На правах рукописи

Cударкин Андрей Вадимович

ГРАДУИРОВАННЫЕ ПАРЫ РЕДУКТИВНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

Специальность 01.01.06 – математическая логика,

алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2008

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Онищик Аркадий Львович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Кочетков Юрий Юрьевич
	кандидат физико-математических наук, доцент Башкин Михаил Анатольевич
Ведущая организация	Московский государственный университет, механико-математический факультет

Защита состоится 10 октября 2008 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.02.03 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу:
150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Автореферат разослан "__"________________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Яблокова С.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Понятие алгебры Ли, градуированной некоторой неразложимой системой корней, было введено в работе [3]. В работе [7] была дана классификация всех градуировок простых комплексных алгебр Ли системами корней их простых подалгебр, основанная на связи, существующей между такими градуировками и параболическими подалгебрами объемлющей алгебры Ли. В этой работе отмечена также связь, существующая между градуировками системами корней и парами Хау (или дуальными парами) редуктивных подалгебр простой алгебры Ли, классификация которых была дана в [8]. В ряде работ, появившихся в последнее время (см., например, [2, 1]), понятие алгебры Ли, градуированной системой корней, было обобщено на случай супералгебр Ли. В них получено некоторое общее описание произвольных, не обязательно конечномерных, комплексных супералгебр Ли, градуированных системами корней их классических простых подалгебр. В то же время естественным обобщением результата работы [7] была бы классификация классических простых комплексных супералгебр Ли, градуированных системами корней их классических простых подалгебр.

Цель работы. Исследование градуировок классических простых комплексных супералгебр Ли системами корней их классических простых подалгебр и их связей с параболическими подалгебрами.

Методы исследования. Сведение изучения градуировок редуктивных комплексных супералгебр Ли к изучению градуировок их четных частей и связи между системами корней супералгебры Ли и градуирующей подалгебры.

Научная новизна. Основные научные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Изучены общие свойства градуировок редуктивной комплексной супералгебры Ли системами корней ее редуктивных подалгебр. Установлена связь этих градуировок с $\mathbb{Z}_2$-градуировками четной

части супералгебры Ли, позволяющая свести задачу их классификации к аналогичной задаче для полупростых комплексных алгебр Ли.

2. Дана классификация градуировок простых комплексных супералгебр Ли серии A системами корней их классических простых подалгебр.

3. Установлена связь изучаемых градуировок редуктивной комплексной супералгебры Ли с параболическими подалгебрами этой супералгебры. Описаны параболические подалгебры простых супералгебр Ли серии A, связанные с их градуировками системами корней классических простых подалгебр.

Все перечисленные результаты являются новыми.

Теоретическое и практическое значение. Развитые в работе методы могут быть использованы для классификации градуировок других классических простых комплексных супералгебр Ли, а также применены к задаче классификации пар Хау их редуктивных подалгебр.

Апробация результатов. Результаты были доложены на международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша (Москва, май 2008 г.), а также на семинаре проф. Михора в Венском университете (Австрия, апрель 2008 г.).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения и четырех глав, ее объем составляет 60 страниц. Библиография включает 14 наименований.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [9, 10, 11] (см. список в конце автореферата), причем работа [9] опубликована в журнале, входящем в список изданий, рекомендованных ВАК РФ.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается краткий исторический обзор, подчеркивается актуальность темы диссертационной работы, излагаются основные идеи и цели исследования, описываются новые результаты, полученные в диссертации, и приводится краткое содержание ее отдельных глав.

Первая глава работы начинается с основных определений. В §1 определяются редуктивные комплексные супералгебры Ли. Это понятие, введенное в [5], естественно обобщает классическое понятие редуктивной комплексной алгебры Ли. А именно, комплексная супералгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ называется *редуктивной*, если алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ редуктивна и ее присоединенное представление ad в $\mathfrak{g}$ является алгебраическим (т.е. это дифференциал некоторого алгебраического представления соответствующей редуктивной алгебраической группы). Простая конечномерная комплексная супералгебра Ли редуктивна тогда и только тогда, когда она является классической в смысле В.Г. Каца [6]). Если $\mathfrak{g}$ — редуктивная комплексная супералгебра Ли и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ — подалгебра Картана ее четной части, то определено *весовое разложение* относительно $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ — множество ненулевых весов, называемых *корнями.*В §2 вводится основное для дальнейшего понятие комплексной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, градуированной системой корней ее редуктивной подалгебры $\mathring{\mathfrak{g}}$ (в этом случае говорят также, что пара $(\mathfrak{g}, \mathring{\mathfrak{g}})$ является градуированной), и устанавливаются некоторые простейшие свойства, связанные с этим понятием. В случае, когда $\mathfrak{g}$ также редуктивна и в четных частях обеих супералгебр Ли выбраны подалгебры Картана $\mathfrak{h} \supset \mathring{\mathfrak{h}}$, определено естественное отображение ограничения $\pi : \mathfrak{h}^* \to \mathring{\mathfrak{h}}^*$. Пусть Δ и $\mathring{\Delta}$ — соответствующие системы корней супералгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathring{\mathfrak{g}}$. Если пара является градуированной, то $\pi(\Delta \cup \{0\}) = \mathring{\Delta} \cup \{0\}$, а в случае, когда $\mathfrak{g}$ проста, верно и обратное. С каждой градуированной парой редуктивных супералгебр Ли связывается $\mathbb{Z}_2$-градуировка $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{v}$ редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, где $\mathfrak{u}$ — редуктивная подалгебра максимального ранга, соответствующая подсистеме четных корней в Δ, которые переходят при отображении π в четные корни подалгебры или в 0, а $\mathfrak{v}$ — подпространство, соответствующее четным корням из Δ, переходящим в нечетные корни подалгебры, не являющиеся четными. При этом коммутанты алгебр Ли $\mathfrak{u}$ и $\mathring{\mathfrak{g}}_{\bar{0}}$) составляют градуированную пару полупростых алгебр Ли. Тем самым градуированные пары редуктивных супералгебр Ли разбиваются на два типа: пары первого типа, для которых $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, и пары второго типа, для которых $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Эта конструкция позволяет в какой-то мере свести классификацию градуированных пар к хорошо известной классификации $\mathbb{Z}_2$-градуировок редуктивных алгебр Ли и к классификации градуированных пар полупростых алгебр Ли. В §3 объясняется, каким образом последняя классификация сводится к классификации градуированных пар простых алгебр Ли, и излагаются используемые в дальнейшем результаты этой классификации.

Вторая и третья главы посвящены классификации градуированных пар $(\mathfrak{g}, \mathring{\mathfrak{g}})$, где $\mathfrak{g}$ — простая комплексная супералгебра Ли серии A, а $\mathring{\mathfrak{g}}$ — ее классическая простая подалгебра. При этом используется метод, описанный в главе 1. Супералгебра Ли серии A имеет вид $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m,n)$, где $1 \leq m < n,\ n \geq 2$ или $\mathfrak{g} = \mathfrak{psl}(n,n) = \mathfrak{sl}(n,n)/\langle E_{2n} \rangle,\ n \geq 2$. Коммутант $\mathfrak{a}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ изоморфен, соответственно, $\mathfrak{sl}(m) \oplus \mathfrak{sl}(n)$ или $\mathfrak{sl}(n) \oplus \mathfrak{sl}(n)$.

Во второй главе изучаются градуированные пары $(\mathfrak{g}, \mathring{\mathfrak{g}})$ первого типа. С каждой такой парой связана градуированная пару полупростых алгебр Ли $(\mathfrak{a}, \mathring{\mathfrak{a}})$, где $\mathring{\mathfrak{a}} = [\mathring{\mathfrak{g}}_{\bar{0}}, \mathring{\mathfrak{g}}_{\bar{0}}]$. При этом подалгебра $\mathring{\mathfrak{a}}$ либо является прямой суммой двух простых идеалов (этот случай рассматривается в §2.1), либо проста (см. §2.2), а простые слагаемые должны градуировать простые идеалы алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и потому изоморфны $\mathfrak{sl}(k)$ или $\mathfrak{sp}(k)$ (см. [7]). Известная классификация простых супералгебр Ли (см. [6]) приводит нас к списку всех возможностей для супералгебры Ли $\mathring{\mathfrak{g}}$, а градуированная пара $(\mathfrak{a}, \mathring{\mathfrak{a}})$ позволяет описать соответствующее отображение ограничения $\pi : \mathfrak{h}^* \to \mathring{\mathfrak{h}}^*$. Используя системы корней, мы получаем отсюда информацию о вложении супералгебры Ли $\mathring{\mathfrak{g}}$ в $\mathfrak{g}$. Результат классификации содержится в следующей теореме (через k, l, p здесь обозначены произвольные натуральные числа):

Теорема 2.1. *С точностью до изоморфизма существуют только следующие градуированные пары первого типа простых классических супералгебр Ли, содержащие супералгебру Ли типа A в качестве объемлющей алгебры*:

1. $(\mathfrak{sl}(kp, lp), \mathfrak{sl}(k, l)),\ k < l,$

2. $(\mathfrak{psl}(kp, kp), \mathfrak{psl}(k, k)),$

3. $(\mathfrak{psl}(kp, kp), \mathfrak{psq}(k)),\ k \geq 3,$

4. $(\mathfrak{sl}(k, 2lp), \mathfrak{osp}(1, 2l)),\ k \geq p,$

5. $(\mathfrak{psl}(2kp, 2kp), \mathfrak{osp}(1, 2k)).$

В главе 3 тот же метод применяется для классификации градуированных пар второго типа. §3.1 носит подготовительный характер. В рассматриваемом случае имеется описанная в главе 1 нетривиальная $\mathbb{Z}_2$-градуировка $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{v}$, в которой $\mathfrak{u}$ — редуктивная подалгебра, содержащая $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{a} = [\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]$. Из нее получается нетривиальная $\mathbb{Z}_2$-градуировка $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} \oplus \mathfrak{v}$, где $\mathfrak{e} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{u}$ — редуктивная подалгебра максимального ранга в $\mathfrak{a}$. При этом имеем градуированную пару полупростых алгебр Ли $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, где $\mathfrak{b} = [\mathfrak{e}, \mathfrak{e}]$, $\mathfrak{c} = [\mathring{\mathfrak{g}}_{\bar{0}}, \mathring{\mathfrak{g}}_{\bar{0}}]$. Применяя к $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(m) \oplus \mathfrak{sl}(n)$ хорошо известное (см. [4]) описание $\mathbb{Z}_2$-градуировок полупростых комплексных алгебр Ли, мы видим, что возможны следующие три случая, которые рассматриваются, соответственно, в параграфах 3.1, 3.2 и 3.3:

(i) $m, n \geq 2$ и полученная $\mathbb{Z}_2$-градуировка алгебры Ли $\mathfrak{a}$ есть сумма нетривиальной $\mathbb{Z}_2$-градуировки $\mathfrak{sl}(m) = \mathfrak{e}_1 \oplus \mathfrak{v}$ и тривиальной $\mathbb{Z}_2$-градуировки $\mathfrak{sl}(n) = \mathfrak{sl}(n) \oplus \{0\}$.

(ii) $m, n \geq 2$ и полученная $\mathbb{Z}_2$-градуировка алгебры Ли $\mathfrak{a}$ есть сумма двух нетривиальных $\mathbb{Z}_2$-градуировок $\mathfrak{sl}(m) = \mathfrak{e}_1 \oplus \mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{sl}(n) = \mathfrak{e}_2 \oplus \mathfrak{v}_2$.

(iii) $m = 1,\ n \geq 2$, т.е. $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(n)$ проста.

Далее, если $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} \oplus \mathfrak{v}$ — нетривиальная $\mathbb{Z}_2$-градуировка простой алгебры Ли $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(m),\ m \geq 2$, где подалгебра $\mathfrak{e}$ имеет максимальный ранг, то $\mathfrak{e}$, с точностью до автоморфизмов алгебры $\mathfrak{a}$, есть подалгебра матриц следующего вида:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right),$$

где $A \in \mathfrak{gl}(k),\ B \in \mathfrak{gl}(l),\ \mathrm{tr}A = -\mathrm{tr}B,\ k + l = m,\ k, l \geq 1$.

Отсюда выводится, что для любой градуированной пары $(\mathfrak{g}, \mathring{\mathfrak{g}})$ второго типа соответствующая полупростая подалгебра $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ есть прямая сумма нескольких (не более 4) алгебр Ли $\mathfrak{sl}(s)$, вложенных в $\mathfrak{a}$ в виде блоков, стоящих на главной диагонали, а в любой простой идеал алгебры $\mathfrak{b}$ нетривиально проектируется не более чем один простой идеал алгебры $\mathfrak{c}$, причем проекция градуирует этот идеал. Отсюда и из результатов работы [7] следует, что любой простой идеал в $\mathfrak{c}$ имеет тип A или C, а любая проекция — это сумма нескольких стандартных представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(t)$ или $\mathfrak{sp}(t)$ соответственно. Применяя методику, использованную в гл. 2, приходим к следующей теореме классификации (здесь через k, l, p, q, r обозначены натуральные числа, параметризующие градуированные пары):

Теорема 3.1. *С точностью до изоморфизма существуют только следующие градуированные пары второго типа простых классических супералгебр Ли, содержащие супералгебру Ли типа А в качестве объемлющей алгебры*:

1. $(\mathfrak{sl}(kq + lp, kp + lq), \mathfrak{sl}(k, l)),\ k < l,$
2. $(\mathfrak{psl}(kp, kp), \mathfrak{psl}(k, k)),\ k \geq 2,$
3. $(\mathfrak{sl}(m, n), \mathfrak{osp}(1, 2l)),\ m > 2rl,\ n \geq r, m \neq n,$
4. $(\mathfrak{psl}(n, n), \mathfrak{osp}(1, 2l)),\ n > 2rl.$

Глава 4 посвящена связи градуированных пар редуктивных супералгебр Ли с параболическими подалгебрами этих супералгебр.

Следуя [4], мы называем подалгебру супералгебры Ли *параболической*, если она является неотрицательной частью некоторой $\mathbb{Z}$-градуировки этой супералгебры Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная комплексная супералгебра Ли и $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Тогда любой элемент $x_0 \in \mathfrak{h}(\mathbb{R})$ определяет параболическую подалгебру $\mathfrak{p}(x_0) \subset \mathfrak{g}$, заданную формулой

$$\mathfrak{p}(x_0) = \bigoplus_{\alpha(x_0) \geq 0} \mathfrak{g}_\alpha .$$

Будем называть $\mathfrak{p}(x_0)$ *параболической подалгеброй, определенной внутренним градуирующим дифференцированием.*

Будем говорить, что $\mathfrak{g}$ — *редуктивная супералгебра Ли основного типа*, если $\mathfrak{g}$ редуктивна и ее система корней и весовое разложение относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ ее четной части обладают следующими свойствами:

(i) для любого $\alpha \in \Delta$ имеем $-\alpha \in \Delta$, причем α и $-\alpha$ имеют одинаковые четности,

(ii) $\dim \mathfrak{g}_\alpha$ для всех $\alpha \in \Delta$,

(iii) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq \{0\}$, если α, $\beta \in \Delta$ и $\alpha + \beta \in \Delta \cup \{0\}$,

(iv) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

(v) система Π неразложимых положительных корней относительно любой камеры Вейля в $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ является базисом пространства $\mathfrak{h}^*$.

Из результатов работы [7] следует, что среди простых супералгебр Ли редуктивными супералгебрами Ли основного типа являются в точности следующие: $\mathfrak{sl}_{m|n}$, $m \neq n, m, n \geq 1$; $\mathfrak{osp}_{m|2n}$, $m \geq 1$, $n \geq 2$; $D(2,1,\alpha)$, $F(4)$, $G(3)$ (не считая простых комплексных алгебр Ли). В [5] доказано, что любая параболическая подалгебра редуктивной супералгебры Ли основного типа определена внутренним градуирующим дифференцированием (при некотором выборе подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ ее четной части), а также дано описание параболических подалгебр этих супералгебр Ли в терминах систем корней.

Пусть $(\mathfrak{g}, \mathring{\mathfrak{g}})$ — градуированная пара редуктивных супералгебр Ли и $\mathring{\mathfrak{p}} \subset \mathring{\mathfrak{g}}$ — параболическая подалгебра, определяемая внутренним градуирующим дифференцированием. В §4.1 строится такая параболическая подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$, что $\mathfrak{p} \cap \mathring{\mathfrak{g}} = \mathring{\mathfrak{p}}$. В случае, когда $\mathfrak{g}$

— редуктивная супералгебра Ли основного типа, дается следующее описание подалгебры $\mathfrak{p}$ в терминах корней.

Теорема 4.2. *Предположим, что редуктивная супералгебра Ли основного типа $\mathfrak{g}$ содержит редуктивную подалгебру $\mathring{\mathfrak{g}}$, причем система корней $\mathring{\Delta}$ этой подалгебры относительно некоторой подалгебры Картана $\mathring{\mathfrak{h}}$ в $\mathring{\mathfrak{g}}_{\bar{0}}$ градуирует $\mathfrak{g}$. Пусть также $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, содержащая $\mathring{\mathfrak{h}}$. Пусть $x_0 \in \mathring{\mathfrak{h}}(\mathbb{R})$, и пусть $x_0 \in \bar{C}$, где $C \subset \mathfrak{h}(\mathbb{R})$ — некоторая камера Вейля. Пусть $\Pi \subset \Delta_+$ — множество неразложимых положительных корней супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно C, и пусть $I = \{\alpha \in \Pi \mid \alpha(x_0) = 0\}$. Тогда параболическая подалгебра $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(x_0) \subset \mathfrak{g}$ удовлетворяет условию $\mathfrak{p} \cap \mathring{\mathfrak{g}} = \mathring{\mathfrak{p}}(x_0)$ и задается формулой*

$$\mathfrak{p}(x_0) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+ \cup [-I]} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где через $[-I]$ обозначено множество всех корней, являющихся линейными комбинациями корней из $-I$ с целыми неотрицательными коэффициентами. В случае, когда элемент x_0 регулярен, имеем $I = \Pi \cap \operatorname{Ker} \pi$, где $\pi : \mathfrak{h}^* \to \mathring{\mathfrak{h}}^*$ — отображение ограничения.

В §4.2 эти результаты применяются к градуированным парам, изученным в главах 2 и 3. Дается описание параболических подалгебр простых супералгебр Ли $\mathfrak{g}$ серии A, которые получаются с помощью конструкции §1 из борелевских подалгебр классических простых подалгебр, составляющих с $\mathfrak{g}$ градуированные пары.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Benkart G., Elduque A. Lie superalgebras graded by root systems $C(n)$, $D(m,n)$, $D(2,1,\alpha)$, $F(4)$ and $G(3)$ // Canad. Math. Bull. 2002. V. 45. P. 509-524.

[2] Benkart G., Zelmanov E. Lie algebras graded by finite root systems and intersection matrix algebras // Invent. Math. 1996. V. 126. P. 1-45.

[3] Berman S., Moody R.V. Lie algebras graded by finite root systems // Invent. Math. 1992. V. 108. P. 323-347.

[4] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. М.: Факториал, 2005.

[5] Иванова Н.И., Онищик А.Л. Параболические подалгебры и градуировки редуктивных супералгебр Ли // Соврем. математика. Фунд. направления. 2006. Т. 20. С. 5-68.

[6] Kac V.G. Lie superalgebras. Adv. Math. 1977. V. 26. P. 8-96.

[7] Nervi J. Algèbres de Lie simples graduées par un système de racines et sous-algèbres C-admissibles // J. Algebra. 2000. V. 223. P. 307-343.

[8] Rubenthaler H. Les paires duales dans les algèbres de Lie réductives // Astérisque. 1994. T. 219. P. 1-121.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикация в издании, рекомендованном ВАК РФ

[9] Сударкин А.В. Классификация градуировок простых супералгебр Ли серии A системами корней их классических простых подалгебр // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63. С. 165-166.

Другие публикации

[10] Сударкин А.В. О супералгебрах Ли, градуированных системами корней // Вопр. теории групп и гомолог. алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 2003. С. 228-237.

[11] Сударкин А.В. Градуировки супералгебр Ли серии $A(m,n)$ системами корней их классических простых подалгебр // Математика в Ярославском университете. Ярославль: ЯрГУ, 2006. С. 429-445.