N' \\ n \leqslant x}} a_n = O(1)$;
2. коэффициенты $a_n, \ n \in N'$ однозначно определяются коэффициентами $a_n, \ n \in P'$.

Анализ результатов работы [15] показывает, что и в случае рядов вида (1.37) работает аппроксимационный подход, основанный на построении сильно непрерывных полугрупп операторов, действующих в соответствующих банаховых пространствах. Этот аппроксимационный подход позволяет сравнить величины $E_n(g)$ и $E_n^*(g)$ для рядов Дирихле вида (1.37), где $E_n^*(g)$ — величина наилучшего приближения функции $g(x)$ на отрезке $[0, 1)$ алгебраическими полиномами $P_n(x) = \sum\limits_{\substack{k \in N' \\ k \leqslant n}} a_n x^n$, коэффициенты которых определяются коэффициентами $a_k, \ k \in P'$, по тому же закону, что и для рядов (1.37). А именно, в этом случае имеют место неравенства вида (1.34) и (1.35).

Отметим, что оценка

$$\frac{E_{n,\varepsilon}(g)}{E_{n,\varepsilon}^*(g)} = O(\ln^{-s} n)$$

связана с тем фактом, что отношение размерности простанств H_n^* алгебраических полиномов, у которых коэффициенты $a_k, \ k \in P'$ однозначно определяют все остальные, и где «сумма» таких полиномов однозначно определяется суммой коэффициентов при $n \in P'$, к размерности пространств H_n асимптотически стремится к величине $\ln^{-s} n$.

Таким образом, имеет место

Теорема 1.6. *Пусть χ — обобщённый характер числового поля $\mathbb{K}$. Тогда степенной ряд*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \alpha) x^n,$$

где $a_n = \sum\limits_{N\mathfrak{a}=n} \chi(\mathfrak{a})$, *и где* $S(x) = \sum\limits_{N\mathfrak{a}\leqslant x} \chi(\mathfrak{a}) = \alpha x + O(1)$, *имеет конечный односторонний предел в точке* $x = 1$.

Как следствие теоремы 1.2 и теоремы 1.6 получается следующий результат.

Теорема 1.7. *Пусть* χ *— обобщённый характер числового поля* $\mathbb{K}$. *Тогда эйлерово произведение*

$$f(s) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1}, \quad s = \sigma + it \tag{1.38}$$

определяет функцию, голоморфную во всех точках полуплоскости $\sigma > 0$ *за исключением точки* $s = 1$, *где она в случае главного обобщённого характера имеет полюс первого порядка, и ограниченную в любой области* $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $2 \leqslant t \leqslant T$ $(-T \leqslant t \leqslant -2)$ *константой, не зависящей от* σ_0, *а зависящей только от величины* T.

Как следствие теоремы 1.7 получаются следующие утверждения.

Следствие 1. *При условиях теоремы 1.7 функция* $f(s)$ *на оси* $\sigma = 0$ *при* $|t| \geqslant 2$ *не имеет точек «типа полюса».*

Следствие 2. *Пусть характер* χ *числового поля* $\mathbb{K}$ *отличается от характера Дирихле* χ_1 *этого поля. Тогда этот характер* χ *не может быть обобщённым характером.*

Доказательство. В нашем случае ряд Дирихле

$$f(s) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1}$$

будет иметь полюсы (бесконечную сумму) на оси $\sigma = 0$, что противоречит следствию 1. □

Как следствие теорем 1.3 и 1.5 получаем следующее утверждение.

Теорема 1.8. *При условиях теоремы 1.7 эйлерово произведение* (1.38) *определяет функцию, голоморфную на оси* $\sigma = 0$ *в точках* $s = it$ *при* $|t| \geqslant 2$.

Замечание. Ограничение $|t| \geqslant 2$ в теоремах 1.7 и 1.8 связано с методом доказательства теоремы 1.1. Можно снять это ограничение, но в данной работе мы не будем этого делать.

2. Аналог гипотезы Н. Г. Чудакова для обобщённых характеров числовых полей и доказательство этой гипотезы для главных обобщённых характеров

В первой главе были определены обобщённые характеры числовых полей. Такие характеры определяются такими же свойствами, что и обобщённые числовые характеры, введённые в 1956 году Ю. В. Линником и Н. Г. Чудаковым в связи с поиском нового подхода в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле.

Известная гипотеза Н. Г. Чудакова, поставленная им в 1950 году, предполагает, что обобщённые числовые характеры являются характерами Дирихле. Эта гипотеза до сих пор не нашла своего окончательного решения.

Нужно сказать, что Н. Г. Чудаков и его ученики постоянно занимались как задачей аналитического продолжения рядов Дирихле с обобщёнными характерами так и гипотезой относительно обобщённых числовых характеров. Об этом говорит хронология основных научных результатов, связанных с этими проблемами. В 1950 году публикации Ю. В. Линника, Н. Г. Чудакова, К. А. Родосского [47][46]. Публикация Н. Г. Чудакова и Б. М. Бредихина [45] в 1956 году. Защита кандидатской диссертации В. В. Глазкова (ученика Н. Г. Чудакова) в 1964 году, где решается гипотеза Н. Г. Чудакова для главных обобщённых числовых характеров. Доклад Н. Г. Чудакова в 1970 году на международном конгрессе математиков в Ницце [44]. Доклад Н. Г. Чудакова на Всесоюзной конференции в городе Вильнюсе в 1974 году. Защита в 1984 году кандидатской диссертации В. Н. Кузнецова (ученика Н. Г. Чудакова) [13], где получен важный результат в направлении решения проблеы обобщённых характеров: получена аналитическая характеристика характеров Дирихле. Защита в 2014 году кандидатской диссертации О. А. Матвеевой (ученицы В. Н. Кузнецова), где получено аналитическое доказательство гипотезы Н. Г. Чудакова для главных обобщённых характеров [34].

В данной работе для обобщённых характеров числовых полей высказывается предположение, аналогичное предположению Н. Г. Чудакова относительно обобщённых числовых характеров. А именно, высказывается следующее предположение.

Пусть χ — конечнозначный характер, заданный на полугруппе целых идеалов кольца целых элементов поля $\mathbb{K}$, для которого выполняются условия:

1. $\chi(\wp) \neq 0$ почти для всех простых идеалов $\wp$;

2. для сумматорной функции значений характера χ имеет место асимптотическое равенство вида

$$S(x) = \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} \chi(\mathfrak{a}) = \alpha x + O(1).$$

Тогда χ является характером Дирихле числового поля K, главным, если $\alpha \neq 0$, и неглавным, если $\alpha = 0$, т.е. существует такой целый идеал $\mathfrak{m}$, для которого выполняются условия:

1. $\chi(\wp) = 0$ тогда и только тогда, когда $\wp | \mathfrak{m}$;

2. для любого целого элемента $\alpha \in \mathbb{K}$, такого, что главный идеал (α) сравним с единицей по модулю $\mathfrak{m}$, верно $\chi((\alpha)) = 1$.

Высказанное предположение получило название аналога гипотезы Н. Г. Чудакова для обобщённых характеров числовых полей.

Как уже говорилось ранее, гипотеза Н. Г. Чудакова доказана для главных обобщённых числовых характеров. Для неглавных обобщённых числовых характеров эта гипотеза остаётся открытой.

В данной главе приводится решение аналога гипотезы Н. Г. Чудакова для главных обобщённых характеров числовых полей. Этот результат был получен в работе автора [33].

Доказательству основного утверждения данной главы предпошлём ряд лемм.

Лемма 2.1. *Функция $f(s)$, определённая эйлеровым произведением*

$$f(s) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1}, \quad s = \sigma + it \tag{2.1}$$

где χ — главный обобщённый характер числового поля, аналитически продолжается в полуплоскость $\sigma > 0$ как голоморфная функция почти во всех точках, за исключением точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка. При этом она является ограниченной при подходе к точке $s = 0$ вдоль вещественной оси.

Доказательство. Рассмотрим ряд Дирихле

$$f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{2.2}$$

который получается как разность ряда Дирихле (2.1) и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^s}$, где $S(x) = \sum\limits_{N\mathfrak{a}\leqslant x} \chi(\mathfrak{a}) = \alpha x + O(1)$.

Ясно, что ряд Дирихле (2.2) имеет ограниченную сумматорную функцию коэффициентов $S_1(x)$, и в силу известного интегрального представления функция

$$f_1(s) = s \int\limits_1^{\infty} \frac{S_1(u)}{u^{s-1}} du \tag{2.3}$$

аналитически продолжима в полуплоскость $\sigma > 0$. При этом в силу (2.3)

$$f_1(s) = O(1) \text{ при } \sigma > 0. \tag{2.4}$$

Так как $f(s) = f_1(s) + \alpha\zeta(s)$, где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, то из условия (2.4) и голоморфности $\zeta(s)$ следует утверждение леммы 2.1. □

Лемма 2.2. *Пусть характер χ числового поля отличен от главного характера Дирихле χ_0 этого поля на конечном множестве простых идеалов. Тогд характер χ не является главным обобщённым характером этого поля.*

Доказательство. Рассмотрим эйлерово произведение

$$f(s) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1}$$

и L-функцию Дирихле

$$L(s, \chi_0, \mathbb{K}) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi_0(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1}.$$

Ясно, что

$$f(s) = L(s, \chi_0, \mathbb{K}) {\prod_{\wp}}' \left(1 - \frac{\chi_0(\wp)}{(N\wp)^s}\right) {\prod_{\wp}}' \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1},$$

где произведение $\prod'$ берётся по конечному числу простых идеалов.

Следовательно, функция $f(s)$ имеет бесконечную серию простых полюсов на оси $\sigma = 0$. В силу следствия теоремы 1.7 характер не может быть обобщённым характером, что и доказывает утверждение леммы 2.2. □

Далее, в книге [37], §1.5 изложены основы теории распределения базисных элементов для свободных полугрупп, разработанной Б. М. Бредихиным. Этими результатами мы воспользуемся при доказательстве следующего утверждения.

Лемма 2.3. *Пусть P — подмножество простых идеалов числового поля $\mathbb{K}$, а D_1 — полугруппа целых идеалов, порождённых подмножеством P. Тогда имеет место равенство*

$$Q(s) = \sum_{\wp \in P} \frac{1}{(N\wp)^s} = \sum_{\mathfrak{a} \in D_1} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} \ln \varphi(N\mathfrak{a} \cdot s),$$

где

$$\mu(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1, & \mathfrak{a} \text{ — \textit{единичный идеал},} \\ (-1)^k, & \mathfrak{a} = \wp_1\wp_2\dots\wp_r,\ \wp_i \neq \wp_j, \wp_i \in P, \\ 0, & \wp^2|\mathfrak{a}, \end{cases}$$

$$\varphi(s) = \prod_{\wp \in P} \left(1 - \frac{1}{(N\wp)^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}\in D_1} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^s}.$$

Доказательство. Положим норму единичного идеала равной единице.

Во-первых, имеем:

$$\ln\varphi(s) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\wp\in P}\frac{1}{m}\frac{1}{(N\wp)^{ms}} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}Q(ms).$$

Во-вторых, получаем:

$$\sum_{\mathfrak{a}\in D_1}\frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\ln(N\mathfrak{a}\cdot s) = \sum_{\mathfrak{a}\in D_1}\frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}Q(N\mathfrak{a}\cdot s) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{Q(rs)}{r}\sum_{N\mathfrak{a}|r}\mu(\mathfrak{a}) = Q(s).$$

Здесь мы воспользовались свойством функции $\mu(\mathfrak{a})$ (см. [37], §2.5):

$$\sum_{N\mathfrak{a}|r}\mu(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1, & r = 1, \\ 0, & r \neq 1. \end{cases}$$

□

Далее, сформулируем и докажем основной результат этой главы.

Теорема 2.1. *Главный обобщённый характер числового поля $\mathbb{K}$ является характером Дирихле этого поля.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{m}$ — произведение простых идеалов $\wp$, для которых $\chi(\wp) = 0$, и χ_0 — главный характер Дирихле по модулю $\mathfrak{m}$.

Обозначим

$$f(s)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s},\quad L(s,\chi_0,\mathbb{K})=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\chi_0(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s}=\sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=1}\frac{1}{(N\mathfrak{a})^s}.$$

Известно [2], что L-функция $L(s,\chi_0,\mathbb{K})$ имеет в точке $s=0$ нуль конечного порядка. Пусть k — порядок этого нуля. Будем считать, что $f(s)$ имеет в точке $s=0$ «нуль m-го порядка», если существует такая последовательность $\sigma_n\to 0$, что

$$0<\frac{|f(\sigma_n)|}{\sigma_n^m}<C,\quad \frac{|f(\sigma_n)|}{\sigma_n^{m+1}}\to\infty \text{ при } n\to\infty.$$

Рассмотрим случай $k\leqslant m$. Запишем равенство

$$f(s)=L(s,\chi_0,\mathbb{K})\varphi(s),\quad \sigma>0,$$

где функция

$$\varphi(s)=\prod_{\substack{\wp,\\ \chi(\wp)\neq 0,1}}\left(1-\frac{1}{(N\wp)^s}\right)^{-1}\prod_{\substack{\wp,\\ \chi(\wp)\neq 0,1}}\left(1-\frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)\tag{2.5}$$

определена в точке s.

В силу предположения $k\leqslant m$ и леммы 2.1 функция $\varphi(s)$ ограничена в точках $s=\sigma_n$, $n>n_0$, и, следовательно,

$$\operatorname{Re}\ln\varphi(\sigma_n)<C_1,\quad C_1>0.\tag{2.6}$$

Пусть γ — число, $|\gamma|=1$, и пусть

$$\varphi_1(s)=\prod_{\wp\in P}\left(1-\frac{\gamma}{(N\wp)^s}\right)^{-1}.$$

Точно так же, как и в лемме 2.3, выводится формула

$$\sum_{\wp\in P}\frac{\gamma}{(N\wp)^s}=\sum_{\mathfrak{a}\in D_1}\frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\ln\varphi_1(N\mathfrak{a}\cdot s). \tag{2.7}$$

Обозначим через $P_k,\ k=\overline{1,l}$ множество простых идеалов $\wp$, для которых $\chi(\wp)=\gamma_k$, где $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_l$ — различные значения $\chi(\mathfrak{a})$, не равные 0 и 1.

Тогда для функции $\ln\varphi(s)$, где $\varphi(s)$ определена равенством (2.5), имеет место выражение:

$$\ln\varphi(s)=\sum_{k=1}^{l}\sum_{\wp\in P_k}\frac{1-\gamma_k}{(N\wp)^s}+\sum_{k=1}^{l}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\wp\in P_k}\frac{1-\gamma_k^m}{(N\wp)^{ms}}. \tag{2.8}$$

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{\wp\in P_k}\frac{1-\gamma_k}{(N\wp)^s}.$$

В силу леммы 2.3, формулы (2.7) и того факта, что $\ln\varphi_1(N\mathfrak{a}\cdot s)\sim 2^{-N\mathfrak{a}\cdot\sigma}$ для любого $\sigma>0$ (см., например, [41]) для точки $s=\sigma+it$, в которой определена функция $\ln\varphi(s)$, имеет место оценка вида

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{\wp\in P_k}\frac{1-\gamma_k}{(N\wp)^s}=\sum_{k=1}^{l}\sum_{\substack{\wp\in P_k,\\ N\wp\leqslant n_0}}\frac{1-\gamma_k}{(N\wp)^s}+O(1), \tag{2.9}$$

где $n_0\sigma>1$.

Для второго слагаемого для любого $\sigma>0$ существует такое $m_0,\ m_0\sigma>1$, что верна оценка вида

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\wp\in P_k}\frac{1-\gamma_k^m}{(N\wp)^{ms}}=\sum_{k=1}^{l}\sum_{m=2}^{m_0}\sum_{\substack{\wp\in P_k,\\ N\wp\leqslant n_0}}\frac{1-\gamma_k^m}{(N\wp)^{ms}}+O(1) \tag{2.10}$$

для любой точки s, где определена функция $\ln\varphi(s)$.

В силу леммы 2.2 число простых идеалов $\wp$, для которых $\chi(\wp)\neq 0$, не может быть конечным. Следовательно, для любой константы $M > 0$ найдётся такое $\sigma_0 > 0$, что для всех σ_n, $0 < \sigma_n < \sigma_0$ существует такое n_0, что имеет место оценка

$$\sum_{k=0}^{l} \sum_{\substack{\wp \in P_k, \\ N\wp \leqslant n_0}} \frac{1}{(N\wp)^{\sigma_n}} > M. \tag{2.11}$$

Звметим, что из оценки (2.10) следует оценка вида

$$\operatorname{Re} \ln \varphi(\sigma_n) > C_3 \sum_{k=1}^{l} \sum_{\substack{\wp \in P_k, \\ N\wp \leqslant n_0}} \frac{1}{(N\wp)^{\sigma_n}},$$

которая, в совокупности с оценкой (2.11), противоречит оценке (2.6), что и доказывает, что при всех $\wp$ $\chi(\wp) = \chi_0(\wp)$.

В случае, когда $k > m$, нужно рассмотреть равенство

$$L(s, \chi_0, \mathbb{K}) = f(s)\varphi(s),$$

где

$$\varphi(s) = \prod_{\substack{\wp, \\ \chi(\wp) \neq 0,1}} \left(1 - \frac{1}{(N\wp)^s}\right) \prod_{\substack{\wp, \\ \chi(\wp) \neq 0,1}} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1},$$

и провести приведённые выше рассуждения для

$$\operatorname{Re}(-\ln \varphi(\sigma_n)).$$

Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана. $\square$

В заключение стоит отметить, что в работе [19] был указан возможный путь окончательно решения проблемы обобщённых характеров. Немалая роль при этом отводилась результатам теорем 1.2 и 1.3. Возможно, что результат теорем 1.6 и 1.7 позволит в дальнейшем доказать аналог гипотезы Н. Г. Чудакова для неглавных обобщённых характеров.

3. О нулях L-функций Дирихле числовых полей

В работе [34] изучались вопросы, связанные с нулями классических L-функций Дирихле. Изучалась взаимосвязь основной и расширенной гипотез Римана. Был разработан аппроксимационный подход в задаче о расположении нетривиальных нулей L-функций Дирихле, основанный на простроении полиномов Дирихле, «быстро» приближающих L-функции Дирихле в критической полосе. Этот подход позволил не только получить эффективную численную схему определения нулей L-функций, но и получить плотностные теоремы для нулей L-функций Дирихле, причём способом, отличным от известных ранее.

Подобные вопросы, связанные с нулями L-функций Дирихле числовых полей, изучаются в данной главе диссертации. Нужно сказать, что решение соответствующих задач в этом случае требует не только развития методов работы [34], но и привлечения новых методов, в частности, методов алгебраической теории чисел.

3.1. Расширенная гипотеза Римана для L-функций Дирихле числовых полей

Расширенная гипотеза Римана для L-функций Дирихле числовых полей, так же, как и в случае классических L-функций Дирихле, утверждает, что нетривиальные нули лежат на критической прямой. В этом разделе рассматриваются отдельные вопросы, отражающие взаимосвязь расширенных гипотез Римана для нулей классических L-функций Дирихле и для нулей L-функций числовых полей. Доказывается один из эквивалентов расширенной гипотезы Римана для нулей L-функций числовых полей, связанный с распределением значений характера Дирихле на множестве простых идеалов.

3.1.1. О взаимосвязи расширенной гипотезы Римана для классических L-функций Дирихле и расширенной гипотезы Римана L-функций Дирихле числовых полей

Рассмотрим L-функцию числового поля $\mathbb{K}$:

$$L(s,\chi,\mathbb{K}) = \prod_{\wp}\left(1-\frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right), \quad s=\sigma+it.$$

Пусть L — абелево расширение Галуа минимальной степени, для которого характер χ согласован с некоторым характером $\widehat{\chi}$ группы Галуа, т.е. для любого простого идеала, взаимно простого с модулем характера χ, выполняется

$$\chi(\wp) = \widehat{\chi}(F[\wp]),$$

где $F[\wp]$ — автоморфизм Фробёниуса идеала $\wp$ при расширении L. В теории полей классов показано существование такого расширения (по этому поводу см. статью Г. Хассе в книге [2]).

Известно (см. статью Х. Хейльбронна в книге [2]), что в этом случае дзета-функция Дедекинда $Z_L(s)$ числового поля L раскладывается в произведение L-функций числового поля $\mathbb{K}$ с примитивными характерами Дирихле, согласованными с характерами группы Галуа расширения $K\subset L$, т.е.

$$Z_L(s) = \prod_{\chi_i} L(s,\chi_i,\mathbb{K}).$$

Отсюда следует, что нетривиальные нули L-функции $L(s,\chi,\mathbb{K})$ являются частью нетривиальных нулей дзета-функции Дедекинда $Z_L(s)$. Следовательно, вопрос о взаимосвязи расширенной гипотезы Римана для классических L-функций Дирихле и расширенной гипотезы Римана для L-функций Дирихле числовых полей сводится к случаю дзета-функции Дедекинда для числовых полей.

Если числовое поле L является абелевым расширением поля $\mathbb{Q}$, то в силу вышесказанного из расширенной гипотезы Римана для классических L-функций Дирихле следует, что и нетривиальные нули $Z_L(s)$ лежат на критической прямой. Действительно, в этом случае

$$Z_L(s) = \prod_{\chi_i} L(s, \chi_i),$$

где $L(s, \chi_i)$ — классические L-функции Дирихле.

В случае произвольного расширения $L \supset \mathbb{Q}$ можно только предполагать, что

$$Z_L(s) = \prod_{\chi_i} L^{r_i}(s, \chi_i),$$

где r_i — положительные рациональные числа. Но этот вопрос остаётся открытым.

Ранее в работе рассматривался класс L-функций Дирихле числовых полей с норменными характерами. Как показано в работе [20], в этом случае

$$L(s, \chi, \mathbb{K}) = \prod_{i} L(s, \chi_i),$$

где $L(s, \chi_i)$ — классические L-функции Дирихле. Этот класс L-функций является примером такого класса L-функций Дирихле числовых полей, для которых расширенная гипотеза Римана является следствием расширенной гипотезы Римана для классических L-функций Дирихле.

Здесь нужно отметить, что отдельные примеры числовых полей, которые не являются абелевыми расширениями поля рациональных чисел и для которых дзета-функция Дедекинда является произведением классических L-функций Дирихле, были приведены в работе [10].

Движение в направлении получения разложений для дзета-функций Дедекинда числовых полей в произведение классических L-функций Дирихле является, по мнению автора, наиболее перспективным в задаче о взаимосвязи расширенных гипотез Римана для классических L-функций Дирихле и L-функций Дирихле числовых полей.

3.1.2. Об одном эквиваленте расширенной гипотезы Римана для L-функций Дирихле числовых полей

Пусть χ — неглавный первообразный характер Дирихле по модулю $\mathfrak{m}$ числового поля $\mathbb{K}$, а $L(s,\chi,\mathbb{K})$ — соответствующая L-функция:

$$L(s,\chi,\mathbb{K}) = \prod_{\wp}\left(1-\frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}}\frac{\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s}, \quad s=\sigma+it. \tag{3.1}$$

Напомним, что характер Дирихле по модулю $\mathfrak{m}$ называется первообразным, если не существует характера Дирихле χ_1 по модулю $\mathfrak{m}_1$, где $\mathfrak{m}_1|\mathfrak{m}$, такого, что для любого целого идеала $\mathfrak{a}$, для которого $(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=1$, выполняется $\chi(\mathfrak{a}) = \chi_1(\mathfrak{a})$.

Известно, что для L-функций Дирихле (3.1) с первообразными характерами имеет место функциональное уравнение вида

$$\Phi(s,\chi) = W(\chi)\Phi(1-s,\overline{\chi}), \tag{3.2}$$

где $W(\chi)$ — константа, по модулю равная 1, а

$$\Phi(s,\chi) = A(\chi)^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^a\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^b L(s,\chi,\mathbb{K}),$$

где A — положительная константа, a и b — натуральные числа, $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера (по этому поводу см., например, статью Х. Хейльбронна в [2]).

Замечание 1. Пусть χ — непервообразный характер Дирихле по модулю $\mathfrak{m}$, и χ_1 — соответствующий первообразный характер Дирихле по модулю $\mathfrak{m}_1$, где $\mathfrak{m}_1|\mathfrak{m}$. Тогда χ и χ_1 отличаются значениями только на конечном множестве простых идеалов $\wp$, и соответствующие L-функции имеют одинаковые нетривиальные нули.

В дальнейшем будем рассматривать L-функции Дирихле вида (3.1) с неглавными характерами Дирихле.

В работе автора [36] был получен эквивалент расширенной гипотезы Римана для L-функций Дирихле с неглавными характерами Дирихле. Ниже приведено доказательство этого утверждения.

Теорема 3.1. *Расширенная гипотеза Римана для L-функций Дирихле вида* (3.1) *эквивалентна оценке вида*

$$\sum_{N\wp\leqslant x}\chi(\wp)=O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \tag{3.3}$$

где суммирование ведётся по простым идеалам поля $\mathbb{K}$, норма которых не превосходит x, ε — произвольное положительное число, а константа в оценке не зависит от x, но зависит от ε.

Доказательство теоремы 3.1 проведём методом редукции к степенным рядам. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 3.1. *Пусть ряд Дирихле*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1,\quad s=\sigma+it \tag{3.4}$$

таков, что соответствующий степенной рял

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$$

при подходе к точке $z=1$ вдоль вещественной оси ведёт себя следующим образом:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=O\left((1-x)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \tag{3.5}$$

где ε — произвольное положительное число.

Тогда ряд Дирихле (3.4) *аналитически продолжим в полуплоскость $\sigma>\frac{1}{2}$.*

Доказательство. Запишем известное преобразование Меллина:

$$f(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}\right)x^{s-1}dx,\quad \sigma>1, \tag{3.6}$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

В силу оценки (3.5) интеграл, стоящий в правой части этого равенства, абсолютно сходится при любом s, если $\sigma > \frac{1}{2}$. Действительно, оценка (3.5) равносильна оценке

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} = O\left(x^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\right) \text{ при } x \to \infty.$$

Следовательно, интеграл

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}\right) x^{s-1} dx$$

абсолютно сходится при $\sigma > \frac{1}{2}$, а интеграл

$$\sum_1^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}\right) x^{s-1} dx = \int_1^{\infty} e^{-x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n-1)x}\right) x^{s-1} dx$$

абсолютно сходится при любом s, что и доказывает утверждение леммы 3.1.

□

Лемма 3.2. *Следующие оценки эквивалентны:*

1.
$$\sum_{N\wp \leqslant x} \chi(\wp) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right); \tag{3.7}$$

2.
$$\sum_{N\wp \leqslant x} \chi(\wp) \ln N\wp = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \tag{3.8}$$

Доказательство. Применяя метод суммирования Абеля, получим для $S^*(x) = \sum\limits_{N\wp \leqslant x} \chi(\wp) \ln N\wp$:

$$|S^*(x)| = \left| S(x) \ln x - \int_1^{\infty} \frac{S(u)}{u} du \right| \leqslant \ln x |S(x)| + \ln x \cdot \max_{n \leqslant x} |S(n)|,$$

где $S(x) = \sum\limits_{N\wp \leqslant x} \chi(\wp)$. В силу оценки (3.7) отсюда получаем оценку (3.8).

Обратно, согласно преобразованию Абеля, имеем:

$$|S(x)| \leqslant \left| S^*(x)\frac{1}{\ln x} \right| + \left| \int\limits_1^x \frac{S^*(u)}{\ln u}\frac{1}{u}du \right| \leqslant \frac{1}{\ln x}|S^*(x)| + \frac{1}{\ln x}\max_{n\leqslant x}\frac{|S^*(n)|}{\ln n},$$

что в силу (3.8) даёт оценку (3.7), что и завершает доказательство леммы 3.2.

□

Доказательство теоремы 3.1. Пусть имеет место расширенная гипотеза Римана. Покажем, что тогда имеет место оценка (3.8), а в силу леммы 3.2 и оценка (3.9). С этой целью сумму

$$\sum_{N\wp \leqslant x} \chi(\wp)\ln N\wp$$

представим в виде интеграла от функции

$$\frac{x^s L'(s,\chi,\mathbb{K})}{sL(s,\chi,\mathbb{K})}$$

вдоль контура, состоящего из прямой $(c - i\infty, c + i\infty)$, где $c > 1$, и затем оценим этот интеграл путём сдвига контура к прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Таким образом, те же рассуждения, что и при выводе асимптотического закона простых чисел в прогрессиях (см., например, [38]), дают оценку (3.8) при предположении расширенной гипотезы Римана и, следовательно, в силу леммы 3.2, оценку (3.3).

Обратно, пусть имеет место оценка (3.3), а в силу леммы 3.2, и оценка (3.8). Обозначим

$$a_n = \sum_{N\wp = n} \chi(\wp)N\wp$$

и рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Применяя приём суммирования Абеля, получаем следующее интегральное представление этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -\ln x \int_2^{\infty} S(n) x^u du, \tag{3.9}$$

где $S(u) = \sum\limits_{n \leqslant u} a_n$.

В силу оценки (3.8) имеем:

$$S(u) = O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Отсюда и из формулы (3.9) получаем:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right| = O\left(\ln x \int_2^{\infty} u^{\frac{1}{2}+\varepsilon} x^u du\right).$$

Запишем последний интеграл в виде

$$\int_2^{\infty} u^{\frac{1}{2}+\varepsilon} x^u du = \int_1^{(1-x)^{-1}} u^{\frac{1}{2}+\varepsilon} x^u du + \int_{(1-x)^{-1}}^{\infty} u^{\frac{1}{2}+\varepsilon} x^u du.$$

Применяя к последнему интегралу формулу суммирования по частям, получаем оценку вида

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right| = O\left(\ln x \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} + \frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\ln x} + \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\ln^2 x}\right]\right) = O\left((1-x)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Отсюда в силу леммы 3.1 получаем, что ряд Дирихле

$$\sum_{\wp} \frac{\chi(\wp) \ln N\wp}{(N\wp)^s}$$

аналитически продолжим в полуплоскость $\sigma > \frac{1}{2}$.

Так как
$$-\frac{L'(s,\chi,\mathbb{K})}{L(s,\chi,\mathbb{K})}=\sum_{\wp}\frac{\chi(\wp)\ln N\wp}{(N\wp)^s}+g(s,\chi),$$
где $g(s,\chi)$ — функция, голоморфная в полуплоскости $\sigma>\frac{1}{2}$, то $L(s,\chi,\mathbb{K})$ не имеет нулей в полуплоскости $\sigma>\frac{1}{2}$.

В силу замечания 1 и функционального уравнения (3.2) имеет место расширенная гипотеза Римана.

Тем самым, теорема 3.1 полностью доказана. □

Остановимся на одном следствии теоремы 3.1.

Рассмотрим характер Дирихле χ числового поля и мультипликативную функцию $h(\mathfrak{a})$, заданную на полугруппе целых идеалов, которая на множестве простых идеалов $\wp$ удовлетворяет условию
$$\sum_{N\wp\leqslant x}1=O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \tag{3.10}$$
где принимает значения, отличные от значений $\chi(\wp)$.

Такие функции будем называть *испорченными на редком множестве* характерами.

Рассмотрим эйлерово произведение
$$f(s)=\prod_{\wp}\left(1-\frac{h(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1},\quad \sigma>1. \tag{3.11}$$

Для эйлерова произведения (3.10) из теоремы 3.1 имеет место следующее утверждение.

Следствие 1. *Функция $f(s)$ вида* (3.11) *аналитически продолжима в полуплоскость $\sigma>\frac{1}{2}$, и в этой полуплоскости возможные нули $f(s)$ совпадают с нулями L-функции Дирихле $L(s,\chi,\mathbb{K})$.*

Доказательство. Представим $f(s)$ в виде
$$f(s)=L(s,\chi,\mathbb{K})f_1(s)f_2(s),$$

где

$$f_1(s) = \prod_{\wp}{}' \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right), f_2(s) = \prod_{\wp}{}' \left(1 - \frac{h(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1},$$

где произведение берётся по редкому множеству простых идеалов, для которых $\chi(\wp) \neq h(\wp)$. При $\sigma > 1$ логарифмы этих функций представимы в виде

$$\ln f_1(s) = \sum_{\wp}{}' \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s} + g_1(s, \chi),$$
$$\ln f_1(s) = -\sum_{\wp}{}' \frac{h(\wp)}{(N\wp)^s} + g_2(s, \chi),$$

где $g_1(s,\chi),\ g_2(s,\chi)$ — функции, голоморфные в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$. В силу оценки (3.10) и рассуждений, приведённых при доказательстве теоремы 3.1, получаем аналитическое продолжение функций $f_1(s)$ и $f_2(s)$ в полуплоскость $\sigma > \frac{1}{2}$, и при этом эти функции в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$ не имеют нулей. Это и доказывает утверждение следствия 1. □

3.2. Аппроксимационный подход в задаче определения нулей L-функций Дирихле числовых полей

В работе [34] впервые рассматриваелся аппроксимационный подход, основанный на быстром приближении в критической полосе классических L-функций Дирихле, для изучения аналитических свойств классических L-функций Дирихле, в частности, для изучения расположения и распределения нулей этих L-функций. В данном разделе исследуются вопросы, связанные с возможностями такого подхода при исследовании расположения и распределения нулей L-функций числовых полей, которые дежат в критической полосе.

Отметим, что основные положения аппроксимационного подхода, разработанные в работе [34] для исследования нулей классических L-функций Дирихле, в случае L-функций числовых полей не имеют места. Например, в работе [34] было доказано существование последовательности полиномов Дирихле $Q_n(s)$, которые в любом прямоугольнике $D_T:\ 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ |t| \leqslant T$

приближают L-функцию Дирихле с неглавным числовым характером χ с показательной скоростью. Существование такой последовательности полиномов Дирихле равносильно тому, что степенной ряд, соответствующий L-функции Дирихле:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) z^n$$

определяет функцию, голоморфную в точке $z = 1$. Как показано в работе [16], последний факт не имеет места в случае числового поля $\mathbb{K} \neq \mathbb{Q}$.

Таким образом, в данном разделе заново разрабатываются многие положения аппроксимационного подхода применительно для L-функций Дирихле числовых полей.

3.2.1. Аппроксимационные теоремы для L-функций Дирихле числовых полей

Рассмотрим L-функцию Дирихле числового поля $\mathbb{K}$:

$$L(s, \chi, \mathbb{K}) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (3.12)$$

где χ — неглавный характер Дирихле числового поля $\mathbb{K}$, и соответствующий степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n. \quad (3.13)$$

В работе [16] показано, что у функции $g(z)$ вида (3.13) в точке $z = 1$ существуют конечные радиальные производные вида

$$\lim_{x \to 1-0} g^{(n)}(x) = \alpha_n.$$

В этом случае известно [7], что существует последовательность алгебраических полиномов

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} x^k, \quad (3.14)$$

приближающих функцию $g(z)$, определённую рядом (3.13), в пространстве

$C[0,1]$ со скоростью более высокой, чем любая степенная функция, т.е.

$$||g(x) - P_n(x)||_{C[0,1]} = o\left(\frac{1}{n^m}\right)$$

при любом натуральном m.

Обозначим через $Q_n(s)$ последовательность полиномов Дирихле, коэффициенты которых совпадают с коэффициентами алгебраических полиномов вида (3.14). При данных обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$ приближает L-функцию Дирихле* (3.11) *в любом прямоугольнике $D_T: \ 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \ |t| \leqslant T$ со скоростью более высокой, чем любая степенная функция, т.е.*

$$||L(s,\chi,\mathbb{K}) - Q_n(s)||_{C(D_T)} = o\left(\frac{1}{n^m}\right),$$

где m — любое натуральное.

Доказательство. В силу преобразования Меллина ряды (3.12) и (3.13) и полиномы $P_n(x)$ и $Q_n(s)$ связаны следующими соотношениями:

$$L(s,\chi,\mathbb{K}) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^{\infty} g(e^{-x})x^{s-1}dx, \quad \sigma > 0,$$

$$Q_n(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^{\infty} P_n(e^{-x})x^{s-1}dx, \quad \sigma > 0.$$

Отсюда при $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \ |t| \leqslant T$ получаем оценку вида

$$|L(s,\chi,\mathbb{K}) - Q_n(s)| \leqslant \frac{1}{|\Gamma(s)|}\int\limits_0^{n} |g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})|x^{\sigma-1}dx$$

$$+ \frac{1}{|\Gamma(s)|}\int\limits_n^{\infty} e^{-\lambda x}[e^{\lambda x}(g(e^{-x}) - P_n(e^{-x}))]x^{\sigma-1}dx,$$

где $0 < \lambda < 1$.

Для первого слагаемого имеем:

$$\int\limits_0^n |g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})| x^{\sigma-1} dx = o\left(\frac{1}{n^m}\right) \int\limits_0^n x^{\sigma-1} dx = o\left(\frac{1}{n^m}\right) \frac{n^\sigma}{\sigma_0} = o\left(\frac{1}{n^m}\right),$$

где m — любое натуральное.

Для второго слагаемого получаем при $x \in [n, \infty)$:

$$|e^{\lambda x}(g(e^{-x}) - P_n(e^{-x}))| = |e^{(\lambda-1)x}(\widetilde{g}(e^{-x}) - \widetilde{P}_n(e^{-x}))| \leqslant Ce^{(\lambda-1)x}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что на отрезке $[n, \infty)$ выполняется оценка

$$\widetilde{g}(e^{-x}) - \widetilde{P}_n(e^{-x}) = O(1).$$

Многократное применение формулы интегрирования по частям даёт оценку вида

$$\begin{aligned}\int\limits_n^\infty e^{-\lambda x} x^{\sigma-1} dx &= \frac{e^{-\lambda n} n^\sigma}{\sigma} + \frac{\lambda e^{-\lambda n} n^{\sigma+1}}{\sigma(\sigma+1)} + \ldots = \\ &= \frac{e^{-\lambda n} n^\sigma}{\sigma} \left(1 + \frac{\lambda n}{\sigma+1} + \ldots + \frac{(\lambda n)^k}{(\sigma+1)\ldots(\sigma+k)} + \ldots\right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{e^{-\lambda n} n^\sigma}{\sigma} e^{\lambda n} = \frac{n^\sigma}{\sigma}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\int\limits_n^\infty e^{-\lambda x} |e^{\lambda x}(g(e^{-x}) - P_n(e^{-x}))| x^{\sigma-1} dx \leqslant Ce^{(\lambda-1)n} \frac{n^\sigma}{\sigma} = o\left(\frac{1}{n^m}\right)$$

при любом m.

Таким образом, утверждение теоремы 3.2 полностью доказано. □

Покажем, что утверждение теоремы 3.2 будет иметь место для полиномов Дирихле $Q_n(s)$, конструкция которых указана в работе [34].

Рассмотрим L-функцию Дирихле вида (3.12) и соответствующий степенной ряд вида (3.13). Как уже отмечалось выше, степенной ряд $g(x)$ имеет в точке $x = 1$ односторонние производные любого порядка. Будем считать, что степенной ряд $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi(n)x^n$ имеет конечные односторонние производные любого порядка и в точке $x = -1$. Таким образом, функция $g(x)$ будет бесконечное число раз дифференцируемой на отрезке $[-1, 1]$.

Рассмотрим разложение функции $g(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ по полиномам Чебышева:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k T_k(x). \tag{3.15}$$

Пусть $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k T_k(x)$ — частичные суммы этого разложения. Известно [39], что для бесконечно дифференцируемой функции частичные суммы разложения её в ряд по полиномам Чебышева сходятся к этой функции со скоростью более высокой, чем любая степенная функция, т.е.

$$||g(x) - P_n(x)||_{C[-1,1]} = o\left(\frac{1}{n^m}\right), \tag{3.16}$$

где m — любое натуральное.

Оценка (3.16) говорит о том, что полиномы Дирихле $Q_n(s)$, соответствующие частичным суммам разложения (3.15):

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k T_k(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} x^k,$$

т.е. полиномы вида

$$Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k^{(n)}}{k^s},$$

удовлетворяют условию теоремы 3.2.

Укажем один класс L-функций Дирихле числовых полей, для которых получается уточнение (в смысле оценки приближения) результата теоремы 3.2.

Рассмотрим случай норменного характера χ числового поля $\mathbb{K}$, т.е. такого характера, для которого существует числовой характер Дирихле χ_1, такой, что для любого простого идеала $\wp$

$$\chi(\wp) = \chi_1(N\wp).$$

В работе [20] приведено описание полей $\mathbb{K}$, для которых все характеры Дирихле являются норменными. В этой же работе показано, что в случае норменного характера χ имеет место разложение L-функции $L(s, \chi, \mathbb{K})$ в произведение классических L-функций Дирихле:

$$L(s, \chi, \mathbb{K}) = \prod_{i=1}^{k} L(s, \chi_i), \quad k = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]. \tag{3.17}$$

В работе [34] было показано, что для классических L-функций Дирихле имеет место следующее утверждение.

Существует такая последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, что для любого прямоугольника $D_T: \ 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \ |t| \leqslant T$ имеет место оценка вида

$$||L(s, \chi) - Q_n(s)||_{C(D_T)} = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \tag{3.18}$$

где $\rho > 1$, а константа в оценке не зависит от σ_0 и имеет вид $\frac{e^T}{T}$.

При этом в качестве полиномов $Q_n(s)$ можно брять полиномы Дирихле, которые определяются частичными суммами $P_n(x)$ разложения соответствующего степенного ряда $g(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ по полиномам Чебышева. В этом случае величина $\rho > 1$ зависит от степени характера χ и явно вычисляется.

Приведённые факты позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть χ — норменный характер числового поля $\mathbb{K}$. Тогда существует такая последовательность полиномов Дирихле $Q_{n^k}(s)$, где $k =$ $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, что для любого прямоугольника $D_T: \ 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \ |t| \leqslant T$ имеет место оценка вида*

$$||L(s, \chi, \mathbb{K}) - Q_{n^k}(s)||_{C(D_T)} = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \tag{3.19}$$

где $\rho > 1$, а константа в оценке не зависит от σ_0 и не превосходит величины ke^T.

Доказательство. Доказательство достаточно провести для случая двух сомножителей в разложении (3.17). Общий случай получается на основании индуктивных рассуждений.

Обозначим $f_1(s) = L(s, \chi_1)$, $f_2(s) = L(s, \chi_2)$, а соответствующие аппроксимирующие полиномы Дирихле $Q_{n,1}(s)$ и $Q_{n,2}(s)$.

Пусть $Q_{n^2}(s) = Q_{n,1}(s)Q_{n,2}(s)$. Тогда при $s \in D_T$ имеем:

$$\begin{aligned} |f_1(s)f_2(s) - Q_{n^2}(s)| \leqslant |f_1(s)f_2(s) &- Q_{n,1}(s)f_2(s)| + \\ &+ |Q_{n,1}(s)f_2(s) - Q_{n,1}(s)Q_{n,2}(s)| \leqslant \\ &\leqslant \frac{Te^T}{T}\frac{1}{\rho_1^n} + \frac{Te^T}{T}\frac{1}{\rho_2^n} \leqslant 2\frac{1}{\min\{\rho_1^n, \rho_2^n\}}, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы 3.3. □

3.2.2. К задаче численного определения нулей L-функций Дирихле числовых полей

В этом разделе обсудим вопросы, связанные с построением аппроксимирующих полиномов Дирихле, нули которых в прямоугольнике $D_T: \ 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \ |t| \leqslant T$ совпадают с нулями L-функции Дирихле числового поля $\mathbb{K}$. При изучении этой задачи наряду с теоретическими рассуждениями будут использоваться результаты численного эксперимента.

Известная теорема Гурвица [42] говорит о том, что если последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$ приближает L-функцию $L(s, \chi, \mathbb{K})$ в прямоугольнике D_T, то любой нуль L-функции являются пределом последовательности нулей полиномов $Q_n(s)$. Но при этом не ясно, в каком случае нули полиномов $Q_n(s)$ совпадают с нулями L-функции, лежащих в заданном прямоугольнике. В работе [34] дан ответ на этот вопрос в случае, когда последовательность полиномов $Q_n(s)$ сходится к L-функции с числовым характером Дирихле. В этом случае $n_0 = [2T] + 1$. Более того, в работе [34] показано совпадение кратности нулей полинома $Q_{n_0}(s)$ и нулей предельной функции, лежащих в прямоугольнике D_T высоты T.

В случае L-функций Дирихле числовых полей не существует последовательность полиномов Дирихле Q_n, сходящихся в любом прямоугольнике D_T к L-функции Дирихле с показательной скоростью. В работе [7] показано, что в противном случае в точке $z = 1$ соответствующий степенной ряд должен быть голоморфен, а в работе [16] показано, что для L-функции Дирихле числового поля $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} \neq \mathbb{Q}$ этот факт не имеет места.

Таким образом, в нашем случае мы не можем воспользоваться результатами работы [34]. Необходимо разработать новые пути в решении указанной выше задачи.

Сначала докажем следующую теорему о совместном приближении L-функции и её производных.

Теорема 3.4. *Пусть в прямоугольнике $D_T:\ 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ |t| \leqslant T$ последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$ сходится к L-функции Дирихле $L(s, \chi, \mathbb{K})$ с более высокой скоростью, чем любая степенная функция. Тогда нули полинома Дирихле $Q_n(s)$ и его производных при $n > n_0$ совпадают в прямоугольнике D_T с нулями L-функции и её производных до k-го порядке, где $k \ll n_0$.*

Доказательство. Пусть ε_0 — величина наименьшего расстояния между нулями L-функции Дирихле, лежащими в прямоугольнике D_T. Тогда по теореме Гурвица нули полинома Дирихле $Q_n(s)$ при $n \geqslant n_0$, где n_0 таково, что

$$||L(s, \chi, \mathbb{K}) - Q_{n_0}(s)|| < \varepsilon_0,$$

совпадают с нулями L-функции.

Для L-функции имеем разложение в ряд:

$$L(s, \chi, \mathbb{K}) = Q_{n_0}(s) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (Q_{n+1}(s) - Q_n(s)), \quad s \in D_T.$$

При этом

$$L'(s, \chi, \mathbb{K}) = Q'_{n_0}(s) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (Q_{n+1}(s) - Q_n(s))'.$$

По формуле Коши

$$(Q_{n+1}(s) - Q_n(s))' = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{Q_{n+1}(s) - Q_n(s)}{(n-s)^2} ds.$$

Отсюда получаем:

$$||L'(s, \chi, \mathbb{K}) - Q'_{n_0}(s)|| < \varepsilon_0.$$

Аналогичные рассуждения можно продолжить для производных до k-го порядка, где $k \ll n_0$, что и доказывает утверждение теоремы 3.4. $\square$

Из теоремы 3.4 следует, что для последовательности полиномов Дирихле $Q_n(s)$, сходящихся в заданном прямоугольнике D_T к L-функции Дирихле со скоростью более высокой, чем любая степенная функция, существует такое n_0, что нули полиномов $Q_n(s)$ при $n \geqslant n_0$ с учётом кратности совпадают с нулями L-функции.

К сожалению, в этом случае не удаётся определить величину n_0.

Рассмотрим случай, когда удаётся определить величину n_0. Пусть χ — норменный характер Дирихле поля $\mathbb{K}$. В силу теоремы 3.3 существует последовательность полиномов Дирихле $Q_{n^k}(s)$, где $k = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, что в любом прямоугольнике D_T высоты T имеет место оценка

$$||L(s, \chi, \mathbb{K}) - Q_{n^k}(s)||_{C(D_T)} \leqslant \frac{ke^T}{\rho^n}, \tag{3.20}$$

где $\rho > 1$.

В работе [22] показано, что $Q_{n^k}(s)$ является почти периодической функцией конечного класса, и число нулей с учётом их кратности $n(T)$ такой функции в полосе $|t| \leqslant T$ равно

$$n(T) = \frac{n \ln n}{\pi} T + \omega(T), \tag{3.21}$$

где $\omega(T)$ — некоторая почти периодическая функция.

Из результатов работы [34] следует, что $\omega(T) = O(T)$, и основная масса нулей лежит в критической полосе.

Пусть n такое, что величина отклонения

$$||L(s,\chi,\mathbb{K}) - Q_{n^k}(s)||_{C(D_T)} = \varepsilon$$

равна величине $\frac{2T}{n(T)}$. В силу (3.21) получаем:

$$\varepsilon = \frac{2T}{n(T)} \approx \frac{\pi}{n \ln n}.$$

В силу (3.20) имеем:

$$\frac{\pi}{n \ln n} \approx \frac{ke^T}{\rho^n},$$

откуда получаем:

$$n \ln n \approx \frac{\pi \rho^n}{ke^T}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\ln n + \ln\ln n \approx \ln \pi + n \ln \rho - T - \ln n,$$

и, следовательно,

$$n \ln \rho - T \geqslant 0,$$

или

$$n \geqslant \frac{T}{\ln \rho}. \tag{3.22}$$

Если величина нормы модуля характера χ не превосходит 12, то можно показать, что $\ln \rho \geqslant \frac{1}{2}$. В этом случае из оценки (3.22) следует, что

$$n \geqslant [2T] + 1.$$

Оценка (3.22) согласуется с конструкцией полиномов $Q_{n^k}(s)$ в теореме 3.3 и с результатами работы [34], где показано, что в прямоугольнике D_T нули аппроксимирующего полинома $Q_n(s)$ для классической L-функции Дирихле при $n \geqslant [2T] + 1$ совпадают с нулями L-функции.

Таким образом, имеет место

Теорема 3.5. *Пусть χ — норменный характер Дирихле числового поля $\mathbb{K}$.*

Тогда существует последовательность полиномов Дирихле $Q_{n^k}(s)$, *где* $k = [\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$, *нули которых в прямоугольнике* $D_T:\ 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ |t| \leqslant T$ *при* $n \geqslant [2T]+1$ *с учётом кратности совпадают с нулями* L*-функции* $L(s,\chi,\mathbb{K})$.

Замечание. Теорема 3.5 является теоремой существования. Конструкция полиномов $Q_{n^k}(s)$ связана с разложением $L(s,\chi,\mathbb{K})$ в произведение классических L-функций Дирихле, а, как правило, такое разложение нам не известно.

Рассмотрим конструкцию аппроксимирующих полиномов Дирихле, предложенную в работе [34].

Рассмотрим L-функцию Дирихле с неглавным характером χ

$$L(s,\chi,\mathbb{K}) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

и соответствующий ей степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Известно [16], что степенной ряд $g(z)$ аналитически непродолжим за границу единичного круга, но, в то же время, имеет в точке $z=1$ конечные радиальные производные любого порядка. Будем считать, что $g(z)$ имеет конечные радиальные производные любого порядка и в точке $z=-1$.

Рассмотрим разложение функции $g(x)$ на отрезке $[-1,1]$ по полиномам Чебышева

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k T_k(x). \tag{3.23}$$

Известно [39], что при данных условиях частичные суммы разложения (3.23)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k T_k(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} x^k$$

сходятся к функции $g(x)$ на отрезке $[-1,1]$ быстрее, чем любая степенная функция, т.е.

$$||g(x) - P_n(x)||_{C[-1,1]} = o\left(\frac{1}{n^m}\right),$$

где m — любое натуральное.

Рассмотрим последовательность полиномов Дирихле

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^{(n)}}{k^s}, \quad s = \sigma + it. \tag{3.24}$$

В теореме 3.2 доказано, что последовательность полиномов $Q_n(s)$ вида (3.24) сходится к L-функции Дирихле $L(s, \chi, \mathbb{K})$ в любом прямоугольнике D_T высоты T со скоростью более высокой, чем любая степенная функция.

Рассмотрим последовательность полиномов Дирихле вида (3.24) $Q_{n^k}(s)$, где $k = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. К сожалению, не удаётся доказать теоретически, что нули полиномов Дирихле $Q_{n^k}(s)$ совпадают в прямоугольнике D_T при $n \geqslant [2T] + 1$ с нулями L-функции Дирихле. Результаты ряда численных экспериментов, проведённых автором, говорят, что при $n \geqslant [2T] + 1$ нули полиномов $Q_{n^k}(s)$ совпадают в прямоугольнике D_T с нулями соответствующих рядов Дирихле. Остановимся здесь на одном таком численном эксперименте.

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s) = L(s, \chi_1)L(s, \chi_2), \tag{3.25}$$

где χ_1 — характер Дирихле по модулю 3, принимающий значения

$$\chi_1(n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod 3, \\ 1, & n \equiv 1 \pmod 3, \\ -1, & n \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

а χ_2 — характер Дирихле по модулю 5, принимающий значения

$$\chi_2(n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \mod 5, \\ 1, & n \equiv 1 \mod 5, \\ i, & n \equiv 2 \mod 5, \\ -i, & n \equiv 3 \mod 5, \\ -1, & n \equiv 4 \mod 5. \end{cases}$$

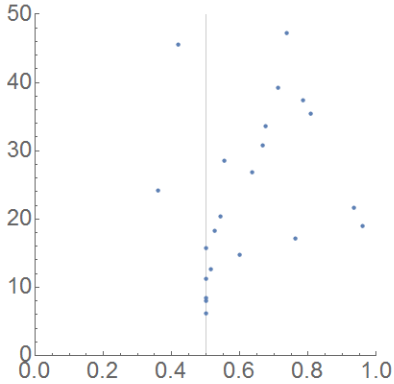
Численный эксперимент заключался в вычислении нулей ряда Дирихле (3.25) с помощью аппроксимирующих полиномов вида

$$Q_{n^2}(s) = Q_{n,1}(s)Q_{n,2}(s) \tag{3.26}$$

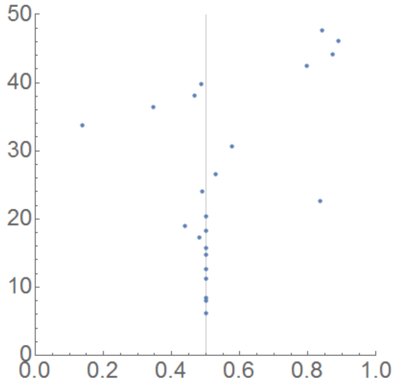
и с помощью аппроксимирующих полиномов, построенных по формулам (3.24).

Отметим, что в силу теоремы 3.1 в прямоугольнике D_T высоты T нули полиномов Дирихле вида (3.26) при $n \geqslant [2T] + 1$ совпадают с нулями ряда Дирихле (3.25).

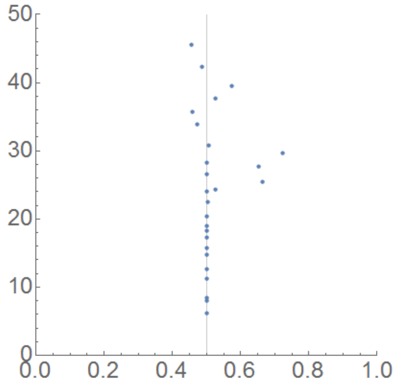
Ниже приведены результаты численного эксперимента, из которых можно видеть практически полное совпадение нулей полиномов Дирихле, построенных по формулам (3.26), и полиномов Дирихле $Q_{n^2}(s)$, построенных по формулам (3.25) в прямоугольниках D_T при $n \geqslant [2T] + 1$.



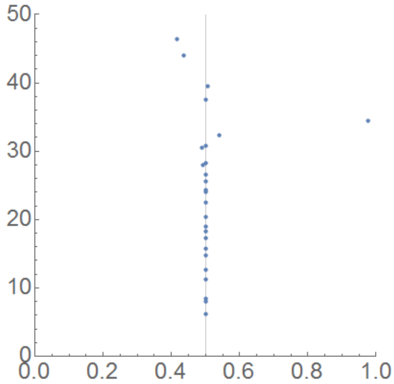
(a) $n = 30$



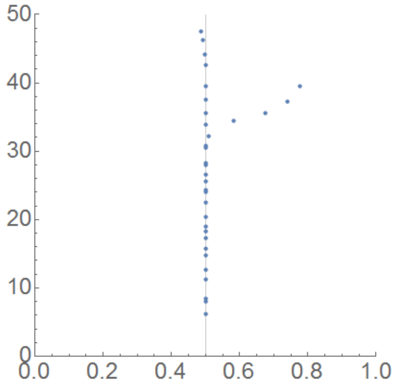
(b) $n = 40$



(c) $n = 50$



(d) $n = 60$



(e) $n = 70$

Результаты численных экспериментов дают возможность предположить, что численная схема определения нулей L-функций Дирихле числовых полей, связанная с разложением соответствующих степенных рядов по полиномам Чебышева, будет эффективной и в случае произвольных характеров Дирихле.

3.3. Аппроксимационный подход в задаче аналитического продолжения L-функций Дирихле числовых полей

Допустим, что L-функция Дирихле числового поля $\mathbb{K}$ удовлетворяет условиям:

1. функция $f(s) = \sum\limits_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{n^s}$ аналитически продолжима в полуплоскость $\sigma > 0$;

2. при этом $f(s)$ непрерывна на оси $\sigma > 0$;

3. существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, равномерно

сходящаяся к $f(s)$ в любом прямоугольнике $D_T: \ 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \ |t| \leqslant T$.

Замечание. Отметим, что задача, связанная с выполнением для L-функции Дирихле числового поля условий 1 и 2 является совершенно самостоятельной и в данной работе не рассматривается.

Обозначим через D прямоугольник $0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \ |t| \leqslant T$. Тогда функция $w = f(s)$ переводит область D в образ D_1 плоскости w, при этом граница $\gamma: \ \sigma = 0, \ |t| \leqslant T$ переходит в границу Γ области D_1.

Рассмотрим действительный отрезок $[\alpha, \beta]$ в плоскости t, и пусть функция $s = \lambda(t)$ переводит отрезок $[\alpha, \beta]$ в отрезок $[-T, T]$ плоскости s, а область $\widehat{D}$ плоскости t с границей $[\alpha, \beta]$ — в область D.

Далее, функция $w = \Lambda(u)$ переводит действительный отрезок $[A, B)$ плоскости u в кривую Γ, а область $\widehat{D}_1$ с границей $[A, B]$ — в область D_1.

Пусть теперь $t \in \widehat{D}$. Тогда $w = f(\lambda(t)) \in D_1$. В силу условий существует $u \in \widehat{D}_1$, такое, что $w = \Lambda(u)$. Следовательно, функция $u = \Lambda^{-1}(f(\Lambda(t)))$ переводит область $\widehat{D}$ в область $\widehat{D}_1$, при этом отрезок $[\alpha, \beta]$ переходит в отрезок $[A, B]$. Отсюда в силу принципа аналитического продолжения — принципа Шварца (см. [25] на стр. 543) функция $u = \Lambda^{-1}(f(\lambda(t)))$ допускает аналитическое продолжение на область $\widehat{\widehat{D}}$ плоскости t, симметричную области $\widehat{D}$ относительно отрезка $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим функцию

$$w = F(s) = \Lambda(u), \quad u \in \widehat{D}_s.$$

Так как $F(s) = \Lambda(\Lambda^{-1}(f(\lambda(t))))$, то $F(s)$ при $s \in D$ совпадает с функцией $f(s)$. В силу вышесказанного функция $F(s)$ допускает аналитическое продолжение на облсть D^*, такую, что $\lambda(t)$ отображает область $\widehat{\widehat{D}}$ на область D^*.

Пусть t_1 — точка из области $\widehat{\widehat{D}}$, симметричная точке t относительно $t \in \widehat{D}$. Тогда

$$\Lambda^{-1}(f(\lambda(t_1))) = u_1,$$

где u_1 — точка, симметричная точке u относительно отрезка $[A, B]$, т.е.

$$\Lambda^{-1}(f(\lambda(\overline{t}))) = \overline{\Lambda^{-1}(f(\lambda(t)))}.$$

Пусть $s = \lambda(t),\ s_1 = \lambda(\overline{T})$. Тогда имеем:

$$F(s_1) = \Lambda(\Lambda^{-1}(f(\lambda(\overline{t})))).$$

Здесь $\overline{t} \in \widehat{\widehat{D}},\ s_1 \in D^*$.

Обозначим через $f^*(s)$ аналитическое продолжение функции на область D^*. Пусть $s = \lambda(t)$ и $s_1 = \lambda(\overline{t}),\ s_1 \in D^*$. Тогда

$$f^*(s_1) = \Lambda(\overline{\Lambda^{-1}(f(\lambda(t)))}),$$

где точка $\overline{\Lambda^{-1}(f(\lambda(t)))}$ сопряжена с точкой $\Lambda^{-1}(f(\lambda(t)))$ в плоскости u.

Встаёт вопрос, как будет ложиться область D^* при неограниченном увеличении высоты T прямоугольника D_T? Не получим ли мы при этом всю комплексную плоскость? Ответ на этот вопрос, по мнению автора, можно получить, привлекая аппроксимационные полиномы $Q_n(s)$. Действительно, если мы обозначим через $\Psi_n(s)$ функции, определяемые аналитическими продолжениями функций $Q_n(s)$ на область D^*, то нетрудно показать, что для $s_1 \in D^*$

$$f^*(s_1) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(s_1).$$

Возможно, что функция вида

$$f^*(s) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(s), \tag{3.27}$$

где для каждого s из левой полуплоскости найдётся своя величина T, такая, что предел (3.27) имеет смысл, будет являться аналитическим продолжением функции $f(s)$ на всю комплексную плоскость. Но этот вопрос остаётся открытым.

3.4. Об одном подходе получения плотностных теорем для нулей L-функций Дирихле числовых полей

Пусть χ — неглавный характер числового поля $\mathbb{K}$, а $L(s,\chi,\mathbb{K})$ — L-функция Дирихле

$$L(s,\chi,\mathbb{K})=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\quad s=\sigma+it. \tag{3.28}$$

Обозначим через $N(T)$ число нулей (с учётом их кратности) L-функции (3.28), лежащих в прямоугольнике $D_T:\ 0<\sigma<1,\ |t|\leqslant T$.

В данном разделе рассмотрим различные подходы в задаче оценки величины $N(T)$ в зависимости от T.

Прежде всего, рассмотрим аппроксимационный подход в задаче получения оценки величины $N(T)$ в случае норменного характера χ.

Известно [20], что в случае норменных характеров L-функция Дирихле (3.28) допускает разложение в произведение классических L-функций Дирихле

$$L(s,\chi,\mathbb{K})=\prod_{i=1}^{k}L_i(s,\chi_i),$$

где $k=[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$.

Теорема 3.5 раздела 3.2 данной работы утверждает, что существует последовательность полиномов Дирихле $Q_{n^k}(s)$, нули которых в прямоугольнике $D_T:\ 0<\sigma<1,\ |t|\leqslant T$ при $n\geqslant[2T]+1$ совпадают с нулями L-функции Дирихле (3.28). При этом в качестве полиномов Дирихле $Q_{n^k}(s)$ рассматривались полиномы вида

$$Q_{n^k}(s)=Q_{n,1}(s)Q_{n,2}(s)\dots Q_{n,k}(s), \tag{3.29}$$

где $Q_{n,i}$ — аппроксимирующие полиномы для классических L-функций Дирихле $L_i(s,\chi_i)$. В работе [34] показано, что при $n\geqslant[2T]+1$ нули полиномов $Q_{n,i}(s)$ совпадают с нулями L-функции $L_i(s,\chi_i)$, лежащими в прямоугольнике D_T. При этом для числа нулей $n(T)$ полинома $Q_{n,i}(s)$, лежащих в прямоугольнике D_T (с учётом кратности) имеет место оценка

$$n(T) = \frac{T \ln T}{\pi} + O(T).$$

Отсюда в силу представления (3.29) получаем следующее утверждение.

Теорема 3.6. *Пусть χ — неглавный норменный характер числового поля $\mathbb{K}$. Тогда для числа нулей $N(T)$ (с учётом кратности) L-функции Дирихле $L(s, \chi, \mathbb{K})$ вида* (3.28)*, лежащих в прямоугольнике $D_T:\ 0 < \sigma < 1,\ |t| \leqslant T$ имеет место асимптотическая оценка вида*

$$N(T) = \frac{kT \ln T}{\pi} + O(T),$$

где $k = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.

Отметим, что в случае произвольных характероа Дирихле аппроксимационный подход не даёт желаемых результатов. В этом случае в работе предлагается иной подход, в основе которого лежат глубокие результаты теории алгебраических чисел.

Пусть χ — неглавный характер Дирихле числового поля $\mathbb{K}$ модуля $\mathfrak{m}$, и пусть χ_1 — первообразный характер Дирихле модуля $\mathfrak{m}_1$, где $\mathfrak{m}_1|\mathfrak{m}$. Известно, что нетривиальные нули L-функций Дирихле $L(s, \chi, \mathbb{K})$ и $L(s, \chi_1, \mathbb{K})$ совпадают. Поэтому в дальнейшем будем считать, что χ — неглавный первообразный характер числового поля $\mathbb{K}$.

Пусть L — такое расщирение поля $\mathbb{K}$ минимальной степени, что характер χ согласован с характером $\widehat{\chi}$ группы Галуая этого расширения, т.е.

$$\chi(\wp) = \widehat{\chi}(F[\wp]), \tag{3.30}$$

где $F[\wp]$ — автоморфизм Фробёниуса идеала $\wp$ при расширении $\mathbb{K} \subset L$. Известно (см. статью Г. Хассе в книге [2], что такое расширение существует.

Пусть $Z_L(s)$ — дзета-функция Дедекинда поля L, т.е.

$$Z_L(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^s},$$

где суммирование ведётся по всем целым идеалам поля L.

Известно (см. статью Х. Хейльбронна в книге [2]), что в этом случае имеет место разложение

$$Z_L(s) = \prod_{\chi_i} L(s, \chi_i, \mathbb{K}), \tag{3.31}$$

где произведение берётся по всем первообразным характерам поля $\mathbb{K}$, согласованным в смысле (3.30) с характерами группы Галуа расширения $L \supset \mathbb{K}$.

Наша дальнейшаяя задача — получить оценку числа нулей дзета-функции Дедекинда $Z_L(s)$, лежащих в прямоугольнике D_T.

Рассмотрим максимальное абелево подрасширение L_{ab} расширения $\mathbb{Q} \subset L$, т.е.

$$\mathbb{Q} \subset L_{ab} \subset L.$$

Для дзета-функции абелева расширения $\mathbb{Q} \subset L_{ab}$ имеет место разложение, аналогичное разложению (3.31):

$$Z_{L_{ab}}(s) = \prod_{\chi_i} L(s, \chi_i), \tag{3.32}$$

где $L(s, \chi_i)$ — классические L-функции Дирихле с первообразными характерами χ_i, согласованные с характерами группы Галуа расширения $\mathbb{Q} \subset L_{ab}$. Их будет m штук, где $m = [L_{ab} : \mathbb{Q}]$.

Обозначим далее через $f_1(s)$ функцию вида

$$f_1(s) = \prod_{\wp}{}' \left(1 - \frac{1}{(N\wp)^s}\right)^{-1},$$

где произведение берётся по всем простым идеалам поля L_{ab}, над которыми лежат неразветвлённые простые идеалы β поля L, и через $f_+(s)$ обозначим функцию вида

$$f_+(s) = \prod_{\beta} \left(1 - \frac{1}{(N\beta)^s}\right)^{-1},$$

где произведение берётся по всем неразветвлённым простым идеалам поля L.

При данных обозначениях имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Имеет место соотношение*

$$f(s) = f_1^l(s),$$

где $l = [L : L_{ab}]$.

Доказательство. Известно (см. [2], стр. 476), что если β — неразветвлённый простой идеал поля, лежащий над простым идеалом $\wp$ поля L_{ab}, то

$$N\beta = N\wp = p^f, \tag{3.33}$$

где f — степень инерции простого идеала $\wp$.

Известно также [3], что для любых двух расширений $\mathbb{K} \subset K$ для любого идеала $\wp$ и простых идеалов β, лежащих над $\wp$,

$$\sum_{\beta|\wp} f_\beta = [K : \mathbb{K}].$$

Поэтому в силу (3.33) над каждым простым идеалом $\wp$ поля L_{ab} лежит ровно l простых идеалов поля L, что и доказывает утверждение леммы 3.3.
□

Докажем следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Для числа нетривиальных нулей* $N(T)$ *дзета-функции Дедекинда поля* L*, лежащих в прямоугольнике* D_T*, имеет место оценка*

$$N(T) = \frac{rT\ln T}{\pi} + O(T),$$

где $r = [L : \mathbb{Q}]$.

Доказательство. В силу (3.32) для числа нулей $N_1(T)$ дзета-функции Дедекинда поля L_{ab}, лежащих в прямоугольнике D_T, имеет место оценка

$$N_1(t) = \frac{mT\ln T}{\pi} + O(T),$$

где $m = [L_{ab} : \mathbb{Q}]$.

Отсюда в силу леммы 3.3 следует утверждение леммы 3.4. □

Из леммы 3.4 и разложения (3.31) следует утверждение:

Теорема 3.7. *Для числа нулей $N(T)$ (с учётом кратности) L-функции Дирихле $L(s, \chi, \mathbb{K})$, лежащих в прямоугольнике D_T, имеет место оценка*

$$N(T) = O\left(\frac{rT\ln T}{\pi}\right). \tag{3.34}$$

Замечание. Если предположить, что для всех L-функций Дирихле, входящих в произведение (3.31), главные члены оценок для числа нулей, лежащих в прямоугольнике D_T, одинаковы, то в теореме 3.7 вместо оценки (3.34) можно записать асимптотическое равенство

$$N(T) = \frac{kT\ln T}{\pi} + O(T),$$

где $k = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Этот результат является ожидаемым.

Заключение

В заключении остановимся на тех вопросах, которые вставали в данной работе, их решение осталось за рамками этой работы, но которые, по мнению автора, представляют особый интерес.

Как уже отмечалось ранее, проблема обобщённых характеров, поставленных в конце сороковых годов Ю. В. Линником и Н. Г. Чудаковым, заключалась в решении задачи аналитического продолжения на комплексную плоскость ряда Дирихле вида

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

где $h(n)$ — конечнозначный числовой характер, который отличался от характера Дирихле тем, что вместо свойства периодичности для $h(n)$ должно выполняться свойство ограниченности сумматорной функции коэффициентов. В эти годы Ю. В. Линник и Н. Г. Чудаков занимались поиском иных подходов аналитического продолжения L-функций числовых полей и других рядов Дирихле, чем подход Римана при решении задачи аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(s)$, в основе которого лежало функциональное уравнение тета-функции. Дело в том, что подход Римана был взят за основу при решении задачи аналитического продолжения L-функций Дирихле числовых полей и многих других рядов Дирихле.

Реализация этого подхода требовала развития всё более сложного математического аппарата. Это аппарат, связанный с получением формулы суммирования Пуассона для кратных тригонометрических рядов, разработанный Е. Гекке (см., например, [1]), это аппарат, связанный с интегрированием на локально компактных группах, разработанный Тейтом (см. [23]), и многие другие работы.

В связи с этим встала проблема обобщённых характеров, которая касалась наиболее простых характеров — конечнозначных числовых характеров.

По мнению автора, важную роль при решении проблемы обобщённых характеров и в задаче аналитического продолжения L-функций Дирихле и других рядов Дирихле будет играть аппроксимационный подход, основанный на приближении в критической полосе полиномами Дирихле. Так, в работе [11] было показано, что если ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it$$

с конечнозначными характерами определяет функцию, голоморфную в полуплоскости $\sigma > 0$, которая в любом прямоугольнике $D_T: \ 0 < \sigma < 1, \ |t| \leqslant T$ приближается последовательностью полиномов Дирихле $Q_n(s)$ с показательной скоростью, то эта функция продолжима как целая функция на всю комплексную плоскость с определённым порядком роста модуля. Аналогичный факт имеет место в случае приближения полиномами Дирихле в любом прямоугольнике D_T со скоростью более высокой, чем любая степенная функция.

Автор надеется, что аналитическое продолжение функции $f(s)$ будет получено в случае её приближения в прямоугольнике D_T с произвольной скоростью. Автор считает, что этот факт будет иметь место для любого ряда Дирихле, если только его можно аналитически продолжить в полуплоскость $\sigma > 0$, и если он аппроксимируется в критической полосе полиномами Дирихле. Но этот вопрос представляет самостоятельный интерес и не изучался в диссертации.

Отметим также, что за рамками исследований в данной работе остались такие вопросы, как порядок роста модуля L-функции Дирихле, свойство универсальности L-функций, для изучения которых можно использовать аппроксимационный подход.

Список литературы

[1] *Lang S.* Algebraic Number Theory / S. Lang. — New York : Columbia University, 1970.

[2] Алгебраическая теория чисел / под ред. Д. Касселс, А. Фрёлих. — М. : Мир, 1969. — 485 с.

[3] *Боревич З. И.* Теория чисел / З. И. Боревич, Ш. И. Р. — М. : Наука, 1972.

[4] *Гекке Е.* Лекции по теории алгебраических чисел / Е. Гекке. — М. : ГИТТЛ, 1940.

[5] *Гельфонд О. А.* Об арифметическом эквиваленте аналитичности L-ряда Дирихле на прямой Re s = 1 / О. А. Гельфонд // Избранные труды. — М., 1973. — С. 310—328.

[6] *Глазков В. В.* Характеры мультипликативной полугруппы натуральных чисел / В. В. Глазков // Исследования по теории чисел: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов, 1968. — Т. 2. — С. 3—40.

[7] *Даугавет Н. К.* Введение в теорию приближения функций / Н. К. Даугавет. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1977. — 182 с.

[8] *Демьянов В. Ф.* Введение в минимакс / В. Ф. Демьянов, В. Н. Малозёмов. — М. : Наука, 1972. — 358 с.

[9] *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел / А. А. Карацуба. — М. : Наука, 1983. — 238 с.

[10] *Кривобок В. В.* Некоторые вопросы целостности L-функций числовых полей: Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук / Кривобок В. В. — Саратов : СГУ, 2008.

[11] *Кузнецов В. Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле / В. Н. Кузнецов // Мат. заметки. — 1984. — Т. 36, № 6. — С. 805—812.

[12] *Кузнецов В. Н.* О граничных свойствах степенных рядов с конечнозначными коэффициентами / В. Н. Кузнецов // Диф. уравнения и теория функций: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов, 1987. — Т. 7. — С. 8—16.

[13] *Кузнецов В. Н.* Об аналитических свойствах рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами: Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук / Кузнецов В. Н. — Саратов : СГУ, 1983.

[14] *Кузнецов В. Н.* Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле / В. Н. Кузнецов // Выч. методы и программирование: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов, 1987. — Т. 1. — С. 13—23.

[15] *Кузнецов В. Н.* К вопросу аналитического продолжения рядов Дирихле с вполне мультипликативными коэффициентами / В. Н. Кузнецов, А. М. Водолазов // Исследования по алгебре, теории чисел, функц. анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов, 2003. — Вып. 1. — С. 43—59.

[16] *Кузнецов В. Н.* Об аналитической непродолжимости за границу сходимости степенных рядов. отвечающих L-функциям Дирихле числовых полей / В. Н. Кузнецов, Т. А. Кузнецова, В. В. Кривобок // Исследования по алгебре, теории чисел, функц. анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов, 2009. — Вып. 5. — С. 31—36.

[17] *Кузнецов В. Н.* К задаче численного определения нетривиальных нулей L-функций Дирихле числовых полей / В. Н. Кузнецов, В. А. Матвеев // Чебышевский сборник. — Тула, 2015. — Т. 16, вып. 2. — С. 144—155.

[18] *Кузнецов В. Н.* Обобщённые характеры числовых полей и аналитические свойства эйлеровых произведений с такими характерами / В. Н. Кузнецов, В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Материалы XII Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2014. — С. 235—236.

[19] *Кузнецов В. Н.* К проблеме обобщённых характеров / В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева // Материалы XIII Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2015. — С. 31—32.

[20] *Кузнецов В. Н.* К задаче о разложении в произведение L-функций Дирихле числовых полей / В. Н. Кузнецов, Е. В. Сецинская, В. В. Кривобок // Чебышевский сборник. — Тула, 2004. — Т. 5, 3(II). — С. 51—63.

[21] *Кузнецова Т. А.* Отыскание полугруппы операторов, целой, экспоненциального типа на заданных подпространствах: Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук / Кузнецова Т. А. — Саратов : СГУ, 1982.

[22] *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М. : Изд-во технико-теоретич. литерат., 1956.

[23] *Ленг С.* Алгебраические числа / С. Ленг. — М. : Мир, 1966. — 225 с.

[24] *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. — М. : Наука, 1976. — 536 с.

[25] *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 2 / А. И. Маркушевич. — М. : Наука, 1968.

[26] *Матвеев В. А.* К оценке одного класса сумматорных функций / В. А. Матвеев // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Серия Математ. Механика. Информат. — Саратов, 2013. — Т. 13, вып. 4. — С. 72—76.

[27] *Матвеев В. А.* К оценке одной сумматорной функции / В. А. Матвеев // Тезисы докладов на XI Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Саратов, 2013. — С. 59.

[28] *Матвеев В. А.* О поведении рядов Дирихле с обобщёнными характерами на оси сходимости / В. А. Матвеев // Исследования по алгебре, теории чисел, функц. анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов, 2012. — Вып. 7. — С. 68—72.

[29] *Матвеев В. А.* Об одном численном алгоритме определения нулей L-функций Дирихле числовых полей / В. А. Матвеев // Материалы XIII Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2015. — С. 233—234.

[30] *Матвеев В. А.* Аналитические свойства одного класса рядов Дирихле с мультипликативными конечнозначными коэффициентами / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Материалы XII Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2014. — С. 240.

[31] *Матвеев В. А.* О поведении в критической полосе рядов Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами и с ограниченной сумматорной функцией / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Чебышевский сборник. — Тула, 2012. — Т. 13, вып. 2. — С. 106—116.

[32] *Матвеев В. А.* Об одном подходе получения плотностных теорем для нулей L-функций Дирихле числовых полей / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Материалы XIII Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2015. — С. 234—235.

[33] *Матвеев В. А.* Обобщённые характеры числовых полей и аналог гипотезы Н. Г. Чудакова / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Математ. Механика. Информат. — Саратов, 2015. — Т. 15, вып. 1. — С. 36—45.

[34] *Матвеева О. А.* Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: Диссертация

на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук / Матвеева О. А. — Ульяновск : УлГУ, 2014. — 110 с.

[35] *Матвеева О. А.* Об одном эквиваленте расширенной гипотезы Римана / О. А. Матвеева, В. А. Матвеев // Материалы I внутривузовской конференции студентов и аспирантов. — Саратов, 2013. — С. 146—152.

[36] *Матвеева О. А.* Об одном эквиваленте расширенной гипотезы Римана для L-функций Дирихле числовых полей / О. А. Матвеева, В. А. Матвеев // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Серия Математ. Механика. Информат. — Саратов, 2013. — Т. 13, вып. 4. — С. 76—80.

[37] *Постников А. Г.* Введение в аналитическую теорию чисел / А. Г. Постников. — М. : Наука, 1971. — 416 с.

[38] *Прахар К.* Распределение простых чисел / К. Прахар. — М. : Мир, 1967. — 511 с.

[39] *Суэтин П. К.* Классические ортогональные многочлены / П. К. Суэтин. — М. : Наука, 1976. — 327 с.

[40] *Терёхин А. П.* Ограниченная группа операторов и наилучшие приближения / А. П. Терёхин // Диф. уравнения и вычислительная математика: межвуз. сб. науч. тр. — 1975. — С. 3—172.

[41] *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана / Е. К. Титчмарш. — М. : И. Л., 1953. — 407 с.

[42] *Титчмарш Е. К.* Теория функций / Е. К. Титчмарш. — М. : Наука, 1980. — 463 с.

[43] *Чандрасекхаран К.* Арифметические функции / К. Чандрасекхаран. — М. : Наука, 1975. — 272 с.

[44] *Чудаков Н. Г.* Обобщённые характеры / Н. Г. Чудаков // Международный конгресс в Ницце. Доклады советских математиков. — М., 1972. — С. 335.

[45] *Чудаков Н. Г.* Применение равенства Парсеваля для оценок сумматорных функций характеров числовых полугрупп / Н. Г. Чудаков, Б. М. Бредихин // УМН. — 1956. — Т. 8. — С. 347—360.

[46] *Чудаков Н. Г.* Об обобщённом характере / Н. Г. Чудаков, К. А. Родосский // ДАН СССР. — 1950. — Т. 74, № 4. — С. 1137—1138.

[47] *Чудаков Н.* Об одном классе вполне мультипликативных функций. / Н. Чудаков, Ю. В. Линник // ДАН СССР. — 1950. — Т. 74, № 2. — С. 193—196.

Работы автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, входящих в список ВАК

1. *Матвеев В. А.* Об одном эквиваленте расширенной гипотезы Римана для L-функций Дирихле числовых полей / О. А. Матвеева, В. А. Матвеев // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Серия Математ. Механика. Информат. — Саратов, 2013. — Т. 13, вып. 4. — С. 76—80.

2. *Матвеев В. А.* К оценке одного класса сумматорных функций / В. А. Матвеев // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Серия Математ. Механика. Информат. — Саратов, 2013. — Т. 13, вып. 4. — С. 72—76.

3. *Матвеев В. А.* Обобщённые характеры числовых полей и аналог гипотезы Н. Г. Чудакова / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Математ. Механика. Информат. — Саратов, 2015. — Т. 15, вып. 1. — С. 36—45.

4. *Матвеев В. А.* К задаче численного определения нетривиальных нулей L-функций Дирихле числовых полей / В. Н. Кузнецов, В. А. Матвеев // Чебышевский сборник. — Тула, 2015. — Т. 16, вып. 2. — С. 144—155.

Публикации в прочих изданиях

5. *Матвеев В. А.* О поведении в критической полосе рядов Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами и с ограниченной сумматорной функцией / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Чебышевский сборник. — Тула, 2012. — Т. 13, вып. 2. — С. 106—116.

6. *Матвеев В. А.* О поведении рядов Дирихле с обобщёнными характерами на оси сходимости / В. А. Матвеев // Исследования по алгебре, теории чисел, функц. анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов, 2012. — Вып. 7. — С. 68—72.

7. *Матвеев В. А.* Об одном эквиваленте расширенной гипотезы Римана / О. А. Матвеева, В. А. Матвеев // Материалы I внутривузовской конференции студентов и аспирантов. — Саратов, 2013. — С. 146—152.

8. *Матвеев В. А.* К оценке одной сумматорной функции / В. А. Матвеев // Тезисы докладов на XI Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Саратов, 2013. — С. 59.

9. *Матвеев В. А.* О нулях рядов Дирихле с «испорченными» на редком множестве характерами Дирихле / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Тезисы докладов на XI Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Саратов, 2013. — С. 59—60.

10. *Матвеев В. А.* О нулях L-функций числовых полей / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Тезисы докладов на XI Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Саратов, 2013. — С. 60.

11. *Матвеев В. А.* Обобщённые характеры числовых полей и аналитические свойства эйлеровых произведений с такими характерами / В. Н. Кузнецов, В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Материалы XII Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2014. — С. 235—236.

12. *Матвеев В. А.* Аналитические свойства одного класса рядов Дирихле с мультипликативными конечнозначными коэффициентами / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Материалы XII Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2014. — С. 240.

13. *Матвеев В. А.* Об одном численном алгоритме определения нулей L-функций Дирихле числовых полей / В. А. Матвеев // Материалы XIII Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2015. — С. 233—234.

14. *Матвеев В. А.* Об одном подходе получения плотностных теорем для

нулей L-функций Дирихле числовых полей / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Материалы XIII Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2015. — С. 234—235.