ФГБОУ ВПО «Астраханский государственный университет»

На правах рукописи

Шацков Денис Олегович

О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ МЕРЫ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА

специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель –
доктор физико–математических
наук Н.Г. Мощевитин

Астрахань, 2015

Оглавление

Стр.

Введение

0.1. Общая характеристика работы

Объект исследования и актуальность темы. Настоящая диссертация посвящена вопросам связанным с поведением функции меры иррациональности одного числа и нескольких чисел. Изучением свойств таких функций занимались А.Я. Хинчин, В. Ярник, Дж.В.С. Касселс и другие математики.

Классические результаты, касающиеся приближения вещественных чисел рациональными дробями принадлежат А. Лежандру, Ж. Лагранжу, К. Гауссу, Л. Дирихле, А. Гурвицу, Э. Борелю и др. В основном, все классические результаты, связанные с одномерными приближениями, получены с помощью аппарата цепных дробей.

Одно из направлений теории диофантовых приближений связанно с приближением произвольного вещественного вектора $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ целочисленным вектором $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. В такого родах задачах плодотворным является изучение поведения наилучших приближений к вектору $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ в различных нормах. Основы этой теории восходят к трудам Ш. Эрмита, Г. Минковского, Г. Вороного и др.

Функция меры иррациональности естественным образом появилась в теории диофантовых приближений в вопросах, связанных с приближениями иррациональных чисел рациональными. Это связано с тем, что точки разрыва данной функции соответствуют наилучшим приближениям.

Рассматриваемая в настоящей диссертации функция меры иррациональности, по-видимому, впервые встречается работах В. Ярника [24]–[26].

Приведем определение функции меры иррациональности в наиболее общем случае. Обозначим через $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – целочисленный вектор. Рассмотрим матрицу

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1^1 & \dots & \theta_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_m^1 & \dots & \theta_m^n \end{pmatrix},$$

где θ_j^i – вещественные числа из интервала $[0;1)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и соответствующую ей систему линейных форм

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_\Theta(\mathbf{x}) = \{L_j(\mathbf{x}), 1 \leqslant j \leqslant m\}, \quad L_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \theta_j^i x_i.$$

Тогда функцию меры иррациональности можно определить следующим образом

$$\psi_\Theta(t) = \min_{\substack{x_i \in \mathbb{Z} \\ 1 \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant t}} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|L_j(\mathbf{x})\| =$$

$$= \min_{\substack{x_i \in \mathbb{Z} \\ 1 \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant t}} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|\theta_j^1 x_1 + \dots + \theta_j^n x_n\|,$$

где $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого. Похожая функция

$$\eta(\rho) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}: 0 < |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \leqslant \rho^2} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|L_j(\mathbf{x})\|$$

используется в ряде доказательств у Дж.В.С. Касселса [6].

Некоторую информацию о поведении этой функции можно получить из работ А.Я. Хинчина [29], связанных с изучением сингулярных матриц. В работах А.Я. Хинчина в явном виде эта функция не присутствует.

В одномерном случае, когда $n = m = 1$, вместо матрицы Θ будем писать просто α и функцию меры иррациональности можно записать таким образом

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leqslant q \leqslant t} ||q\alpha||$$

(здесь минимум берется по целым q).

В первой главе диссертации мы докажем метрический результат о поведении разности $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$ при $t \to \infty$ в случаях $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geqslant 2$ и $n = 1$ для почти всех (в смысле меры Лебега) пар матриц (Θ, Θ').

Во второй главе мы изучим поведение интеграла

$$I_\alpha(t) = \int\limits_1^t \psi_\alpha(\xi) d\xi$$

и разности $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$ при $t \to \infty$.

Цели работы. Изучение интеграла $I_\alpha(t)$, разности $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$ при $t \to +\infty$. Изучение разности $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$ при $t \to +\infty$ в случаях $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geqslant 2$ и $n = 1$.

Методы исследования. В работе использованы элементарные методы теории чисел, методы математического анализа, методы функционального анализа, эргодическая теория.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основными результатами данной работы можно считать следующие:

- найдены точные границы для значения предела $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)}$, где $N(\alpha, t)$ – количество знаменателей подходящих дробей для числа α на отрезке $[1; t]$;
- найдено значение предела $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)}$ для почти всех (в смысле меры Лебега) значений α;
- найдено значение предела $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t}$ для почти всех (в смысле меры Лебега) значений α;
- доказано, что существуют алгебраически независимые числа α и β, такие что $I_\alpha(t) - I_\beta(t) \to \infty$ при $t \to \infty$;
- доказано, что разность $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$ меняет знак бесконечное количество раз для почти всех пар матриц при $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geqslant 2$ и $n = 1$ при $t \to \infty$.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в ней методы могут быть применены в задачах теории диофантовых приближений, касающихся нахождению наилучших приближений к многомерному вектору. Кроме того, полученные результаты могут использоваться в учебном процессе в рамках специальных курсов и специальных семинаров.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

- «Diophantine Analysis» – Астрахань, Россия (30 июля – 3 августа 2012);
- «Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory» – Москва (Долгопрудный), Россия (27 января – 2 февраля 2014);
- «Diophantine Approximation and Related Topics» – Орхус, Дания (12 июля – 17 июля 2015);

и научно-исследовательских семинарах:

- «Московский семинар по теории чисел» (рук. Ю.В. Нестеренко, Н.Г. Мощевитин), МГУ;
- Семинар кафедры математики и методики её преподавания Астраханского государственного университета (рук. А.Г. Князев, С.З. Кенжалиева), АГУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 2 статьи в ведущих российских и зарубежных рецензируемых изданиях [16], [13] и электронный препринт на сервере arXiv.org [34]. Статьи [16], [13] также размещены на сервере arXiv.org [17], [35].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и библиографии. Общий объем диссертации составляет 70 страниц. Библиография включает 35 наименований.

0.2. Функция меры иррациональности: краткий обзор результатов

В настоящем пункте мы приводим формулировки известных результатов о функции меры иррациональности.

Из теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что $\psi_\Theta(t) < t^{-n/m}$. Эта функция кусочно постоянная, невозрастающая и убывает к нулю, когда t стремится к бесконечности. Точки разрыва данной функции определяют наилучшие приближения для матрицы Θ в sup-норме.

Напомним определение наилучшего приближения для матрицы Θ. Для целочисленного вектора $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ рассмотрим величины

$$M(\mathbf{x}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|, \ \ \zeta(\mathbf{x}) = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|L_j(\mathbf{x})\|.$$

Определение 1. Будем называть целочисленную точку $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *наилучшим приближением* для матрицы Θ, если

$$\zeta(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}'} \zeta(\mathbf{x}'),$$

где минимум берется по всем ненулевым целым точкам $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{Z}^n$, подчиненным условию

$$0 < M(\mathbf{x}') \leqslant M(\mathbf{x}).$$

В одномерном случае, когда $n = m = 1$, функция принимает вид

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leqslant q \leqslant t} ||q\alpha||.$$

Используя аппарат цепных дробей, можно полностью ответить на вопрос о поведении функции $\psi_\alpha(t)$. Выпишем основные определения и формулы с цепными дробями, см. [12].

Если рассмотреть разложение числа α в обыкновенную цепную дробь

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_\nu + \cdots}}},$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_\nu \in \mathbb{N}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ (конечную или бесконечную, в зависимости от того, является ли α рациональным числом или нет), то подходящими дробями к α называются рациональные дроби вида

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = [a_0;, a_1, a_2, \dots, a_\nu] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_\nu}}}.$$

Подходящие дроби для α будут являться наилучшими приближениями к числу α, см. [12].

Если $\alpha \neq \frac{p_\nu}{q_\nu}$ (в частности, если α есть число иррациональное), то для его приближения подходящей дробью имеет место неравенство

$$\frac{1}{q_\nu(q_\nu + q_{\nu+1})} < \left|\alpha - \frac{p_\nu}{q_\nu}\right| < \frac{1}{q_\nu q_{\nu+1}}. \tag{1}$$

В частности,

$$\|q_\nu \alpha\| > \frac{1}{2q_{\nu+1}}.$$

Более того для разности (1) имеется точное равенство

$$\left|\alpha - \frac{p_\nu}{q_\nu}\right| = \frac{1}{q_\nu^2(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)}, \tag{2}$$

где

$$\alpha_{\nu+1} = [a_{\nu+1}; a_{\nu+2}, ...], \quad \alpha_\nu^* = [0; a_\nu, a_{\nu-1}, ..., a_1] = \frac{q_{\nu-1}}{q_\nu}.$$

Перейдем к функции $\psi_\alpha(t)$. При $q_\nu \leqslant t < q_{\nu+1}$ будет иметь место равенство

$$\psi_\alpha(t) = ||q_\nu \alpha|| = |q_\nu \alpha - p_\nu|. \tag{3}$$

Применив формулу (2), получим формулу для погрешности приближения числа α его подходящей дробью $\frac{p_n}{q_n}$, которая имеет вид

$$||q_\nu \alpha|| = \frac{1}{q_\nu(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)} \tag{4}$$

или

$$q_\nu ||q_\nu \alpha|| = \frac{1}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*}. \tag{5}$$

В терминах функции меры иррациональности можно дать определение *спектра Лагранжа*

$$\mathbb{L} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \ \exists \alpha \ \ \liminf_{t \to +\infty} t\psi_\alpha(t) = \lambda\}$$

и *спектра Дирихле*

$$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{R}: \ \ \exists \alpha \ \ \limsup_{t\to+\infty} t\psi_\alpha(t) = \lambda\}.$$

Используя формулу (3), определения спектра Лагранжа и спектра Дирихле можно записать по другому

$$\mathbb{L} = \{\lambda \in \mathbb{R}: \ \ \exists \alpha \ \ \liminf_{n\to+\infty} q_n\|q_n\alpha\| = \lambda\}$$

и

$$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{R}: \ \ \exists \alpha \ \ \limsup_{n\to+\infty} q_{n+1}\|q_n\alpha\| = \lambda\}.$$

Подробнее о спектре Лагранжа можно прочитать в книге [18] и в статье [8].

Результаты о спектре Лагранжа в одномерном случае получены при помощи теории цепных дробей с применением формулы (2), а для исследования спектра Дирихле можно использовать похожее равенство, см. [20]

$$q_{\nu+1}\|q_\nu\alpha\| = \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha_{\nu+2}\alpha^{**}_{\nu+1}}}.$$

Подробнее о спектре Дирихле можно прочесть в работе [4].

Информацию о спектрах Лагранжа и Дирихле в бо́льших размерностях можно найти в статьях [1] и [16].

Также многомерная функция меры иррациональности использовалась в работах В. Ярника, А.Я Хинчина, которые посвящены изучению сингулярных систем и диофантовых экспонент.

Сингулярные вектора и матрицы нам понадобятся для описания результатов, связанных с отсутствием феномена осциляции в многомерных случаях. Дадим несколько определений сингулярности. Сначала сформулируем определение в том виде, в каком его давал А.Я. Хинчин, см. [11].

Определение 2. Матрица Θ представляет собой *сингулярную систему*, если при любом вещественном $t > 0$ найдется некоторое $t_0 = t_0(\varepsilon)$ такое, что при всяком $t > t_0$ система диофантовых неравенств

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m}\|L_j(\mathbf{x})\| \leqslant \frac{1}{t}, \ \ 0 < \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| < \varepsilon t^{n/m}$$

имеет целочисленное решение $x \in \mathbb{Z}^n$.

Матрицу Θ, не являющуюся сингулярной, А.Я. Хинчин называл регулярной (он использовал терминологию регулярная система чисел Θ^i_j).

Дадим еще одно определение сингулярности, см. [9].

Определение 3. Пусть непрерывная функция $\psi(t)$ монотонно убывает к нулю и $\psi(t) = o(t^{-n/m})$ при $t \to +\infty$. Матрицу Θ (или набор nm вещественных чисел) мы будем называть *ψ-сингулярным*, если при всяком достаточно большом t система диофантовых неравенств

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|L_j(\mathbf{x})\| \leqslant \psi(t), \quad 0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| < t$$

имеет целочисленное решение $x \in \mathbb{Z}^n$.

Эти определения можно дать терминах функции меры иррациональности.

Определение 4. Матрица Θ называется невырожденной, если функция $\psi_\Theta(t)$ никогда не обращается в нуль при $t \geqslant 1$.

Определение 5. Пусть непрерывная функция $\psi(t)$ монотонно убывает к нулю при $t \to +\infty$ и $\psi(t) = o(t^{-n/m})$. Невырожденная матрица Θ является ψ–сингулярной, если при всех достаточно больших значениях t для функции меры иррациональности выполнено

$$\psi_\Theta(t) \leqslant \psi(t).$$

При $n = m = 1$ сингулярными системами в смысле определения 5 являются только рациональные числа, см. [9]. Впервые существование сингулярных систем было доказано А.Я. Хинчиным в 1926 г. при $n = 2$, $m = 1$ и при $n = 1$, $m = 2$ в работе [29]. Он доказал следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\psi(t)$ – положительная, непрерывная и убывающая к нулю при $t \to +\infty$ функция вещественного переменного t. Тогда существуют два линейно независимых вместе с единицей над $\mathbb{Z}$ вещественных числа α и β такие, что для всех достаточно больших t система диофан-*

товых неравенств

$$\|x_1\alpha + x_2\beta\| \leqslant \psi(t), \;\; 0 < \max_{j=1,2} |x_j| < t$$

имеет целочисленное решение $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Теорема 2. *Пусть* $\psi(t)$ *– положительная, непрерывная и убывающая к нулю при* $t \to +\infty$ *функция вещественного переменного* t *и при этом функция* $t\psi(t)$ *монотонно возрастает к бесконечности при* $t \to +\infty$. *Тогда существуют два линейно независимых вместе с единицей над* $\mathbb{Z}$ *вещественных числа* α *и* β *такие, что для всех достаточно больших* t *система диофантовых неравенств*

$$\max(\|x\alpha\|, \|x\beta\|) \leqslant \psi(t), \;\; 1 \leqslant x \leqslant t$$

разрешима в целых числах x.

С помощью функции $\psi_\Theta(t)$ удобно определять многомерный спектр Дирихле:

$$\mathbb{D}_{m\times n} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} | \exists \Theta : \limsup_{t\to\infty} t \cdot \psi_\Theta^{m/n}(t) = \lambda \right\}.$$

Наиболее прост для анализа спектр Дирихле, связанный с евклидовой нормой. В случае совместных приближений к двум вещественным числам функция меры иррациональности с евклидовой нормой определяется следующим образом

$$\psi_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}(t) = \min_{1\leqslant x \leqslant t, x\in\mathbb{Z}} \sqrt{\|x\alpha\|^2 + \|x\beta\|^2}.$$

В этом случае спектр Дирихле определяется так:

$$\mathbb{D}_{2\times 1} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} | \; \exists (\alpha, \beta) \in [0;1)^2 : \limsup_{t\to\infty} t \cdot \psi_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}(t) = \lambda \right\}.$$

Отметим, что структуры спектра $\mathbb{D}_{2\times 1}$ полностью описана в работе Р.К. Ахунжанова и Д.О. Шацкова [16]. Оказывается, что $\mathbb{D}_{2\times 1} = \left[0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$.

Первый вопрос, который исследуется в данной диссертации это изучение знака разности $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$ при $t \to +\infty$.

В одномерном случае Н.Г. Мощевитин и И.Д. Кан в совместной работе [27] доказали следующий результат.

Теорема 3. *Для двух вещественных чисел α и β, таких что $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$ разность*

$$\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$$

бесконечно много раз меняет знак при $t \to +\infty$.

Результат теоремы 3 не может быть перенесен на случай бóльших размерностей, это следует из теорем 1 и 2.

Возьмем в теореме 1 функцию $\psi(t) = o(t^{-2})$, $t \to \infty$. Пусть α, β – те числа, существование которых утверждает теорема 1. Возьмем другие числа α_1, β_1 - плохо приближаемые (в смысле линейной формы):

$$\inf_{(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \left(\|x_1\alpha_1 + x_2\beta_1\|(\max\{|x_1|,|x_2|\})^2\right) > 0.$$

При достаточно больших t выполняется неравенство

$$\psi_{(\alpha,\beta)}(t) < \psi_{(\alpha_1,\beta_1)}(t),$$

что обеспечивает отсутствие осцилляции.

Ситуация для совместных приближений аналогична. Надо взять в теореме 2 функцию $\psi_1(t) = o(t^{-1/2})$, $t \to +\infty$, числа α, β из теоремы 2, а также совместно плохо приближаемые числа α_1, β_1:

$$\inf_{x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\max\{\|x\alpha_1\|,\|x\beta_1\|\}\cdot|x|^{1/2}\right) > 0.$$

Тогда

$$\psi_{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}}(t) < \psi_{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}}(t)$$

для всех достаточно больших t.

В остальных случаях отсутствие осцилляции в общем виде для всех матриц получается из следующей теоремы, см. [26].

Теорема 4. *Пусть n – произвольное натуральное число, m – натуральное число, не меньшее, чем 2. Предположим также, что $\psi(t)$ – положительная, непрерывная и убывающая к нулю при $t \to +\infty$ функция вещественного переменного t. Рассмотрим множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{mn}$, состоящее из матриц Θ таких, что*

- *числа θ_j^i с $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Z}$;*
- *матрица Θ является ψ - сингулярной.*

Тогда для любого открытого множества $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{mn}$ пересечение $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}$ имеет мощность континуума.

Итак, в размерности n и m отличных от 1 общих результатов об осцилляции быть не может. Тем не менее можно получить результаты метрического характера.

Во второй главе мы изучим интеграл $I_\alpha(t)$ от функции меры иррациональности в одномерном случае

$$I_\alpha(t) = \int\limits_1^t \psi_\alpha(\xi) d\xi.$$

0.3. Основные результаты диссертации

В **первой главе** мы докажем следующий результат.

Теорема I. *Пусть $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geqslant 2$ и $n = 1$, тогда для почти всех (в смысле меры Лебега) матриц Θ и Θ' размера $m \times n$ разность*

$$\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$$

осциллирует бесконечное число раз при $t \to +\infty$.

Во **второй главе** мы докажем асимптотические равенства для интеграла $I_\alpha(t)$ при $t \to +\infty$. Поскольку $0 < t\psi_\alpha(t) < 1$ для любого $t \geqslant 1$, то сразу видим, что $I_\alpha(t) < \ln t$.

Перечислим основные результаты II главы.

Через $N = N(\alpha, t)$ мы обозначим величину, задаваемую условием

$$q_N \leqslant t < q_{N+1},$$

т.е. количество знаменателей подходящих дробей для числа α на отрезке $[1; t]$.

Ясно, что $N \to \infty$ при $t \to \infty$.

Теорема II. *Для почти всех* (*в смысле меры Лебега*) *чисел* α *выполняются равенства*

$$1)\ \lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = \frac{1}{2},$$

$$2)\ \lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \frac{6 \ln 2}{\pi^2}.$$

Помимо метрического результата, мы докажем утверждение об экстремальных значениях величины $\frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)}$ при $t \to +\infty$.

Теорема III. *Для любого иррационального* $\alpha \in (0; 1)$ *выполнены неравенства*

$$1)\ \limsup_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} \leqslant 1,$$

$$2)\ \liminf_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Близкий метрический результат имеется в работе И.Д. Кана, Н.Г. Мощевитина и Д. Чайка [28].

Оценки, приводимые в теореме III точны. Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема IV. *Для любого* $d \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}; 1\right]$ *существует* α*, такое что*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = d.$$

Для золотого сечения $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ значение предела можно непосредственно вычислить. Получается

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\tau(t)}{\ln t} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) : \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

По теореме II п.2 можно выбрать число β, алгебраически независимое с τ, такое, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\beta(t)}{\ln t} = \frac{6\ln 2}{\pi^2},$$

и следовательно разность $I_\tau(t) - I_\beta(t)$ стремится к бесконечности при $t \to +\infty$. Таким образом, аналог теоремы 3 об осцилляции разности $\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$ для разности интегралов $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$ не имеет места. В настоящей работе мы докажем следующий результат для рассматриваемых нами интегралов.

Теорема V. *Пусть $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ и $r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots$ – суть знаменатели подходящих дробей для α и β соответственно. Тогда для почти всех (в смысле меры Лебега) пар $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$ верно неравенство*

$$\liminf_{n\to\infty} |I_\alpha(q_n) - I_\beta(r_n)| < +\infty.$$

Глава 1

Осцилляция функции меры иррациональности в случаях $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geqslant 2$ и $n = 1$

Эта глава посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема I. *Пусть $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geqslant 2$ и $n = 1$, тогда для почти всех (в смысле меры Лебега) матриц Θ и Θ' размера $m \times n$ разность*

$$\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t)$$

осциллирует бесконечное число раз при $t \to +\infty$.

В обоих случаях, $m = 1$ и $n = 2$ или $m \geqslant 2$ и $n = 1$, для доказательства мы построим две последовательности множеств $\{\underline{M_k}\}$ и $\{\overline{M}_k\}$. Для каждого случая, определения этих множеств записываются похожим образом с учетом размерности. После мы воспользуемся леммами 1.3, 1.4, 1.5, 1.14, 1.15 и 1.16 и покажем, что в каждом случае последовательности $\{\underline{M_k}\}$ и $\{\overline{M}_k\}$, а также последовательности $\{\underline{M_k} \times \overline{M}_k\}$ и $\{\overline{M}_k \times \underline{M_k}\}$ являются последовательностями Бореля-Кантелли. Здесь и далее $\times$ – обозначает декартово (прямое) произведение множеств. Определение последовательности типа Бореля – Кантелли будет дано в пункте 1.3.

В этой главе будем использовать параметры:

- $0 < \lambda < \lambda_0$, (λ_0 эффективно вычисляется из лемм 1.3, 1.4, 1.5, 1.13 и 1.14);
- $0 < \varepsilon < 1$, (ε эффективно вычисляется из лемм 1.3, 1.14, 1.5, 1.12 и 1.14);
- $0 < \delta < 1$, (δ эффективно вычисляется из леммы 1.14);
- $k > K_0 = K_0(\lambda)$, (K_0 эффективно вычисляется из лемм 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.8, 1.9, 1.11, 1.13, 1.14 и 1.15).

1.1. Изучение функции $\psi_\Theta(t)$ в случае $m = 1$ и $n = 2$.

В случае $m = 1$ и $n = 2$ функция $\psi_\Theta(t)$ имеет вид

$$\psi_{(\alpha\ \beta)}(t) = \min_{1 \leqslant \max(|x_1|,|x_2|) \leqslant t} \|x_1\alpha + x_2\beta\|.$$

На квадрате $[0;1]^2$ рассмотрим два множества:

$$\underline{M_k} = \left\{ (\alpha,\beta) \in [0;1]^2 : \psi_{(\alpha\ \beta)}(k) > \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} =$$

$$= \left\{ (\alpha,\beta) \in [0;1]^2 : \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2\ 1 \leqslant \max(|x_1|,|x_2|) \leqslant k\ \|x_1\alpha + x_2\beta\| > \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} =$$

$$= \Big\{ (\alpha,\beta) \in [0;1]^2 : \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2\ 1 \leqslant \max(|x_1|,|x_2|) \leqslant k$$

$$\forall q \in \mathbb{Z}\ \ |x_1\alpha + x_2\beta - q| > \frac{\varepsilon}{k^2} \Big\};$$

$$\overline{M}_k = \left\{ (\alpha,\beta) \in [0;1]^2 : \psi_{(\alpha\ \beta)}(k) \leqslant \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} =$$

$$= \left\{ (\alpha,\beta) \in [0;1]^2 : \exists (x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2\ \ 1 \leqslant \max(|x_1|,|x_2|) \leqslant k\ \ \|x_1\alpha + x_2\beta\| \leqslant \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} =$$

$$= \Big\{ (\alpha,\beta) \in [0;1]^2 : \exists (x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2\ \ 1 \leqslant \max(|x_1|,|x_2|) \leqslant k$$

$$\exists q \in \mathbb{Z}\ \ |x_1\alpha + x_2\beta - q| \leqslant \frac{\varepsilon}{k^2} \Big\}.$$

Верно равенство

$$\mu(\underline{M_k}) = 1 - \mu(\overline{M}_k), \tag{1.1}$$

где $\mu(\cdot)$ - мера Лебега.

Рассмотрим плоскость $O\alpha\beta$. Для любых целых чисел x_1, x_2 и q зададим множество

$$A(x_1,x_2,q) = \left\{ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : |x_1\alpha + x_2\beta - q| \leqslant \frac{\varepsilon}{k^2} \right\}.$$

Обозначим

$$A(x_1,x_2) = \left\{ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \exists q \in \mathbb{Z}\, |x_1\alpha + x_2\beta - q| \leqslant \frac{\varepsilon}{k^2} \right\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} A(x_1,x_2,q).$$

Выпишем свойства множества $A(x_1,x_2)$:

$$A(x_1,x_2) + \left(\frac{1}{x_1}\mathbb{Z}\right) \times \left(\frac{1}{x_2}\mathbb{Z}\right) = A(x_1,x_2);$$

$$A(x_1,x_2)=A(-x_1,-x_2);$$
$$\mu\left(A(x_1,x_2)\cap[0;1]^2\right)=\frac{2\varepsilon}{k^2}.$$

Для любых двух линейно независимых пар (x_1,x_2) и (y_1,y_2) и любых q_1 и q_2 пересечением множеств $A(x_1,x_2,q_1)$ и $A(y_1,y_2,q_2)$ будет параллелограмм с площадью

$$\mu\left(A(x_1,x_2,q_1)\cap A(y_1,y_2,q_2)\right)=\frac{1}{\left|\det\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\right|}\frac{4\varepsilon^2}{k^4}. \tag{1.2}$$

Замечание 1. Диаметр этого параллелограмма не более $\frac{4\varepsilon}{k}$.

Обозначим через Λ - решетку, построенную на векторах $\left(\frac{y_2}{\Delta},\frac{-x_2}{\Delta}\right)$ и $\left(\frac{-y_1}{\Delta},\frac{x_1}{\Delta}\right)$.

Замечание 2. Центры параллелограммов, получаемых при переборе всевозможных целочисленных значений q_1, q_2 лежат в узлах решетки Λ.

Верно равенство

$$\overline{M}_k=\bigcup_{\substack{(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2\\ 1\leqslant\max(|x_1|,|x_2|)\leqslant k}}\left(A(x_1,x_2)\cap[0;1]^2\right). \tag{1.3}$$

Для удобства здесь и далее в работе через S будем обозначать параллелепипеды, соответствующей размерности, со сторонами параллельными координатным гиперплоскостям.

Для дальнейшего доказательства нам понадобится неравенство Ярника.

Теорема Ярника. *Пусть G — выпуклая область на плоскости, N — число целых точек в области G, P — площадь области G, L — периметр области G, $L\geqslant 1$, тогда выполнены неравенства*

$$P-L<N<L+P.$$

Лемма 1.1. *Пусть S — квадрат со стороной λ, $\Delta=\left|\det\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\right|$, $\Delta\neq 0$, $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{Z}$ и $x_1,x_2,y_1,y_2>\frac{1}{\lambda}$, N - число точек решетки Λ в* *квадрате S, тогда выполняется неравенство*

$$N < \lambda^2\Delta + 2\lambda\sqrt{x_1^2+y_1^2} + 2\lambda\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

Доказательство. Подействуем на решетку Λ справа линейным преобразованием $T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, которое переводит решетку Λ в ортонормированную решетку $\mathbb{Z}^2$. Квадрат S при этом преобразовании перейдет в параллелограмм с площадью $\lambda^2\Delta$, длины сторон этого параллелограмма будут равны $\lambda\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ и $\lambda\sqrt{x_2^2+y_2^2}$. Применим теорему Ярника и получим неравенство.

Лемма 1.1 доказана.

Обозначим $E_k = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 : (x_1, x_2) = 1, \frac{k}{2} \leqslant x_1, x_2 \leqslant k\right\}$.

Лемма 1.2. *Пусть* $\Delta = \left|\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\right|$, *тогда выполняется неравенство*

$$\sum_{\substack{(x_1,\, x_2)\in E_k \\ (y_1,\, y_2)\in E_k \\ (x_1, x_2)\neq(y_1, y_2)}} \frac{1}{\Delta} \leqslant 9k^2\ln k.$$

Доказательство. Рассмотрим плоскость Oy_1y_2. Для точки $(x_1, x_2){\in}E_k$ построим семейство прямых $x_1y_2 - x_2y_1 = q$, где $q{\in}\mathbb{Z}$. Уравнение прямой из этого семейства можно переписать в таком виде $\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = q$. Все точки решетки $\mathbb{Z}^2$ лежат на этих прямых. Расстояние между соседними прямыми из этого семейства равно $\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$. Расстояние между соседними целыми точками на каждой прямой из этого семейства равно $\sqrt{x_1^2+x_2^2} \geqslant \frac{k}{\sqrt{2}}$. На каждой прямой будет не более 2 точек $(y_1, y_2){\in}E_k$. Так как мы рассматриваем пары $(x_1, x_2){\in}E_k$ и $(y_1, y_2){\in}E_k$, то $\Delta \leqslant k^2$. Оценим интересующую нас сумму

$$\sum_{\substack{(x_1, x_2)\in E_k \\ (y_1, y_2)\in E_k \\ (x_1, x_2)\neq(y_1, y_2)}} \frac{1}{\Delta} = \sum_{(x_1,\, x_2)\in E_k} \sum_{n=1}^{k^2} \sum_{\substack{\Delta=n \\ (y_1, y_2)\in E_k}} \frac{1}{\Delta} \leqslant \sum_{(x_1,\, x_2)\in E_k} \sum_{n=1}^{k^2} \frac{4}{n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(x_1,\, x_2)\in E_k} (4 + 8\ln k) \leqslant 9k^2\ln k.$$

Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. *Для любого квадрата S со стороной λ, верны неравенства*

$$\lambda^2\left(\frac{\varepsilon}{3\zeta(2)}-37\frac{\varepsilon^2}{\zeta^2(2)}\right)\leqslant\mu(\overline{M}_k\cap S)\leqslant 5\varepsilon\lambda^2.$$

Доказательство. Через $S(x_1,x_2,k_1,k_2)$ прямоугольник со сторонами $\frac{k_1}{x_1}$ и $\frac{k_2}{x_2}$, где $x_1,x_2,k_1,k_2\in\mathbb{N}_0$. В случае $x_1=0$ или $x_2=0$ под S понимается бесконечная полоса параллельная оси $O\alpha$ или оси $O\beta$ соответственно.

Для любого квадрата S и любой пары чисел (x_1,x_2), если положить $k_1=[\lambda x_1]$ и $k_2=[\lambda x_2]$, то можно указать два прямоугольника, центры которых совпадают с центром квадрата S и выполняется условие $S(x_1,x_2,k_1,k_2)\subset S\subset S(x_1,x_2,k_1+1,k_2+1)$.

Запишем ограничение снизу на меру пересечения $\overline{M}_k$ и S

$$\mu\left(\overline{M}_k\cap S\right)\geqslant\sum_{(x_1,\,x_2)\in E_k}\mu(A(x_1,x_2)\cap S)-\sum_{\substack{(x_1,\,x_2)\in E_k\\(y_1,\,y_2)\in E_k\\(x_1,x_2)\neq(y_1,y_2)}}\mu(A(x_1,x_2)\cap A(y_1,y_2)\cap S).\tag{1.4}$$

Для доказательства это неравенства воспользуемся формулой (1.3) и формулой включения-исключения

$$\mu\left(\overline{M}_k\cap S\right)=\mu\left(\bigcup_{\substack{(x_1,\,x_2)\in\mathbb{Z}^2\\1\leqslant\max(|x_1|,|x_2|)\leqslant k}}(A(x_1,x_2)\cap S)\right)\geqslant\mu\left(\bigcup_{(x_1,\,x_2)\in E_k}(A(x_1,x_2)\cap S)\right)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{(x_1,\,x_2)\in E_k}\mu(A(x_1,x_2)\cap S)-\sum_{\substack{(x_1,\,x_2)\in E_k\\(y_1,\,y_2)\in E_k\\(x_1,x_2)\neq(y_1,y_2)}}\mu(A(x_1,x_2)\cap A(y_1,y_2)\cap S).$$

Применив свойства множества $A(x_1,x_2)$, можно показать, что выполняются равенства

$$\mu(A(x_1,x_2)\cap S(x_1,x_2,k_1,k_2)) = \begin{cases} \frac{2\varepsilon}{k^2}\frac{k_1k_2}{x_1x_2}, & x_1,x_2\neq 0;\\ \frac{2\varepsilon}{k^2}\frac{k_2}{x_2}, & x_1=0, x_2\neq 0;\\ \frac{2\varepsilon}{k^2}\frac{k_1}{x_1}, & x_2=0, x_1\neq 0.\end{cases}$$

Оценим снизу первую сумму из неравенства (1.4).

$$\sum_{(x_1,\,x_2)\in E_k}\mu(A(x_1,x_2)\cap S)\geqslant\sum_{(x_1,\,x_2)\in E_k}\mu(A(x_1,x_2)\cap S(x_1,x_2,k_1,k_2)) =$$

$$=\frac{2\varepsilon}{k^2}\sum_{(x_1,\,x_2)\in E_k}\frac{k_1k_2}{x_1x_2}\geqslant\frac{2\varepsilon}{k^2}\sum_{(x_1,\,x_2)\in E_k}\frac{(\lambda x_1-1)(\lambda x_2-1)}{x_1x_2} =$$

$$=\frac{2\varepsilon}{k^2}\sum_{(x_1,\,x_2)\in E_k}\left(\lambda^2-\frac{\lambda}{x_1}-\frac{\lambda}{x_2}+\frac{1}{x_1x_2}\right)=\frac{2\varepsilon}{k^2}\left(\lambda^2\frac{k^2}{4\zeta(2)}+O(k\ln k)\right)=$$

$$=\frac{\lambda^2\varepsilon}{2\zeta(2)}+O\left(\frac{\ln k}{k}\right)\geqslant\frac{\lambda^2\varepsilon}{3\zeta(2)}.$$

Оценим сверху меру множества $A(x_1,x_2)\cap A(y_1,y_2)\cap S$. Квадрат S и параллелограмм могут пересекаться, если расстояние между их центрами меньше, чем $\frac{\lambda}{\sqrt{2}}+\frac{2\varepsilon}{k}\leqslant\lambda$. Если взять квадрат $3S$, у которого центр совпадает с центром квадрата S и сторона равна 3λ, то центры тех параллелограммов, которые задевают квадрат S будут лежать внутри квадрата $3S$. По лемме 1.1 будет

$$\#(3S\cap\Lambda)\leqslant 9\lambda^2\Delta+6\lambda\sqrt{x_1^2+y_1^2}+6\lambda\sqrt{x_2^2+y_2^2},$$

где $\Delta=\left|\det\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\right|.$

Символ $\#(\cdot)$, здесь и далее, обозначает количество элементов в множестве.

Для ограничения сверху второй суммы из неравенства (1.4) воспользуемся формулой (1.2) и леммой 1.2

$$\sum_{\substack{(x_1,x_2)\in E_k\\(y_1,y_2)\in E_k\\(x_1,x_2)\neq(y_1,y_2)}}\mu(A(x_1,x_2)\cap A(y_1,y_2)\cap S)\leqslant\sum_{\substack{(x_1,x_2)\in E_k\\(y_1,y_2)\in E_k\\(x_1,x_2)\neq(y_1,y_2)}}\#(3S\cap\Lambda)\frac{4\varepsilon^2}{\Delta k^4}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{(x_1,x_2)\in E_k\\(y_1,y_2)\in E_k\\(x_1,x_2)\neq(y_1,y_2)}} \left(9\lambda^2\Delta + 6\lambda\sqrt{x_1^2+y_1^2} + 6\lambda\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)\frac{4\varepsilon^2}{\Delta k^4} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{12\varepsilon^2}{k^4}\sum_{\substack{(x_1,x_2)\in E_k\\(y_1,y_2)\in E_k\\(x_1,x_2)\neq(y_1,y_2)}} \left(3\lambda^2 + \lambda\frac{2\sqrt{2}k}{\Delta} + \lambda\frac{2\sqrt{2}k}{\Delta}\right) = \frac{36\lambda^2\varepsilon^2}{k^4}\sum_{\substack{(x_1,x_2)\in E_k\\(y_1,y_2)\in E_k\\(x_1,x_2)\neq(y_1,y_2)}} 1+$$

$$+\frac{48\sqrt{2}\lambda\varepsilon^2}{k^3}\sum_{\substack{(x_1,x_2)\in E_k\\(y_1,y_2)\in E_k\\(x_1,x_2)\neq(y_1,y_2)}}\frac{1}{\Delta} \leqslant \frac{36\lambda^2\varepsilon^2}{k^4}\sum_{\substack{(x_1,x_2)\in E_k\\(y_1,y_2)\in E_k}} 1 + \frac{432\sqrt{2}\lambda\varepsilon^2\ln k}{k} \leqslant \frac{37\lambda^2\varepsilon^2}{\zeta^2(2)}.$$

Ограничение снизу для $\mu(\overline{M}_k\cap S)$ доказано.

Обозначим

$$E_k^* = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2 : 1\leqslant x_1\leqslant k, 1\leqslant|x_2|\leqslant k\}$$

и

$$S^* = S(x_1, x_2, k_1+1, k_2+1).$$

Воспользуемся формулой (1.3), свойством $A(x_1,x_2)=A(-x_1,-x_2)$ и получим ограничение сверху на $\mu(\overline{M}_k\cap S)$

$$\mu(\overline{M}_k\cap S) = \mu\left(\bigcup_{\substack{(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2\\1\leqslant\max(|x_1|,|x_2|)\leqslant k}}(A(x_1,x_2)\cap S)\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{\substack{x_1=0\\1\leqslant x_2\leqslant k}}(A(x_1,x_2)\cap S)\right) +$$

$$+\mu\left(\bigcup_{\substack{x_2=0\\1\leqslant x_1\leqslant k}}(A(x_1,x_2)\cap S)\right) + \mu\left(\bigcup_{(x_1,x_2)\in E_k^*}(A(x_1,x_2)\cap S)\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{\substack{x_1=0\\1\leqslant x_2\leqslant k}}\mu\left(A(x_1,x_2)\cap S^*\right) + \sum_{(x_1,x_2)\in E_k^*}\mu\left(A(x_1,x_2)\cap S^*\right) = \frac{4\varepsilon}{k^2}\sum_{x_2=1}^{k}\frac{k_2+1}{x_2} +$$

$$+\frac{2\varepsilon}{k^2}\sum_{(x_1,x_2)\in E_k^*}\frac{(k_1+1)(k_2+1)}{x_1x_2} \leqslant \frac{4\varepsilon}{k^2}\sum_{x_2=1}^{k}\frac{\lambda x_2+1}{x_2} +$$

$$+\frac{2\varepsilon}{k^2}\sum_{(x_1,\,x_2)\in E_k^*}\frac{(\lambda x_1+1)(\lambda x_2+1)}{x_1x_2}=$$

$$=\frac{4\varepsilon}{k^2}\sum_{x_2=1}^{k}\left(\lambda+\frac{1}{x_2}\right)+\frac{2\varepsilon}{k^2}\sum_{(x_1,\,x_2)\in E_k^*}\left(\lambda^2+\frac{\lambda}{x_1}+\frac{\lambda}{x_2}+\frac{1}{x_1x_2}\right)=$$

$$=\frac{2\varepsilon}{k^2}\left(2\lambda^2k^2+O(k\ln k)\right)=4\varepsilon\lambda^2+O\left(\frac{\ln k}{k}\right)\leqslant 5\varepsilon\lambda^2.$$

Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. *Для любого квадрата S со стороной λ верно неравенство*

$$\lambda^2-5\lambda^2\varepsilon\leqslant\mu(S\cap\underline{M_k}).$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (1.1) и леммой 1.3

$$\mu(S\cap\underline{M_k})=\mu(S)-\mu(S\cap\overline{M}_k)\geqslant\lambda^2-5\varepsilon\lambda^2.$$

Лемма 1.4 доказана.

1.2. Изучение функции $\psi_\Theta(t)$ в случае $m\geqslant 2$ и $n=1$.

В этом случае функция $\psi_\Theta(t)$ имеет вид

$$\psi_{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}}(t)=\min_{1\leqslant x\leqslant t}\max_{j=1,\ldots,m}\|x\alpha_j\|.$$

В этом определении обозначим $\mathbf{p}_m=(p_1,\ldots,p_m)\in\mathbb{Z}^m$. На кубе $[0;1]^m$ рассмотрим два множества:

$$\underline{M_k}=\left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in[0;1]^m:\psi_{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}}(k)>\frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}\right\}=$$

$$=\left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in[0;1]^m:\forall q\in[1;k]\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\|\alpha_iq\|\}>\frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}\right\}=$$

$$= \left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in[0;1]^m : \forall q\in[1;k]\ \exists \mathbf{p}_m \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|\alpha_i q - p_i|\} > \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}\right\} =$$

$$= \left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in[0;1]^m : \forall q\in[1;k]\ \exists \mathbf{p}_m \max_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right|\right\} > \frac{\varepsilon}{q\sqrt[m]{k}}\right\};$$

$$\overline{M}_k = \left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in[0;1]^m : \psi_{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}}(k) \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}\right\} =$$

$$= \left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in[0;1]^m : \exists q\in[1;k] \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\|\alpha_i q\|\} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}\right\} =$$

$$= \left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in[0;1]^m : \exists q\in[1;k]\ \forall \mathbf{p}_m \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|\alpha_i q - p_i|\} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}\right\} =$$

$$= \left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in[0;1]^m : \exists q\in[1;k]\ \forall \mathbf{p}_m \max_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right|\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{q\sqrt[m]{k}}\right\}.$$

Верно равенство

$$\mu(\underline{M_k}) = 1 - \mu(\overline{M}_k). \tag{1.5}$$

Для числа q определим множество $A(q)$, как объединение кубов с центрами в точках $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_m}{q}\right)$ при $p_i = 0, 1, \ldots, q$ и со стороной $\frac{2\varepsilon}{q\sqrt[m]{k}}$.

Верно равенство

$$\overline{M}_k = \bigcup_{q=1}^{k} \left(A(q)\cap[0,1]^m\right). \tag{1.6}$$

Символ $\lceil\cdot\rceil$ обозначает целую часть сверху.

Лемма 1.5. *Для любого куба S со стороной λ выполняется неравенство*

$$\lambda^m - 2(4\lambda\varepsilon)^m \leqslant \mu(S\cap\underline{M_k}).$$

Доказательство. Проекция множества $A(q)$ на каждую координатную ось это объединение отрезков вида $\left[\frac{p}{q} - \frac{\varepsilon}{q\sqrt[m]{k}}, \frac{p}{q} + \frac{\varepsilon}{q\sqrt[m]{k}}\right]$ при $p = 0, 1, \ldots, q$. Очевидно отрезок длины λ заденет не более $\left\lceil\left(\lambda + \frac{2\varepsilon}{q\sqrt[m]{k}}\right) : \frac{1}{q}\right\rceil \leqslant \left(\lambda + \frac{2\varepsilon}{q\sqrt[m]{k}}\right) q + 1 \leqslant \lambda q + 2$ отрезков из проекции множества $A(q)$ по каждой оси. Получаем неравенство

$$\mu(S\cap A(q)) \leqslant (\lambda q + 2)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{kq^m}.$$

Применим формулу (1.6) и найдем ограничение сверху на меру пересечения

$$\mu(S\cap\overline{M}_k)=\mu\left(\bigcup_{q=1}^{k}(S\cap A(q))\right)\leqslant\sum_{q=1}^{k}\mu(S\cap A(q))\leqslant\sum_{q=1}^{k}(\lambda q+2)^m\frac{(2\varepsilon)^m}{kq^m}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{q=1}^{k}\left((2\lambda q)^m+4^m\right)\frac{(2\varepsilon)^m}{kq^m}=\frac{(4\lambda\varepsilon)^m}{k}\sum_{q=1}^{k}1+\frac{8^m\varepsilon^m}{k}\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{q^m}\leqslant$$

$$\leqslant(4\lambda\varepsilon)^m+\frac{8^m\varepsilon^m}{k}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^2}\leqslant 2(4\lambda\varepsilon)^m.$$

Применим полученное неравенство и формулу (1.5)

$$\mu(S\cap\underline{M_k})=\mu(S)-\mu(S\cap\overline{M}_k)\geqslant\lambda^m-2(4\lambda\varepsilon)^m.$$

Лемма 1.5 доказана.

Лемма 1.6. *Для* $m\geqslant 2$ *верно неравенство*

$$\sum_{\lceil k/2\rceil\leqslant q_1<q_2\leqslant k}\frac{(q_1,q_2)^m}{q_2^m}\leqslant\frac{2k}{5}.$$

Доказательство. Пусть $(q_1,q_2)=d$, $q_1=dl$ $\left(l\geqslant\left\lceil\frac{k}{2d}\right\rceil\right)$ и $q_2=dp$ $\left(p\geqslant l+1\geqslant\left\lceil\frac{k}{2d}\right\rceil+1\right)$ с условием $(l,p)=1$, тогда

$$\sum_{\lceil k/2\rceil\leqslant q_1<q_2\leqslant k}\frac{(q_1,q_2)^m}{q_2^m}=\sum_{q_2=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil+1}^{k}\ \sum_{q_1=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}^{q_2-1}\frac{(q_1,q_2)^m}{q_2^m}=\sum_{d=1}^{[k/2]}\ \sum_{p=\left\lceil\frac{k}{2d}\right\rceil+1}^{[k/d]}\ \sum_{\substack{l=\left\lceil\frac{k}{2d}\right\rceil\\(l,p)=1}}^{p-1}\frac{1}{p^m}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{d=1}^{[k/2]}\ \sum_{p=\left\lceil\frac{k}{2d}\right\rceil+1}^{[k/d]}\ \sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p-1}\frac{1}{p^m}=\sum_{d=1}^{[k/2]}\ \sum_{p=\left\lceil\frac{k}{2d}\right\rceil+1}^{[k/d]}\frac{\varphi(p)}{p^m}\leqslant\sum_{p=2}^{k}\sum_{d=1}^{[k/p]}\frac{\varphi(p)}{p^m}=$$

$$=\sum_{p=2}^{k}\left[\frac{k}{p}\right]\frac{\varphi(p)}{p^m}\leqslant k\sum_{p=2}^{k}\frac{\varphi(p)}{p^{m+1}}\leqslant k\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\varphi(p)}{p^{m+1}}-1\right)=$$

$$=k\left(\frac{\zeta(m)}{\zeta(m+1)}-1\right)\leqslant k\left(\frac{\zeta(2)}{\zeta(3)}-1\right)\leqslant\frac{2k}{5}.$$

Доказательство равенства

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi(p)}{p^m} = \frac{\zeta(m-1)}{\zeta(m)}$$

можно найти в [22] на стр. 250.

Лемма 1.6 доказана.

Лемма 1.7. *Пусть W - выпуклая область на плоскости, N - число целых точек в области W. Если найдутся 3 целые точки внутри области не лежащие на одной прямой, то*

$$N \leqslant 2\mu(W) + 2.$$

Доказательство. Рассмотрим все целые точки, лежащие в области W, для них построим выпуклую оболочку. Получим выпуклый многоугольник. Применив формулу Пика, получим неравенство

$$B + \frac{\Gamma}{2} - 1 \leqslant \mu(W).$$

где B есть количество целочисленных точек внутри многоугольника, а Γ — количество точек на границе многоугольника. Из соотношения $N = B + \Gamma$ получаем

$$N - 2 \leqslant 2\mu(W).$$

Лемма 1.7 доказана.

Рассмотрим плоскость Op_1p_2. Для пары $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2$ и числа $\delta > 0$ введем обозначения:

- C — прямоугольник со сторонами $(1+\delta)\lambda q_1$ и $(1+\delta)\lambda q_2$, параллельными осям;
- $C_0 = \left[0, \frac{(1+\delta)}{2}\lambda q_1\right] \times \left[0, \frac{(1+\delta)}{2}\lambda q_2\right]$;
- $D = \left\{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \colon\ |q_2p_1 - q_1p_2| \leqslant d\left[\frac{\varepsilon(q_1+q_2)}{d\sqrt[m]{k}}\right]\right\}$, где d — наибольший общий делитель чисел q_1 и q_2;
- l_q — прямая $q_2p_1 - q_1p_2 = q$.

Запишем несколько свойств прямых вида l_q:

1. Расстояние между двумя соседними прямыми вида l_q равно $\frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}$.

2. Все целые точки $(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2$ лежат на прямых вида l_q, расстояние между двумя соседними точками на одной прямой равно $\sqrt{q_1^2+q_2^2}$.

Запишем некоторые свойства области D:

1. Количество прямых l_q в области D равно $2d\left[\frac{\varepsilon(q_1+q_2)}{d\sqrt[m]{k}}\right]+1$;

2. Ширина полосы D равна $h=2\left[\frac{\varepsilon(q_1+q_2)}{d\sqrt[m]{k}}\right]\frac{d}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}\leqslant\frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}$.

3. Если $d>2\varepsilon k^{1-1/m}$, то $D=l_0$.

Определим множества:

- $Tr_k=\left\{(q_1,q_2)\in\mathbb{Z}^2\colon\ \lceil k/2\rceil\leqslant q_1<q_2\leqslant k\right\}$;
- $J=\{(q_1,q_2)\in Tr_k\colon \exists C=C_1\ \#(D\cap C_1\cap\mathbb{Z}^2)\geqslant N_0\}$,
  где $N_0=8(1+\delta)\varepsilon\lambda k^{1-1/m}+6$;
- $J_0=\left\{(q_1,q_2)\in Tr_k\colon\ (q_1,q_2)=d>d_0\right\}$, где $d_0=9\varepsilon k^{1-1/m}$;
- $J_1=\left\{(q_1,q_2)\in Tr_k\colon \#(D\cap C_0\cap\mathbb{Z}^2)\geqslant\frac{N_0}{2}\right\}$;
- $Pr_k=\left\{(p_1,p_2)\in\left[0,\frac{\sqrt[m]{k}}{4\varepsilon}\right]^2\cap\mathbb{N}^2\colon\ (p_1,p_2)=1, 1\leqslant\frac{p_2}{p_1}\leqslant 2\right\}$.

Лемма 1.8. *Для каждой пары $(q_1,q_2)\in J$ все целые точки в $D\cap C_1$ лежат на одной прямой l с шагом γ, где*

$$1\leqslant\gamma\leqslant\frac{\sqrt[m]{k}}{4\varepsilon}.$$

Доказательство. Область $D\cap C_1$ можно вложить в параллелограмм с высотой h и стороной $\sqrt{2}(1+\delta)\lambda k$. Таким образом мера $\mu(D\cap C_1)\leqslant 4(1+\delta)\varepsilon\lambda k^{1-1/m}$.

Пусть точки не лежат на одной прямой, тогда по лемме 1.7, количество целых точек N в области $\mu(D\cap C_1)$ будет

$$N\leqslant 2\mu(D\cap C_1)+2\leqslant 8(1+\delta)\varepsilon\lambda k^{1-1/m}+2,$$

получаем противоречие с тем, что $(q_1,q_2)\in J$.

Максимальный отрезок в $D \cap C_1$ это диагональ прямоугольника C_1. Длина диагонали равна $\sqrt{2}(1+\delta)\lambda k$, минимальное количество точек на отрезке такой длины должно быть не менее N_0, поэтому шаг γ не может превышать величины

$$\frac{\sqrt{2}(1+\delta)\lambda k}{N_0 - 1} \leqslant \frac{\sqrt{2}(1+\delta)\lambda k}{N_0 - 6} = \frac{\sqrt{2}\sqrt[m]{k}}{8\varepsilon} \leqslant \frac{\sqrt[m]{k}}{4\varepsilon}.$$

Лемма 1.8 доказана.

Лемма 1.9. *Пусть l - прямая из леммы 1.8, γ - расстояние между двумя соседними целыми точками на этой прямой, ω - угол между прямыми l и l_0, тогда*

$$\sin\omega \leqslant \frac{1}{2k\lambda\gamma}.$$

Доказательство. Определим число $a = d\left[\frac{\varepsilon}{d\sqrt[m]{k}}(q_1+q_2)\right]$. Построим прямоугольный треугольник $A_1A_2A_3$ с гипотенузой A_1A_2, где

$A_1 = l \cap l_a$;

$A_2 = l \cap l_{-a}$;

$A_3 \in l_a$;

$A_1A_3 \perp l$.

Длины сторон $|A_1A_2| \geqslant (N_0-1)\gamma$ и $|A_1A_3| = h$. Оценим синус угла между прямыми l и l_0

$$\sin\omega = \frac{|A_1A_3|}{|A_1A_2|} \leqslant \frac{h}{(N_0-1)\gamma} \leqslant \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt[m]{k}(N_0-6)\gamma} \leqslant \frac{1}{2k\lambda\gamma}.$$

Если $D = l_0$, то $l = l_0$ и $\sin\omega = 0$.

Лемма 1.9 доказана.

Лемма 1.10. *Если $(q_1,q_2) \in J$, то*

$$\#(D \cap C_0 \cap \mathbb{Z}^2) \geqslant \frac{N_0}{2}.$$

Доказательство. Пусть $(q_1,q_2) \in J$, тогда существует квадрат C_1, такой что в области $D \cap C_1$ будет лежать $N \geqslant N_0$ целых точек. Из всех целых точек в $D \cap C_1$ выделим две точки p_s и p_d - самая левая и самая правая соответственно по оси Op_1. Возьмем точку $p_c = \frac{p_s+p_d}{2}$. Рассмотрим 2 случая.

1-ый случай. Если N - нечетное, то p_c - целая точка. Обозначим через ϕ сдвиг на вектор $-\mathbf{p}_c$, где вектор $\mathbf{p}_c$ - радиус-вектор точки p_c.

Точки $\phi(p_c) = (0,0) \in D \cap C_0$ и $\phi(p_d) \in D \cap C_0$, а значит и образы всех целых точек между p_c и p_d тоже лежат в области $D \cap C_0$. Количество целых точек в области $D \cap C_0$ будет

$$\#(D \cap C_0 \cap \mathbb{Z}^2) \geqslant \frac{N+1}{2} \geqslant \frac{N_0+1}{2} > \frac{N_0}{2}.$$

2-ой случай. Если N - четное, то точка p_c лежит посередине двух целых точек с прямой l, возьмем правую точку, обозначим её p_{cd}. И сделаем сдвиг на вектор $-\mathbf{p}_{cd}$, где вектор $\mathbf{p}_{cd}$ - радиус-вектор точки p_{cd}. Точки $\phi(p_{cd}) = (0,0) \in D \cap C_0$ и $\phi(p_d) \in D \cap C_0$, а значит и образы всех целых точек между p_{cd} и p_d тоже лежат в области $D \cap C_0$.

Количество целых точек в области $D \cap C_0$ будет

$$\#(D \cap C_0 \cap \mathbb{Z}^2) \geqslant \frac{N}{2} \geqslant \frac{N_0}{2}.$$

Лемма 1.10 доказана.

Лемма 1.11. *Для любого* $(q_1, q_2) \in Tr_k$ *выполняется неравенство*

$$\#(D \cap C \cap \mathbb{Z}^2) \leqslant \left(\left(32\varepsilon\lambda k^{1-1/m}\right)^m + \left(\frac{16\varepsilon k^{1-1/m}}{d}\right)^m + (8\lambda d)^m + 4^m \right)^{1/m}.$$

Доказательство. Количество прямых l_q в области D, на которых лежат целые точки равно

$$2\left[\frac{\varepsilon}{d\sqrt[m]{k}}(q_1+q_2)\right] + 1 \leqslant \frac{4\varepsilon k^{1-1/m}}{d} + 1.$$

Количество точек на каждой прямой не превосходит количества точек на диагонали прямоугольника C. На каждой прямой расстояние между точками $\frac{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}{d}$. Длина диагонали $\sqrt{((1+\delta)\lambda q_1)^2 + ((1+\delta)\lambda q_2)^2} = (1+\delta)\lambda\sqrt{q_1^2+q_2^2}$. Значит наибольшее количество точек на каждой прямой не превосходит величины

$$\frac{(1+\delta)\lambda\sqrt{q_1^2+q_2^2}}{\frac{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}{d}} + 1 = (1+\delta)\lambda d + 1. \tag{1.7}$$

Таким образом всё количество целых точек в области $D\cap C$ оценим так

$$\#(D\cap C\cap\mathbb{Z}^2)\leqslant\left(\frac{4\varepsilon k^{1-1/m}}{d}+1\right)(2\lambda d+1)=$$

$$=\left(\left(\frac{4\varepsilon k^{1-1/m}}{d}+1\right)^m(2\lambda d+1)^m\right)^{1/m}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\left(\left(\frac{8\varepsilon k^{1-1/m}}{d}\right)^m+2^m\right)((4\lambda d)^m+2^m)\right)^{1/m}=$$

$$=\left(\left(32\varepsilon\lambda k^{1-1/m}\right)^m+\left(\frac{16\varepsilon k^{1-1/m}}{d}\right)^m+(8\lambda d)^m+4^m\right)^{1/m}.$$

Лемма 1.11 доказана.

Вокруг каждой точки $(p_1,p_2)\in Pr_k$ построим сектор $\mathrm{V}(p_1,p_2)$ с углом ϕ, для которого верно неравенство $\sin\phi=\frac{1}{k\lambda\gamma}$, где $\gamma=\sqrt{p_1^2+p_2^2}$ и точка (p_1,p_2) лежит на биссектрисе угла ϕ. Под сектором будем понимать область между двумя прямыми вида $y=k_1x$ и $y=k_2x$. Объединение всех получившихся секторов обозначим через V.

Лемма 1.12. *Верны включения* $J_0\subset J\subset J_1\subset(\mathrm{V}\cap Tr_k)$.

Доказательство. Докажем включение $J_0\subset J$. Если пара $(q_1,q_2)\in J_0$, то $D=l_0$. Возьмем прямоугольник $C=[0,(1+\delta)\lambda q_1]\times[0,(1+\delta)\lambda q_2]$. Оценим количество целых точек в $D\cap C$

$$\#\left(D\cap C\cap\mathbb{Z}^2\right)=\#(l_0\cap C\cap\mathbb{Z}^2)=\left[\frac{(1+\delta)\lambda\sqrt{q_1^2+q_2^2}}{\frac{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}{d}}\right]+1>$$

$$>\frac{(1+\delta)\lambda\sqrt{q_1^2+q_2^2}}{\frac{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}{d}}=(1+\delta)\lambda d>9(1+\delta)\varepsilon\lambda k^{1-1/m}>8(1+\delta)\varepsilon\lambda k^{1-1/m}+6.$$

Включение $J_0\subset J$ доказано.

Включение $J\subset J_1$ доказано в лемме 1.10.

Если $(q_1,q_2)\in J_1$, то в области $D\cap C_0$ все целые точки лежат на одной прямой l, так как $\mu(D\cap C_0)\leqslant 2(1+\delta)\varepsilon\lambda k^{1-1/m}$.

Пусть точки не лежат на одной прямой, тогда по лемме 1.7, количество целых точек в области $\mu(D\cap C_0)$ будет

$$2\mu(D\cap C_0)+2\leqslant 4(1+\delta)\varepsilon\lambda k^{1-1/m}+2<\frac{N_0}{2},$$

получаем противоречие с тем, что $(q_1,q_2)\in J_1$. Прямые l и l_0 пересекаются в начале координат и синус угла между прямыми l и l_0 не превосходит величины $\frac{1}{2k\lambda\gamma}$. Для доказательства надо повторить рассуждения, аналогичные рассуждениям в лемме 1.9.

Докажем включение $J_1\subset(\mathrm{V}\cap Tr_k)$.

Если точка $(q_1,q_2)\notin\mathrm{V}$, то $(q_1,q_2)\notin J_1$, потому как синус угла между прямой l_0 и любым радиус-вектором (p_1,p_2), где $(p_1,p_2)\in Pr_k$ больше чем $\sin\frac{\phi}{2}>\frac{\sin\phi}{2}=\frac{1}{2k\lambda\gamma}$, что противоречит тому что синус угла между прямыми l и l_0 не превосходит величины $\frac{1}{2k\lambda\gamma}$.

Лемма 1.12 доказана.

Лемма 1.13. *Количество пар* $(q_1,q_2)\in J$ *не более* $\frac{2k^{1+\frac{3}{2m}}}{\lambda\varepsilon^2}$.

Доказательство. Оценим сколько точек $(q_1,q_2)\in Tr_k$ попадают в каждый сектор $\mathrm{V}(p_1,p_2)$. Возможны 2 случая.

Первый случай. Все целые точки лежат на прямой l_0, тогда их количество не больше чем $\frac{\sqrt{2}k}{\gamma}+1$.

Второй случай. Для области $\mathrm{V}(p_1,p_2)\cap[1,k]^2$ выполняются условия леммы 1.7, тогда количество точек не больше чем

$$2\mu(\mathrm{V}(p_1,p_2)\cap[1,k]^2)+2\leqslant 2\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}k\right)^2\sin\phi+2\leqslant\frac{2k}{\lambda\gamma}+2.$$

Оценим общее количество точек

$$\#J\leqslant\#(\mathrm{V}\cap Tr_k)=\#\left(\bigcup_{(p_1,p_2)\in Pr_k}(\mathrm{V}(p_1,p_2)\cap Tr_k)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{(p_1,p_2)\in Pr_k}\#(\mathrm{V}(p_1,p_2)\cap Tr_k)\leqslant\sum_{(p_1,p_2)\in Pr_k}\left(\frac{\sqrt{2}k}{\gamma}+1+\frac{2k}{\lambda\gamma}+2\right)\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(p_1,p_2)\in Pr_k} \left(\frac{2k}{\lambda\gamma}+\frac{2k}{\lambda\gamma}+3\right) \leqslant \sum_{(p_1,p_2)\in Pr_k} \frac{4k}{\lambda\gamma}+\frac{3k^{2/m}}{16\varepsilon^2}=$$

$$=\sum_{\substack{(p_1,p_2)\in Pr\\ 1\leqslant\gamma\leqslant\frac{\sqrt[2m]{k}}{4\varepsilon}}} \frac{4k}{\lambda\gamma}+\sum_{\substack{(p_1,p_2)\in Pr_k\\ \frac{\sqrt[2m]{k}}{4\varepsilon}<\gamma\leqslant\frac{\sqrt[m]{k}}{4\varepsilon}}} \frac{4k}{\lambda\gamma}+\frac{3k^{2/m}}{16\varepsilon^2} \leqslant \sum_{\substack{(p_1,p_2)\in Pr\\ 1\leqslant\gamma\leqslant\frac{\sqrt[2m]{k}}{4\varepsilon}}} \frac{4k}{\lambda}+\sum_{\substack{(p_1,p_2)\in Pr\\ \frac{\sqrt[2m]{k}}{4\varepsilon}<\gamma\leqslant\frac{\sqrt[m]{k}}{4\varepsilon}}} \frac{16k\varepsilon}{\lambda\sqrt[2m]{k}}+\frac{3k^{2/m}}{16\varepsilon^2}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{4k}{\lambda}\frac{k^{1/m}}{16\varepsilon^2}+\frac{16k\varepsilon}{\lambda\sqrt[2m]{k}}\frac{k^{2/m}}{16\varepsilon^2}+\frac{3k^{2/m}}{16\varepsilon^2}=\frac{k^{1+\frac{1}{m}}}{4\lambda\varepsilon^2}+\frac{k^{1+\frac{3}{2m}}}{\lambda\varepsilon}+\frac{3k^{\frac{2}{m}}}{16\varepsilon^2}\leqslant\frac{2k^{1+\frac{3}{2m}}}{\lambda\varepsilon^2}.$$

Лемма 1.13 доказана.

Лемма 1.14. *Для любого куба S со стороной λ выполняется неравенство*

$$\frac{(2\lambda\varepsilon)^m}{6}-\frac{(68\lambda\varepsilon^2)^m}{4}\leqslant\mu(S\cap\overline{M}_k).$$

Доказательство. Ограничение снизу на меру пересечения множества $\overline{M}_k$ с кубом S записывается неравенством

$$\mu(S\cap\overline{M}_k)\geqslant\sum_{q=\lceil k/2\rceil}^{k}\mu\left(S\cap A(q)\right)-\sum_{\lceil k/2\rceil\leqslant q_1<q_2\leqslant k}\mu\left(S\cap A(q_1)\cap A(q_2)\right). \qquad (1.8)$$

Применим формулу (1.6) и докажем это неравенство

$$\mu(S\cap\overline{M}_k)=\mu\left(\bigcup_{q=1}^{k}(S\cap A(q))\right)\geqslant\mu\left(\bigcup_{q=\lceil k/2\rceil}^{k}(S\cap A(q))\right)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{q=\lceil k/2\rceil}^{k}\mu\left(S\cap A(q)\right)-\sum_{\lceil k/2\rceil\leqslant q_1<q_2\leqslant k}\mu\left((S\cap A(q_1))\bigcap(S\cap A(q_2))\right)=$$

$$=\sum_{q=\lceil k/2\rceil}^{k}\mu\left(S\cap A(q)\right)-\sum_{\lceil k/2\rceil\leqslant q_1<q_2\leqslant k}\mu\left(S\cap A(q_1)\cap A(q_2)\right).$$

Первую сумму из (1.8) снизу можно оценить таким образом

$$\sum_{q=\lceil k/2\rceil}^{k}\mu(S\cap A(q))\geqslant\frac{(1-\delta)^m(2\lambda\varepsilon)^m}{2}. \qquad (1.9)$$

Докажем это неравенство. Проекция множества $A(q)$ на каждую координатную ось это объединение отрезков вида $\left[\frac{p}{q}-\frac{\varepsilon}{q\sqrt[m]{k}},\frac{p}{q}+\frac{\varepsilon}{q\sqrt[m]{k}}\right]$ при $p=$

$0, 1, \ldots, q$. Минимальное количество проекций множества $A(q)$, которые полностью попадут в отрезок длины λ равно $\left[\left(\lambda - \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{kq}}\right) : \frac{1}{q}\right] \geqslant \lambda q - \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} - 1 > \lambda q - 2$. Получаем неравенство

$$\sum_{q=\lceil k/2\rceil}^{k} \mu(S\cap A(q)) \geqslant \sum_{q=\lceil k/2\rceil}^{k} (\lambda q - 2)^m \frac{2^m\varepsilon^m}{kq^m} \geqslant \sum_{q=\lceil k/2\rceil}^{k} ((1-\delta)\lambda q)^m \frac{2^m\varepsilon^m}{kq^m} =$$

$$= \sum_{q=\lceil k/2\rceil}^{k} \frac{(1-\delta)^m(2\lambda\varepsilon)^m}{k} \geqslant \frac{(1-\delta)^m(2\lambda\varepsilon)^m}{2}.$$

В сумме $\sum\limits_{\lceil k/2\rceil \leqslant q_1 < q_2 \leqslant k} \mu\left(S\cap A(q_1) \bigcap A(q_2)\right)$ найдем ограничение сверху на каждое слагаемое. Сначала найдем ограничение на количество пересечений. Выпишем условия на попарное пересечение множеств. Рассмотрим проекцию на первую ось.

Проекции множеств $A(q_1)$ и S пересекаются, если

$$\alpha_1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}q_1} \leqslant \frac{p_1}{q_1} < \alpha_1 + \lambda + \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}q_1}.$$

Проекции множеств $A(q_2)$ и S пересекаются, если

$$\alpha_1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}q_2} \leqslant \frac{p_2}{q_2} < \alpha_1 + \lambda + \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}q_2}.$$

Проекции множеств $A(q_1)$ и $A(q_2)$ пересекаются, если существуют p_1 и p_2, такие что

$$\left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}\left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}\right).$$

Если пара (p_1, p_2) удовлетворяет всем трем неравенствам, то проекции множеств S, $A(q_1)$ и $A(q_2)$ пересекаются. Перепишем эти неравенства по другому

$$\begin{cases} 0 \leqslant p_1 - \alpha_1 q_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} < \lambda q_1 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \\ 0 \leqslant p_2 - \alpha_1 q_2 + \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} < \lambda q_2 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}} \\ |p_1 q_2 - p_2 q_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}(q_1 + q_2) \end{cases}$$

Рассмотрим плоскость Op_1p_2. Первые два неравенства задают прямоугольник со сторонами $\lambda q_1 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}$ и $\lambda q_2 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt[m]{k}}$, который содержится в прямоугольнике C. Третье неравенство задает прямые вида $p_1q_2{-}p_2q_1{=}q$, где $q = 0, \pm d, \ldots, \pm d\left[\frac{\varepsilon}{d\sqrt[m]{k}}(q_1{+}q_2)\right]$, то есть в точности прямые из области D. Отсюда следует, что количество решений системы будет не более, чем $\#(D{\cap}C{\cap}\mathbb{Z}^2)$.

Всё множество пар (q_1, q_2) разобьем на три случая:

пара $(q_1, q_2){\in}J_0$, тогда $D = l_0$ и по формуле (1.7)

$$\#(D{\cap}C{\cap}\mathbb{Z}^2) \leqslant (1+\delta)\lambda d + 1;$$

пара $(q_1, q_2){\in}J \setminus J_0$, воспользуемся оценкой из леммы 1.11

$$\#(D{\cap}C{\cap}\mathbb{Z}^2) \leqslant \left(\left(32\varepsilon\lambda k^{1-1/m}\right)^m + \left(\frac{16\varepsilon k^{1-1/m}}{d}\right)^m + (8\lambda d)^m + 4^m\right)^{1/m};$$

пара $(q_1, q_2){\in}Tr_k \setminus J$, тогда

$$\#(D{\cap}C{\cap}\mathbb{Z}^2) < N_0 = 8(1+\delta)\varepsilon\lambda k^{1-1/m} + 6 \leqslant 17\varepsilon\lambda k^{1-1/m}.$$

Сумму можно записать

$$\sum_{\lceil k/2\rceil \leqslant q_1 < q_2 \leqslant k} \mu\left(S{\cap}A(q_1){\cap}A(q_2)\right) = \left(\sum_{J_0} + \sum_{J\setminus J_0} + \sum_{Tr_k\setminus J}\right) \mu\left(S{\cap}A(q_1){\cap}A(q_2)\right).$$

Для удобства вместо $\sum\limits_{(q_1,q_2)\in J}$, $\sum\limits_{(q_1,q_2)\in J\setminus J_0}$ и $\sum\limits_{(q_1,q_2)\in Tr_k}$ будем писать $\sum\limits_{J}$, $\sum\limits_{J\setminus J_0}$ и $\sum\limits_{Tr_k}$ соответственно.

Применим лемму 1.6 и получим ограничение на сумму по $(q_1, q_2){\in}J_0$

$$\sum_{J_0} \mu\left(S{\cap}A(q_1){\cap}A(q_2)\right) \leqslant \sum_{J_0} \left(\#(D{\cap}C{\cap}\mathbb{Z}^2)\right)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{kq_2^m} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{J_0} ((1{+}\delta)\lambda d{+}1)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{kq_2^m} \leqslant \sum_{J_0} ((1{+}2\delta)\lambda d)^m \frac{(2\varepsilon)^m}{kq_2^m} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1+2\delta)^m\lambda^m(2\varepsilon)^m}{k} \sum_{Tr_k} \frac{d^m}{q_2^m} \leqslant \frac{2(1+2\delta)^m\lambda^m(2\varepsilon)^m}{5}.$$

Оценим сумму по $(q_1,q_2)\in J\setminus J_0$

$$\sum_{J\setminus J_0}\mu\left(S\cap A(q_1)\cap A(q_2)\right)\leqslant\sum_{J_0}\left(\#(D\cap C\cap\mathbb{Z}^2)\right)^m\frac{(2\varepsilon)^m}{kq_2^m}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{J\setminus J_0}\left(\left(32\varepsilon\lambda k^{1-1/m}\right)^m+\left(\frac{16\varepsilon k^{1-1/m}}{d}\right)^m+(8\lambda d)^m+4^m\right)\frac{(4\varepsilon)^m}{k^{m+1}}=$$

$$=\frac{(128\varepsilon^2\lambda)^m}{k^2}\sum_{J\setminus J_0}1+\frac{(64\varepsilon^2)^m}{k^2}\sum_{J\setminus J_0}\frac{1}{d^m}+\frac{(32\varepsilon\lambda)^m}{k^{m+1}}\sum_{J\setminus J_0}d^m+\frac{(16\varepsilon)^m}{k^{m+1}}\sum_{J\setminus J_0}1\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(128\varepsilon^2\lambda)^m}{k^2}\sum_{J}1+\frac{(64\varepsilon^2)^m}{k^2}\sum_{J}1+\frac{(32\varepsilon\lambda)^m}{k^{m+1}}\sum_{J\setminus J_0}(9\varepsilon k^{1-1/m})^m+\frac{(16\varepsilon)^m}{k^{m+1}}\sum_{Tr_k}1\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(128\varepsilon^2\lambda)^m}{k^2}\frac{2k^{1+\frac{3}{2m}}}{\lambda\varepsilon^2}+\frac{(64\varepsilon^2)^m}{k^2}\frac{2k^{1+\frac{3}{2m}}}{\lambda\varepsilon^2}+\frac{(288\varepsilon^2\lambda)^m}{k^2}\sum_{J}1+\frac{(16\varepsilon)^m}{k^{m+1}}k^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(128\varepsilon^2\lambda)^m}{k^2}\frac{2k^{1{,}75}}{\lambda\varepsilon^2}+\frac{(64\varepsilon^2)^m}{k^2}\frac{2k^{1{,}75}}{\lambda\varepsilon^2}+\frac{(288\varepsilon^2\lambda)^m k^{1{,}75}}{k^2}+\frac{(16\varepsilon)^m}{k}\leqslant\frac{1}{\lambda k^{0{,}25}}\leqslant\frac{1}{k^{0{,}2}}.$$

Найдем ограничение на сумму по $(q_1,q_2)\in Tr_k\setminus J$

$$\sum_{Tr_k\setminus J}\mu\left(S\cap A(q_1)\cap A(q_2)\right)\leqslant\sum_{J_0}\#\left(D\cap C\cap\mathbb{Z}^2\right)^m\frac{(2\varepsilon)^m}{kq_2^m}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{Tr_k\setminus J}\left(17\varepsilon\lambda k^{1-1/m}\right)^m\frac{(2\varepsilon)^m}{k\left(\frac{k}{2}\right)^m}=$$

$$=\sum_{Tr_k\setminus J}\frac{(68\varepsilon^2\lambda)^m}{k^2}\leqslant\frac{(68\varepsilon^2\lambda)^m}{k^2}\sum_{Tr_k}1\leqslant\frac{(68\varepsilon^2\lambda)^m}{4}.$$

Подставим в неравенство (1.8) неравенство (1.9) и неравенства, полученные выше

$$\mu(S\cap\overline{M}_k)\geqslant\frac{2^m(1-\delta)^m(\lambda\varepsilon)^m}{2}-\frac{2(1+2\delta)^m(2\lambda\varepsilon)^m}{5}-\frac{1}{k^{0{,}2}}-\frac{(68\varepsilon^2\lambda)^m}{4}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2^m(1-\delta)^m(\lambda\varepsilon)^m}{2}-\frac{2(1+3\delta)^m(2\lambda\varepsilon)^m}{5}-\frac{(68\varepsilon^2\lambda)^m}{4}\geqslant$$

$$=2^m(\lambda\varepsilon)^m\left(\frac{(1-\delta)^m}{2}-\frac{2(1+3\delta)^m}{5}\right)-\frac{(68\lambda\varepsilon^2)^m}{4}\geqslant\frac{2^m(\lambda\varepsilon)^m}{6}-\frac{(68\lambda\varepsilon^2)^m}{4}.$$

Лемма 1.14 доказана.

1.3. Последовательности Бореля-Кантелли.

Пусть здесь и далее $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ - вероятностное пространство с $\Omega = [0;1]^m$.

Назовем последовательность измеримых множеств $\{M_k\}$ - последовательностью Бореля-Кантелли если

$$\mu\left(\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{k=r}^{\infty} M_k\right) = 1.$$

То есть почти все точки множества Ω попадают в бесконечное количество множеств последовательности $\{M_k\}$.

Теорема Шустера [33].

Пусть $\{M_k\}$ - последовательность измеримых множеств. Если для любого измеримого множества E, такого что $\mu(E) > 0$, выполняется

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E \cap M_k) = +\infty,$$

то последовательность $\{M_k\}$ является последовательностью Бореля-Кантелли.

Теорема о плотности. *Пусть E - измеримое множество с $\mu(E) > 0$, тогда для любого $\delta > 0$ существует куб S, такой что*

$$\frac{\mu(E \cap S)}{\mu(S)} > 1 - \delta.$$

Лемма 1.15. *Пусть $\{M_k\}$ - последовательность измеримых множеств, для любого куба S со стороной λ начиная с некоторого номера $k_0(\lambda)$ для всех $k > k_0$ выполняется неравенство $\mu(S \cap M_k) > c\mu(S)$, где c - некоторая положительная постоянная.*

Тогда последовательность $\{M_k\}$ является последовательностью Бореля-Кантелли.

Доказательство. В этом доказательстве $\overline{M}_k$ и $\overline{E}$ обозначают дополнение для множеств M_k и E. Для любых множеств E, S и M_k выполняется неравенство

$$\mu(E\cap M_k) \geqslant \mu(S\cap E\cap M_k) \geqslant \mu(S) - \mu(S\cap\overline{M_k}) - \mu(S\cap\overline{E}). \qquad (1.10)$$

Из условия леммы для всех $k > k_0(\lambda)$ будет

$$\mu(S\cap\overline{M_k}) = \mu(S) - \mu(S\cap M_k) \leqslant \mu(S) - c\mu(S). \qquad (1.11)$$

По теореме о плотности для $\delta = \frac{c}{2}$ можно выбрать куб S так, что

$$\mu(S\cap E) \geqslant \frac{c}{2}\mu(S),$$

откуда получаем неравенство

$$\mu(S\cap\overline{E}) = \mu(S) - \mu(S\cap E) \leqslant \frac{c}{2}\mu(S). \qquad (1.12)$$

Подставим (1.11) и (1.12) в неравенство (1.10)

$$\mu(E\cap M_k) \geqslant \mu(S) - \mu(S) + c\mu(S) - \frac{c}{2}\mu(S) = \frac{c}{2}\mu(S).$$

Видим, что для последовательности $\{M_k\}$ выполняются условия теоремы Шустера, таким образом последовательность $\{M_k\}$ является последовательностью Бореля- Кантелли.

Лемма 1.15 доказана.

Напомним некоторые свойства прямого произведения, см. [10].

Пусть $A, A' \subset X$, $B, B' \subset Y$. Тогда

1) $(A \times B)\cap(A' \times B') = (A\cap A') \times (B\cap B')$;

2) $\mu_{X\times Y}(A \times B) = \mu_X(A) \cdot \mu_Y(B)$.

Лемма 1.16. *Пусть $\{M_k^1\}$ и $\{M_k^2\}$ последовательности в Ω и для любых кубов S_1 и S_2 начиная с некоторого номера k_0 для всех $k > k_0$ выполняются неравенства $\mu(M_k^1\cap S_1) > c\mu(S_1)$ и $\mu(M_k^2\cap S_2) > c\mu(S_2)$, где c - некоторая положительная постоянная.*

Тогда последовательность $\{M_k^1 \times M_k^2\}$ является последовательностью Бореля-Кантелли.

Доказательство. Построим последовательность множеств $\{\Psi_k\} = \left\{M_k^1 \times M_k^2\right\}$. Покажем, что для этой последовательности выполняются условия леммы 1.15. Возьмем куб $S = S_1 \times S_2$. Найдем меру пересечения

$$\mu(S\cap\Psi_k) = \mu((S_1 \times S_2)\cap \left(M_k^1 \times M_k^2\right)) =$$

$$= \mu((S_1\cap M_k^1) \times (S_2\cap M_k^2)) = \mu(S_1\cap M_k^1) \cdot \mu(S_2\cap M_k^2).$$

По условию леммы для всех $k > k_0$ выполняется неравенство

$$\mu(S_1\cap M_k^1) \cdot \mu(S_2\cap M_k^2) \geqslant c\mu(S_1) \cdot c\mu(S_2) = c^2\mu(S).$$

Видим, что для последовательности $\{\Psi_k\}$ выполняются условия леммы 1.15, значит последовательность $\{\Psi_k\}$ является последовательностью Бореля-Кантелли.

Лемма 1.16 доказана.

1.4. Доказательство теоремы I.

Построим последовательность множеств $\{\Psi_k\} = \left\{\underline{M_k} \times \overline{M}_k\right\}$ и $\{\Phi_k\} = \left\{\overline{M}_k \times \underline{M_k}\right\}$. По леммам 1.3, 1.4, 1.5, 1.14 и 1.16 обе последовательности $\{\Psi_k\}$ и $\{\Phi_k\}$ являются последовательностями Бореля-Кантелли. Установим взаимнооднозначно соответствие между точками из Ω и матрицами Θ.

В случае n=2 и m=1, точке $(\alpha, \beta)\in[0, 1]^2$ сопоставим матрицу $\Theta = (\theta_1^1\, \theta_1^2) = (\alpha\, \beta)$. В случае $n = 1$ и $m \geqslant 2$ точке $(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)\in[0, 1]^m$ сопоставим матрицу $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1^1 \\ \vdots \\ \theta_m^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_m^1 \end{pmatrix}$.

В обоих случаях почти все точки, а значит и почти все матрицы попадают в последовательности $\{\Psi_k\}$ и $\{\Phi_k\}$ бесконечное количество раз. Если $(\Theta, \Theta')\in\Psi_k$, то разность $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t) > 0$ и если $(\Theta, \Theta')\in\Phi_k$, то разность $\psi_\Theta(t) - \psi_{\Theta'}(t) < 0$, а значит для почти всех пар матриц осцилляция происходит бесконечное количество раз.

Теорема I доказана.

Глава 2

О среднем значении меры иррациональности вещественных чисел.

Напомним, что в этой главе мы рассматриваем интеграл

$$I_\alpha(t) = \int\limits_1^t \psi_\alpha(\xi) d\xi$$

для функции

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leqslant q \leqslant t} ||q\alpha||.$$

Величина $N = N(\alpha, t)$ определяется условием

$$q_N \leqslant t < q_{N+1}, \tag{2.1}$$

т.е. количество знаменателей подходящих дробей для числа α на отрезке $[1; t]$.

В данной главе будут доказаны следующие теоремы.

Теорема II. *Для почти всех (в смысле меры Лебега) чисел α выполняются равенства*

$$1) \lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)} = \frac{1}{2},$$

$$2) \lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \frac{6\ln 2}{\pi^2}.$$

Теорема III. *Для любого иррационального $\alpha \in (0; 1)$ выполнены неравенства*

1) $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)} \leqslant 1,$

2) $\liminf\limits_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}.$

Теорема IV. *Для любого $d \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}; 1\right]$ существует α, такое что*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)} = d.$$

Теорема V. *Пусть $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ и $r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots$ – суть знаменатели подходящих дробей для α и β соответственно. Тогда для почти всех (в смысле меры Лебега) пар $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ верно неравенство*

$$\liminf_{n\to\infty} |I_\alpha(q_n) - I_\beta(r_n)| < +\infty.$$

2.1. Формулы с подходящими дробями.

Если рассмотреть разложение числа α в обыкновенную цепную дробь

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_\nu + \cdots}}},$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_\nu \in \mathbb{N}$, $t = 1, 2, 3, \ldots$ (конечной или бесконечной, в зависимости от того, является ли α рациональным числом или нет), то подходящими дробями к α называются рациональные дроби вида

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = [a_0; , a_1, a_2, \ldots, a_\nu] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_\nu}}}.$$

Имеет место равенство

$$\left|\alpha - \frac{p_\nu}{q_\nu}\right| = \frac{1}{q_\nu^2(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)}, \tag{2.2}$$

где

$$\alpha_{\nu+1} = [a_{\nu+1}; a_{\nu+2}, ...], \quad \alpha_\nu^* = [0; a_\nu, a_{\nu-1}, ..., a_1] = \frac{q_{\nu-1}}{q_\nu}.$$

Перейдем к функции $\psi_\alpha(t)$. При $q_\nu \leqslant t < q_{\nu+1}$ будет иметь место равенство

$$\psi_\alpha(t) = ||q_\nu \alpha|| = |q_\nu \alpha - p_\nu|. \tag{2.3}$$

Применив формулу (2.2), получим формулу для погрешности приближения числа α его подходящей дробью $\frac{p_n}{q_n}$, которая имеет вид

$$||q_\nu \alpha|| = \frac{1}{q_\nu(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)}, \tag{2.4}$$

или

$$q_\nu ||q_\nu \alpha|| = \frac{1}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*}. \tag{2.5}$$

Формулы (2.3) и (2.4) позволяют записать интеграл $I_\alpha(t)$ в виде

$$I_\alpha(t) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{q_\nu - q_{\nu-1}}{q_{\nu-1}\alpha_\nu + q_{\nu-2}} + \frac{t - q_N}{q_N \alpha_{N+1} + q_{N-1}}, \tag{2.6}$$

где N определено в (2.1). Эту же формулу можно записать по-другому. Введем новое обозначение для слагаемых из формулы (2.6) и преобразуем их:

$$S_\nu(\alpha)=\frac{q_\nu-q_{\nu-1}}{q_{\nu-1}\left(a_\nu+\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}\right)+q_{\nu-2}}=\frac{q_\nu-q_{\nu-1}}{q_\nu+\frac{q_{\nu-1}}{\alpha_{\nu+1}}}=\frac{(q_\nu-q_{\nu-1})\alpha_{\nu+1}}{q_\nu\alpha_{\nu+1}+q_{\nu-1}}=\frac{(1-\alpha_\nu^*)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu^*}. \tag{2.7}$$

Для последнего слагаемого в формуле (2.6) аналогично получаем

$$A_{N+1}(\alpha,t)=\frac{t-q_N}{q_N\alpha_{N+1}+q_{N-1}}=\frac{\left(\frac{t}{q_{N+1}}-\alpha_{N+1}^*\right)\alpha_{N+2}}{\alpha_{N+2}+\alpha_{N+1}^*}.$$

Теперь формулу (2.6) можно записать

$$I_\alpha(t)=G_N(\alpha)+A_{N+1}(\alpha,t), \tag{2.8}$$

где

$$G_N(\alpha)=\sum_{\nu=1}^{N}S_\nu(\alpha). \tag{2.9}$$

Поскольку $\alpha_\nu>1$, $\alpha_\nu^*\in[0,1]$ получаем неравенство

$$0\leqslant S_\nu(\alpha)<1. \tag{2.10}$$

Ясно что

$$0\leqslant A_{N+1}(\alpha,t)<S_{N+1}(\alpha). \tag{2.11}$$

Используя (2.9) и (2.10) выводим оценку сверху

$$G_N(\alpha)<N. \tag{2.12}$$

Из (2.8) ,(2.10) и (2.11) получаем ограничение на интеграл

$$G_N(\alpha)\leqslant I_\alpha(t)<G_{N+1}(\alpha), \tag{2.13}$$

и

$$I_\alpha(t)=G_N(\alpha)+O(1). \tag{2.14}$$

Неравенство (2.13) дает оценку сверху $I_\alpha(t)<N+1$ для любого $\alpha\in\mathbb{R}$, из чего непосредственно следует пункт 1) теоремы III.

2.2. Доказательство пункта 2) теоремы III.

Для доказательства пункта 2) теоремы III нам понадобятся непрерывные дроби с *вещественными* неполными частными. В этом пункте и далее для записи бесконечного множества аргументов будем пользоваться обозначением $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, где $x_i \in [1; +\infty)$, $i \in \mathbb{N}$. Определим функцию $\alpha(\overline{x}) = [0; x_1, x_2, \ldots]$. Также определим функции $q_\nu(\overline{x})$ и $p_\nu(\overline{x})$ как континуанту (см. определение 2.6 на стр. 60)

$$q_\nu(\overline{x}) = \begin{cases} \langle x_1, \ldots, x_\nu \rangle, & \nu \geqslant 1; \\ 1, & \nu = 0; \\ 0, & \nu = -1, \end{cases} \qquad p_\nu(\overline{x}) = \begin{cases} \langle x_1, \ldots, x_{\nu-1} \rangle, & \nu \geqslant 1; \\ 0, & \nu = 0; \\ 1, & \nu = -1. \end{cases}$$

Для всех $\nu \geqslant 0$ выполняется [12] неравенство

$$q_\nu(\overline{x}) \geqslant 2^{\frac{\nu-1}{2}}. \tag{2.15}$$

Рассмотрим функцию $\psi_{\alpha(\overline{x})}(t) = |q_N(\overline{x})\alpha(\overline{x}) - p_N(\overline{x})|$, где N определяется аналогично (2.1). Рассмотрим интеграл $I_{\alpha(\overline{x})}(t) = \int\limits_1^t \psi_{\alpha(\overline{x})}(\xi) d\xi$ и функции

$$\alpha_\nu(\overline{x}) = \begin{cases} [x_\nu; x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots], & \nu \geqslant 1; \\ \\ [0; x_1, x_2, \ldots,], & \nu = 0, \end{cases}$$

$$\alpha^*_\nu(\overline{x}) = \begin{cases} [0; x_\nu, x_{\nu-1}, x_{\nu-2}, \ldots, x_1], & \nu \geqslant 1; \\ \\ 0, & \nu = 0. \end{cases}$$

При каждом $\overline{x}$ выполняются следующие свойства:

$$\alpha_\nu(\overline{x}) > 1, \ \nu \geqslant 1, \tag{2.16}$$

$$0 \leqslant \alpha^*_\nu(\overline{x}) \leqslant 1, \tag{2.17}$$

$$\alpha^*_\nu(\overline{x}) = \frac{q_{\nu-1}(\overline{x})}{q_\nu(\overline{x})}, \tag{2.18}$$

$$\alpha_\nu(\overline{x}) = x_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\overline{x})}, \tag{2.19}$$

$$\alpha^*_\nu(\overline{x}) = \frac{1}{x_\nu + \alpha^*_{\nu-1}(\overline{x})}, \tag{2.20}$$

$$\alpha(\overline{x}) - \frac{p_\nu(\overline{x})}{q_\nu(\overline{x})} = \frac{(-1)^\nu}{q^2(\overline{x})(\alpha_{\nu+1}(\overline{x}) + \alpha^*_\nu(\overline{x}))}. \tag{2.21}$$

По аналогии с (2.7) и (2.9) рассмотрим функции

$$S_\nu(\overline{x}) = \frac{(1-\alpha^*_\nu(\overline{x}))\alpha_{\nu+1}(\overline{x})}{\alpha_{\nu+1}(\overline{x}) + \alpha^*_\nu(\overline{x})},\ G_n(\overline{x}) = \sum_{\nu=1}^{n} S_\nu(\overline{x}).$$

Аналогично формуле (2.14) можно получить равенство

$$I_\alpha(t) = G_N(\overline{x}) + O(1), \tag{2.22}$$

где N определено аналогично (2.1).

Найдем частные производные от функций $\alpha_\nu(\overline{x})$ и $\alpha^*_\nu(\overline{x})$ по переменной x_k. Для этого уточним зависимость от k-ого аргумента:

$$\alpha_\nu(\overline{x}) = \begin{cases} x_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\overline{x})} & \nu \leqslant k-1; \\ \\ x_k + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\overline{x})}, & \nu = k; \\ \\ x_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\overline{x})}, & \nu \geqslant k+1, \end{cases} \qquad \alpha^*_\nu(\overline{x}) = \begin{cases} \frac{1}{x_\nu + \alpha^*_{\nu-1}(\overline{x})}, & \nu < k; \\ \\ \frac{1}{x_k + \alpha^*_{\nu-1}(\overline{x})}, & \nu = k; \\ \\ \frac{1}{x_\nu + \alpha^*_{\nu-1}(\overline{x})}, & \nu \geqslant k+1. \end{cases}$$

Теперь для производных легко получить следующие соотношения:

$$\Big(\alpha_\nu(\overline{x})\Big)'_{x_k} = \begin{cases} -\frac{\left(\alpha_{\nu+1}(\overline{x})\right)'_{x_k}}{\left(\alpha_{\nu+1}(\overline{x})\right)^2}, & \nu \leqslant k-1; \\ \\ 1, & \nu = k; \\ \\ 0, & \nu \geqslant k+1, \end{cases} \tag{2.23}$$

$$
\left(\alpha_\nu^*(\overline{x})\right)'_{x_k} = \begin{cases} 0, & \nu < k; \\ \\ -\frac{1}{\left(x_k+\alpha_{\nu-1}^*(\overline{x})\right)^2}, & \nu = k; \\ \\ -\frac{\left(\alpha_{\nu-1}^*(\overline{x})\right)'_{x_k}}{\left(x_\nu+\alpha_{\nu-1}^*(\overline{x})\right)^2}, & \nu \geqslant k+1. \end{cases} \tag{2.24}
$$

Пусть $l \in \mathbb{N}_0$. Из (2.23) получаем

$$
\operatorname{sign}\left(\alpha_\nu(\overline{x})\right)'_{x_k} = \begin{cases} 1, & \nu = k-2l; \\ \\ -1, & \nu = k-1-2l. \end{cases} \tag{2.25}
$$

Аналогично и для $(\alpha_\nu^*(\overline{x}))'_{x_k}$ из (2.24) видно, что

$$
\operatorname{sign}\left(\alpha_\nu^*(\overline{x})\right)'_{x_k} = \begin{cases} -1, & \nu = k+2l; \\ \\ 1, & \nu = k+1+2l. \end{cases} \tag{2.26}
$$

Лемма 2.1. *Функция $G_n(\overline{x})$ возрастает по каждому из первых $n+1$ аргументу.*

Доказательство. Покажем, что $\left(G_n(\overline{x})\right)'_{x_k} > 0$, для $k \leqslant n+1$. Найдем производную по k-ому аргументу. В этом доказательстве не будем писать аргумент $\overline{x}$.

$$
\left(G_n(\overline{x})\right)'_{x_k} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k}(1-\alpha_\nu^*)\alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu^*)^2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-\alpha_\nu^*)'_{x_k}\alpha_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1}+1)}{(\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu^*)^2}. \tag{2.27}
$$

Исследуем первую сумму из (2.27) и покажем, что она неотрицательная. Воспользовавшись соотношением (2.23), отбросим нулевые слагаемые

$$
\sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k}(1-\alpha_\nu^*)\alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu^*)^2} = \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k}(1-\alpha_\nu^*)\alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu^*)^2}.
$$

В новой сумме, используя условие $\alpha_0^*=0$, можно при необходимости сделать четное количество слагаемых, добавив слагаемое с $\nu=0$. Сгруппируем слагаемые по два, начиная с последнего, и преобразуем сумму, воспользовавшись (2.19) и (2.23):

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k}(1-\alpha_\nu^*)\alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu^*)^2}=$$

$$=\sum_{l=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}\left(\frac{(1-\alpha_{k-1-2l}^*)\alpha_{k-1-2l}^*(\alpha_{k-2l})'_{x_k}}{(\alpha_{k-2l}+\alpha_{k-1-2l}^*)^2}+\frac{(1-\alpha_{k-2-2l}^*)\alpha_{k-2-2l}^*(\alpha_{k-1-2l})'_{x_k}}{(\alpha_{k-1-2l}+\alpha_{k-2-2l}^*)^2}\right)=$$

$$=\sum_{l=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}\left(\frac{\left(1-\frac{1}{x_{k-1-2l}+\alpha_{k-2-2l}^*}\right)\frac{1}{x_{k-1-2l}+\alpha_{k-2-2l}^*}}{\left(\alpha_{k-2l}+\frac{1}{x_{k-1-2l}+\alpha_{k-2-2l}^*}\right)^2}(\alpha_{k-2l})'_{x_k}-\right.$$

$$\left.-\frac{(1-\alpha_{k-2-2l}^*)\alpha_{k-2-2l}^*}{\left(x_{k-1-2l}+\frac{1}{\alpha_{k-2l}}+\alpha_{k-2-2l}^*\right)^2}\frac{(\alpha_{k-2l})'_{x_k}}{(\alpha_{k-2l})^2}\right)=$$

$$=\sum_{l=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}(\alpha_{k-2l})'_{x_k}\left(\frac{x_{k-1-2l}-1+(\alpha_{k-2-2l}^*)^2}{(\alpha_{k-2l}(x_{k-1-2l}+\alpha_{k-2-2l}^*)+1)^2}\right).$$

Из (2.25), следует что $(\alpha_{k-2l})'_{x_k}>0$, для всех l, а значит и вся сумма тоже положительна.

Покажем, что вторая сумма из (2.27) всегда не отрицательна.

Из (2.24) и (2.26) получаем, что сумма знакочередующаяся и начинается с положительного слагаемого при $\nu=k$. Сгруппируем слагаемые по два. Если в сумме нечетное количество слагаемых, то последнее слагаемое можно отбросить, ибо оно положительно, от этого сумма только уменьшится. Воспользуемся (2.19), (2.24), (2.26) и оценим сумму снизу

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(1+\alpha_{\nu+1})\alpha_{\nu+1}(-\alpha_\nu^*)'_{x_k}}{(\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu^*)^2}=\sum_{\nu=k}^{n}\frac{(1+\alpha_{\nu+1})\alpha_{\nu+1}(-\alpha_\nu^*)'_{x_k}}{(\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu^*)^2}\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-k-1}{2}\right]}\left(-\frac{(1+\alpha_{k+1+2l})\alpha_{k+1+2l}(\alpha_{k+2l}^*)'_{x_k}}{(\alpha_{k+1+2l}+\alpha_{k+2l}^*)^2}-\frac{(1+\alpha_{k+2+2l})\alpha_{k+2+2l}(\alpha_{k+1+2l}^*)'_{x_k}}{(\alpha_{k+2+2l}+\alpha_{k+1+2l}^*)^2}\right)=$$

$$\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-k-1}{2}\right]}\left(-\frac{\left(1+x_{k+1+2l}+\frac{1}{\alpha_{k+2+2l}}\right)\left(x_{k+1+2l}+\frac{1}{\alpha_{k+2+2l}}\right)(\alpha^*_{k+2l})'_{x_k}}{\left(x_{k+1+2l}+\frac{1}{\alpha_{k+2+2l}}+\alpha^*_{k+2l}\right)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(1+\alpha_{k+2+2l})\alpha_{k+2+2l}}{\left(\alpha_{k+2+2l}+\frac{1}{x_{k+1+2l}+\alpha^*_{k+2l}}\right)^2}\frac{(-\alpha^*_{k+2l})'_{x_k}}{(x_{k+1+2l}+\alpha^*_{k+2l})^2}\right)=$$

$$=\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-k-1}{2}\right]}(-\alpha^*_{k+2l})'_{x_k}\left(\frac{(\alpha_{k+2+2l}+x_{k+1+2l}\alpha_{k+2+2l}+1)(x_{k+1+2l}\alpha_{k+2+2l}+1)}{(\alpha_{k+2+2l}(x_{k+1+2l}+\alpha^*_{k+2l})+1)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(1+\alpha_{k+2+2l})\alpha_{k+2+2l}}{(\alpha_{k+2+2l}(x_{k+1+2l}+\alpha^*_{k+2l})+1)^2}\right)>0$$

Получили, что производная положительна при $k\leqslant n+1$, значит функция $G_n(\overline{x})$ возрастает по первым $n+1$ аргументам. Доказательство леммы 2.1 завершено.

Из леммы 2.1 получаем

Следствие 2.1. *Для любого набора $\overline{x}$ и $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$G_n(\overline{x})\geqslant G_n(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n+1},x_{n+2},\dots). \tag{2.28}$$

Возьмем вещественное число z, для него рассмотрим набор $\overline{z}=(z,z,\dots)$ и определим число

$$S(z)=\frac{(1-\alpha(\overline{z}))(z+\alpha(\overline{z}))}{z+2\alpha(\overline{z})}. \tag{2.29}$$

Лемма 2.2. *Для любого $z\in[1,+\infty)$ выполняется неравенство*

$$|G_n(\overline{z})-S(z)n|\leqslant 4.$$

Доказательство. Для $\overline{z}=(z,z,\dots)$ выполняется свойство $\alpha^*_\nu(\overline{z})=\frac{p_\nu(\overline{z})}{q_\nu(\overline{z})}$, которые позволяют записать разность (2.21) следующим образом

$$\alpha(\overline{z})-\alpha^*_\nu(\overline{z})=\frac{(-1)^\nu}{q^2_\nu(\overline{z})(\alpha_{\nu+1}(\overline{z})+\alpha^*_\nu(\overline{z}))}.$$

Запишем $G_n(\overline{z})$ следующим образом

$$G_n(\overline{z})=\sum_{\nu=1}^{n}S(z)+\sum_{\nu=1}^{n}(S_\nu(\overline{z})-S(z)).$$

Воспользуемся (2.15) и покажем, что ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(S_\nu(\overline{x})-S(z))$ сходится абсолютно

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|S_\nu(\overline{z})-S(z)|=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{(1-\alpha_\nu^*(\overline{z}))\alpha_{\nu+1}(\overline{z})}{\alpha_{\nu+1}(\overline{z})+\alpha_\nu^*(\overline{z})}-\frac{(1-\alpha(\overline{z}))\alpha_{\nu+1}(\overline{z}))}{\alpha_{\nu+1}(\overline{z})+\alpha(\overline{z})}\right|=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1}+1)}{(\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu^*)^2(\alpha_{\nu+1}+\alpha)q_\nu^2(\overline{z})}\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{q_\nu^2(\overline{z})}\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{4}{2^\nu}=4,$$

откуда

$$|G_n(\overline{z})-S(z)n|\leqslant 4,$$

что и требовалось доказать. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Пусть* $\overline{x}=(z_1,z_2,\ldots,z_{n+1},x_{n+2},\ldots)$ *и* $\overline{y}=(z_1,z_2,\ldots,z_{n+1},y_{n+2},\ldots)$, *тогда*

$$|G_n(\overline{x})-G_n(\overline{y})|<1.$$

Доказательство. При $\nu\leqslant n+1$ для функций $\alpha_\nu^*(\overline{x})$ и $\alpha_\nu^*(\overline{y})$ выполняется равенство

$$\alpha_\nu^*(\overline{x})=\alpha_\nu^*(\overline{y}).$$

Так как $\alpha_\nu(\overline{x})=[x_\nu;x_{\nu+1},\ldots,x_{n+1},a_{n+2},\ldots]$ и $\alpha_\nu(\overline{y})=[x_\nu;x_{\nu+1},\ldots,x_{n+1},b_{n+2},\ldots]$, то значения обеих функций лежат между числами $\frac{p_{n-\nu+1}(\overline{x})}{q_{n-\nu+1}(\overline{x})}$ и $\frac{p_{n-\nu+1}(\overline{x})+p_{n-\nu}(\overline{x})}{q_{n-\nu+1}(\overline{x})+q_{n-\nu}(\overline{x})}$ [12]. Неравенство (2.15) позволяет оценить расстояние между ними:

$$|\alpha_\nu(\overline{x})-\alpha_\nu(\overline{y})|<\frac{1}{q_{n-\nu+1}(\overline{x})(q_{n-\nu}(\overline{x})+q_{n-\nu+1}(\overline{x}))}\leqslant\frac{1}{2^{n-\nu}}.$$

Оценим разность

$$|S_\nu(\overline{x})-S_\nu(\overline{y})|=\left|\frac{(1-\alpha_\nu^*(\overline{x}))\alpha_{\nu+1}(\overline{x})}{\alpha_\nu^*(\overline{x})+\alpha_{\nu+1}(\overline{x})}-\frac{(1-\alpha_\nu^*(\overline{y}))\alpha_{\nu+1}(\overline{y})}{\alpha_\nu^*(\overline{y})+\alpha_{\nu+1}(\overline{y})}\right|=$$

$$=(1-\alpha_\nu^*(\overline{x}))\left|\frac{\alpha_{\nu+1}(\overline{x})\alpha_\nu^*(\overline{x})-\alpha_{\nu+1}(\overline{y})\alpha_\nu^*(\overline{x})}{(\alpha_\nu^*(\overline{x})+\alpha_{\nu+1}(\overline{x}))(\alpha_\nu^*(\overline{x})+\alpha_{\nu+1}(\overline{y}))}\right|\leqslant$$

$$\leqslant(1-\alpha_\nu^*(\overline{x}))\alpha_\nu^*(\overline{x})|\alpha_{\nu+1}(\overline{x})-\alpha_{\nu+1}(\overline{y})|\leqslant\frac{1}{4}|\alpha_{\nu+1}(\overline{x})-\alpha_{\nu+1}(\overline{y})|\leqslant\frac{1}{2^{n-\nu+1}}.$$

Далее

$$|G_n(\overline{z}){-}G_n(\overline{y})| = \left|\sum_{\nu=1}^{n} S_\nu(\overline{z}) - \sum_{\nu=1}^{n} S_\nu(\overline{y})\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |S_\nu(\overline{z}){-}S_\nu(\overline{y})| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2^{n-\nu+1}}{<}1.$$

Доказательство леммы 2.3 завершено.

Следствие 2.2. *Для* $\overline{y} = (\underbrace{z, \ldots, z}_{n+1}, y_{n+2} \ldots)$ *из лемм 2.2 и 2.3 получаем что*

$$|G_n(\overline{y}) - S(z)n| < 5. \tag{2.30}$$

Теперь мы завершим доказательство пункта 2) теоремы 2. Из(2.14), (2.28), (2.29) и (2.30) получаем, что для любого набора $\overline{x}$ выполняется

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{I_{\alpha(\overline{x})}(t)}{N} = \liminf_{t\to\infty} \frac{G_N(\overline{x})}{N} = \liminf_{n\to\infty} \frac{G_n(\overline{x})}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{G_n(1, 1, \ldots, 1, y_{n+2}, \ldots)}{n} = S(1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right).$$

Доказательство теоремы III завершено.

2.3. Доказательство теоремы IV.

Лемма 2.4. *Пусть* $\overline{x} = (0; x, z_2, z_3 \ldots,)$, $\overline{y} = (0; y, z_2, z_3 \ldots,)$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *тогда*

$$|G_n(\overline{x}) - G_n(\overline{y})| < 8.$$

Доказательство. Оба числа $\alpha_\nu^*(\overline{x})$ и $\alpha_\nu^*(\overline{y})$ попадают в интервал между числами $\frac{p_{\nu-1}(\overline{x})}{q_{\nu-1}(\overline{x})}$ и $\frac{p_{\nu-1}(\overline{x})+p_{\nu-2}(\overline{x})}{q_{\nu-1}(\overline{x})+q_{\nu-2}(\overline{x})}$ [12], где $\frac{p_\nu(\overline{x})}{q_\nu(\overline{x})}$ - подходящая дробь к $\alpha_\nu^*(\overline{x})$. Это позволяет оценить расстояние между ними:

$$|\alpha_\nu^*(\overline{x}) - \alpha_\nu^*(\overline{y})| < \frac{1}{q_{\nu-1}(\overline{x})(q_{\nu-2}(\overline{x}) + q_{n-1}(\overline{x}))} \leqslant \frac{1}{2^{\nu-2}}.$$

При $\nu \geqslant 2$ выполняется равенство

$$\alpha_\nu(\overline{x}) = \alpha_\nu(\overline{y}).$$

Оценим разность

$$|G_n(\overline{x}) - G_n(\overline{y})| = \left|\sum_{\nu=1}^{n} S_\nu(\overline{x}) - \sum_{\nu=1}^{n} S_\nu(\overline{y})\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |S_\nu(\overline{x}) - S_\nu(\overline{y})| =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{(1-\alpha_\nu^*(\overline{x}))\alpha_{\nu+1}(\overline{x})}{\alpha_\nu^*(\overline{x}) + \alpha_{\nu+1}(\overline{x})} - \frac{(1-\alpha_\nu^*(\overline{y}))\alpha_{\nu+1}(\overline{y})}{\alpha_\nu^*(\overline{y}) + \alpha_{\nu+1}(\overline{y})} \right| =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu+1}(\overline{x}) \left| \frac{\alpha_\nu^*(\overline{y}) - \alpha_\nu^*(\overline{x})\alpha_{\nu+1}(\overline{y}) - \alpha_\nu^*(\overline{x}) + \alpha_\nu^*(\overline{y})\alpha_{\nu+1}(\overline{x})}{(\alpha_\nu^*(\overline{x}) + \alpha_{\nu+1}(\overline{x}))(\alpha_\nu^*(\overline{y}) + \alpha_{\nu+1}(\overline{y}))} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_{\nu+1}(\overline{x})(1+\alpha_{\nu+1}(\overline{y}))}{\alpha_{\nu+1}(\overline{x})\alpha_{\nu+1}(\overline{y})} |\alpha_\nu^*(\overline{y}) - \alpha_\nu^*(\overline{x})| \leqslant 2\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu^*(\overline{y}) - \alpha_\nu^*(\overline{x})| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{8}{2^\nu} = 8.$$

Доказательство леммы 2.4 завершено.

Из следствия 2 и леммы 2.4 получаем, что для набора $\overline{x} = (x_1, \underbrace{z, z, \ldots, z}_{n}, x_{n+2}, \ldots)$ выполняется неравенство

$$|G_n(\overline{x}) - S(z)n| < 13. \tag{2.31}$$

Сумма $G_n(\overline{x})$ зависит от $n+1$ аргумента $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_{n+1}(\overline{x}))$. В дальнейшем рассуждении нам удобно выделить зависимость от последнего аргумента. Для числа $\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]$ через $G_n(\alpha, x)$ будем обозначать сумму для набора $(a_1, a_2, \ldots, a_n, x)$, где $a_i \in \mathbb{N}$ и $x \in (1, +\infty)$.

Обозначим $G_n(\alpha, +\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} G_n(\alpha, x)$ и $G_n(\alpha, 1) = \lim\limits_{x\to 1} G_n(\alpha, x)$.

Лемма 2.5. *Для любых $x, y \in (1, +\infty)$ и любого α выполняется неравенство*

$$|G_{n-1}(\alpha, x) - G_n(\alpha, y)| < 3. \tag{2.32}$$

Доказательство. Из леммы 2.1 и леммы 2.3 получаем

$$0 < G_n(\alpha, +\infty) - G_n(\alpha, 1) < 1.$$

Из формулы (2.9) можно вывести равенство

$$G_n(\alpha, +\infty) = G_{n-1}(\alpha, a_n) + (1 - \alpha_n^*).$$

Объединив эти формулы, получаем неравенство

$$|G_{n-1}(\alpha, a_n) - G_n(\alpha, 1)| < 1.$$

Применим лемму 2.3 для каждой из сумм и получим утверждение.

Лемма 2.5 доказана.

Для функции $S(z)$ выполняются свойства:

1) она монотонно возрастает;

2) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} = S(1) \leqslant S(z) \leqslant S(+\infty) = 1$.

Для любого $d = \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, 1\right)$ можно взять натуральные числа a и b, такие что $S(a) \leqslant d < S(b)$.

Лемма 2.6. *Существует t_{min} такое, что для любого набора $(a_1, \dots, a_k)$ и любого $x \in (1, +\infty)$ при всех $t > t_{min}$ выполняются неравенства:*

$$1) \frac{G_{k+t}(\alpha, x)}{k+t} < d,$$

для всех чисел вида $\alpha = [0; a_1, \dots, a_k, \underbrace{a, \dots, a}_{t}, x]$;

$$2) \frac{G_{k+t}(\beta, x)}{k+t} > d,$$

для всех чисел вида $\beta = [0; a_1, \dots, a_k, \underbrace{b, \dots, b}_{t}, x]$.

Доказательство. Возьмем $\alpha = [0; a_1, \dots, a_k, a, a, \dots]$ и запишем сумму $G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1})$ следующим образом

$$G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1}) = G_k(\alpha, \alpha_{k+1}) + \sum_{\nu=k+1}^{k+t} S_\nu(\alpha).$$

Сумма $\sum\limits_{\nu=k+1}^{k+t} S_\nu(\alpha)$ есть ни что иное как $G_t(\frac{1}{\alpha^*_{k+1}}, \underbrace{a, \dots, a}_{t-1}, \alpha_{k+1})$. Применим лемму 2.4 и получим равенство

$$G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1}) = G_k(\alpha, \alpha_{k+1}) + G_t\left(\frac{1}{\alpha^*_{k+1}}, \underbrace{a, \dots, a}_{t-1}, x\right) =$$

$$= G_k(\alpha, \alpha_{k+1}) + S(a)(t-1) + R, \tag{2.33}$$

где $R < 13$. Найдем предел

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1})}{k+t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{G_k(\alpha, \alpha_{k+1}) + S(a)(t-1) + R}{k+t} = S(a).$$

По лемме 2.1 и лемме 2.3

$$0 < G_n(\alpha, +\infty) - G_n(\alpha, 1) < 1,$$

поэтому для любого x и любого t выполняется неравенство

$$|G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1}) - G_{k+t}(\alpha, x)| < 1.$$

Получаем, что для любого x предел равен

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{G_{k+t}(\alpha, x)}{k+t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1})}{k+t} = S(a) < d.$$

Откуда следует утверждение леммы. Пункт 2 доказывается аналогично.

Лемма 2.6 доказана.

Для последовательности натуральных чисел $\{n_\nu\}$ будем обозначать частичную сумму через $W_t = \sum_{\nu=1}^{t} n_\nu$.

Следствие 2.3. *Существует последовательность натуральных чисел $\{n_\nu\}$, такая что для числа*
$\alpha = [0; \underbrace{a, \ldots, a}_{n_1}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n_2}, \underbrace{a, \ldots, a}_{n_3}, \ldots]$ *выполняются неравенства:*

$$\frac{G_{n_1}(\alpha, +\infty)}{n_1} < d;$$

для четного t выполняется

$$\frac{G_{W_t - 1}(\alpha, 1)}{W_t - 1} < d < \frac{G_{W_t}(\alpha, 1)}{W_t},$$

а для нечетного $t > 1$ выполняется

$$\frac{G_{W_t}(\alpha, +\infty)}{W_t} < d < \frac{G_{W_t - 1}(\alpha, +\infty)}{W_t - 1}.$$

Замечание. При доказательстве следствия 2.3 в качестве n_ν надо брать t_{min} из леммы 2.6.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы IV. Для произвольного d построим число α, такое что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = d.$$

На роль такого числа подойдет α из следствия 2.3. Покажем, что все n_{t+1} ограничены. Пусть t нечетно, тогда

$$\frac{G_{W_t}(\alpha, 1)}{W_t} < \frac{G_{W_t}(\alpha, +\infty)}{W_t} < d,$$

$$\frac{G_{W_{t+1}-1}(\alpha, 1)}{W_{t+1}-1} < d.$$

Обозначим $\tilde{b} = [\underbrace{b; b, \ldots, b}_{n_{t+1}-1}, 1]$. По лемме 2.3 получаем

$$G_{W_t}(\alpha, \tilde{b}) = G_{W_t}(\alpha, 1) + R_1,$$

где $|R_1| < 1$. Воспользуемся (2.33) и распишем сумму $G_{W_{t+1}-1}(\alpha, 1)$.

$$G_{W_{t+1}-1}(\alpha, 1) = G_{W_t}(\alpha, \tilde{b}) + S(b)(n_{t+1} - 1) + R =$$

$$= G_{W_t}(\alpha, 1) + S(b)n_{t+1} + R + R_1 - S(b),$$

где $|R| < 13$.

Получаем неравенство

$$\frac{G_{W_t}(\alpha, 1) + S(b)n_{t+1} + R + R_1 - S(b)}{W_t + n_{t+1} - 1} < d.$$

Находим ограничение

$$n_{t+1} < \frac{dW_t - G_{W_t}(\alpha, 1) - d - R - R_1 + S(b)}{S(b) - d} \leqslant \frac{dW_t - G_{W_t}(\alpha, 1) + 15}{S(b) - d}.$$

Из леммы 2.5 и следствия 2.3 находим ограничение на разность

$$0 < dW_t - G_{W_t}(\alpha, 1) < 3.$$

Обозначим
$$M_1 = \left\lceil \frac{18}{S(b) - d} \right\rceil,$$
где символ $\lceil\cdot\rceil$ означает целая часть сверху.

Пусть t четно, тогда
$$d < \frac{G_{W_t}(\alpha, 1)}{W_t} < \frac{G_{W_t}(\alpha, +\infty)}{W_t},$$
$$d < \frac{G_{W_{t+1}-1}(\alpha, +\infty)}{W_{t+1} - 1}.$$
Обозначим $\tilde{a} = \lim\limits_{x \to +\infty} [\underbrace{a; a, \ldots, a}_{n_{t+1}-1}, x] = [\underbrace{a; a, \ldots, a}_{n_{t+1}-1}]$. По лемме 2.3 и (9) для $\tilde{a}$ получаем
$$G_{W_t}(\tilde{a}) = G_{W_t}(\alpha, 1) + R_2,$$
где $|R_2| < 1$. Подставим
$$G_{W_{t+1}-1}(\alpha, +\infty) = G_{W_t}(\alpha, \tilde{a}) + S(a)(n_{t+1} - 1) + R =$$
$$= G_{W_t}(\alpha, 1) + S(a)n_{t+1} + R + R_2 - S(a),$$
$$d < \frac{G_{W_{t+1}-1}(\alpha, +\infty)}{W_{t+1} - 1} = \frac{G_{W_t}(\alpha, 1) + S(a)n_{t+1} + R + R_2 - S(a)}{W_t + n_{t+1} - 1},$$
$$n_{t+1} < \frac{d + R + R_2 + S(a) + G_{W_t}(\alpha, 1) - dW_t}{d - S(a)} \leqslant \frac{16 + G_{W_t}(\alpha, 1) - dW_t}{d - S(a)}.$$
Из леммы 2.5 и следствия 3 находим ограничение на разность
$$0 < G_{W_t}(\alpha, 1) - dW_t < 3.$$
Обозначим
$$M_2 = \left\lceil \frac{19}{d - S(a)} \right\rceil.$$

В обоих случаях все n_{t+1} ограничены константой $M = \max\{M_1, M_2\}$.

Для $\frac{G_n(\alpha)}{n}$ и $\frac{G_{n+k}(\alpha)}{n+k}$ из (2.9), (2.10) и (2.12) распишем разность
$$\left|\frac{G_{n+k}}{n+k} - \frac{G_n}{n}\right| = \left|\frac{G_n + \sum\limits_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu}{n+k} - \frac{G_n}{n}\right| = \left|\frac{\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu - k\frac{G_n}{n}}{n+k}\right|.$$

Так как $0 < \sum\limits_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu < k$ и $0 < k\frac{G_n}{n} < k$, то $\left|\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu - k\frac{G_n}{n}\right| < k$ и можно записать неравенство

$$\left|\frac{G_{n+k}}{n+k} - \frac{G_n}{n}\right| < \frac{k}{n+k}. \tag{2.34}$$

Для последовательности $\frac{G_n(\alpha)}{n}$ выполняются свойства:

1) $\left|\frac{G_n}{n} - \frac{G_{n+1}}{n+1}\right| < \frac{1}{n}$ из (2.34);

2) $\left|\frac{G_{W_t}}{W_t} - d\right| < \frac{3}{W_t}$ из леммы 2.5 и следствия 2.3;

3) $W_{t+1} - W_t < M$ из ограниченности n_t.

Пусть $n \in [W_t; W_{t+1})$, тогда из свойств 1, 2 и 3 получаем $\left|\frac{G_n}{n} - d\right| < \frac{M+3}{W_t}$. Для $n > M$ получим, что $n - M < W_t$ и $\left|\frac{G_n}{n} - d\right| < \frac{M+3}{n-M}$.

Возьмем предел от правой и левой частей

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{G_n}{n} - d\right| < \lim_{n\to+\infty}\frac{M+3}{n-M} = 0,$$

или

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{G_n}{n} = d.$$

Случай $d = 1$ получается для числа, у которого неполные частные образуют возрастающую последовательность. Теорема IV доказана.

2.4. Эргодические свойства преобразования Гаусса.

Нам понадобятся некоторые сведения из эргодической теории. Основные нужные нам понятия и утверждения имеются в книге [7], также [31], [32].

Рассмотрим преобразование Гаусса $T : [0; 1) \to [0; 1)$, которое есть перемешивающий эндоморфизм, см. [7], задаваемый формулой

$$Tx = \begin{cases} \left\{\frac{1}{x}\right\}, & \text{при } x \neq 0; \\ \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Если для x известно его разложение в цепную дробь $x = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$, то

$$Tx = [0, a_2, a_3, \ldots].$$

Инвариантная мера для преобразования Гаусса задается формулой

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln 2} \int\limits_A \frac{1}{1+x} dx.$$

Естественным расширением для преобразования Гаусса будет автоморфизм $\widehat{T} : [0;1)^2 \to [0;1)^2$, определяемый как

$$\widehat{T}(x,y) = \begin{cases} \left(\left\{ \frac{1}{x} \right\}, \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]+y} \right), & \text{при } x \neq 0; \\ \\ (0,y), & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

У естественного расширения $\widehat{T}$ инвариантная мера есть

$$\mu_2(A) = \frac{1}{\ln 2} \int\int\limits_A \frac{1}{(1+xy)^2} dxdy.$$

Преобразование $\widehat{T}$ обладает свойством перемешивания, см. [7]. В частности, преобразование $\widehat{T}$ эргодично [31], [32], и, согласно теореме Биркгофа-Хинчина, для любой абсолютно интегрируемой функции $f(x,y)$ асимптотическое равенство

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(\widehat{T}^{\nu}(x,y)) = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x,y)dxdy}{(1+xy)^2} \tag{2.35}$$

будет выполнено для почти всех $(x,y) \in [0,1)^2$.

Если на точку (x,y) подействовать преобразованием $\widehat{T}^{\nu}$, то

$$\widehat{T}^{\nu}(x,y) = \left(T^{\nu}(x), \frac{q_{\nu-1} + yp_{\nu-1}}{q_{\nu} + yp_{\nu}} \right). \tag{2.36}$$

где $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ - подходящие дроби для x.

Рассмотрим преобразование $\widehat{\widehat{T}} : [0,1)^2 \to [0,1)^2$, которое определим так

$$\widehat{\widehat{T}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{T}(z_1) \\ \widehat{T}(z_2) \end{pmatrix}, \; z_1, z_2 \in [0,1)^2.$$

Его инвариантная мера есть $\mu_2(z_1) \times \mu_2(z_2)$. Преобразование $\widehat{\widehat{T}}$ эргодично, это следует из того, что $\widehat{T}$ обладает свойством перемешивания, см. [7].

Следующая теорема доказана Халасом, см [23].

Теорема Халаса. *Для любой интегрируемой функции $\varphi(p)$ и любого эргодического преобразования T пространства R конечной меры выражение*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(T^\nu p) - n \int\limits_R \varphi(p) d\mu$$

для почти всех p, меняет знак бесконечное число раз в слабом смысле, т.е. эта разность не может быть постоянно положительной или отрицательной.

Применяя эту теорему к эргодическому преобразованию $\widehat{\widehat{T}}$, получим

Следствие 2.4. *Для почти всех $(z_1, z_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) \in [0,1)^2 \times [0,1)^2$ и для любой μ_2- интегрируемой функции $f(z) = f(x,y)$ разностная функция*

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\widehat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^{n} f(\widehat{T}^\nu z_2)$$

меняет знак бесконечное число раз в слабом смысле.

2.5. Доказательства теоремы II.

Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \frac{1-y}{1+xy}. \tag{2.37}$$

Поскольку

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{1-y}{(1+xy)^3} dxdy = \frac{\ln 2}{2},$$

то применяя теорему Биркгофа-Хинчина (2.35), приходим к равенству

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(\widehat{T}^\nu(x,y)) = \frac{1}{2}. \tag{2.38}$$

Отметим, что если $(x,y) = \left(\frac{1}{\alpha_1}, 0\right)$, то $f(\widehat{T}^\nu(x,0)) = \frac{(1-\alpha_\nu^*)}{1+\frac{\alpha_\nu^*}{\alpha_{\nu+1}}}$, и $G_n(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\widehat{T}^\nu(x,0))$. Следующее утверждение, близко к использовавшемуся в работе [19].

Лемма 2.7. *Для любого $(x,y) \in [0;1)^2$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| f(\widehat{T}^{\nu}(x,y)) - f(\widehat{T}^{\nu}(x,0)) \right| < 4.$$

Доказательство. Покажем, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(f(\widehat{T}^{\nu}(x,0)) - f(\widehat{T}^{\nu}(x,y)) \Big)$$

сходится абсолютно. Обозначим $\tilde{\alpha}_{\nu} = \frac{q_{\nu-1}+yp_{\nu-1}}{q_{\nu}+yp_{\nu}}$. Далее

$$\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\widehat{T}^{\nu}(x,0)\right) = \sum_{\nu}^{n} \frac{(1-\alpha_{\nu}^{*})\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}+\alpha_{\nu}^{*}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\widehat{T}^{\nu}(x,y)\right) = \sum_{\nu}^{n} \frac{(1-\tilde{\alpha}_{\nu})\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}+\tilde{\alpha}_{\nu}}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |f(\widehat{T}^{\nu}(x,y)) - f(\widehat{T}^{\nu}(x,0))| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{(1-\tilde{\alpha}_{\nu})\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}+\tilde{\alpha}_{\nu}} - \frac{(1-\alpha_{\nu}^{*})\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}+\alpha_{\nu}^{*}} \right| =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+1} \left| \frac{\tilde{\alpha}_{\nu} - \alpha_{\nu}^{*} + \tilde{\alpha}_{\nu}\alpha_{\nu+1} - \alpha_{\nu}^{*}\alpha_{\nu+1}}{(\alpha_{\nu+1}+\alpha_{\nu}^{*})(\alpha_{\nu+1}+\tilde{\alpha}_{\nu})} \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1+\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}} |\tilde{\alpha}_{\nu} - \alpha_{\nu}^{*}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2y}{q_{\nu}(q_{\nu}+yp_{\nu})} \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{q_{\nu}(q_{\nu}+p_{\nu})} < 4.$$

Лемма 2.7 доказана.

Следствие 2.5. *Для любого $y \in [0;1]$ выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(\widehat{T}^{\nu}(x,y)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(\widehat{T}^{\nu}(x,0)).$$

Обозначим через R множество тех точек $(x,y) \in [0,1)^2$, для которых выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(\widehat{T}^{\nu}(x,y)) = \frac{1}{2}.$$

Мера множества R равна 1. Рассмотрим проекцию

$$\tilde{R} = \{x \in [0,1) | \exists y : (x,y) \in R\}.$$

Мера множества $\tilde{R}$ тоже будет равна 1. Согласно формуле (2.14) и следствию 5 выполняется равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{G_n(\alpha)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(\widehat{T}^\nu(x,0)) = \frac{1}{2}.$$

Пункт 1) теоремы II доказан.

Для доказательства пункта 2) теоремы II нам понадобится теорема Леви [30].

Теорема Леви. *Для почти всех* $\alpha \in (0;1)$ *имеет место следующее равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln q_n}{n} = \frac{\pi^2}{12\ln 2}.$$

Из теоремы Леви получаем, что для почти всех α выполнено равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{N(\alpha,t)} = \frac{\pi^2}{12\ln 2}.$$

Пункт 2) теоремы 1 получается из пункта 1) теоремы 1 и последнего равенства. Теорема 2 полностью доказана.

2.6. Доказательство теоремы V.

Снова рассматриваем функцию f определенную в (2.37). Пусть $R_1 \subset [0,1)^2 \times [0,1)^2$ это множество для тех точек $(z_1, z_2) = ((x_1,y_1),(x_2,y_2))$, для которых выполняется следствие 2.4. Его мера равняется 1. Для $(z_1,z_2) \in R_1$ рассмотрим только те значения n для которых суммы

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\widehat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^{n} f(\widehat{T}^\nu z_2), \qquad \sum_{\nu=1}^{n+1} f(\widehat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^{n+1} f(\widehat{T}^\nu z_2)$$

имеют различные знаки. Тогда, поскольку каждое слагаемое в суммах не превосходит единицы, видим, что

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f(\widehat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^{n} f(\widehat{T}^\nu z_2)\right| \le 2.$$

Рассмотрим проекцию

$$\tilde{R}_1 = \{(x_1, x_2) \in [0,1)^2 | \exists y_1 \exists y_2 : (x_1, y_1, x_2, y_2) \in R_1\}.$$

Мера множества $\tilde{R}_1$ тоже равна 1. Для $(\alpha, \beta) \in \tilde{R}_1$ и рассматриваемых значений n с учетом леммы 2.7 получаем

$$\left| \int_1^{q_n} \psi_\alpha(t) dt - \int_1^{r_n} \psi_\beta(t) dt \right| = |G_n(\alpha) - G_n(\beta)| =$$

$$= \left| \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\widehat{T}^\nu(\alpha, 0)\right) - \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\widehat{T}^\nu(\beta, 0)\right) \right| \leq 10.$$

Теорема V доказана.

2.7. Вычисление интеграла для некоторого класса чисел

В данном параграфе мы выведем формулы для вычисления пределов $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)}$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t}$ в тех случаях когда α есть квадратичная иррациональность. И докажем в каких случаях

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = 0.$$

Запишем несколько определений.

Определение 2.1 Комплексное число α называется алгебраическим, если существует многочлен $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $P(x) \not\equiv 0$, с условием $P(\alpha) = 0$. Среди всех таких многочленов выберем многочлен наименьшей степени и со старшим коэффициентом 1. Такой многочлен определяется по α единственным способом и называется минимальным многочленом α.

Определение 2.2 Степенью алгебраического числа α называется степень его минимального многочлена.

Определение 2.3 Квадратичная иррациональность это алгебраическое число второй степени.

Определение 2.4 Бесконечная непрерывная дробь $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ называется периодической, если существуют целые числа $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, такие что

$$a_{m+n} = a_n \quad \text{при всех} \quad n \geqslant k.$$

Будем обозначать такую дробь следующим образом

$$[a_0; a_1, \ldots, a_k - 1, \overline{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m-1}}].$$

Известна теорема, см. [14]

Теорема 2.1 *Число α разлагается в периодическую цепную дробь тогда и только тогда, когда α - квадратичная иррациональность.*

Для чисто периодической цепной дроби, т.е. $[0; \overline{a_1, \ldots, a_k}]$ число $\alpha = [0; \overline{a_1, \ldots, a_k}]$ находится из уравнения

$$\alpha = \frac{p_{k-1}\alpha + p_{k-2}}{q_{k-1}\alpha + q_{n-2}}. \tag{2.39}$$

Дадим еще определение эквивалентности двух вещественных чисел.

Определение 2.5 Два иррациональных числа α и β называются эквивалентными, если существуют целые числа a, b, c, d связанные равенством $ad - bc = \pm 1$, для которых

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}.$$

Теорема 2.2. *Пусть $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ и $\beta = [b_0; b_1, b_2, \ldots]$ – иррациональные числа. Они эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют целые числа u и v, такие что $a_{u+n} = b_{v+n} (n = 1, 2, \ldots)$.*

Нам еще понадобятся некоторые формулы из теории о континуантах, см. [3]

Определение 2.6 Континуанта $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ содержит n переменных и определяется рекурентно следующим образом:

$\langle \rangle = 1,$

$\langle a_1 \rangle = a_1,$

$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = a_n \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle + \langle a_1, \ldots, a_{n-2} \rangle.$

Континуанты связаны с цепными дробями

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{\langle a_0, \ldots, a_n \rangle}{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle}.$$

Для континуанта верно более общее правило

$$\langle a_1,\ldots,a_m,a_{m+1},\ldots,a_{m+n}\rangle = \langle a_1,\ldots,a_m\rangle\langle a_{m+1},\ldots,a_{m+n}\rangle +$$

$$+\langle a_1,\ldots,a_{m-1}\rangle\langle a_{m+2},\ldots,a_{m+n}\rangle \tag{2.40}$$

Применив эту формулу к цепными дроби $[0;a_1,a_2,\ldots,a_n]$ получим

$$[0;a_1,a_2,\ldots,a_n] = \frac{\langle a_2,\ldots,a_n\rangle}{\langle a_1,\ldots,a_n\rangle}. \tag{2.41}$$

В дальнейшем $\alpha \in (0;1)$, поэтому вместо записи $\alpha = [0;a_1,a_2,\ldots]$ будем использовать более краткое $\alpha = [a_1,a_2,\ldots]$. Обозначим через A и A^- последовательности натуральных чисел произвольной длины $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ и $(a_1,a_2,\ldots,a_{k-1})$ соответственно. Отношение $a_n \sim b_n$ означает, что предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$. Доказательство следующей леммы можно найти в статье [2].

Лемма 2.8.

$$\langle\underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle \sim c(\langle A\rangle + \langle A^-\rangle\alpha)^n,$$

где $\alpha = \boxed{A}$ – квадратичная иррациональность и вычисляется по формуле (2.39), c – некоторая, зависящая от A, но не зависящая от n константа.

Следствием леммы 2.8 и формулы (2.40) будет

Утверждение 2.1. *Для*

$$\langle b_1,b_2\ldots,b_k,\underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle \sim c_1(\langle A\rangle + \langle A^-\rangle\alpha)^n$$

где c_1 зависит от набора $(b_1,\ldots,b_k)$ и A.

Доказательство. Применим формулу (2.40) к континуанту

$$\langle b_1,b_2\ldots,b_k,\underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle = \langle b_1,b_2\ldots,b_k\rangle\langle\underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle +$$

$$+\langle b_1,b_2\ldots,b_{k-1}\rangle\langle a_2,\ldots,a_k\underbrace{A,\ldots,A}_{n-1}\rangle.$$

Разделим обе части на континуант $\langle\underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle$ и получим равенство

$$\frac{\langle b_1, b_2\ldots, b_k, \underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle}{\langle\underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle} = \langle b_1, b_2\ldots, b_k\rangle + \langle b_1, b_2\ldots, b_{k-1}\rangle\frac{\langle a_2,\ldots,a_k\,\underbrace{A,\ldots,A}_{n-1}\rangle}{\langle\underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle}.$$

По формуле (2.41) при $n\to+\infty$ дробь $\frac{\langle a_2,\ldots,a_k\,\underbrace{A,\ldots,A}_{n-1}\rangle}{\langle\underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle}\to\alpha$. Отсюда видим, что

$$\frac{\langle b_1, b_2\ldots, b_k, \underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle}{\langle\underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle}\to \langle b_1, b_2\ldots, b_k\rangle + \langle b_1, b_2\ldots, b_{k-1}\rangle\alpha,$$

где $\alpha = [\overline{A}]$. Можно записать таким образом

$$\langle b_1, b_2\ldots, b_k, \underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle \sim \left(\langle b_1, b_2\ldots, b_k\rangle + \langle b_1, b_2\ldots, b_{k-1}\rangle\alpha\right)\langle\underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle.$$

Применим лемму 2.8 и получим, что

$$\langle b_1, b_2\ldots, b_k, \underbrace{A,\ldots,A}_{n}\rangle \sim c_1(\langle A\rangle + \langle A^-\rangle\alpha)^n,$$

где $c_1 = c\left(\langle b_1, b_2\ldots, b_k\rangle + \langle b_1, b_2\ldots, b_{k-1}\rangle\alpha\right)$.

Утверждение 2.1 доказано.

Аналогично доказывается, что если α эквивалентно β, то

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{q_n}{q'_n} = C,$$

где q_n и q'_n знаменатели подходящих дробей для α и β соответственно, а константа C вычисляется по α и β.

Следствием этого будет равенство

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln q_n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln q'_n}{n}. \tag{2.42}$$

Лемма 2.9. *Для двух эквивалентных чисел α и β верны равенства*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha,t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{I_\beta(t)}{N(\alpha,t)} \quad\text{и}\quad \lim_{t\to\infty}\frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \lim_{t\to\infty}\frac{I_\beta(t)}{\ln t}.$$

Доказательство. Пусть $v \leqslant u \leqslant N$. Возьмем два эквивалент числа $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_v, r_1, r_2, \ldots]$ и $\beta = [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_u, r_1, r_2, \ldots]$.

Распишем разность $G_N(\alpha) - G_N(\beta)$ следующим образом

$$G_N(\alpha) - G_N(\beta) = \sum_{\nu=1}^{N} S_\nu(\alpha) - \sum_{\nu=1}^{N} S_\nu(\beta) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{v} S_\nu(\alpha) + \sum_{\nu=v+1}^{N} S_\nu(\alpha) - \sum_{\nu=1}^{u} S_\nu(\beta) - \sum_{\nu=u+1}^{N} S_\nu(\beta) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{v} S_\nu(\alpha) - \sum_{\nu=1}^{u} S_\nu(\beta) + \sum_{\nu=N-u+v+1}^{N} S_\nu(\alpha) + \sum_{\nu=v+1}^{N-u+v} S_\nu(\alpha) - \sum_{\nu=u+1}^{N} S_\nu(\beta).$$

Так как $0 \leqslant S_\nu(\alpha) < 1$, то

$$\left| \sum_{\nu=1}^{v} S_\nu(\alpha) - \sum_{\nu=1}^{u} S_\nu(\beta) + \sum_{\nu=N-u+v+1}^{N} S_\nu(\alpha) \right| \leqslant 2u - 1$$

По лемме 2.4

$$\left| \sum_{\nu=v+1}^{N-u+v} S_\nu(\alpha) - \sum_{\nu=u+1}^{N} S_\nu(\beta) \right| \leqslant 8.$$

Таким образом

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{G_N(\alpha) - G_N(\beta)}{N} = 0,$$

а значит и

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} = \lim_{N\to+\infty} \frac{G_N(\alpha)}{N} = \lim_{N\to+\infty} \frac{G_N(\beta)}{N} = \lim_{N\to+\infty} \frac{I_\beta(t)}{N}.$$

Первое равенство доказано.

Для доказательства второго равенства запишем предел таким образом

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} \frac{N}{\ln t}.$$

Как видно выше для эквивалентных чисел оба отношения равны.

Лемма 2.9 доказана.

Перейдем к вычислению пределов $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N}$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t}$ для квадратичных иррациональностей.

Будем рассматривать числа вида $\alpha = [\overline{a_1, a_2, \ldots, a_k}]$. Обозначим $\overleftarrow{\alpha} = [\overline{a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1}]$. Как известно $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle = \langle a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1\rangle$. Обозначим набор из $k+2$ чисел $X = \left(\frac{1}{\overleftarrow{\alpha}}, a_1, a_2, \ldots, a_k, \alpha\right) = \left(\frac{1}{\overleftarrow{\alpha}}, A, \alpha\right)$.

Лемма 2.10. *Для чисел* $\alpha = [\overline{a_1, a_2, \ldots, a_k}]$ *верны равенства*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} = \frac{G_k(X)}{k},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \frac{G_k(X)}{k\ln(\langle A\rangle + \langle A^-\rangle\alpha)}.$$

Доказательство. Для любого N и $n = \left[\frac{N}{k}\right]$ запишем равенство $G_N(\alpha) = G_{nk}(\alpha) + G_{N-nk}\left(\frac{1}{\alpha^*_{nk}}, A, \alpha\right)$. Конечный набор X можно записать в виде бесконечного набора, тогда имеет место равенство $G_N(X) = G_{nk}(X) + G_{N-nk}\left(\frac{1}{\overleftarrow{\alpha}}, A, \alpha\right)$. По лемме 2.4

$$|G_{nk}(\alpha) - G_N(X)| < 8 \text{ и } \left|G_{N-nk}\left(\frac{1}{\alpha^*_{nk}}, A, \alpha\right) - G_{N-nk}(X)\right| < 8.$$

Значит

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} = \lim_{N\to+\infty} \frac{G_N(X)}{N}.$$

Заметим, что $G_N(X) = \left[\frac{N}{k}\right] G_k(X) + G_{N-nk}(X)$. Подставим

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{G_N(X)}{N} = \lim_{N\to+\infty} \frac{\left[\frac{N}{k}\right] G_k(X) + G_{N-nk}(X)}{N} = \frac{G_k(X)}{k}.$$

Первое равенство доказано. Для доказательства второго равенства воспользуемся утверждением 2.1.

Пусть выполняется неравенство $q_{nk} \leqslant t < q_{(n+1)k}$, тогда

$$\frac{\ln q_{nk}}{n} \leqslant \frac{\ln t}{n} < \frac{\ln q_{(n+1)k}}{n}.$$

Применим утверждение 2.1 и получим равенство

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\ln q_{nk}}{n} = \lim_{N\to+\infty} \frac{\ln t}{n} = \lim_{N\to+\infty} \frac{\ln q_{(n+1)k}}{n} = \ln\left(\langle A\rangle + \langle A^-\rangle\alpha\right),$$

которое вместе с равенством из первой части леммы надо подставить в

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} \frac{N}{\ln t}.$$

Лемма 2.10 доказана.

Например, если $\alpha = [\overline{a}]$, то

$$\alpha = \frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln q_n}{n} = \ln\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right) = \ln(a+\alpha)$$

и

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} = \frac{1-\alpha}{1+2\alpha^2}, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \frac{1-\alpha}{(1+2\alpha^2)\ln(a+\alpha)}.$$

Для золотого сечения $\tau = [1; 1, 1, \ldots]$ эти пределы равны

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) : \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

Лемма 2.11. *Пусть $\alpha = [a_1, a_2, \ldots]$. Если для всех i выполняется неравенство $a_i \leqslant M$, то*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} > \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) : \ln(M+1).$$

Доказательство. Обозначим через r_n знаменатели подходящих дробей для числа $\beta = \left[\overline{M}\right]$ и q_n – знаменатели подходящих дробей для числа α. Так как для всех i выполняется неравенство $a_i \leqslant M$, то $q_n \leqslant r_n$ для всех n. Таким образом

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln q_n}{n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\ln r_n}{n} = \ln(M+\beta) < \ln(M+1).$$

Применим неравенство из теоремы III п. 2 и неравенство, полученное выше

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \lim_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{N} \frac{N}{\ln t} > \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) : \ln(M+1).$$

Лемма 2.11 доказана.

Следствие 2.6. *Если $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = 0$, то неполные частные в разложении числа α в непрерывную дробь неограничены.*

Лемма 2.12. *Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \gamma$ (γ может равняться $+\infty$), тогда*

$$\frac{1}{\ln 2 + \ln\gamma} < \lim_{t\to+\infty} \frac{N}{\ln t} < \frac{1}{\ln\gamma}.$$

Доказательство. Для доказательства леммы воспользуемся неравенством, см. [12]

$$a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n < q_n < 2^n a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Применив его, можно записать такие неравенства

$$a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_N < q_N \leqslant t < q_{N+1} < 2^{N+1} a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{N+1}.$$

Проведем цепочку преобразований

$$\ln(a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_N)^{1/N} < \frac{\ln q_N}{N} \leqslant \frac{\ln t}{N} < \frac{q_{N+1}}{N} < \ln(2^{N+1})^{1/N} + \ln(a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{N+1})^{1/N}.$$

Устремим t в бесконечность и воспользуемся условием леммы

$$\ln\gamma \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln q_N}{N} \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{N} \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{q_{N+1}}{N} \leqslant \ln 2 + \ln\gamma.$$

Получаем неравенство

$$\ln\gamma \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{N} \leqslant \ln 2 + \ln\gamma.$$

Лемма 2.12 доказана.

Следствие 2.7 *Если* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = +\infty$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = 0$.

Вычислим значение пределов для числа e. Разложение числа e в цепную дробь выглядит так $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots, 1, 1, 2n-2, 1, 1, 2n, \ldots]$. Для вычисления предела $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{I_e(t)}{N}$ разложение числа e в цепную дробь можно рассматривать, как периодическое $[\overline{1, 1, +\infty}]$ и считать, что $X = \left(\frac{1}{\infty}, 1, 1, \infty\right)$.

Тогда $G_1(X) = 1$, $G_2(X) = 0$ и $G_3(X) = 0,5$ и получаем, что

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{I_e(t)}{N} = \frac{1}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3n]{2^n n!} = +\infty$, то по следствию 2.7 предел $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{I_e(t)}{\ln t} = 0$.

Список литературы

1. Ахунжанов, Р.К. О векторах заданного диофантова типа II/ Р.К.Ахунжанов// Математический сборник. 2013. №204:4. С.3–24.
2. Гайфулин, Д.Р. Производные двух функций семейства Денжуа–Тихого–Уитца/ Д.Р.Гайфулин// Алгебра и анализ. 2015. №27:1. С.74–124.
3. Грэхем, Р. Конкретная математика. Основание информатики/ Р.Грэхем, Д.Кнут, О.Паташник; пер. с англ. М.:Мир, 1998. 703 с., ил.
4. Иванов, В.А. О начале луча в спектре Дирихле одной задачи теории диофантовых приближений/ В.А.Иванов// Записки науч. сем. ЛОМИ. 1980. №93. С.164–185.
5. Иванов, В.А. О рациональных приближениях действительных чисел/ В.А.Иванов// Математические заметки. 1978. т. 23, №1. С.3-26.
6. Касселс, Дж.В.С. Введение в теорию диофантовых приближений/Дж.В.С.Касселс. ИЛб М.:1961. 213 с.
7. Корнфельд, И.П. Эргодическая теория/ И.П.Корнфельд, Я.Г.Синай, С.В.Фомин. М.:Наука, 1980. 384 с.
8. Малышев, А.В. Спектры Маркова и Лагранжа (обзор литературы)/ А.В.Малышев// Записки науч. сем. ЛОМИ. Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л. 1977. №67. С. 5–38.
9. Мощевитин, Н.Г. Сингулярные диофантовы системы А.Я. Хинчина и их применение/ Н.Г.Мощевитин// УМН, том 65.2010. №3(393). С.43-126.
10. Халмош, П. Теория меры/ П.Халмош. М.:Издательство иностранной литературы, 1953. 291 с.
11. Хинчин, А. Я. Регулярные системы линейных уравнений и общая задача Чебышева/ А.Я.Хинчин// Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. №12:3. С.249–258.

12. Хинчин,А.Я. Цепные дроби/ А.Я.Хинчин. М.:Физматлит, 1960. 112 с.

13. Шацков, Д.О. О среднем значении меры иррациональности вещественных чисел/Д.О. Шацков// Математические заметки. 2015. №98:2. С.271–287.

14. Шмидт, В. Диофантовы приближения: Пер. с англ./В.Шмидт. М.:Мир, 1983. 232 с., ил.

15. Ярник, В. К теории однородных линейных диофантовых приближений/ В.Ярник// Чехослов. матем. журнал. 1954. №4(79). С.330-353.

16. Akhunzhanov, R.K. On Dirichlet spectrum for two-dimensional simultaneous Diophantine approximation/ R.K. Akhunzhanov, D.O.Shatskov// Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2013. vol.3, iss. 3-4. pp. 5-23, [pp. 241-259].

17. Akhunzhanov, R.K. On two-dimentional Dirichlet spectrum [электронный ресурс]/ R.K.Akhunzhanov, D.O.Shatskov// http://arxiv.org/abs/1306.1876. 2013. p.13.

18. Cusick, Thomas W. The Markoff and Lagrange spectra/T.W.Cusick, M.E.Flahive. Mathematica surveys and monographs. 1943. p.93.

19. Dajani, K A Note on the Approximation by Continued Fractions under an Extra Condition/ K.Dajani, C.Kraaikamp// New York Journal of Mathematics. 1998. №3A. p. 69-80.

20. Davenport, H. Dirichlet's theorem on Diophantine approximation/ H.Davenport, W.M.Schmidt// Simposia Mathematica, v. IV (INDAM, Rome, 1968/69), Academic Press, London. 1970. p.113-132.

21. Fürstenberg, H. The ergodic theretical proof of Szemeredi's theorem/ H.Fürstenberg, Y.Katznelson, D.Ornstein// Bulletin (New series) of the American Mathematical Society. 1982 №7:3. p. 527-552.

22. Hardy, G. H. An Introduction to the Theory of Numbers -fourth edition/ G.H.Hardy, E.M.Wright. Oxford, Oxford University Press. 1975. 421 p.

23. Halasz, G. Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem/ G.Halasz// Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica. 1976. vol 28 (3-4). p.389-395.

24. Jarník, V. Zum Khintchineschen "Übertragungssatz"/ V.Jarník// Acad. Sci. URSS, 3, Trav. Inst. math., Tbilissi. 1938. p. 193-216.

25. Jarník, V. On linear inhomogeneous Diophantine approximations/ V.Jarník// Rozpravy II. Třidy Českeí Akad. 1941. №51:29. p.1-21.

26. Jarník, V. Eine Bemerkung Über diophantische Approximationen/ V.Jarník// Math. Z. 1959. 72:1. p.187-191.

27. Kan, I.D. Approximations to two real numbers/ I.D.Kan, N.G.Moshchevitin// Uniform Distribution Theory 5. 2010. no.2. p.79-86.

28. Kan, I.D. On Minkowski diagonal functions for two real numbers/ I.D. Kan, N.G. Moshchevitin, J. Chaika// American Institute of Physics Conference Series No. 1385. 2011. p.42-48.

29. Khintchine, A. Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen/ A.Khintchine// Rendiconti Circ. Math. Palermo. 1926. №50;2. p.170-195.

30. Levy, P. Théorie de l'addition des variables aléatoires/ P.Levy. Paris:Gauthier-Villars. 1937. 320p.

31. Nakada, H. Metrical Theory for a Class of Continued Fraction Transformations and Their Natural Extensions/ H.Nakada// Tokyo J. Math. 1981. vol 4, no. 2. p.399-426.

32. Nakada, H. On the invariant measure for the transformation associated with some real continued fraction/ H.Nakada, Sh.Ito, S.Tanaka// Keio Engrg. Rep. 1977. vol 30, no. 13. p.159-175.

33. Shuster, J. On the Borel-Cantelli problem/ J.Shuster// Canadian Math.Bull. 1970. v.13, 2. p.273-275.

34. Shatskov, D.O. On the irrationality measure function in average [электронный ресурс]/ D.O.Shatskov// http://arxiv.org/abs/1205.4082v1. 2012. p.20.
35. Shatskov, D.O. Oscillation of irrational measure function in the multidimensional case [электронный ресурс]/ D.O.Shatskov// submitted, preprint at http://arXiv:1501.07097. 2015. p.17.