

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет  
им. П.Г. Демидова»

На правах рукописи

**Алешин Сергей Владимирович**

Исследование динамики логистического  
уравнения с диффузией и отклонениями  
аргументов

05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор Кащенко С.А.

ЯРОСЛАВЛЬ – 2015

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1. Логистическое уравнение с запаздыванием</b>	<b>16</b>
1.1. Постановка задачи . . . . .	16
1.2. Бифуркация Андронова–Хопфа . . . . .	18
1.3. Построение квазинормальных форм в сингулярно возмущенном случае . . . . .	21
1.4. Локальный анализ состояния равновесия . . . . .	23
1.5. Численный анализ . . . . .	26
<b>2. Логистическое уравнение с диффузией и запаздыванием</b>	<b>32</b>
2.1. Постановка задачи . . . . .	32
2.2. Построение нормализованного уравнения . . . . .	34
2.3. Некоторые свойства уравнения распространения волны . . . . .	37
2.4. Численный анализ уравнения КПП с запаздыванием . . . . .	39
2.5. Выводы . . . . .	47
<b>3. Логистическое уравнение с диффузией и отклонением по пространственной переменной</b>	<b>48</b>
3.1. Некоторые свойства волновых решений задачи . . . . .	49
3.2. Волновые решения в задаче с периодическими условиями . . . . .	52
3.3. Численный анализ уравнения КПП с пространственным отклонением . . . . .	55
<b>4. Вычисление спектра показателей Ляпунова для дифференциальных уравнений с запаздыванием</b>	<b>67</b>
4.1. Описание алгоритма . . . . .	67
4.2. Результаты тестирования приведенного алгоритма на примере уравнения Хатчинсона . . . . .	69

4.3. Результаты численного моделирования . . . . .	72
<b>Заключение</b>	<b>80</b>
<b>Литература</b>	<b>82</b>
<b>Приложения</b>	<b>93</b>
Приложение А. Фрагменты исходного кода программного комплек- са «Оценка показателей Ляпунова для систем дифференци- альных уравнений с запаздывающим аргументом» . . . . .	93
Приложение В. Пример сохраненной вычислительной задачи . . . . .	112
Приложение С. Описание программы . . . . .	113

# Введение

Одним из фундаментальных предположений, лежащим в основании всех моделей роста, является предположение о том, что численность популяции пропорциональна скорости роста популяции. Например, многие одноклеточные организмы размножаются простым делением, т.е. удвоением числа клеток через определенные интервалы времени, называемыми характерными временами деления. Для сложно организованных растений и животных размножение происходит по более сложному закону, но в простейшей модели можно предполагать, что скорость размножения вида пропорциональна численности этого вида.

Именно такую первую математическую модель для описания динамики изменения численности вида предложил основоположник математических популяционных моделей Томас Мальтус в 1798 г. [92]. Согласно его представлениям любой вид при благоприятных условиях увеличивает свою численность по экспоненциальному закону, т.е.

$$\dot{N} = rN, \quad (0.0.1)$$

где  $N$  — численность вида,  $r$  — относительный коэффициент роста. Закон Мальтуса прекрасно согласуется с экспериментальными данными на ограниченных временных интервалах, когда размер популяции не слишком велик. В частности, он использовался Чарльзом Дарвином при разработке им теории борьбы за существование [30].

В уравнении (0.0.1) совсем не учитываются факторы, препятствующие росту популяции, такие как, например, ограниченность доступной пищи или размера территории обитания, возраст особей, различные болезни и многие другие. В 1835 году Ламбер Адольф Жак Кетле и Пьер Франсуа Ферхюльст, развивая идеи Мальтуса, предположили, что численность вида изменяется в соответствии с законом, задаваемым логистическим уравнением [101]:

$$\dot{N} = rN(1 - N/K), \quad (0.0.2)$$



где  $K$  — средний размер популяции, зависящий от емкости среды, т.е. от количества пищи и размера ареала обитания. Логистический закон был повторно открыт Реймондом Пирлом и Лоуэлом Джейкобом Ридом в 1920 году.

Уравнение (0.0.2) обладает достаточно простой динамикой, и при этом логистический закон, заданный таким образом, очень хорошо описывает динамику роста популяции простейших микроорганизмов: все решения с положительными начальными условиями стремятся к 1 при  $t \rightarrow \infty$ .

Однако логистическое уравнение (0.0.2) заведомо не применимо для моделирования динамики численности большинства видов млекопитающих. Все дело заключается в том, что численность массовых видов млекопитающих резко меняется с течением времени. Осцилляции численности популяций особенно ярко выражены в северных ареалах обитания (например, в Канаде [89] и Якутии [49]). Биоценозы в них содержат мало различных видов, что позволяет в первом приближении пренебречь влиянием конкурентов и хищников. Это существенно, так как стандартное представление, идущее от Вито Вольтерра [103], практически всех, занимающихся моделированием [48], таково: в простейшем случае возникновение колебаний является следствием взаимодействия хищника со своей жертвой. Под давлением авторитета Вольтерра они вступают в конфликт с общепринятой точкой зрения биологов, которые считают, что внутривидовая борьба значительно важнее хищничества и конкуренции. Тем самым ведущей причиной возникновения колебаний численности должна быть внутривидовая борьба. В свою очередь, это означает, что дифференциальное уравнение для моделирования математической экологии обязано быть автоколебательным. К настоящему времени накоплено достаточно много природных наблюдений, подтверждающих приведенную точку зрения.

В связи с этим в 1948 г. Джорджем Хатчинсоном [78] было предложено следующее обобщение логистического уравнения (0.0.2):

$$\dot{u} = ru(t)(1 - u(t - T)). \quad (0.0.3)$$

Введение положительной постоянной  $T$  — времени запаздывания — стало некоторой попыткой учесть фактор запаздывания, связанный с возрастной структурой популяции. Данное уравнение было названо уравнением Хатчинсона, и оно описывает следующую ситуацию: вид обитает в однородной среде, миграционные факторы несущественны, и имеется заданное количество пищи, которое возобновляется при уменьшении численности популяции.

Такая ситуация изучалась экспериментально в лабораторных условиях на мышевидных, которым раз в несколько дней давалось строго определен-

ное количество пищи. Было замечено следующее: при малом размере популяции идет интенсивное размножение (работает закон Мальтуса); через некоторое время пищи уже всем не хватает, наблюдаются стрессы за счет перенаселенности, что в совокупности приводит к снижению плодовитости; начинает сказываться фактор запаздывания, так как ранее при относительно благоприятных условиях было произведено слишком много молодых особей, которые, подрастая, активно включаются во внутривидовую борьбу, что приводит к резкому снижению численности; затем процесс повторяется сначала.

Изучение динамики уравнения Хатчинсона выявило всю его сложность, богатство и объяснило результаты описанного выше эксперимента. При  $rT \leq 37/24$  все решения (0.0.3) с положительной начальной функцией тоже стремятся к 1 при  $t \rightarrow \infty$  [80]. При  $\lambda = rT \leq \pi/2$  состояние равновесия  $u_0 \equiv 1$  асимптотически устойчиво, а при  $\lambda = rT > \pi/2$  это уравнение имеет периодическое решение  $u_0(t, \lambda)$  [79]. При достаточно малых значениях  $\lambda - \pi/2$  и при достаточно больших  $\lambda$  этот цикл орбитально асимптотически устойчив [83]. Отметим еще, что количество неустойчивых периодических решений (0.0.3) неограниченно растет при  $\lambda \rightarrow \infty$  [35].

Отметим, что дискретное запаздывание учитывает размер популяции в момент времени, отстоящий от данного на некоторое определенное число временных единиц. Уравнения с дискретным запаздыванием также часто встречаются в других областях, в частности в теории управления. Например, некоторые задачи математической психологии моделируются при помощи теории управления [66, 67]. Дискретное запаздывание может служить достаточно точным описанием некоторых явлений, например, моделирование с его помощью нервного импульса как сигнала, передающегося через обратную связь [109]. В других ситуациях введение дискретного запаздывания не имеет смысла, например, загрязнение окружающей среды умершими организмами носит кумулятивный характер. Однако, даже когда дискретное запаздывание достаточно хорошо описывает реальную модель, вполне вероятно, что на самом деле имеет место некоторое «размытие» запаздывания вблизи какого-то среднего значения.

Развитие идеи запаздывания привело к возникновению моделей, в которых последствие учитывается более тонко: вместо одного запаздывания появилось несколько, запаздывание и коэффициенты начали зависеть от времени, наряду с сосредоточенным стали рассматривать распределённое запаздывание и т.д.

Биологические системы вступают во взаимодействие друг с другом на всех уровнях, таких как взаимодействие биомолекул в процессе биохимии

мических реакций или взаимодействие видов в популяциях. Взаимодействие может протекать в структурах, тогда система может быть охарактеризована определенным набором состояний, так происходит на уровне субклеточных, клеточных и организменных структур. Кинетика процессов в структурах в математических моделях, как правило, описывается с помощью систем уравнений для вероятностей состояний комплексов. В случае, когда взаимодействие происходит случайно, его интенсивность определяется концентрацией взаимодействующих компонентов и их подвижностью — обобщенной диффузией. Именно такие представления приняты в базовых моделях взаимодействия видов. Одной из классических книг, в которой рассматриваются математические модели взаимодействия видов, является [103]. Стремление к росту и размножению ведет к распространению в пространстве, занятию нового ареала обитания, экспансии живых организмов. Модель процесса эволюции биологического вида в рамках предложенной Рональдом Фишером [64] теории генотипов была исследована Андреем Николаевичем Колмогоровым, Иваном Георгиевичем Петровским и Николаем Семеновичем Пискуновым в работе [44]. Они показали, что задача вытеснения одного биологического вида другим доминантным видом на некоторой территории может быть сведена к решению параболического уравнения с нелинейным младшим членом. Рассмотрим постановку задачи о распространении вида в активной — богатой энергией (пищей) среде.

Пусть в любой точке прямой  $x > 0$  размножение вида описывается функцией  $f(x) = x(1 - x)$ . В начальный момент времени вся область слева от нуля занята видом  $x$ , концентрация которого близка к единице. Справа от нуля — пустая территория. В момент времени  $t = 0$  вид начинает распространяться (диффундировать) вправо с константой диффузии  $D$ . Процесс описывается уравнением:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x) + D \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}. \quad (0.0.4)$$

При  $t > 0$  в такой системе начинает распространяться волна концентраций в область  $r > 0$ , которая является результатом двух процессов: случайного перемещения особей (диффузии частиц) и размножения, описываемого функцией  $f(x)$ . С течением времени фронт волны перемещается вправо, причем его форма приближается к определенной предельной форме. Скорость перемещения волны определяется коэффициентом диффузии и формой функции  $f(x)$ , и для функции  $f(x)$ , равной нулю при  $x = 0$  и  $x = 1$  и положительной в промежуточных точках, выражается простой формулой:  $\lambda = 2\sqrt{D}f'(0)$ .

Уравнение (0.0.4) иногда называют уравнением Фишера или Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова.

Данное уравнение находит применение в широкой области приложений, связанных с распространением в пространстве волн различной природы, от теории горения, концентрации некоторого реагирующего вещества до волн плотности популяции. Среди большого количества публикаций, посвященных данной теме, выделим книги [61, 93, 102], в которых содержатся суммирующие результаты по проблеме, отметим также обширный библиографический список, содержащийся в [102].

Отметим также работы [45, 51], в которых для некоторых специальных случаев найдены точные решения уравнения (0.0.4).

Для любых классических граничных условий (например, для условий Неймана:  $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=b} = 0$ ; периодических граничных условий  $u(t, x + T) \equiv u(t, x)$  и ряда других) уравнение (0.0.4) имеет только один аттрактор — однородное состояние равновесия  $u_0 \equiv 1$ . Все остальные состояния равновесия неустойчивы.

Добавлением в уравнение (0.0.4) запаздывания в работах [53, 71, 108] началось изучение положительных фронтов волны в уравнении

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u(t - h, x)]. \quad (0.0.5)$$

С тех пор эта модель стала одним из самых популярных объектов исследований уравнений бегущих волн типа «реакция-диффузия» [29, 73]. Решения в виде бегущей волны — это специальный тип решения, обычно характеризующееся как инвариантное по отношению к переносу в пространстве. С физической точки зрения бегущие волны описывают процесс переноса. Такие процессы переноса (от одного состояния равновесия в другое) обычно «забывают» свои начальные условия и свойства самой среды. Информация об устойчивости фронтов бегущих волн для уравнения (0.0.5) можно найти в [57, 88, 96, 110].

Уравнение (0.0.5) (также называемое уравнением Хатчинсона с диффузией) логично рассматривать как естественный прототип уравнения «реакции-диффузии» с запаздыванием. Много авторов уделили ему свое внимание [52, 53, 63, 70, 74, 91, 104, 108, 112]. В частности, существование фронта бегущей волны, связанного с простым и положительным стационарным состоянием в уравнении (0.0.5) (и его нелокальные обобщения), было изучено в [52, 53, 60, 63, 71, 95, 104, 108]. В статье [72] Стефен Гурли и Ник Бриттон показали, что периодические решения в виде бегущей волны с малой ампли-

тудой, близкие к бифуркации, являются линейно неустойчивыми. Решения с большой амплитудой такого вида оказываются устойчивыми. Например Питер Ашвин и др. [53] заметили устойчивые цуги волн с большими амплитудами в уравнении (0.0.5). Эти решения шли за фронтом волны в случае, когда однородное положение равновесия  $u = 1$  неустойчиво, т.е. решения типа фронта бегущей волны с постоянной формой (соединяющее положения равновесия 0 и 1) не ожидается. Тот факт, что периодические бегущие волны с малой амплитудой неустойчивы, тогда как с большой амплитудой — устойчивы, коррелирует с аналогичным наблюдением, сделанным Копель и Ховардом [85] для некоторого класса систем реакции-диффузии.

В работе [69] приведено полное решение задачи существования и единственности монотонных волн для уравнения (0.0.5) и аналитически получены значения запаздывания, при которых существует решение в виде бегущей волны.

Системы «реакция–диффузия» представляют собой важный класс нелинейных динамических систем, в которых пространственно неоднородные колебательные режимы обусловлены наличием диффузионной составляющей.

Рассмотрим параболическую краевую задачу вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu D \Delta u + F(u), \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (0.0.6)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $u \in \mathbb{R}^k$ ,  $k \geq 2$ ;  $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_k\}$ ,  $d_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ ;  $\nu$  – параметр, отвечающий за пропорциональное уменьшение коэффициентов диффузии;  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к достаточно гладкой границе  $\partial \Omega$  ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ ;  $F(u)$  – гладкая вектор-функция. Эту систему принято называть системой реакция-диффузия, она служит математической моделью многих биофизических и экологических процессов [10, 46, 94].

Под термином «диффузионный хаос» будем понимать странный аттрактор краевой задачи (0.0.6), нетривиально зависящий от пространственной переменной. Наиболее популярным в настоящее время определением хаоса является определение по Девани [62]. Оно формулируется для непрерывного отображения  $f : X \rightarrow X$  в некотором метрическом пространстве  $X$ . Наличие хаотической динамики определяется тремя условиями:  $f$  должно быть транзитивно, периодические траектории  $f$  плотны в  $X$  и  $f$  существенно зависима от начальных условий. Вслед за работой [62] довольно быстро появились статьи [54, 55, 99, 100], в которых это определение подверглось всестороннему анализу. Другие определения хаоса могут быть найдены в [43, 84]. В частности, в работе [43] предлагаемое определение обобщает известное

определение Девани и позволяет учесть одну специфическую особенность, возникающую в некомпактном и бесконечномерном случае, — так называемый турбулентный хаос. Среди всех определений общепринятым является лишь тот факт, что основной характеристикой хаотической динамики является существенная зависимость от начальных условий. Но при этом одной только существенной зависимости недостаточно для получения хаотического потока. В настоящее время существуют две концепции диффузионного хаоса — маломодовый и многомодовый хаос. Первый из них может возникать в системе (0.0.6) при «средних» значениях параметра  $\nu$ , а второй — при  $\nu \rightarrow 0$ .

Интерес к маломодовому хаосу инициирован известными работами Эдварда Нортон Лоренца [90], а также Давида Рюэля и Флориса Такенса [98], а затем Йошики Курамото [87], в которых был поставлен общий вопрос: можно ли связать стохастические режимы в распределенной системе, имеющей бесконечно много степеней свободы, с наличием странного аттрактора в системе небольшого числа обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющей упрощенную модель исходной системы. В ряде случаев это действительно удается сделать. Для примера сошлемся на известное уравнение Гинзбурга — Ландау, для которого сформулированный вопрос был решен в работе [10] для некоторых типов краевых условий. Точнее говоря, в [10] численными методами был обнаружен странный аттрактор в трехмерной системе, получающейся из уравнения Гинзбурга — Ландау на отрезке с граничными условиями Неймана в результате двухмодовой галеркинской аппроксимации. Другой пример — анализ странных аттракторов простейших конечно-разностных аппроксимаций краевых задач вида (0.0.6) на отрезке (см. [21]).

Многомодовый диффузионный хаос сначала был теоретически описан в статье [42], посвященной исследованию динамики нелинейных осцилляторов, слабо связанных через диффузию, его численный анализ проделан в работах автора [20, 23], из результатов которых вытекает важное следствие: если в системе (0.0.6) на отрезке при  $\nu \rightarrow 0$  наблюдается диффузионный хаос, то его ляпуновская размерность неограниченно растет. Отметим также численный анализ уравнения Гинзбурга-Ландау, выполненный в [17] для периодических краевых условий.

При исследовании динамических систем важным вопросом является определение свойств аттрактора решения динамической системы: является ли решение периодическим или имеет хаотическую динамику.

По внешнему виду решения не всегда можно дать однозначный ответ, особенно в случаях квазипериодических колебаний, имеющих сложную фор-

му и визуально слабо отличимых от хаотических. В настоящее время существуют разные практические подходы к определению наличия хаоса: исследование спектра колебаний на основе анализа Фурье, вейвлет-анализ динамических систем, применении отображений Пуанкаре (сечений фазовой траектории при помощи секущей поверхности).

Особенностью хаотических колебаний является их высокая чувствительность к малым изменениям начальных условий. Поэтому одним из наиболее надежных способов детектирования хаоса является определение скорости разбегания траекторий, которая оценивается с помощью показателей Ляпунова. Определение показателей Ляпунова можно найти в книге [15]. Для линейной системы из  $n$  уравнений, записанной в векторной форме

$$dx/dt = A(t)x, \quad (0.0.7)$$

где  $x \in R^n$ , а  $A(t)$  —  $n \times n$  матрица, показатель решения определяется формулой

$$\chi(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|. \quad (0.0.8)$$

Анализ спектра показателей Ляпунова широко применяется для исследования сложной динамики в системах обыкновенных дифференциальных уравнений и в моделях, сводящихся к отображениям. Случаи, когда их удается найти аналитически, являются исключительно редкими. Для вычисления старшего показателя обычно применяют метод Бенеттина [56]. Дальнейшее развитие данный метод получил в работе [105]. В ней в вычислительный алгоритм авторы добавили перенормировку начальных условий по алгоритму Грама-Шмидта [16], что позволило вычислять спектр показателей Ляпунова. В конечномерном случае, по теореме Оселедеца [47], линеаризованная на аттракторе система вида (0.0.7) всегда является правильной по Ляпунову, и, тем самым, верхний предел может быть заменен на обычный, что позволяет эффективно вычислять показатели Ляпунова. В случае уравнений с запаздывающим аргументом и краевых задач такую теорему доказать не удается. Поэтому при разработке алгоритмов вычисления ляпуновских экспонент важно иметь модельное уравнение с запаздыванием, для которого спектр ляпуновских экспонент может быть вычислен каким-либо другим способом. Наличие такой задачи позволяет протестировать разработанный алгоритм и убедиться в его работоспособности. В статьях [11, 12] вычисляются спектры ляпуновских экспонент, однако обоснования предложенного алгоритма, как впрочем и тестирующего примера, авторы не приводят.

Характеристические показатели Ляпунова позволяют проводить качественный анализ динамических систем. Практические способы вычисления

спектра ляпуновских показателей заключаются в следовании за траекториями в течение небольших промежутков времени и вычислении скоростей их расхождения и последующем усреднении этих значений по всему аттрактору.

## **Объект, цель, задачи и методы исследования**

Объектами исследования диссертационной работы являются распределенные по пространству и времени динамические системы. Изучаются основные качественные свойства их решений. Для одного из наиболее важных представителей этого класса систем — логистического уравнения с диффузией и отклонениями пространственного и временного аргументов выполнен численный анализ, основанный на предваряющем его, применении асимптотических методов.

Целью исследования было получить описание качественного поведения задач данного класса, используя современные бифуркационные асимптотические и, согласованные с ними, численные методы. Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- Рассмотреть логистическое уравнение с запаздыванием; исследовать его локальную динамику; определить критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия, а также численно проиллюстрировать полученные аналитические результаты.
- Исследовать задачу распространения волны плотности в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией. Выделить значения запаздывания при которых качественно меняется профиль волны.
- Изучить динамику распространения волны плотности в логистическом уравнении с отклонением пространственной переменной и диффузией. Выделить значения отклонения при которых качественно меняется профиль волны.
- Разработать алгоритм вычисления инвариантных размерностных характеристик для дифференциальных уравнений с запаздыванием. Протестировать разработанный метод на логистическом уравнении с запаздыванием. Проиллюстрировать применимость алгоритма к задачам с запаздыванием, для которых возможно наличие режима гиперхаоса (уравнение Хатчинсона с двумя запаздываниями, уравнения



диффузионного взаимодействия пары близких осцилляторов нейронного типа без учета и с учетом запаздывания в цепочке связи между осцилляторами, системы уравнений Ланга-Кобаяши и Стюарта-Ландау).

## Содержание диссертационной работы

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

В первой главе рассмотрено логистическое уравнение с запаздыванием, вида:

$$\dot{u} = r[1 - au - bu(t - T)]u,$$

где  $a, b > 0$  и выполнено условие нормировки  $a + b = 1$ . Исследуется локальная динамика этого уравнения. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Используются стандартные бифуркационные методы Андронова-Хопфа для уравнений с запаздыванием и асимптотический метод, разработанный Кащенко Сергеем Александровичем, основанный на построении специальных эволюционных уравнений, которые и определяют локальную динамику уравнений, содержащих запаздывание. Показано, что в зависимости от одного из параметров уравнения либо все решения стремятся к состоянию равновесия, либо выходят на единственный устойчивый цикл. Приведены результаты численного исследования.

Во второй главе рассмотрена задача распространения волны плотности в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией (уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова с запаздыванием). Для исследования качественного поведения решений этого уравнения вблизи единичного состояния равновесия было построено уравнение Гинзбурга-Ландау. Численный анализ процесса распространения волны показал, что при достаточно малых значениях запаздывания данное уравнение имеет решения, близкие к решениям стандартного уравнения КПП. Увеличение параметра запаздывания приводит сначала к появлению затухающей колебательной составляющей в пространственном распределении решения. Дальнейший рост данного параметра приводит к разрушению бегущей волны. Это выражается в том, что в окрестности участка начального возмущения сохраняются незатухающие по времени и медленно распространяющиеся по пространству колебания, близкие к решениям соответствующей краевой задачи с периодическими граничными условиями. Наконец, если значение запаздывания достаточно велико, то во всей области распространения волны наблюдаются интенсивные пространственно-временные колебания.

В третьей главе рассмотрена задача распространения волны плотности в логистическом уравнении с отклонением пространственной переменной и диффузией. Для этого уравнения с периодическими краевыми условиями построена нормальная форма и найдены условия существования и устойчивости соответствующих неоднородных режимов. Кроме того, проанализировано уравнение профиля волны и найдены условия возникновения у него колебательных режимов. Приведены результаты численного моделирования распространения волны концентрации в случае неограниченной по пространственной переменной области.

Нерегулярные режимы решений, рассмотренных в предыдущих главах требуют дополнительного изучения. С этой целью в четвертой главе рассмотрен вопрос вычисления некоторых инвариантных характеристик, близких к показателям Ляпунова, для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Хорошо известно, что анализ спектра показателей Ляпунова широко применяется для исследования сложной динамики в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. В главе приводятся описание вычислительного алгоритма и результаты его тестирования на уравнении Хатчинсона в случае устойчивого единичного состояния равновесия. Численно показана близость полученных значений характеристик к корням характеристического квазимногочлена. Иллюстрируется применение алгоритма к некоторым задачам, в частности приводятся результаты численного моделирования для уравнений Хатчинсона с двумя запаздываниями [22], уравнений диффузионного взаимодействия пары близких осцилляторов нейронного типа без учета [24, 40] и с учетом запаздывания в цепочке связи между осцилляторами [25], систем уравнений Ланга-Кобаяши [18] и Стюарта-Ландау [111]. Для последних двух получены значения параметров, при которых в них наблюдается гиперхаотическая динамика. Стоит отметить, что результаты четвертой главы носят экспериментальный характер и анализ адекватности полученных данных получен исключительно экспериментальным путем.

## **Результаты, выносимые на защиту**

- 1) На основе построения квазинормальной формы логистического уравнения с запаздыванием получена асимптотика его устойчивого цикла.
- 2) В задаче о распространении волны возмущения, описываемой логистическим уравнением с диффузией и запаздыванием, найдены промежутки значений запаздывания, для которых профиль волны качественно отличается.

- 3) Для логистического уравнения с диффузией и отклонением пространственной переменной в задаче о распространении волны возмущения от начального импульса определены значения отклонения, для которых профили волны качественно отличаются.
- 4) Разработан алгоритм вычисления инвариантных характеристик для дифференциальных уравнений с запаздыванием. Численно показана их близость с показателями Ляпунова для уравнения Хатчинсона с запаздыванием.

### **Актуальность и научная новизна работы**

Актуальность проведенного в работе исследования определяется тем, что логистическое дифференциальное уравнение с диффузией и отклонениями аргументов является модельным для широкого класса задач нелинейной динамики типа «реакция–диффузия» и находит важное применение в математике, физике и биологии.

Изучение этих моделей современными аналитическими и, согласованными с аналитическими, численными методами, описываемое в диссертации, позволило найти и описать ряд новых явлений.

Научная новизна работы состоит в следующем:

- Выполнены локальный и численный анализы логистического уравнения с запаздыванием. Получена асимптотика устойчивого цикла исходной задачи.
- Проведено качественное исследование логистического уравнения с диффузией и отклонениями временного и пространственного аргументов вблизи единичного состояния равновесия. Проведено подробное исследование численными методами, согласованными с результатами аналитического плана.
- Разработан алгоритм вычисления инвариантных характеристик для дифференциальных уравнений с запаздыванием. Численно показано их совпадение с показателями Ляпунова для уравнения Хатчинсона с запаздыванием.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Теоретическая и практическая значимость проведенного диссертационного исследования заключается в том, что используемые в работе методы и

полученные в диссертации результаты могут быть использованы для решения широкого круга задач нелинейной динамики типа «реакция–диффузия» в математической экологии, биологии и физике.

## **Публикации и апробация результатов**

По теме диссертации автором опубликовано 9 статей [1–9], в том числе 3 статьи в изданиях из списка ВАК.

Результаты работы были представлены на следующих семинарах и конференциях:

- 1) International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond September 6–10, 2015, Moscow, Russia.
- 2) Расширенный научный семинар «Методы суперкомпьютерного моделирования» на базе «Интеркосмос» ИКИ РАН в г. Таруса 21–23 апреля 2015 г.
- 3) Международный научный семинар «Актуальные проблемы математической физики» г. Москва, МГУ, 2014 г.
- 4) Расширенный научный семинар «Методы суперкомпьютерного моделирования» на базе «Интеркосмос» ИКИ РАН в г. Таруса 1–3 октября 2014 г.
- 5) Международная конференция «Нелинейные явления в задачах современной математики и физики», посвященная 210-летию Демидовского университета, Ярославль, 4–5 декабря 2013 г.

В ходе работы над диссертацией разработан программный комплекс «Оценка показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом», получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2013619678, Москва, 2013.

Частично результаты диссертационной работы получены при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00158).

Кроме того, результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре «Нелинейная динамика и синергетика» кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

# Глава 1.

## Логистическое уравнение с запаздыванием

### 1.1. Постановка задачи

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\dot{u} = r[1 - au - bu(t - T)]u,$$

где  $a, b > 0$  и выполнено условие нормировки  $a + b = 1$ .

Удобно перейти к обозначениям  $a = \alpha$  и  $b = 1 - \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) и произвести замену времени  $t \rightarrow Tt$ . В результате приходим к уравнению

$$\dot{u} = \lambda[1 - \alpha u - (1 - \alpha)u(t - 1)]u, \quad \lambda = Tr. \quad (1.1.1)$$

Начальные функции  $\varphi \in C_{[-1,0]}$  для уравнения (1.1.1) предполагаются неотрицательными. Решения с этими начальными функциями остаются неотрицательными при увеличении  $t$ . Как и в [83], можно показать, что все (неотрицательные) решения (1.1.1) удовлетворяют при достаточно больших  $t$  оценке

$$u \leq \min(\alpha^{-1}, \exp(\lambda(1 - \alpha))).$$

У уравнения (1.1.1) нулевое решение неустойчиво. Устойчивость состояния равновесия  $u_0 \equiv 1$  в (1.1.1) определяется расположением корней характеристического уравнения

$$\mu = -\lambda[\alpha + (1 - \alpha)\exp(-\mu)]. \quad (1.1.2)$$

Сформулируем два простых утверждения о расположении корней уравнения (1.1.2).

**Лемма 1.** Пусть  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Тогда все корни (1.1.2) имеют отрицательные вещественные части.

**Лемма 2.** Пусть  $\alpha < \frac{1}{2}$ . Тогда все корни (1.1.2) удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \mu \leq \ln \frac{b}{a}.$$

В условии леммы 1.1 все (положительные) решения (1.1.1) стремятся к 1 при  $t \rightarrow \infty$ , а в условиях леммы 1.2 они ограничены по  $\lambda$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Эти утверждения уже указывают на существенные отличия динамических свойств уравнения Хатчинсона (0.0.3) и (1.1.1).

В первых двух разделах главы 1 исследуется поведение решений (1.1.1) в некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия  $u_0 \equiv 1$ . В первом разделе рассматривается простейший — «регулярный» случай, основанный на бифуркации Андронова–Хопфа. Важную роль играет расположение корней (1.1.2). При каждом  $\alpha < \frac{1}{2}$  найдется такое значение  $\lambda_0(\alpha) > 0$ , что при  $\lambda < \lambda_0(\alpha)$  все корни (1.1.2) имеют отрицательные вещественные части, а при  $\lambda > \lambda_0(\alpha)$  имеются корни с положительной вещественной частью. Будет исследовано поведение решений (1.1.1) при условии  $|\lambda - \lambda_0(\alpha)| \ll 1$ .

Отметим, что  $\lambda_0(0) = \frac{\pi}{2}$  и  $\lambda_0(\alpha) \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow \frac{1}{2} - 0$ . Отличие динамических свойств решений уравнений (0.0.3) и (1.1.1) ярче проявляется при условии, когда

$$\varepsilon = \lambda^{-1} \ll 1. \quad (1.1.3)$$

В следующем разделе предполагается, что вместе с условием (1.1.3) выполнено условие  $\alpha = \frac{1}{2} - \nu$ , где

$$|\nu| \ll 1. \quad (1.1.4)$$

Исследуется вопрос о локальной — в некоторой достаточно малой (и независимой от  $\varepsilon$  и  $\nu$ ) окрестности состояния равновесия  $u_0$  — динамике решений уравнения (1.1.1) при условиях (1.1.3) и (1.1.4).

Для линеаризованного на  $u_0$  уравнения (1.1.1)

$$\varepsilon \dot{v} = -\frac{1}{2} [v + v(t-1) + \mu(v - v(t-1))] \quad (1.1.5)$$

характеристический квазиполином представим в виде

$$2\varepsilon\mu = -(1 + \exp(-\mu) - \nu(1 - \exp(-\mu))). \quad (1.1.6)$$

Просто показать, что (1.1.6) не имеет корней с положительными и отделенными от нуля при  $\varepsilon, \nu \rightarrow 0$  вещественными частями. Важно, что вещественные части бесконечно многих корней (1.1.6) стремятся к нулю при  $\varepsilon, \nu \rightarrow 0$ . Тем самым можно говорить о том, что в задаче об устойчивости состояния равновесия  $u_0 \equiv 1$  реализуется бесконечномерный критический случай. Методики исследования динамических свойств решений в подобных ситуациях разрабатывались в [22, 28, 32, 37, 39, 82]. Ниже она будет применена к изучению локальной динамики уравнения (1.1.1). В качестве основных результатов будут построены специальные нелинейные уравнения параболического и вырожденно-параболического типов, не содержащие малых параметров. Их нелокальная динамика определяет в главном поведение решений исходного уравнения при малых  $\varepsilon$  и  $\nu$ .

В следующем разделе рассмотрен «базовый» случай, когда  $\nu = c\varepsilon^2$ . Как оказывается, соответствующие решения при этом условии формируются, в основном, на невысоких модах (в параболическом уравнении). Поэтому их естественно назвать медленно осциллирующими.

В последних разделах исследуется локальное поведение нелинейной краевой задачи специального параболического типа. Проведено как аналитическое, так и численное исследование.

## 1.2. Бифуркация Андронова–Хопфа

Рассмотрим вопрос о поведении решений уравнения (1.1.1) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия  $u_0 \equiv 1$ . Это поведение во многом зависит от расположения корней характеристического квазиполинома (1.1.2). Из леммы 1.1 следует, что необходимо рассматривать лишь ситуации, когда

$$\alpha < \frac{1}{2}. \quad (1.2.1)$$

Сформулируем одно простое утверждение.

**Лемма 3.** Пусть выполнено неравенство (1.2.1). Тогда найдется такое  $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha)$ , что при  $\lambda < \lambda_0(\alpha)$  все корни (1.1.2) имеют отрицательные вещественные части, а при  $\lambda > \lambda_0(\alpha)$  у уравнения (1.1.2) существует корень с положительной вещественной частью.

Отсюда следует, что при  $\lambda < \lambda_0$  все решения (1.1.1) с достаточно близкими к 1 начальными условиями стремятся к единице при  $t \rightarrow \infty$ , а при

$\lambda > \lambda_0$  состояние равновесия  $u_0 \equiv 1$  неустойчиво и задача перестает быть локальной. Здесь будет рассмотрен «пограничный» случай. Фиксируем значение  $\alpha_0$  так, чтобы  $0 < \alpha_0 < \frac{1}{2}$ , и пусть для некоторых постоянных  $\lambda_1$  и  $\alpha_1$  имеем

$$\lambda = \lambda_0(\alpha_0) + \varepsilon\lambda_1, \quad \alpha = \alpha_0 + \varepsilon\lambda_1, \quad (1.2.2)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр:

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1.2.3)$$

При  $\varepsilon = 0$  уравнение (1.1.2) имеет пару чисто мнимых корней  $\mu_{1,2} = \pm i\omega$  ( $\omega > 0$ ), а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части. При условиях (1.2.2), (1.2.3) имеет место хорошо известная бифуркация Андронова–Хопфа: это означает, что в достаточно малой (и не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности  $u_0 \equiv 1$  уравнение (1.1.1) имеет локальное устойчивое двумерное инвариантное интегральное многообразие (см., например, [76, 77]). На нем это уравнение представимо (при выполнении некоторых условий типа невырожденности) в виде комплексного уравнения первого порядка

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon a_1 \xi + d|\xi|\xi + O(\varepsilon^2 + |\xi|^2). \quad (1.2.4)$$

После нормализующих замен  $\varepsilon = \varepsilon t$  и  $\xi \rightarrow \varepsilon^{1/2}\xi$  получаем, что, в главном, поведение решений (1.2.4) определяется уравнением — нормальной формой (см., например, [14]):

$$\frac{d\xi}{d\tau} = a_1 \xi + d|\xi|^2 \xi. \quad (1.2.5)$$

Решения уравнения (1.2.5) связаны с решениями уравнения (1.1.1) формулой

$$u = 1 + \varepsilon^{1/2}(\xi(\tau) \exp(i\omega t) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-i\omega t)) + \varepsilon u_2(\tau, t) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, t) + \dots, \quad (1.2.6)$$

в которой функции  $u_j(\tau, t)$  являются  $2\pi/\omega$ -периодическими по  $t$ . Таким образом, динамические свойства (1.1.1) в окрестности  $u_0$  определяются, в главном, поведением решений (1.2.5), поэтому остается лишь определить коэффициенты  $a_1$  и  $d$ . Для этого воспользуемся формальным рядом (1.2.6). Подставим его в (1.1.1) и в получившемся формальном тождестве будем последовательно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Так, на втором шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^1$ , определим функцию  $u_2(\tau, t)$ :

$$u_2(\tau, t) = g\xi^2 \exp(2i\omega t) + \bar{g}\bar{\xi}^2 \exp(-2i\omega t),$$



где

$$g = \lambda_0(1 - \alpha_0)i \sin \omega \cdot [2i\omega + \alpha_0\lambda_0 + (1 - \alpha_0)\lambda_0 \exp(-2i\omega)]^{-1}.$$

На третьем шаге собираем коэффициенты при  $\varepsilon^{3/2}$ . Из условий разрешимости получающегося уравнения относительно  $2\pi$ -периодической по  $t$  функции  $u_3(\tau, t)$  приходим к уравнению (1.2.5) для неизвестной амплитуды  $\xi(\tau)$ , в котором

$$a_1 = -[1 - (1 - \alpha_0)\lambda_0 \exp(-i\omega)]^{-1} \cdot [\lambda_1(1 + (1 - \alpha_0)\exp(-i\omega)) + \lambda_0\alpha_1(1 + \exp(-i\omega))],$$

$$d = -\lambda_0^2[1 - \lambda_0(1 - \alpha_0) \exp(-i\omega)]^{-1} \cdot [2\alpha_0 + (1 - \alpha_0)(\exp(i\omega) + \exp(-2i\omega))] \times \\ \times (1 - \alpha_0)i \sin \omega \cdot [2i\omega + \alpha_0\lambda_0 + (1 - \alpha_0)\lambda_0] \exp(-2i\omega)^{-1}.$$

Отметим, что устойчивость нулевого решения в (1.2.5) определяется знаком выражения  $\operatorname{Re} a_1$ , а при условиях  $\operatorname{Re} a_1 > 0$  и  $\operatorname{Re} d < 0$  это уравнение имеет устойчивые периодические решения  $\xi_0(\tau) = \rho_0 \exp(i\varphi_0\tau)$ , где

$$\rho_0 = [(-\operatorname{Re} a_1)(\operatorname{Re} d)^{-1}]^{1/2}, \\ \varphi_0 = \operatorname{Im} a_1 + \rho_0^2 \operatorname{Im} d.$$

Сформулируем для примера соответствующий результат.

**Теорема 1.** Пусть  $\operatorname{Re} a_1 > 0$  и  $\operatorname{Re} d < 0$ . Тогда существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  уравнение (1.1.1) имеет асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение  $u_0(t, \varepsilon)$  периода  $T(\varepsilon) = 2\pi\omega^{-1}(1 + \varepsilon\varphi_0\omega^{-1} + o(\varepsilon^2))$  и  $u_0(t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/2}\rho_0 \cos[(\omega + \varepsilon\varphi_0 + o(\varepsilon^2))t] + o(\varepsilon)$ .

Отметим, что при  $\alpha_1 = 0$  и  $\lambda_1 > 0$  выполнено условие  $\operatorname{Re} a_1 > 0$ , а при  $\lambda_1 = 0$  и  $\alpha_1 > 0$  имеем неравенство  $\operatorname{Re} a_1 < 0$ . При достаточно малых значениях параметра  $\alpha_0$  параметры в (1.1.1) близки к параметрам в (0.0.3), а значит,  $\omega \sim \pi/2$  и  $\operatorname{Re} d < 0$  [83].

Покажем, что количество различных периодических решений уравнения (1.1.1) неограниченно растет при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Воспользуемся построениями из [35]. Пусть  $\alpha_1 = 0$ . Сначала заметим, что при изменении параметра  $\varepsilon$  от 0 до  $\varepsilon_0$  период  $T(\varepsilon)$  периодического решения  $u_0(t, \varepsilon)$  изменяется от  $2\pi\omega^{-1}$  до  $2\pi\omega^{-1}(1 + \varepsilon\varphi_0\omega^{-1} + o(\varepsilon^2))$ , длина которого близка к  $2\pi\omega^{-2}\varphi_0\varepsilon_0$ . Заметим, что функция  $u_0(t, \varepsilon)$  одновременно является решением уравнения

$$\dot{u} = \lambda[1 - \alpha u - (1 - \alpha)u(t - nT(\varepsilon))]u.$$

Проведем нормировочные замены  $t \rightarrow (1 + nT(\varepsilon))t$  и  $u((1 + nT(\varepsilon))t) = V(t)$ . В результате приходим для функции  $V$  к тому же самому уравнению (1.1.1)

с той лишь разницей, что вместо коэффициента  $\lambda$  стоит коэффициент  $\lambda_n = \lambda(1 + nT(\varepsilon))$ . Это уравнение имеет периодическое решение  $V_n(t, \varepsilon) = u_0((1 + nT(\varepsilon))t, \varepsilon)$  периода  $T_n(\varepsilon) = T(\varepsilon)(1 + nT(\varepsilon))^{-1}$ . И оно заведомо существует при всех  $\lambda \in \{(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1)(1 + nT(\varepsilon)), 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ . Отсюда непосредственно вытекает, что при  $\lambda \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) количество периодических решений уравнения (1.1.1) неограниченно растет.

### 1.3. Построение квазинормальных форм в сингулярно возмущенном случае

Здесь продолжено изучение локальной — в малой окрестности  $u_0 \equiv 1$  — динамики уравнения (1.1.1). Основное предположение состоит в том, что выполнено условие

$$\lambda^{-1} = \varepsilon \ll 1.$$

В этом случае  $\alpha_0 = 1/2$ . Как уже отмечалось, в рассматриваемой ситуации вещественные части бесконечно многих корней характеристического уравнения (1.1.2) стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Стандартные методы изучения локальной динамики, основанные на теории инвариантных многообразий и теории нормальных форм, оказываются непосредственно неприменимыми. Будут использоваться методики, разработанные в [28, 32, 37, 39, 82]. Остановимся на наиболее простом случае, когда параметр  $\nu$  имеет по  $\varepsilon$  порядок  $\varepsilon^2$ .

**Медленно осциллирующие решения.** Положим здесь

$$\nu = c\varepsilon^2 \tag{1.3.1}$$

и выпишем асимптотику (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) тех корней  $\lambda_k(\varepsilon)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) уравнения (1.1.2), вещественные части которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Стандартными методами получим, что

$$\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_{k_0} + \varepsilon\lambda_{k_1} + \varepsilon^2\lambda_{k_2} + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{k_0} &= \pi(2k + 1)i, \\ \lambda_{k_1} &= -2\pi(2k + 1)i, \\ \lambda_{k_2} &= -2\pi^2(2k + 1)^2 + 4\pi(2k + 1)i - 2c. \end{aligned}$$

Функции  $\text{const} \cdot \exp(\lambda_k(\varepsilon)t)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) являются решениями линейного уравнения (1.1.5). Их можно записать в виде произведения медленно осциллирующей по времени (т.е. зависящей от  $\tau = \varepsilon^2 t$ ) функции на осциллирующую (периодическую) функцию:  $\xi(\tau) \exp[i\pi(2k+1)(1-2\varepsilon)t]$ .

Следуя методике [32, 37, 39, 82], введем в рассмотрение формальный ряд

$$v = \varepsilon^{1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp[i(2k+1)\pi y] + \varepsilon^2 v_1(\tau, y) + \varepsilon^{5/2} v_2(\tau, y) + \dots,$$

в котором  $y = (1-2\varepsilon)t$  и зависимость от  $y$  функций  $v_i(\tau, y)$  — периодическая. Удобно ввести еще одно обозначение. Положим

$$\xi(\tau, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp[i\pi(2k+1)y].$$

Тогда

$$v(t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \xi(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^2 v_1(\tau, y) + \varepsilon^{5/2} v_2(\tau, y) + \dots \quad (1.3.2)$$

Положим затем в (1.1.1)  $u = 1 + v$ . В результате для  $v(t)$  получаем уравнение

$$\varepsilon \dot{v} = -\frac{1}{2} [v + v(t-1) + c\varepsilon^2(v - v(t-1))](1+v). \quad (1.3.3)$$

Подставим (1.3.2) в (1.3.3) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . На втором шаге приходим к соотношению

$$v_1(\tau, y) = -\xi(\tau, y) \frac{\partial \xi(\tau, y)}{\partial y}.$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{5/2}$ , получаем уравнение для определения  $v_2(\tau, y)$ . Из условия разрешимости этого уравнения приходим к уравнению для определения неизвестной амплитуды  $\xi(\tau, y)$ :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - c\xi + \xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (1.3.4)$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, y+1) \equiv -\xi(\tau, y). \quad (1.3.5)$$

Отметим, что решения  $\xi(\tau, y)$  рассматриваются при  $\tau > 0$  как функция по  $y$  из соболевского пространстве  $W_2^2$  с антипериодическими краевыми условиями.

Отсюда непосредственно вытекает следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть краевая задача (1.3.4), (1.3.5) имеет при всех  $\tau > \tau_0$  ограниченное вместе с производными по  $\tau$  и по  $y$  решение  $\xi_0(\tau, y)$ . Тогда уравнение (1.3.3) имеет асимптотическое по невязке с точностью до  $O(\varepsilon^{5/2})$  решение  $v_0(t, \varepsilon)$ , для которого

$$v_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \xi_0(\tau, y) - \varepsilon^2 \xi_0^2(\tau, y) \frac{\partial \xi_0(\tau, y)}{\partial y}$$

и  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $y = (1 - 2\varepsilon)t$ .

Отметим, что в некоторых случаях, например, для состояний равновесия или периодических по времени решений (1.3.4), (1.3.5), удается получить утверждение о существовании близкого к нему точного решения (1.3.3) и исследовать вопросы устойчивости.

## 1.4. Локальный анализ состояния равновесия

Рассмотрим краевую задачу (1.3.4), (1.3.5). В ней удобно выполнить замены  $\tau_1 = 2\tau$ ,  $x = y - 2\tau$  и  $\alpha = -c$ . Затем обратно переобозначим  $\tau_1$  на  $\tau$  и получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \alpha \xi + \xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (1.4.1)$$

с антипериодическими краевыми условиями:

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv -\xi(\tau, x). \quad (1.4.2)$$

Следующее утверждение описывает поведение решений (1.4.1), (1.4.2), а значит, и уравнения (1.3.3) при  $\alpha < 0$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\alpha < 0$  и пусть решение краевой задачи (1.4.1), (1.4.2) определено при всех  $\tau \geq \tau_0$  и является непрерывно дифференцируемым по  $\tau$  и  $y$ . Тогда

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^2 \xi^2(\tau, y) dy = 0.$$

Для доказательства теоремы достаточно умножить (1.4.1) на  $\xi(\tau, y)$  и проинтегрировать от 0 до 2 по  $y$  (с учетом (1.4.2)).

Характеристическое уравнение для линеаризованной на нулевом состоянии равновесия (1.4.1), (1.4.2) краевой задачи имеет вид:

$$\mu = -k^2 \pi^2 + \alpha, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.4.3)$$

При условии  $\alpha < \pi^2$  все корни характеристического уравнения (1.4.3) отрицательные. Отсюда следует, что при всех указанных значениях  $\alpha$  нулевое состояние равновесия краевой задачи (1.4.1), (1.4.2) асимптотически устойчиво. При выполнении неравенства  $\alpha > \pi^2$  характеристическое уравнение (1.4.3) имеет положительный корень, поэтому нулевое решение в (1.4.1), (1.4.2) неустойчиво.

Рассмотрим «критический» случай, когда параметр  $\alpha$  близок к  $\pi^2$ . Положим

$$\alpha = \pi^2 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1.4.4)$$

При  $\varepsilon = 0$  характеристическое уравнение (1.4.3) имеет два нулевых корня, которым отвечают две группы стационарных решений  $\cos \pi x$  и  $\sin \pi x$  линеаризованного уравнения. В этом случае — малой, но не зависящей от  $\varepsilon$ , окрестности состояния равновесия краевой задачи (1.4.1), (1.4.2) — имеется двумерное устойчивое локальное интегральное инвариантное многообразие [76, 77]. На этом многообразии краевая задача представима в виде системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [14]. Для их построения используем стандартные методы бифуркационного анализа (см., например, [26]).

Специфика рассматриваемой ситуации такова, что имеется несколько вырождений. Так, нелинейность в (1.4.1) содержит только кубическое слагаемое (квадратичные слагаемые отсутствуют). Кроме этого, как оказывается, вещественная часть ляпуновской величины [13] равна нулю. Поэтому систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений на двумерном многообразии можно представить в виде одного скалярного комплексного уравнения для некоторой величины  $v(s)$ , где  $s = \sqrt{\varepsilon}\tau$ :

$$\frac{dv(s)}{ds} = iq_1|v(s)|^2v(s) + \sqrt{\varepsilon} (q_2v(s) + q_3|v(s)|^4v(s)). \quad (1.4.5)$$

Здесь  $q_1, q_2, q_3$  — параметры, которые необходимо определить. Решения уравнения (1.4.5) и краевой задачи (1.4.1), (1.4.2) связаны соотношением:

$$\xi(\tau, s, x) = \varepsilon^{1/4}[v(s)e^{i\pi x} + \bar{v}(s)e^{-i\pi x}] + \varepsilon^{1/2}\xi_1 + \varepsilon^{3/4}\xi_2 + \varepsilon\xi_3 + \varepsilon^{5/4}\xi_4 + \dots \quad (1.4.6)$$

Подставляя формальный ряд (1.4.6) в (1.4.1), (1.4.2), будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ .

Учитывая, что в правой части задачи (1.4.1) имеется лишь кубическая нелинейность, все коэффициенты при нечетных степенях разложения (1.4.6) могут быть выбраны нулевыми, т.е.  $\xi_1 \equiv 0$ ,  $\xi_3 \equiv 0$  и т.д.

При  $\varepsilon^{1/4}$  имеет место верное тождество.

При  $\varepsilon^{3/4}$  получается краевая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_2}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} + \pi^2 \xi_2 + e^{3i\pi x} i\pi v^3(s) - e^{-3i\pi x} i\pi \bar{v}^3(s) + e^{i\pi x} \left( -\frac{\partial v(s)}{\partial s} + i\pi v^2(s) \bar{v}(s) \right) + \\ &+ e^{-i\pi x} \left( -\frac{\partial \bar{v}(s)}{\partial s} - i\pi v(s) \bar{v}^2(s) \right), \quad \xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x). \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Из условий разрешимости задачи (1.4.7) в классе ограниченных по  $\tau$  функций, с учетом (1.4.5), имеем

$$q_1 = \pi. \quad (1.4.8)$$

При условии (1.4.8) будем искать  $\xi_2$  в виде третьих гармоник по  $x$ . Тогда нетрудно увидеть, что

$$\xi_2 = \frac{iv(s)^3}{8\pi} e^{3i\pi x} + \frac{-i\bar{v}^3(s)}{8\pi} e^{-3i\pi x}. \quad (1.4.9)$$

Наконец, при  $\varepsilon^{5/4}$  получается краевая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_4}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x^2} + \pi^2 \xi_4 + e^{i\pi x} \left( -\frac{v(s)^3 \bar{v}^2(s)}{8} + v(s) \right) + e^{-i\pi x} \left( -\frac{v^2(s) \bar{v}^3(s)}{8} + \bar{v}(s) \right) + \\ &+ e^{3i\pi x} \left( -\frac{3iv^2(s) \frac{\partial v(s)}{\partial s}}{8\pi} - \frac{3v^4(s) \bar{v}(s)}{4} \right) + e^{-3i\pi x} \left( \frac{3i\bar{v}^2 \frac{\partial \bar{v}(s)}{\partial s}}{8\pi} - \frac{3v(s) \bar{v}^4(s)}{4} \right) - \\ &- \frac{5v^5(s) e^{5i\pi x}}{8} - \frac{5\bar{v}^5(s) e^{-5i\pi x}}{8}, \quad \xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x). \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Из условия разрешимости задачи (1.4.10) с учетом (1.4.5) получаем:

$$q_2 = 1, \quad q_3 = -\frac{1}{8}. \quad (1.4.11)$$

Выпишем нормальную форму

$$\frac{dv(s)}{ds} = i\pi v^2(s) \bar{v}(s) + \sqrt{\varepsilon} \left( v(s) - \frac{1}{8} v^3(s) \bar{v}^2(s) \right). \quad (1.4.12)$$

Выполним полярную замену  $v(s) = \rho(s) e^{i\delta(s)}$  в (1.4.12) и получим

$$\frac{d\rho}{ds} e^{i\delta} + i \frac{d\delta}{ds} \rho e^{i\delta} = i\pi \rho^3 e^{i\delta} + \rho e^{i\delta} \sqrt{\varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{8} \rho^4 \right). \quad (1.4.13)$$

Выделим действительную и мнимую части:

$$\frac{d\rho}{ds} = \rho\sqrt{\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{8}\rho^4\right), \quad (1.4.14)$$

$$\frac{d\delta}{ds} = \pi\rho^2. \quad (1.4.15)$$

Учитывая, что уравнения в системе (1.4.14), (1.4.15) разделились (первое уравнение не зависит от второй переменной), определим устойчивое решение уравнения (1.4.14). Нетрудно видеть, что глобально устойчивым неотрицательным состоянием равновесия этого уравнения является значение

$$\rho_* = \sqrt[4]{8}. \quad (1.4.16)$$

Тогда из второго уравнения системы имеем

$$\delta_* = \pi\sqrt{8\varepsilon}\tau + \gamma, \quad (1.4.17)$$

где  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

Подставляя формулы (1.4.16), (1.4.17) в ряд (1.4.6), получим асимптотику устойчивого цикла исследуемой краевой задачи:

$$\xi \approx 2\sqrt[4]{8\varepsilon} \cos(\pi x + \pi\sqrt{8\varepsilon}\tau + \gamma) + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (1.4.18)$$

Выполнена следующая теорема о соответствии.

**Теорема 4.** *Найдется такое положительное значение  $\varepsilon_0$ , что для любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  краевая задача (1.4.1), (1.4.2) имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл с асимптотикой (1.4.18).*

## 1.5. Численный анализ

Перейдем к численному анализу разностной аппроксимации краевой задачи (1.4.1), (1.4.2). Как и в работе [20], заменим вторую и первую производные по пространственной переменной соответствующими разделенными разностями и перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial \tau} = N^2(\xi_{j+1} - 2\xi_j + \xi_{j-1}) + \alpha\xi_j + 2N\xi_j^2(\xi_{j+1} - \xi_{j-1}), \quad (1.5.1)$$

где  $j = 1, \dots, N$ . Натуральное число  $N$  представляет собой количество частей, на которое разбит промежуток изменения пространственной переменной. Условие антипериодичности в этом случае дает:

$$\xi_0 = -\xi_N \text{ и } \xi_{N+1} = -\xi_1. \quad (1.5.2)$$

Рассмотрим задачу об устойчивости состояния равновесия задачи (1.5.1), (1.5.2). Для этого линеаризуем ее в нуле (отбросив кубическую нелинейность) и выполним эйлерову замену  $\xi_j = e^{\lambda t} \sin(\pi j/N)$ , получим:

$$\lambda \sin \frac{\pi j}{N} = N^2 \left( \sin \frac{\pi(j+1)}{N} - 2 \sin \frac{\pi j}{N} + \sin \frac{\pi(j-1)}{N} \right) + \alpha \sin \frac{\pi j}{N}. \quad (1.5.3)$$

Упростив выражение (1.5.3), получим оценку критического значения  $\alpha$ :

$$\alpha_{\text{кр}} = 2N^2 \left( \cos \frac{\pi}{N} - 1 \right). \quad (1.5.4)$$

Отметим, что при  $N \rightarrow \infty$  критическое значение  $\alpha$  стремится к  $\pi^2$ .

В таблице 1.1 приведено отклонение критического значения  $\alpha$  особой точки разностной схемы от особой точки краевой задачи (1.4.1), (1.4.2) при различных значениях параметра  $N$ .

Кол-во уравнений ( $N$ )	10	20	50	100
$\alpha_{\text{кр}}$	9.78870	9.84933	9.86636	9.86879
$\pi^2 - \alpha_{\text{кр}}$	0.08091	0.02028	0.00325	0.00081

Таблица 1.1. Отклонение критического значения  $\alpha$  особой точки разностной схемы от особой точки краевой задачи (1.4.1), (1.4.2) при различных значениях параметра  $N$ .

Как видно из приведенной таблицы, при увеличении количества уравнений в разностной схеме критическое значение разностной схемы приближается к критическому значению исходной задачи и для 100 уравнений составляет чуть больше, чем 0.0008.

**Приведем результаты численных расчетов** для определения зависимости максимальных значений амплитуды  $A$  (рисунок 1.1) и периода  $T$  (рисунок 1.2) колебаний решения краевой задачи (1.4.1), (1.4.2) от параметра  $\varepsilon$ . Отметим, что увеличение параметра  $\varepsilon$  приводит к серьезным изменениям периода и частоты колебания решения задачи (см. рисунок 1.3).

При проведении вычислений количество уравнений ( $N$ ) в разностной модели (1.5.1), (1.5.2) было равно 100.



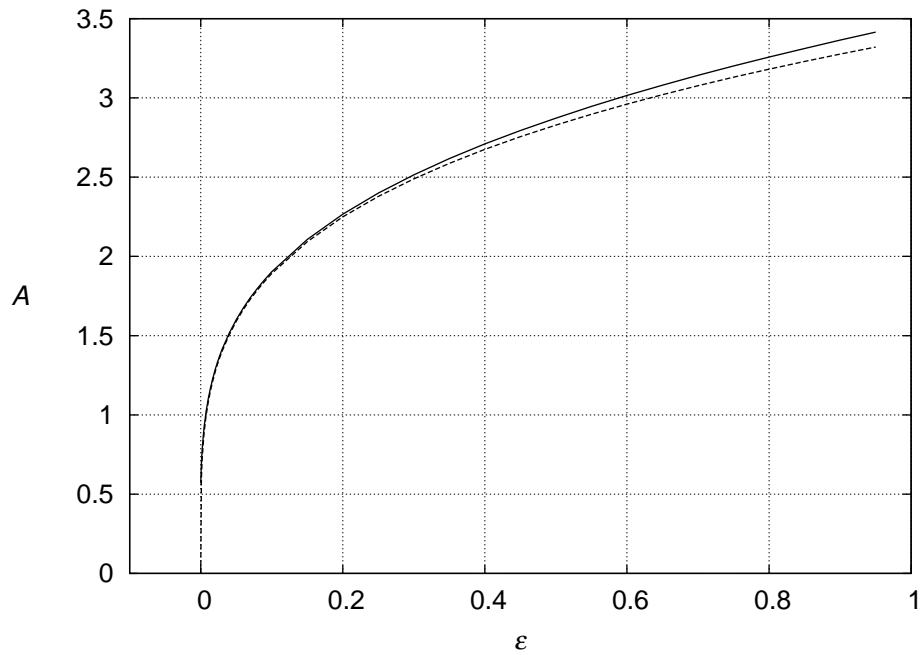


Рис. 1.1. Сплошной линией нанесено значение амплитуды при численных расчетах. Прерывистой линией нанесено аналитически полученное значение амплитуды

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений применялся метод Дормана–Принса [75] с переменной длиной шага (DORPRI853). Параметры работы численного метода — максимальная длина шага, минимальная длина шага, абсолютная погрешность, относительная погрешность — выбраны соответственно  $1/10$ ,  $10^{-10}$ ,  $10^{-12}$ ,  $10^{-12}$ .

Система (1.5.1), (1.5.2) решалась на промежутке времени  $\tau \in [0, 101000]$ . Величина промежутка времени выбиралась «достаточно» большой из тех соображений, чтобы решение задачи успело выйти на аттрактор. Максимальные значения амплитуды  $A$  и периода  $T$  измерялись при  $\tau \in [100000, 101000]$ . Длина промежутка измерений выбиралась таким образом, чтобы на нем помещалось несколько периодов.

При небольших значениях  $\varepsilon$ , как и ожидалось, асимптотический анализ дает очень хорошие результаты. В рамках его применимости колебательный режим близок к синусоидальному.

При увеличении параметра  $\alpha$  локальный анализ становится неприменим. При этом ранее полученный цикл изменяет свой вид и делается релаксационным. Проекция данного цикла на плоскость  $\xi_1$  и  $\xi_{31}$ , представлена на рисунке 1.5. Номера уравнений разностной модели выбраны случайно.

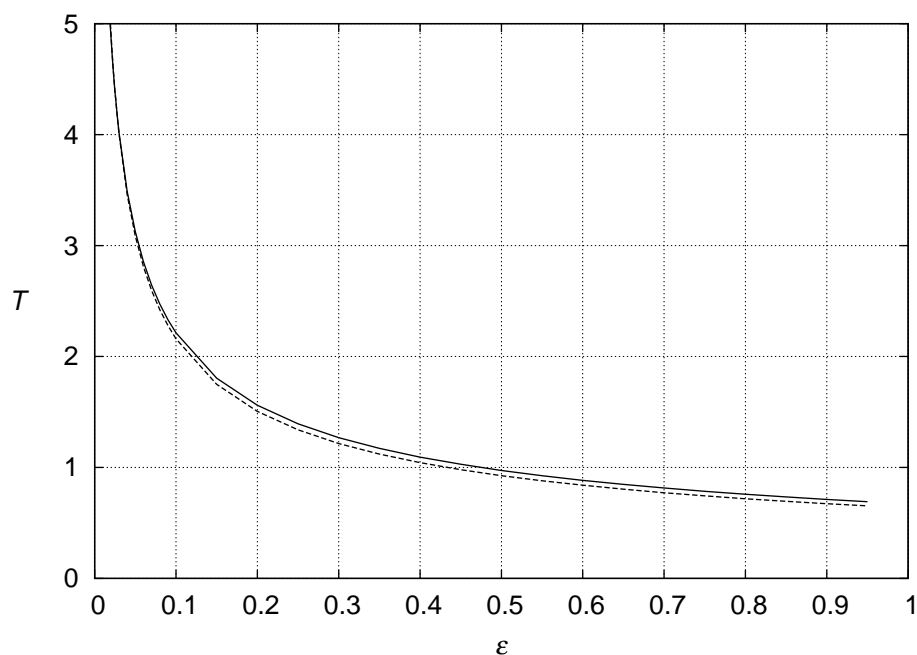


Рис. 1.2. Сплошной линией нанесено значение периода при численных расчетах. Прерывистой линией нанесено аналитически полученное значение периода

На рисунке 1.4 представлен трехмерный график колебаний решения изучаемой краевой задачи при значении  $\varepsilon = 2$ . Как видно из рисунка, поверхность образованная решением, представляет собой так называемый режим «бегущей волны».

## Выводы

Динамические свойства логистического уравнения, содержащего запаздывание (1.1.1), существенно отличаются от динамических свойств логистического уравнения (0.0.2), и логистического уравнения с запаздыванием (0.0.3). При  $\alpha > 1/2$  состояние равновесия  $u_0 \equiv 1$  устойчиво при всех положительных  $\lambda$ . При  $0 < \alpha < 1/2$  могут возникать бифуркационные явления при достижении параметром  $\lambda$  некоторого порогового значения  $\lambda(\alpha)$ .

При  $\alpha \sim 1/2$  и  $\lambda \gg 1$  локальные динамические свойства описываются нелокальным поведением решений специальной нелинейной краевой задачи параболического типа (1.4.1), (1.4.2). Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия.

- При значениях  $\alpha < 0$  все решения стремятся к нулю.

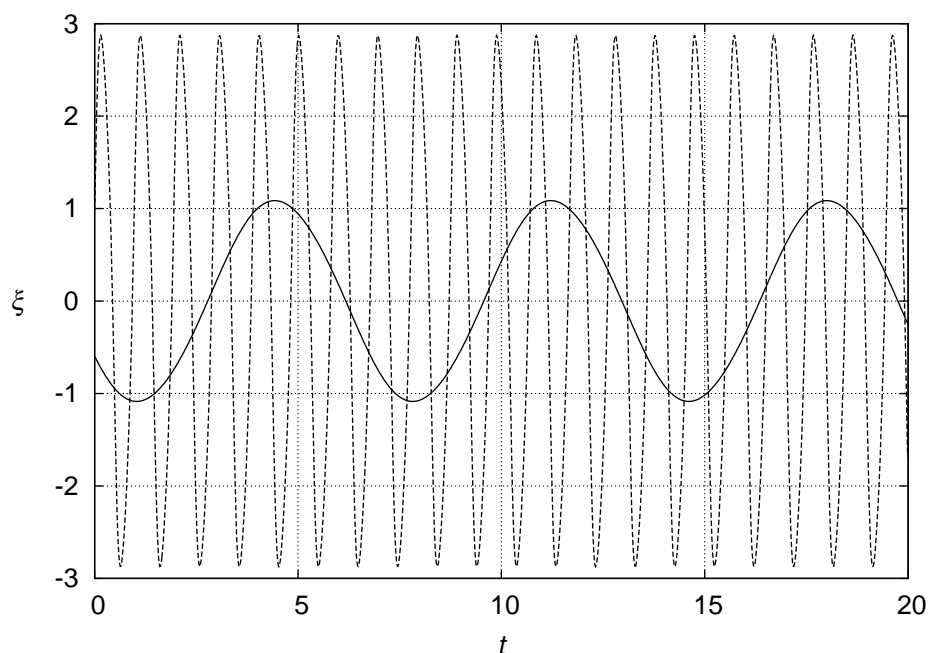


Рис. 1.3. Увеличение частоты и амплитуды колебаний при увеличении параметра  $\varepsilon$ . Сплошная линия  $\varepsilon = 0.01$ , пунктирная  $\varepsilon = 0.5$ . Выполнен сдвиг по времени  $t = \tau - 100980$

- При  $0 < \alpha < \pi^2$  аналитически установлено, что нулевое состояние равновесия устойчиво, и соответственно при численном анализе получено, что все решения стремятся к нулю.
- При  $\alpha = \pi^2 + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) — из состояния равновесия рождается устойчивый цикл. Приведена его асимптотика.
- При  $\alpha > \pi^2$  — численные исследования показали, что имеется единственное устойчивое периодическое решение. При достаточно больших  $\alpha$  ( $\alpha \approx \pi^2 + 2$ ) этот цикл имеет релаксационную структуру.

Отметим, что наблюдается хорошее совпадение результатов численного моделирования и утверждений аналитического характера при значениях  $\varepsilon \in (0, 1)$  (рисунок 1.1– 1.3).

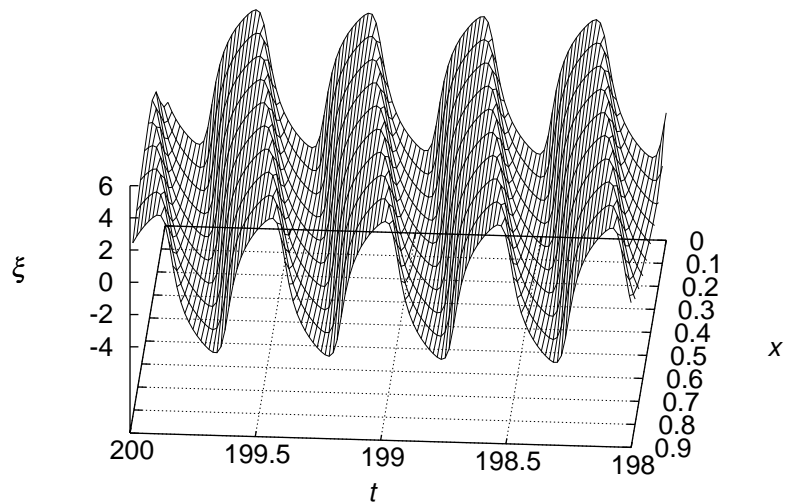


Рис. 1.4. Бегущая волна при  $\varepsilon = 2$

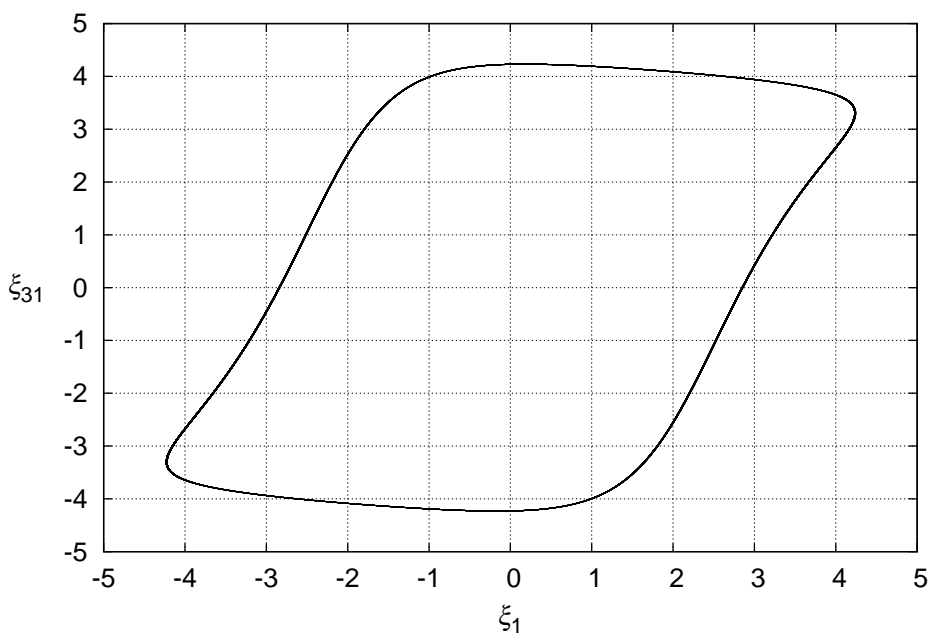


Рис. 1.5. Фазовое пространство  $\xi_1$  и  $\xi_{31}$  при  $\varepsilon = 2$

## Глава 2.

# Логистическое уравнение с диффузией и запаздыванием

### 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим обобщение уравнения КПП

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u(t - h, x)], \quad (2.1.1)$$

содержащее запаздывание  $h > 0$ , и поведение его решения с некоторыми классическими граничными условиями. Пусть, например, заданы периодические граничные условия

$$u(t, x + T) \equiv u(t, x). \quad (2.1.2)$$

Конечно, при  $h > \pi/2$  краевая задача (2.1.1), (2.1.2) имеет пространственно однородное периодическое решение  $u_0(t)$ . При условии близости параметра  $h$  к  $\pi/2$ , а также при  $h \gg 1$  это решение устойчиво. Если же значения  $h$  и  $T$  достаточно велики, то возможна потеря устойчивости решения  $u_0(t)$  и возникновение сложных пространственно неоднородных структур [20, 36, 38, 83, 107].

Рассмотрим более подробно случай близости запаздывания  $h$  к  $\pi/2$  и предположим, что выполнено соотношение

$$h = \pi/2 + \varepsilon h_1 \quad \text{где} \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (2.1.3)$$

Если дополнительно предположить, что для параметра  $T$  в (2.1.2) выполнено условие

$$T \gg 1, \quad (2.1.4)$$

то динамика краевой задачи (2.1.1), (2.1.2) существенно усложняется. Поведение решений в малой окрестности состояния равновесия  $u_0 \equiv 1$  тогда в основном определяется нелокальным поведением решений нормализованного комплексного уравнения — уравнения Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \sigma \delta \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + h_1 \delta \xi + d |\xi|^2 \xi, \quad (2.1.5)$$

$$\xi(\tau, y + 1) \equiv \xi(\tau, y). \quad (2.1.6)$$

Здесь  $\tau = \varepsilon t$ ,  $y = T^{-1}x$  — новые временная и пространственная переменные,  $\sigma = T^{-2}\varepsilon^{-1}$  — величина порядка единицы,

$$\delta = \frac{4 - 2\pi i}{4 + \pi^2}, \quad d = -\frac{2(3\pi - 2 + i(\pi + 6))}{5(4 + \pi^2)}. \quad (2.1.7)$$

Решения (2.1.1), (2.1.2) и решения (2.1.5), (2.1.6) связаны формулой

$$u(t, x) = 1 + \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau, y) \exp(it) + \bar{\xi}(\tau, y) \exp(-it)] + O(\varepsilon). \quad (2.1.8)$$

Динамические свойства (2.1.5) – (2.1.6) существенно зависят от параметра  $\sigma$ . Например, при достаточно малых  $\sigma$  все простейшие периодические решения вида

$$\rho_m \exp(2\pi i m y + i \varphi_m \tau) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

неустойчивы [31]. В статьях [20, 68] для задачи (2.1.5) с периодическими краевыми условиями (2.1.6) и с краевыми условиями Неймана выполнен численный эксперимент, позволяющий утверждать, что при уменьшении параметра  $\sigma$  ее колебательные режимы становятся неупорядоченными и имеют все более сложную структуру по пространственной переменной. Следует отметить, что утверждение о соответствии между решениями квазинормальной формы (2.1.5), (2.1.6) и исходной краевой задачи может быть обосновано только в случае гиперболичности аттрактора задачи (2.1.5), (2.1.6), поэтому в статье [27] для уравнения (2.1.1) с краевыми условиями Неймана и условиями (2.1.6) был выполнен переход к специальному разностному аналогу, с последующим численным анализом дискретной системы.

Для получения дискретного аналога распределенного уравнения (2.1.1) выпишем интегральное равенство

$$u(t+h/k, x) = u(t, x) \exp \left[ \int_t^{t+h/k} \frac{1}{u(\tau, x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x) d\tau + \left( \frac{h}{k} - \int_{t-h}^{t-h+h/k} u(\tau, x) d\tau \right) \right]. \quad (2.1.9)$$

Фиксируем теперь некоторое натуральное  $N$ , зададим узлы  $x_j = T(j - 1/2)/N$ ,  $j = 1, \dots, N$  и заменим в (2.1.9) вторую частную производную по  $x$  второй разделенной разностью. Аппроксимируя интегралы по формуле прямоугольников, для переменных  $u_{n,j} = u(nh/k, x_j)$  имеем систему разностных уравнений

$$u_{n+1,j} = u_{n,j} \exp \left[ d \left( \frac{u_{n,j+1}}{u_{n,j}} + \frac{u_{n,j-1}}{u_{n,j}} - 2 \right) + \frac{h}{k} (1 - u_{n-k,j}) \right], \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.1.10)$$

где  $n = 1, 2, \dots$ ,  $d = N^2/(kT^2)$ ,  $u_{n,0} = u_{n,N}$ ,  $u_{n,N+1} = u_{n,1}$ .

Непосредственное вычисление по формулам (2.1.10) приближенных решений краевой задачи (2.1.5), (2.1.6) позволяет проследить за усложнением решений при уменьшении параметра  $d$  (соответствует увеличению значения  $T$ ) и за увеличением амплитуды колебательного режима при увеличении параметра  $h$ . На рисунок 2.1 приведены графики распределения решения краевой задачи (2.1.5), (2.1.6) по пространственной переменной, построенные с помощью дискретной модели (2.1.10) при  $N = 50$ , первые два графика построены для  $T = 60$ ,  $h = 1.6$  в случае а) и  $h = 1.8$  в случае б), третий и четвертый графики построены для  $T = 120$  и тех же значений  $h$ . На всех графиках рисунок 2.1 пространственная переменная  $x$  пронормирована на  $T$ .

Учитывая, что для многих приложений представляет интерес задача о распространении волн концентрации в задаче (2.1.1), в следующих пунктах будем рассматривать это уравнение без граничных условий.

## 2.2. Построение нормализованного уравнения

Итак, рассмотрим вопрос о поведении решений с начальными условиями из некоторой достаточно малой, но независимой от  $\varepsilon$  окрестности в  $C_{[-\infty, 0] \times [-h, 0]}$  состояния равновесия  $u_0 \equiv 1$  уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \left[ 1 - u \left( t - \frac{\pi}{2} - \varepsilon, x \right) \right]. \quad (2.2.1)$$

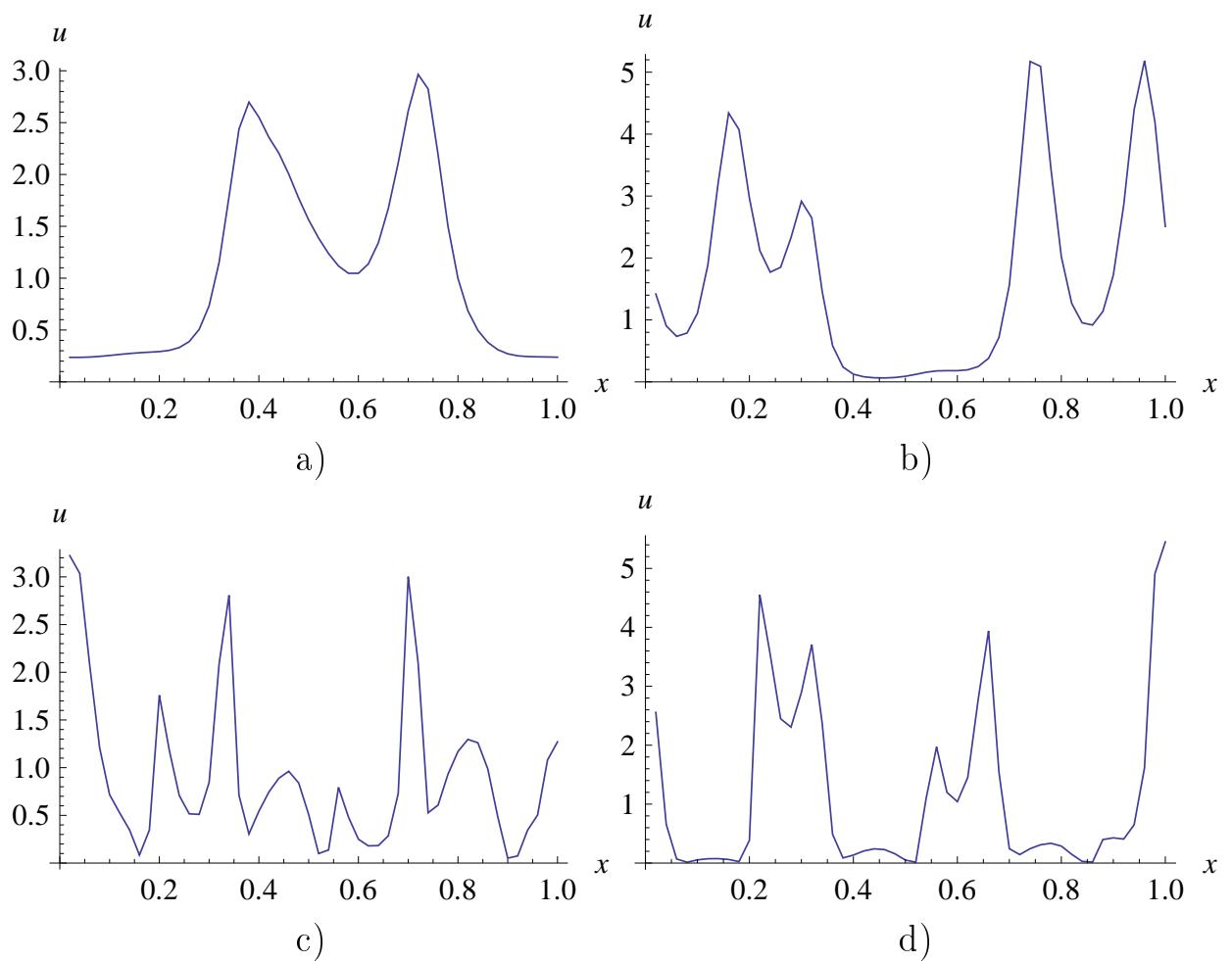


Рис. 2.1. Пространственное распределение решения  $u(t, x)$  при а)  $T = 60$ ,  $h = 1.6$ ; б)  $T = 60$ ,  $h = 1.8$ ; в)  $T = 120$ ,  $h = 1.6$ ; г)  $T = 120$ ,  $h = 1.8$

Характеристическое (волновое) уравнение для линеаризованного на  $u_0$  уравнения (2.2.1) имеет вид

$$\lambda = -k^2 - \exp\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)\lambda\right), \quad k \in (-\infty, \infty). \quad (2.2.2)$$

При достаточно малом  $k^2$  это уравнение имеет корень  $\lambda(k, \varepsilon)$ , вещественная часть которого достаточно мала. Сформируем этот вывод более точно. Положим  $k = \varepsilon^{1/2}m$ . Тогда уравнение (2.2.2) имеет корень  $\lambda_m(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon^{1/2}m, \varepsilon)$ , для которого имеет место асимптотическое при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равенство

$$\lambda_m(\varepsilon) = i + \frac{\varepsilon(1 - m^2)(1 - i\pi/2)}{1 + \pi^2/4} + O(\varepsilon). \quad (2.2.3)$$

Таким образом при каждом  $|m| < 1$  вещественная часть корня  $\lambda_m(\varepsilon)$  близка к нулю, а мнимая — к 1.



Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, x) = 1 + \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau, y) \exp(it) + \bar{\xi}(\tau, y) \exp(-it)] + \varepsilon u_2(\tau, y, t) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, y, t) + \dots, \quad (2.2.4)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ ,  $y = \varepsilon^{1/2} x$ ,  $\xi(\tau, y)$  — неизвестные и подлежащие определению «амплитуды», а зависимость функции  $u_j(\tau, y, t)$  от аргумента  $t$  является  $2\pi$ -периодической. Подставим (2.2.4) в (2.2.1) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  в левой и правой частях получившегося формального тождества. На втором шаге тогда получим, что

$$u_2(\tau, y, t) = \frac{2-i}{5} \xi^2(\tau, y) \exp(2it) + \frac{2+i}{5} \bar{\xi}^2(\tau, y) \exp(-2it).$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{3/2}$ , получим уравнение относительно  $u_3$ . Из условия разрешимости этого уравнения в указанном классе функций, приходим, как и в предыдущем пункте, к уравнению типа Гинзбурга–Ландау для определения  $\xi(\tau, y)$ :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \delta \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \delta \xi + d |\xi|^2 \xi, \quad (2.2.5)$$

где  $\delta$  и  $d$  определяются по формулам (2.1.7). Отметим, что  $\operatorname{Re} \delta > 0$  и  $\operatorname{Re} d < 0$ .

Основной результат состоит в следующем

**Теорема 5.** Пусть уравнение (2.2.5) имеет ограниченное при  $\tau \rightarrow +\infty$  и при  $y \rightarrow \pm\infty$  решение  $\xi_0(\tau, y)$ . Тогда уравнение (2.2.1) имеет асимптотическое по невязке с точностью до  $O(\varepsilon^{3/2})$  решение  $u(t, x, \varepsilon)$ , для которого

$$u(t, x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/2} [\xi_0(\tau, y) \exp(it) + \bar{\xi}_0(\tau, y) \exp(-it)] + \varepsilon \left[ \frac{2-i}{5} \xi_0^2(\tau, y) \exp(2it) + \frac{2+i}{5} \bar{\xi}_0^2(\tau, y) \exp(-2it) \right] + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Уравнение (2.2.5) имеет среди своих решений однопараметрическое семейство простейших периодических решений

$$u_m(\tau, y) = \rho_m \exp(imy + i\omega_m \tau), \quad (2.2.6)$$

где  $\rho_m^2 = \frac{(m^2 - 1)\operatorname{Re} \delta}{\operatorname{Re} d}$ ,  $|m| < 1$ ,  $\omega_m = \left[ \operatorname{Im} \delta - \operatorname{Im} d \frac{\operatorname{Re} \delta}{\operatorname{Re} d} \right] (1 - m^2) - \operatorname{Im} \delta$ . В силу того, что имеет место неравенство

$$1 + \frac{\operatorname{Im} \alpha}{\operatorname{Re} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{Im} d}{\operatorname{Re} d} = \frac{-\pi^2 - 4}{6\pi - 4} < 0,$$

из результатов статьи [31] следует вывод о неустойчивости всех решений (2.2.6). Учитывая полученный результат, в следующем разделе рассмотрим некоторые свойства волновых решений уравнения (2.1.1).

## 2.3. Некоторые свойства уравнения распространения волны

В работе [44] было показано, что в уравнении (0.0.2) волны распространяются вдоль направлений  $2t \pm x = \text{const}$ , и был определен профиль волны, приводящей к переходу от нулевых значений переменной к единичным. Выполним в уравнении (0.0.2) замену в виде бегущей волны вида  $u(t, x) = w(2t \pm x)$  и перейдем к новой временной переменной  $s = 2t \pm x$ , тогда для новой переменной  $w(s)$  имеем следующее уравнение второго порядка с запаздыванием:

$$w'' - 2w' + w[1 - w(s - 2h)] = 0, \quad (2.3.1)$$

где штрихом обозначена производная по переменной  $s$ . Свойства устойчивости нулевого решения уравнения (2.3.1) не зависят от  $h$ , это решение представляет собой неустойчивый узел с кратным корнем, равным единице. Свойства устойчивости единичного состояния равновесия определяются расположением корней характеристического квазиполинома

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 - 2\lambda - \exp(-2h\lambda). \quad (2.3.2)$$

Рассмотрим сначала расположение и количество вещественных корней квазиполинома  $P(\lambda)$ . Простейший анализ свойств трансцендентного уравнения  $P(\lambda) = 0$  показывает, что при всех положительных  $h$  оно имеет либо один, либо три корня. Один из этих корней положительный, а два других отрицательны и появляются при критическом значении  $h_1^*$ , для нахождения которого имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda - \exp(-2h\lambda) &= 0, \\ 2\lambda - 2 - 2h \exp(-2h\lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Решая систему (2.3.3), имеем  $\lambda \approx -1.23141$ ,  $h = h_1^* \approx 0.56077$ . Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

**Лемма 4.** *Квазиполином  $P(\lambda)$  имеет при  $0 < h < h_1^*$  ровно три вещественных корня: один положительный и два отрицательных, а при  $h > h_1^*$  — единственный положительный вещественный корень.*

Таким образом в спектре устойчивости единичного состояния уравнения (2.3.1) всегда есть положительный вещественный корень. Рассмотрим теперь расположение остальных корней квазимногочлена  $P(\lambda)$ . Выполнено утверждение.

**Лемма 5.** *Все корни квазиполинома  $P(\lambda)$ , кроме одного вещественного положительного, лежат при  $0 < h < h_2^*$  в левой комплексной полуплоскости. Здесь*

$$h_2^* = \frac{\arccos(-\sqrt{5} + 2)}{2\sqrt{\sqrt{5} - 2}} \approx 1.86173. \quad (2.3.4)$$

При  $h = h_2^*$  на мнимую ось выходит пара чисто мнимых корней  $\lambda = \pm i\omega_0$ , причем

$$\omega_0 = \sqrt{\sqrt{5} - 2} \approx 0.48587. \quad (2.3.5)$$

Рассмотрим теперь окрестность решения  $w(s) \equiv 1$  и найдем асимптотику режима, ответвляющегося от этого решения при  $h = h_2^* + \mu$ , где  $0 < \mu \ll 1$ . Для этого применим стандартную замену метода нормальных форм

$$w(s, \mu) = 1 + \sqrt{\mu}(z(\tau) \exp(i\omega_0 s) + \bar{z}(\tau) \exp(-i\omega_0 s)) + \mu w_1(s, \tau) + \mu^{3/2} w_2(s, \tau) + \dots, \quad (2.3.6)$$

где  $\tau = \mu s$ ,  $w_j(s, \tau)$  ( $j = 1, 2$ ) — тригонометрические полиномы по переменной  $s$ ,  $z(\tau)$  — медленно меняющаяся амплитуда, подлежащая определению. Подстановка выражения (2.3.6) в уравнение (2.3.1) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $\sqrt{\mu}$  приводит на третьем шаге к уравнению относительно  $w_2(s, \tau)$ , из условий разрешимости которого в классе тригонометрических полиномов получаем следующее уравнение на медленную амплитуду  $z(\tau)$ :

$$\frac{dz}{d\tau} = \varphi_0 z + \varphi_1 |z|^2 z, \quad (2.3.7)$$

где  $\varphi_0 = \frac{2\omega_0^2(-1 + i\omega_0)}{P'(i\omega_0)}$ ,  $\varphi_1 = \frac{1}{P'(i\omega_0)} \left( 2\omega_0^2(1 - \omega_0^2 - 2i\omega_0) + b \left( (\omega_0^2 + 2i\omega_0)^2 - \frac{1}{\omega_0^2 + 2i\omega_0} \right) \right)$ ,  $b = \frac{\omega_0^2 + 2i\omega_0}{4\omega_0^2 + 4i\omega_0 + (\omega_0^2 + 2i\omega_0)^2}$ . Используя полученное представление и формулы (2.3.4), (2.3.5), нетрудно найти приближенные значения коэффициентов уравнения (2.3.7)  $\varphi_0 \approx 0.136807 - 0.20660i$ ,  $\varphi_1 \approx -0.04429 - 0.03664i$ . Учитывая, что  $\text{Re}(\varphi_0) > 0$ , а  $\text{Re}(\varphi_1) < 0$  можно сформулировать следующее утверждение.

**Лемма 6.** *Существует такое  $\mu_0 > 0$ , что для всех  $0 < \mu < \mu_0$  уравнение (2.3.1) имеет дихотомичный цикл, неустойчивое многообразие которого*

одномерно, а асимптотика задается формулой (2.3.6), в которой амплитуда  $z(\tau)$  заменена выражением

$$\sqrt{-\operatorname{Re}(\varphi_0)/\operatorname{Re}(\varphi_1)} \exp\left(i\varepsilon s(\operatorname{Im}(\varphi_0)\operatorname{Re}(\varphi_1) - \operatorname{Re}(\varphi_0)\operatorname{Im}(\varphi_1))/\operatorname{Re}(\varphi_0) + i\gamma\right),$$

где  $\gamma$  — произвольная константа, определяющая фазовый сдвиг вдоль цикла.

Представленные в первых трех разделах работы аналитические результаты позволяют получить некоторую информацию о решениях уравнения (2.1.1), однако для анализа зависимости решений от запаздывания и начальных условий требуется численный эксперимент, описанию которого и посвящен следующий раздел статьи.

## 2.4. Численный анализ уравнения КПП с запаздыванием

Численное исследование распространения волн концентрации в уравнении (2.1.1) от локализованного по пространству начального возмущения выполнялось на некотором отрезке  $[a, b]$ . При этом разница  $|a - b|$  выбиралась достаточно большой для того, чтобы можно было проследить за распространением волны от начального момента до момента встречи фронта волны с границами  $a$  или  $b$ . Учитывая, что рассматривается задача о распространении локального возмущения, зададим на границах отрезка нулевые краевые условия  $u(t, a) = u(t, b) = 0$ .

Перейдем к описанию вычислительной процедуры. Вторую производную по пространственной переменной в правой части уравнения (2.1.1) заменим конечной разностью второго порядка. Для этого отрезок  $[a, b]$  разобьем на  $N$  равных частей и построим сетку узлов с шагом  $\Delta x = (b - a)/N$  так, что  $x_j = a + j\Delta x$ , где  $j = 0, \dots, N - 1$ . Обозначим через  $u_j(t)$  значение функции  $u(t, x)$  в соответствующих узлах сетки. В итоге получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2} + [1 - u_j(t - h)]u_j, \quad j = 0, \dots, N - 1. \quad (2.4.1)$$

Для учета нулевых краевых условий полагаем  $u_{-1}(t) = u_N(t) = 0$ .

Численный эксперимент выполнялся на вычислительном кластере ЯРГУ (МНИЛ «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне).

Одновременно решалось от  $N = 0.9 \cdot 10^5$  до  $N = 1.8 \cdot 10^5$  уравнений с запаздыванием. Особенностью численного решения такой системы является повышенная требовательность к объемам доступной памяти для хранения решения на промежутке запаздывания. В связи с этим приходилось существенно использовать жесткий диск кластера, что значительно замедляло процедуру расчета. Для вычислений использовался метод Дормана–Принца пятого порядка с переменной длиной шага интегрирования. Абсолютная и относительная погрешности алгоритма были приняты равными  $10^{-12}$ . Начальный шаг интегрирования взят равным  $10^{-3}$ .

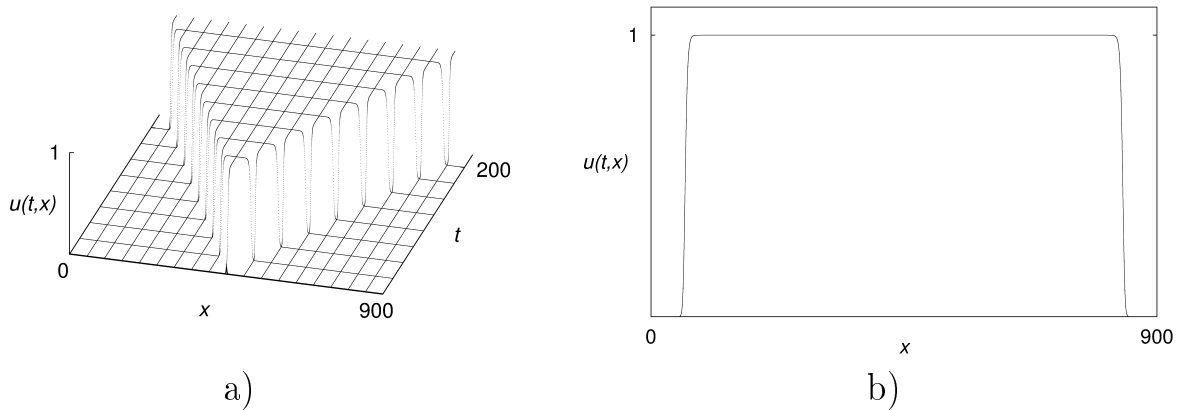


Рис. 2.2. Решение системы (2.4.1) с начальными условиями (2.4.2) при  $h = 0$ : а) распространение волны на плоскости  $(x, t)$ ; б) разрез при  $t = 200$

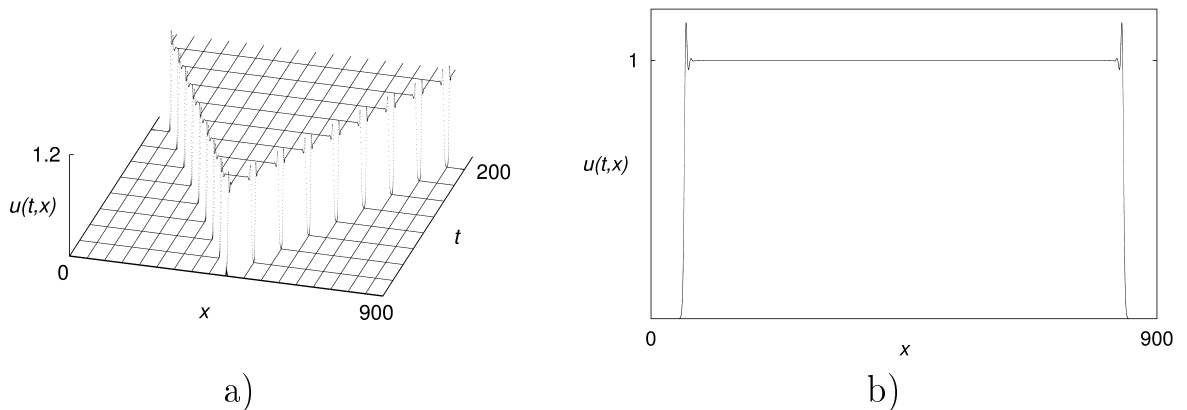


Рис. 2.3. Решение системы (2.4.1) с начальными условиями (2.4.2) при  $h = 1$ : а) распространение волны на плоскости  $(x, t)$ ; б) разрез при  $t = 200$

Начальные условия выбирались в виде прямоугольного импульса высоты 0.1 и единичной ширины, расположенного в центре отрезка  $[a, b]$  для всех

$-h \leq t \leq 0$ . В частности, для случая  $x \in [0, 1800]$ :

$$u_j(t) = \begin{cases} 0.1, & \text{если } j \in [89950, 90050], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.4.2)$$

где  $t \in [-h, 0]$ . Для последующего анализа и графического отображения полученные данные прореживались.

Перейдем к результатам численного моделирования. Описание поведения уравнения (2.1.1) с запаздыванием будем проводить в сравнении с классическим уравнением (0.0.4) без запаздывания. На рисунок 2.2 представлено распространение волны постоянной высоты от начального всплеска единичной ширины и высоты 0.1. Скорость распространения волны согласно [44] равнялась двум. (На соответствующих рисунках скорость распространения равна углу наклона профиля волны.)

Рассмотрим теперь систему (2.4.1) с ненулевым запаздыванием. При увеличении параметра  $h$  можно выделить несколько этапов качественно различного поведения решений системы (2.4.1).

1. При относительно малом значении  $h$  на промежутке от нуля до  $h_1^*$  поведение системы (2.4.1) практически не отличается от поведения системы КПП без запаздывания. Величина  $h_1^*$  ограничивает данный промежуток, по-видимому, в связи с тем, что решения уравнения (2.3.1) на устойчивом инвариантном многообразии единичного состояния равновесия монотонно стремятся к этому состоянию.

2. При  $h_1^* < h < \pi/2$  фронт распространения волны приближается к единичному значению колебательным образом. На рисунок 2.3 показана такая волна при  $h = 1$ . В этом случае максимальная амплитуда всплеска равна примерно 1.2, а после прохождения фронта волны значение  $u(t, x)$  быстро приближается к единице.

3. Следующее существенное изменение в распространении фронта волны системы (2.4.1) наблюдается при  $h > \pi/2$ . Существенной особенностью решения в этом случае является то, что оно перестает удовлетворять уравнению (2.3.1). Это происходит в силу того, что у логистического уравнения с запаздыванием (0.0.2) при  $h = \pi/2$  решение  $u_0 \equiv 1$  теряет устойчивость и от него ответвляется устойчивый цикл. Указанное обстоятельство приводит к тому, что в пространственной области, где были заданы ненулевые начальные условия (2.4.2), наблюдаются незатухающие колебания, амплитуда которых растет с ростом  $h$ . Размер пространственной области со сложными колебаниями медленно (в сравнении со скоростью распространения волнового фронта) расширяется. Решения в этой области близки к решениям

уравнения (2.1.1) с классическими периодическими условиями (см. рисунок 2.1a и 2.1c в первом разделе статьи), причем, как показано в первых двух разделах статьи, увеличение размера области неоднородности (соответствует росту величины  $T$ ) приводит к появлению все более изрезанных по пространственной переменной режимов.

При  $\pi/2 < h < h_2^*$  графические представления решения системы (2.4.1) с начальными условиями (2.4.2) приводятся на рисунок 2.4, 2.5 для  $h = 1.6$  и на рисунок 2.6, 2.7 для  $h = 1.7$ . При этом на рисунок 2.4, 2.6 приведена общая картина распространения волны от начального возмущения; на рисунок 2.5a, 2.7a — разрез вдоль одного из волновых фронтов (в данном случае выбран разрез вдоль прямой  $x = 2t + 900$ ); на рисунок 2.5b, 2.7b — зависимость решения от  $x$  при фиксированном  $t = 400$ ; на рисунок 2.5c, 2.7c — зависимость решения от  $t$  при фиксированном  $x = 900$ ; и наконец, на рисунок 2.5d, 2.7d изображена зависимость плотности распределения решения  $u(t, x)$  в оттенках серого.

4. При дальнейшем увеличении  $h > h_2^*$  характер поведения центральной части распространяющейся волны резко меняется. Для иллюстрации этих изменений на рисунок 2.8, 2.9 приведен общий вид решения и несколько разрезов при  $h = 1.8$  (это значение близко, но немного меньше величины  $h_2^*$ , см. (2.3.4)). Поскольку в силу леммы 3 при  $h = h_2^*$  от единичного состояния равновесия уравнения (2.3.1) ветвится цикл, то пропадает область, в которой решение стремилось к единице. Это хорошо заметно на разрезе вдоль прямой  $x = 2t + 900$  (рисунок 2.9a) и на графике 2.9b зависимости решения от  $x$  при фиксированном  $t = 400$ . Кроме того, из изображенной на рисунок 2.9d зависимости распределения решения  $u(t, x)$  можно заключить, что относительно медленное распространение колебательной структуры, находящейся в центре распространяющейся волны, сменяется при значениях  $t$ , близких к 300, распространением со скоростью, близкой к скорости распространения фронта основной волны и равной двум. Представление о характере распределения решения по пространственной и временной переменным дает график  $u(t, x)$  в области с границами  $[400, 1400] \times [400, 420]$ . Рисунки 2.9 и 2.9b показывают сильную изрезанность пространственно-временного распределения функции  $u(t, x)$ . Сравнивая эти рисунки с приведенными в первом разделе графиками решений задачи с периодическими краевыми условиями (рисунок 2.1b и 2.1d), убеждаемся в их близости. Величина  $h = 1.8$  близка, но меньше значения  $h_2^*$ . На рисунок 2.10, 2.11 приведены аналогичные предыдущим графики, характеризующие распространение волны при  $h = 2$ . В этом случае вся область распространения волны заполнена интенсивными колебаниями по пространственной и временной переменным.

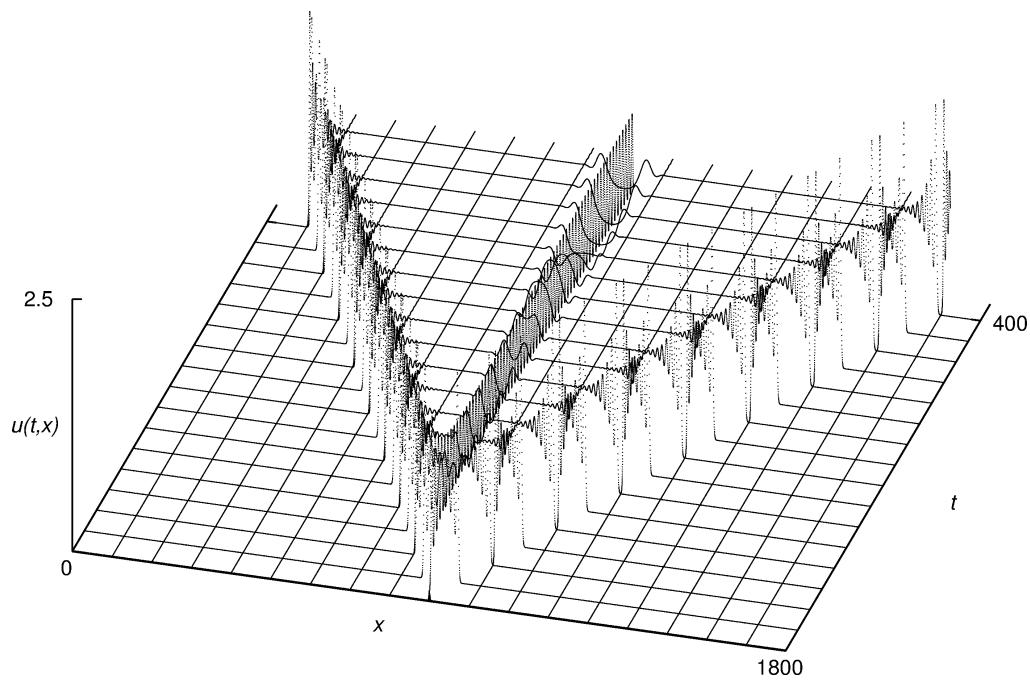


Рис. 2.4. Распространение волны в системе (2.4.1) при  $h = 1.6$

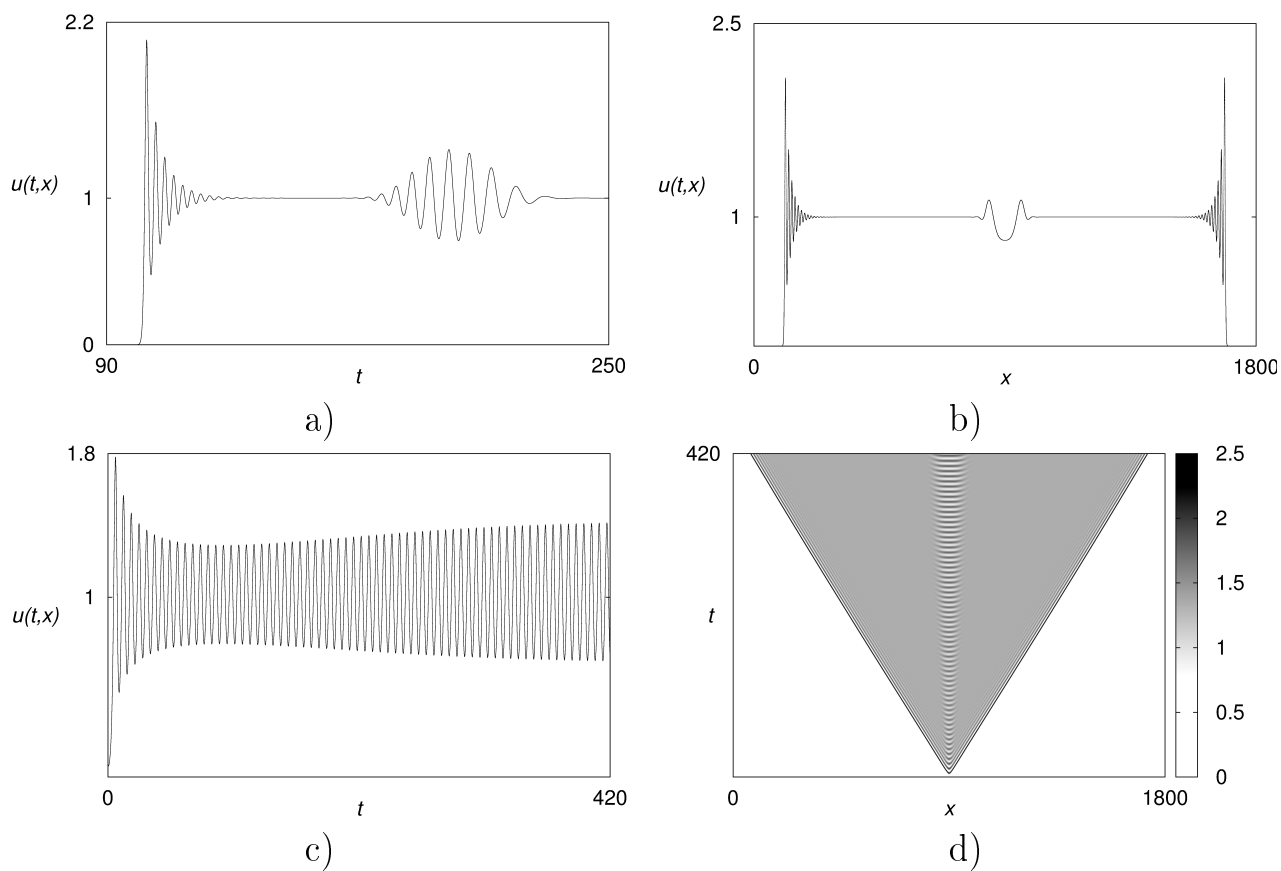


Рис. 2.5. Решение системы (2.4.1) при  $h = 1.6$ : а) разрез при  $x = 2t + 900$ ; б) разрез при  $t = 400$ ; в) разрез при  $x = 900$ ; д) плотность распределения  $u(t, x)$  в оттенках серого



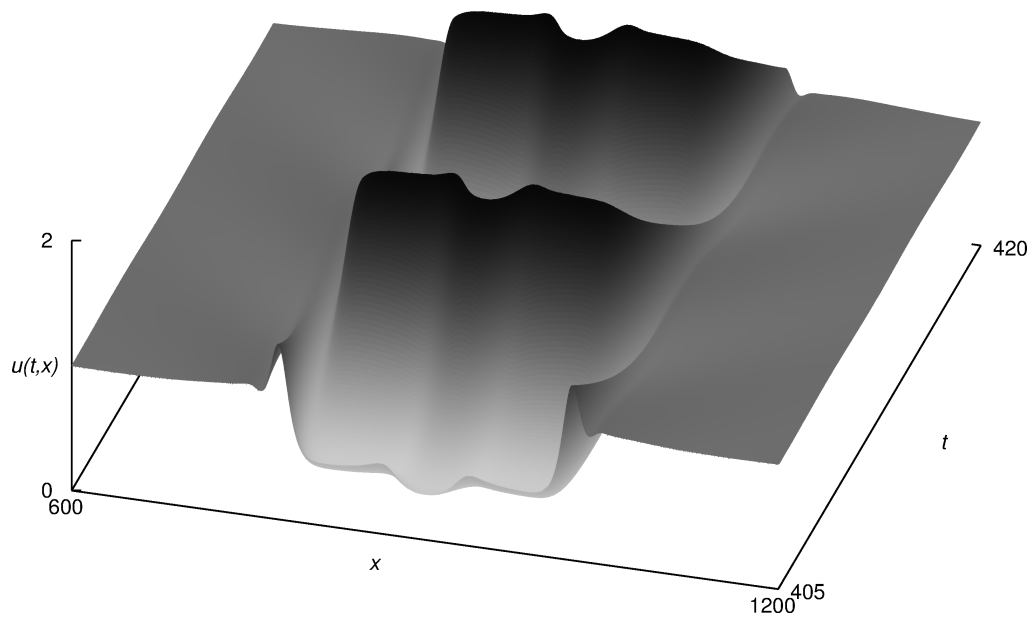


Рис. 2.6. Фрагмент ( $x \in [600, 1200]$ ,  $t \in [405, 420]$ ) графика распространения волны в системе (2.4.1) при  $h = 1.7$

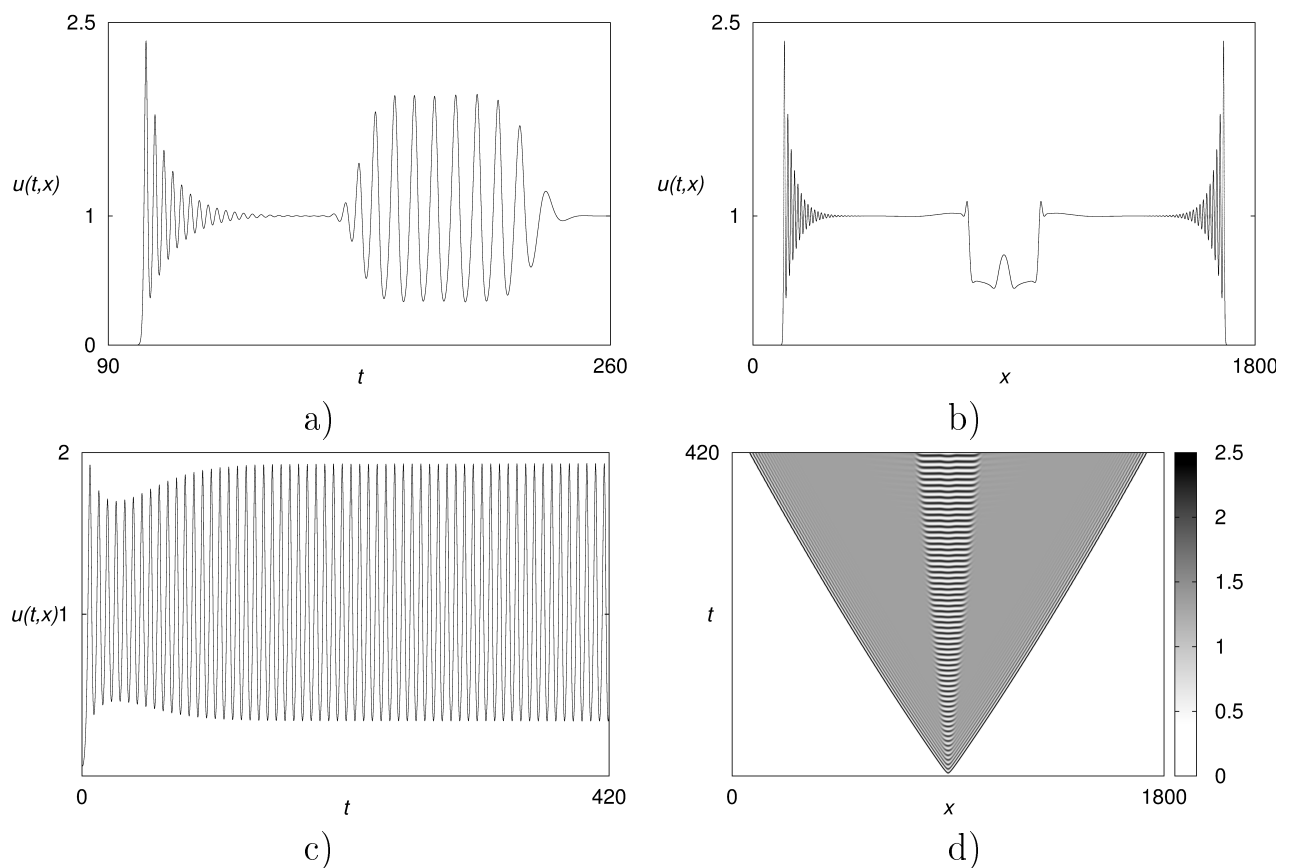


Рис. 2.7. Решение системы (2.4.1) при  $h = 1.7$ : а) разрез при  $x = 2t + 900$ ; б) разрез при  $t = 400$ ; в) разрез при  $x = 900$ ; д) плотность распределения  $u(t, x)$  в оттенках серого

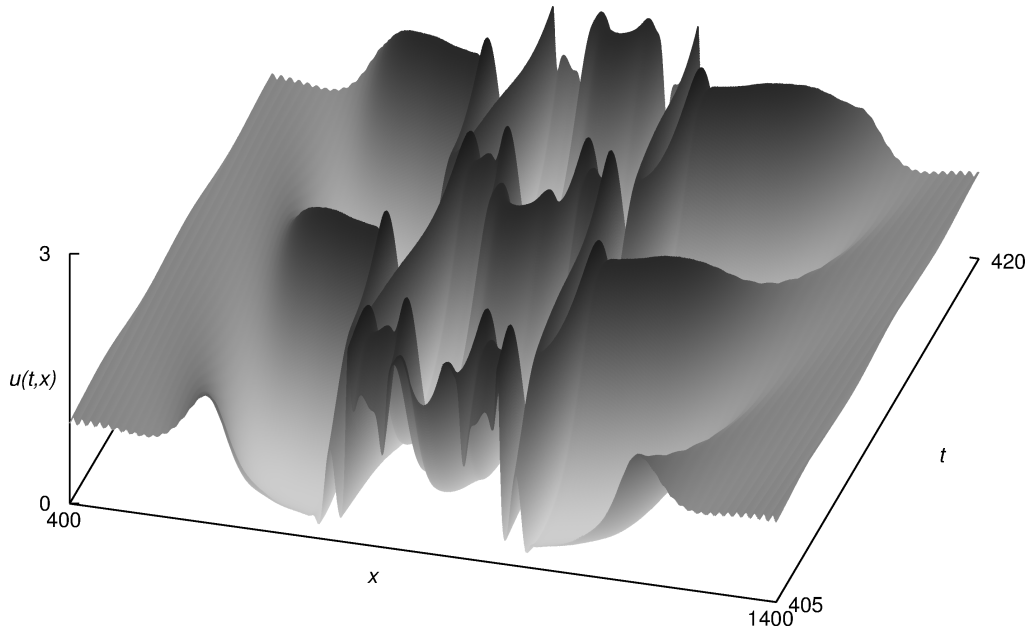


Рис. 2.8. Фрагмент ( $x \in [400, 1400], t \in [405, 420]$ ) графика распространения волны в системе (2.4.1) при  $h = 1.8$

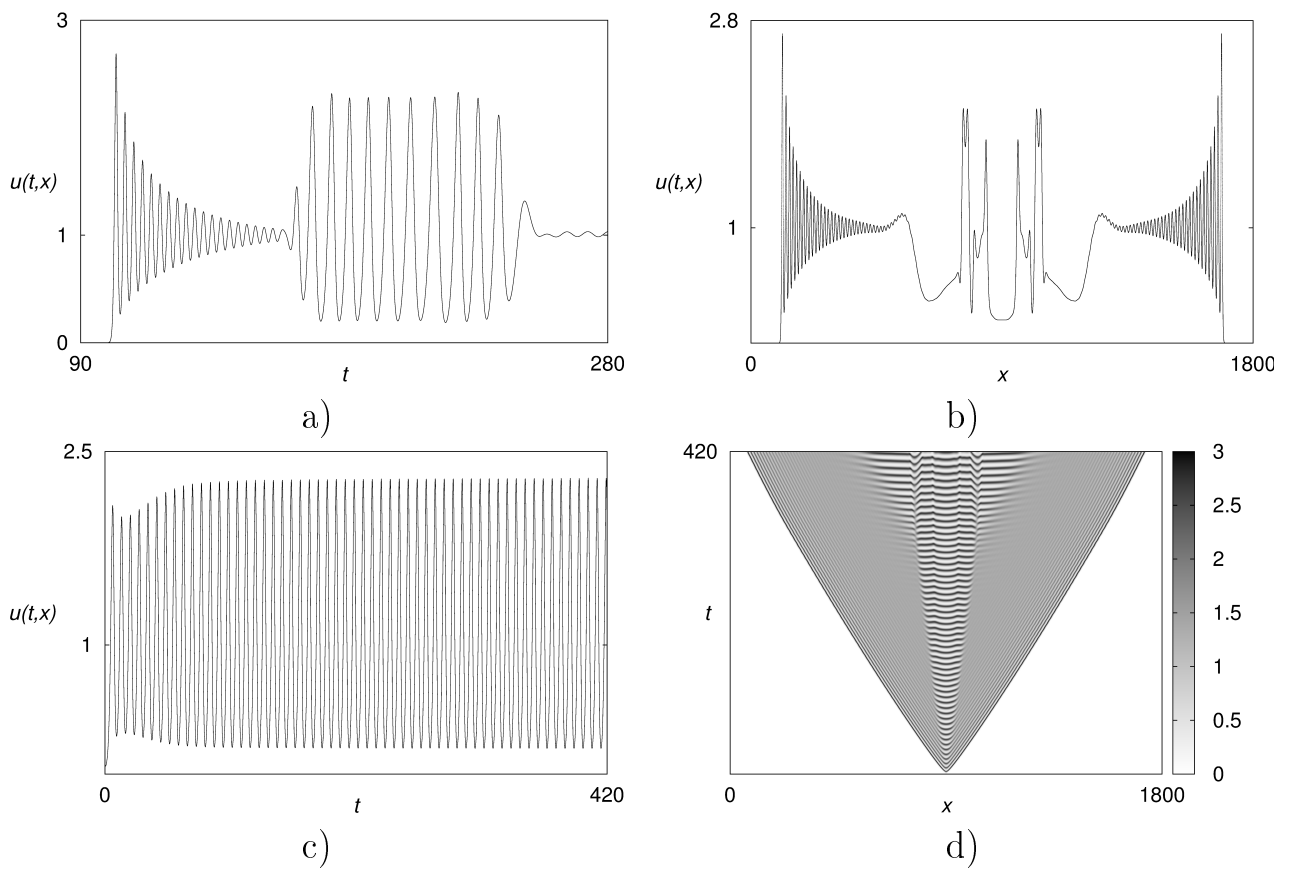


Рис. 2.9. Решение системы (2.4.1) при  $h = 1.8$ : а) разрез при  $x = 2t + 900$ ; б) разрез при  $t = 400$ ; в) разрез при  $x = 900$ ; д) плотность распределения  $u(t,x)$  в оттенках серого

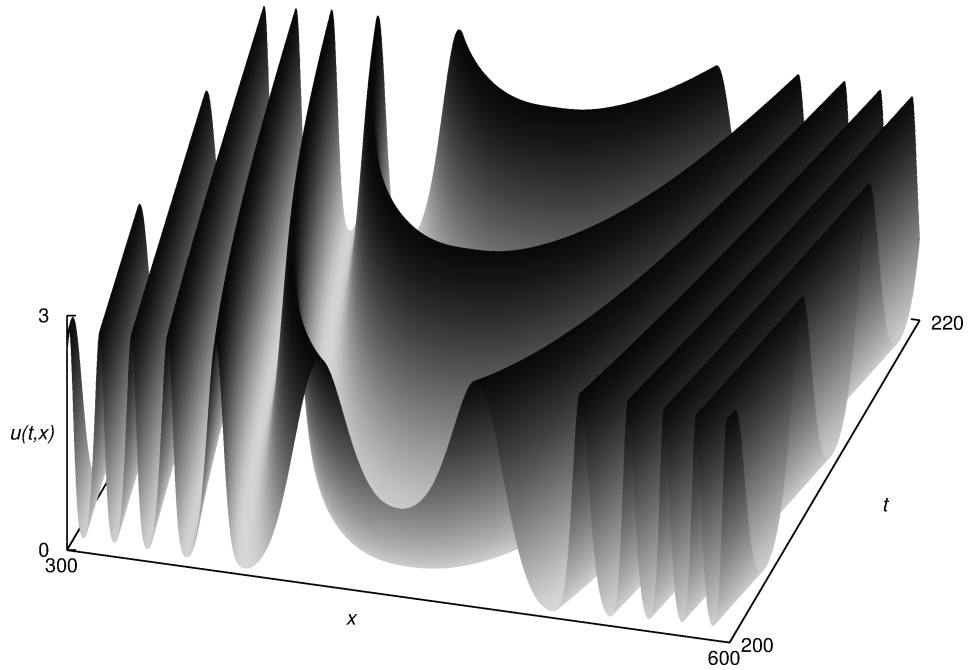


Рис. 2.10. Фрагмент ( $x \in [300, 600]$ ,  $t \in [200, 220]$ ) графика распространения волны в системе (2.4.1) при  $h = 2$

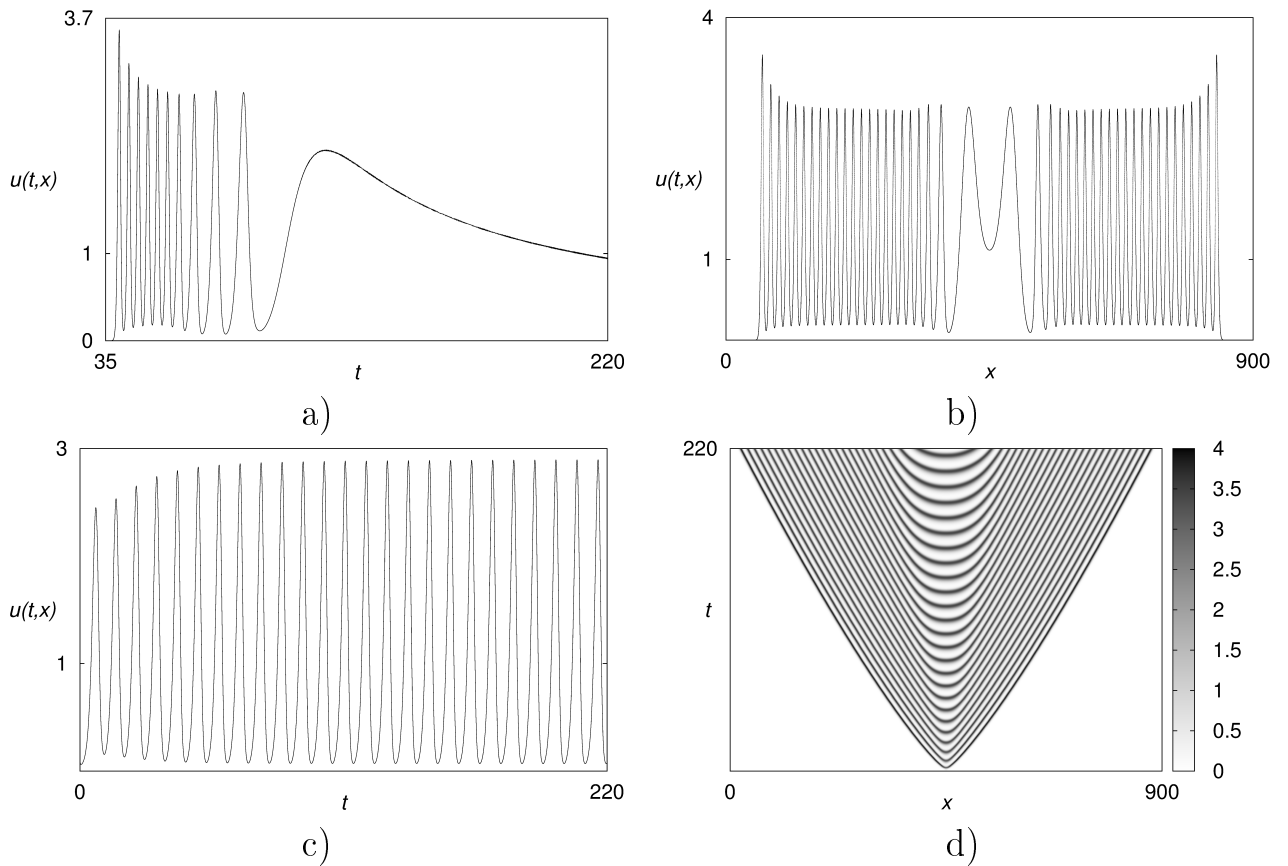


Рис. 2.11. Решение системы (2.4.1) при  $h = 2$ : а) разрез при  $x = 2t + 900$ ; б) разрез при  $t = 200$ ; в) разрез при  $x = 450$ ; д) плотность распределения  $u(t, x)$  в оттенках серого

## 2.5. Выводы

Распространение возмущения в активной среде при учете запаздывания по времени представляет собой достаточно сложный процесс. Эта сложность обуславливает необходимость применения различных сочетаний аналитических и численных методов. На этом пути нами были получены следующие результаты.

- 1) Для выяснения некоторых особенностей качественного поведения решений уравнения КПП с запаздыванием было построено уравнение Гинзбурга–Ландау, которое описывает динамические свойства этого уравнения вблизи состояния равновесия  $u_0 \equiv 1$ .
- 2) Изучение уравнения распространения волны (2.3.1) позволило найти критические значения параметра запаздывания, при которых, по-видимому, меняется вид пространственного распределения решения задачи.
- 3) Численный анализ, выполненный с учетом аналитических результатов, позволил выделить следующие промежутки значений запаздывания:
  - промежуток, на котором поведение решений уравнения с запаздыванием близко к их поведению в задаче без запаздывания;
  - промежуток значений запаздывания, при которых в центре области распространения волны появляются участки решения со сложным пространственным распределением;
  - найдены значения  $h$ , при которых в пространственном распределении решения сохраняются участки, где решение стремится к единице;
  - найден промежуток значений запаздывания, при которых вся область распространения волны заполнена интенсивными колебаниями по пространственной и временной переменным.

## Глава 3.

# Логистическое уравнение с диффузией и отклонением по пространственной переменной

### Введение

В статье [29] дана развернутая постановка задачи для моделирования пространственного распределения плотности популяции, в частности, на основе подхода Бритона [58, 59] предлагается использовать следующее уравнение:

$$\frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = \Delta N(t, x) + N(t, x)[1 + \alpha N(t, x) - (1 + \alpha(g * N)(t, x))], \quad (3.0.1)$$

где  $N(t, x)$  — плотность популяции в момент времени  $t$  в точке  $x$  ареала обитания, выражение  $1 + \alpha N(t, x) - (1 + \alpha(g * N)(t, x))$  определяет изменения плотности численности,  $\Delta$  — оператор Лапласа, а функция  $g$  характеризует пространственно-временное неоднородности. В статье [59] предлагается следующий вид свертки  $(g * N)$

$$(g * N)(t, x) = \int_{-\infty}^t \int_{\Omega} g(t - \tau, x - y) N(\tau, y) dy d\tau, \quad (3.0.2)$$

где  $\Omega$  — область распределения популяции. Функция  $g$  должна удовлетворять условию нормировки  $(g * 1)(t, x) = 1$ . В пре-

дельном случае, когда  $g$  представляет собой дельта-функцию, сосредоточенную в начале координат, получаем уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова (0.0.4). Если точку сосредоточения сдвинуть по оси времени, то получится уравнение с запаздыванием, подробно рассмотренное в предыдущей главе, если же точку сосредоточения сдвинуть по пространственной переменной, то получится уравнение с отклонением по пространству.

Рассмотрим обобщение уравнения КПП (0.0.4), содержащее отклонение по пространству

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u(t, x - h)]. \quad (3.0.3)$$

Величину  $h$  пространственного отклонения будем считать положительным числом, поскольку в противном случае замена переменной  $x$  на  $-x$  приводит к смене знака параметра отклонения.

Для уравнения (3.0.3) с периодическими краевыми условиями построена нормальная форма и найдены условия существования и устойчивости соответствующих неоднородных режимов. Кроме того, проанализировано уравнение профиля волны и найдены условия возникновения у него колебательных режимов. Далее приведены результаты численного моделирования распространения волны концентрации в уравнении (3.0.3) в случае неограниченной по  $x$  области.

Учитывая, что для многих приложений представляет интерес задача о распространении волн концентрации в задаче (3.0.3), в следующих пунктах будем рассматривать это уравнение без граничных условий.

### 3.1. Некоторые свойства волновых решений задачи

В работе [44] было показано, что в уравнении (0.0.4) волны распространяются вдоль направлений  $2t \pm x = \text{const}$  и был определен профиль волны приводящей к переходу от нулевых значений переменной к единичным. Как и в предыдущей главе выполним в уравнении (3.0.3) замену в виде бегущей волны вида  $u(t, x) = w(2t \pm x)$  и перейдем к новой временной переменной  $s = 2t \pm x$ , тогда для новой переменной  $w(s)$  имеем следующее уравнение второго порядка с запаздыванием:

$$w'' - 2w' + w[1 - w(s - h)] = 0, \quad (3.1.1)$$

где штрихом обозначена производная по переменной  $s$ . Свойства устойчивости нулевого решения уравнения (3.1.1) не зависят от  $h$ , это решение представляет собой неустойчивый узел с кратным корнем равным единице. Свойства устойчивости единичного состояния равновесия определяются расположением корней характеристического квазиполинома

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 - 2\lambda - \exp(-h\lambda). \quad (3.1.2)$$

Свойства квазиполинома (3.1.2) аналогичны свойствам квазимногочлена, полученного в предыдущей части работы. Приведем без доказательства утверждения, касающиеся расположения корней квазиполинома (3.1.2). Рассмотрим сначала расположение и количество вещественных корней квазиполинома  $P(\lambda)$ . Простейший анализ свойств трансцендентного уравнения  $P(\lambda) = 0$  показывает, что при всех положительных  $h$  оно имеет либо один, либо три корня. Один из этих корней положительный, а два других отрицательны и появляются при критическом значении  $h_1^*$ , для нахождения которого имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda - \exp(-h\lambda) &= 0, \\ 2\lambda - 2 - h \exp(-h\lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Решая систему (3.1.3), имеем  $\lambda \approx -1.23141$ ,  $h = h_1^* \approx 1.12154$ . Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

**Лемма 7.** *Квазиполином  $P(\lambda)$  имеет при  $0 < h < h_1^*$  ровно три вещественных корня: один положительный и два отрицательных, а при  $h > h_1^*$  — единственный положительный вещественный корень.*

Таким образом в спектре устойчивости единичного состояния равновесия уравнения (3.1.1) всегда есть положительный вещественный корень. Рассмотрим теперь расположение остальных корней квазимногочлена  $P(\lambda)$ . Выполнено утверждение.

**Лемма 8.** *Все корни квазиполином  $P(\lambda)$  кроме одного вещественного положительного лежат при  $0 < h < h_2^*$  в левой комплексной полуплоскости. Здесь*

$$h_2^* = \frac{\arccos(-\sqrt{5} + 2)}{\sqrt{\sqrt{5} - 2}} \approx 3.72346, \quad (3.1.4)$$

При  $h = h_2^*$  на мнимую ось выходит пара чисто мнимых корней  $\lambda = \pm i\omega_0$ , причем

$$\omega_0 = \sqrt{\sqrt{5} - 2} \approx 0.48587. \quad (3.1.5)$$

Рассмотрим теперь окрестность решения  $w(s) \equiv 1$  и найдем асимптотику режима, ответвляющегося от этого решения при  $h = h_2^* + \mu$ , где  $0 < \mu \ll 1$ . Для этого применим стандартную замену метода нормальных форм

$$w(s, \mu) = 1 + \sqrt{\mu}(z(\tau) \exp(i\omega_0 s) + \bar{z}(\tau) \exp(-i\omega_0 s)) + \mu w_1(s, \tau) + \mu^{3/2} w_2(s, \tau) + \dots, \quad (3.1.6)$$

где  $\tau = \mu s$ ,  $w_j(s, \tau)$  ( $j = 1, 2$ ) — тригонометрические полиномы по переменной  $s$ ,  $z(\tau)$  — медленно меняющаяся амплитуда, подлежащая определению. Подстановка выражения (3.1.6) в уравнение (3.1.1) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $\sqrt{\mu}$  приводит на третьем шаге к уравнению относительно  $w_2(s, \tau)$ , из условий разрешимости которого в классе тригонометрических полиномов получаем следующее уравнение на медленную амплитуду  $z(\tau)$ :

$$\frac{dz}{d\tau} = \varphi_0 z + \varphi_1 |z|^2 z, \quad (3.1.7)$$

где  $\varphi_0 = \frac{2\omega_0^2(-1 + i\omega_0)}{P'(i\omega_0)}$ ,  $\varphi_1 = \frac{1}{P'(i\omega_0)} \left( 2\omega_0^2(1 - \omega_0^2 - 2i\omega_0) + \beta \left( (\omega_0^2 + 2i\omega_0)^2 - \frac{1}{\omega_0^2 + 2i\omega_0} \right) \right)$ ,  $\beta = \frac{1}{4\omega_0^2 + 4i\omega_0 + (\omega_0^2 + 2i\omega_0)^2}$ . Используя полученное представление и формулы (3.1.4), (3.1.5), нетрудно найти приближенные значения коэффициентов уравнения (3.1.7)  $\varphi_0 \approx 0.136807 - 0.20660i$ ,  $\varphi_1 \approx -0.04429 - 0.03664i$ . Учитывая, что  $\text{Re}(\varphi_0) > 0$ , а  $\text{Re}(\varphi_1) < 0$  можно сформулировать следующее утверждение.

**Лемма 9.** Пусть  $h = h_2^* + \mu$ , где  $0 < \mu \ll 1$ , тогда существует такое  $\mu_0 > 0$ , что для всех  $0 < \mu < \mu_0$  уравнение (3.1.1) имеет дихотомичный цикл, неустойчивое многообразие которого одномерно, а асимптотика задается формулой (3.1.6), в которой комплексная амплитуда  $z(\tau)$  заменена выражением

$$\sqrt{-\text{Re}(\varphi_0)/\text{Re}(\varphi_1)} \exp \left( i\varepsilon s (\text{Im}(\varphi_0)\text{Re}(\varphi_1) - \text{Re}(\varphi_0)\text{Im}(\varphi_1)) / \text{Re}(\varphi_0) + i\gamma \right),$$

где  $\gamma$  — произвольная константа, определяющая фазовый сдвиг вдоль цикла.



## 3.2. Волновые решения в задаче с периодическими условиями

В этом разделе рассмотрим логистическое уравнение с диффузией и отклонением (3.0.3), дополненное периодическими краевыми условиями

$$u(t, x) = u(t + T), \quad (3.2.1)$$

где  $T > 0$  — период. В этой ситуации фазовым пространством задачи (3.0.3), (3.2.1) будем считать соболевское пространство  $T$ -периодических функций  $W_2^2(0, T)$ . Для исследования устойчивости состояния равновесия  $u(t, x) \equiv 1$  краевой задачи (3.0.3), (3.2.1) линеаризуем ее на этом решении, приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v(t, x - h), \quad v(t, x) = v(t + T). \quad (3.2.2)$$

Если в (3.2.2) выполнить разложение по пространственным модам, то на каждой из мод, после замены  $v(t, x) = \exp \lambda \exp i\omega x$  приходим к уравнению

$$\lambda = -\omega^2 - \exp i\omega h. \quad (3.2.3)$$

Нетрудно видеть, что при достаточно малых  $h$  величина  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ . Найдем первое положительное значение параметра  $h$ , при котором  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ . Для этого необходимо решить алгебраическую систему

$$-\omega^2 - \cos \omega h = 0, \quad -2\omega + h \sin \omega h = 0. \quad (3.2.4)$$

Эта система сводится к трансцендентному уравнению

$$-\omega h = 2 \operatorname{ctg}(\omega h), \quad (3.2.5)$$

решая которое численно, получаем решение системы (3.2.4):

$$h^* = 2.791544, \quad \omega^* = 0.88077. \quad (3.2.6)$$

Нетрудно видеть, что при  $h < h^*$  состояние равновесия  $u(t, x) \equiv 1$  краевой задачи (3.0.3), (3.2.1) асимптотически устойчиво. Предположим теперь, что  $h = h^* + \varepsilon$ ,  $T = 2\pi/\omega^*$  и выясним характер потери устойчивости этого состояния равновесия. Для этого выполним в (3.0.3), (3.2.1) стандартную замену метода нормальных форм

$$u(t, x, \varepsilon) = 1 + \sqrt{\varepsilon} u_0(t, \tau, x) + \varepsilon u_1(t, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_2(t, \tau, x) + \dots, \quad (3.2.7)$$

где  $\tau = \varepsilon t$  — медленное время,

$$u_0(t, \tau, x) = z(\tau) \exp(i(\omega_0 t + \omega^* x)) + \bar{z}(\tau) \exp(-i(\omega_0 t + \omega^* x)), \quad \omega_0 = \sin \omega^* h^*.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  и отыскивая  $u_j(t, \tau, x)$ ,  $j = 1, 2$  в виде тригонометрических многочленов по  $t$ , получаем на втором шаге функцию

$$u_1(t, \tau, x) = 2|z|^2 \cos \omega^* h^* + \left( z^2 w_2 \exp(2i(\omega_0 t + \omega^* x)) + \text{к.с.} \right), \quad (3.2.8)$$

где под к.с. подразумевается выражение комплексно сопряженное с данным в той же скобке,  $w_2 = -(2\omega_0 + 4\omega^* + \exp(-2i\omega^* h^*))^{-1}$ .

На третьем шаге выполнения алгоритма в краевой задаче для  $u_2(t, \tau, x)$  из условий ее разрешимости в классе тригонометрических многочленов по  $t$  получаем следующее укороченное уравнение нормальной формы:

$$\frac{dz}{d\tau} = \varphi_0 z + \varphi_1 |z|^2 z, \quad (3.2.9)$$

где  $\varphi_0 = i\omega^* \exp(-i\omega^* h^*)$ ,  $\varphi_1 = -2 \cos \omega^* h^* (1 + \exp(-i\omega^* h^*)) - (\exp(-2i\omega^* h^*) + \exp(i\omega^* h^*)) w_2$ . Используя полученное представление и формулу (3.2.6), нетрудно найти приближенные значения коэффициентов нормальной формы  $\varphi_0 \approx 0.5558 - 0.6833i$ ,  $\varphi_1 \approx -0.3004 + 0.6165i$ . Полученные результаты позволяют сформулировать следующее утверждение.

**Лемма 10.** Пусть  $h = h^* + \varepsilon$ , где  $0 < \varepsilon \ll 1$ , тогда существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что для всех  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  краевая задача (3.0.3), (3.2.1) имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл, асимптотика которого задается формулой (3.2.7), где медленная переменная  $z$  заменена выражением

$$z = \sqrt{-\text{Re}(\varphi_0)/\text{Re}(\varphi_1)} \exp\left(i\varepsilon t (\text{Im}(\varphi_0)\text{Re}(\varphi_1) - \text{Re}(\varphi_0)\text{Im}(\varphi_1))/\text{Re}(\varphi_0) + i\gamma\right),$$

( $\gamma$  — произвольная константа, определяющая фазовый сдвиг вдоль цикла).

Проиллюстрируем полученный результат численно. В краевой задаче (3.0.3), (3.2.1) зафиксируем величину отклонения  $h$  больше критического значения  $h^*$  и будем ее решать численно с начальными условиями вида

$$u(0, x) = 1 + 0.35 \sin(0.88x + 0.1). \quad (3.2.10)$$

Начальные условия (3.2.10) выбраны близкими к единичному состоянию равновесия, с частотой по  $x$  близкой к  $\omega^*$  (см. формулу (3.2.6)).

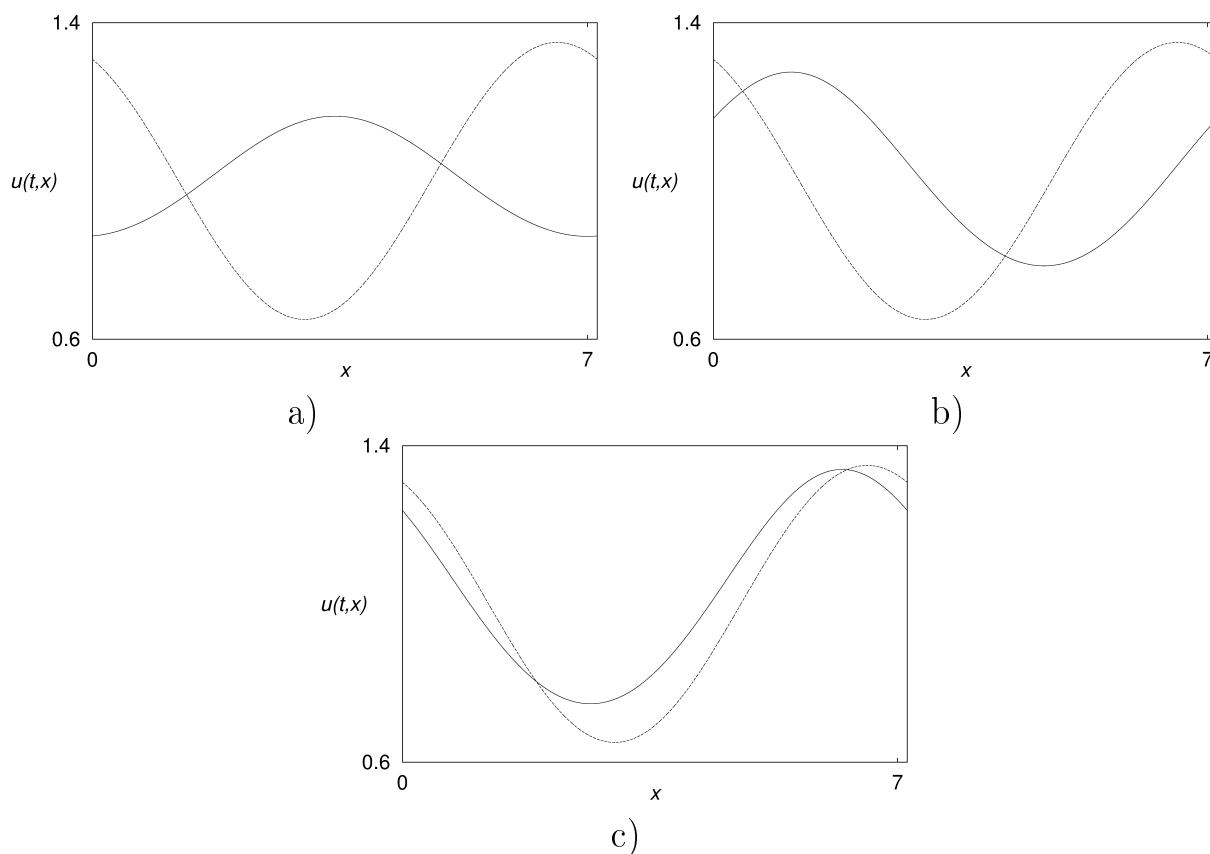


Рис. 3.1. Пространственное распределение решения краевой задачи (3.0.3), (3.2.1) с начальными условиями (3.2.10) при  $t = 1000$  и значениях отклонения равных а)  $h = 2.793$ ; б)  $h = 2.796$ ; в)  $h = 2.798$

Для вычислений были взяты три значения величины отклонения  $h$  равные 2.793; 2.796; 2.798. В каждом из этих случаев решение асимптотически приближалось к пространственно неоднородному циклу распределение которого по переменной  $x$  при  $t = 1000$  приведено на рисунке 3.1. Для полученных циклов были вычислены максимальные отклонения от единичного значения, которые оказались равными 0.160; 0.275 и 0.340 соответственно. Следует отметить, что амплитуды колебаний относительно единичного значения, полученные в вычислительном эксперименте, близки к найденным по асимптотической формуле, вытекающей из (3.2.7)

$$\sqrt{-(h - h^*)\text{Re}(\varphi_0)/\text{Re}(\varphi_1)}.$$

Представленные в первых двух разделах работы аналитические результаты позволяют получить некоторую информацию о решениях уравнения (3.0.3), однако для анализа зависимости решений от отклонения по про-

странству и начальных условий требуется численный эксперимент, описанию которого и посвящен следующий раздел.

### 3.3. Численный анализ уравнения КПП с пространственным отклонением

Численное исследование распространения волн концентрации в уравнении (3.0.3) от локализованного по пространству начального возмущения выполнялось на некотором отрезке  $[a, b]$ . При этом разница  $|a - b|$  выбиралась достаточно большой для того, чтобы можно было проследить за распространением волны от начального момента до момента встречи фронта волны с границами  $a$  или  $b$ . Учитывая, что рассматривается задача о распространении локального возмущения, зададим на границах отрезка нулевые краевые условия  $u(t, a) = u(t, b) = 0$ .

Перейдем к описанию вычислительной процедуры. Вторую производную по пространственной переменной в правой части уравнения (3.0.3) заменим конечной разностью второго порядка. Для этого отрезок  $[a, b]$  разобьем на  $N$  равных частей и построим сетку узлов с шагом  $\Delta x = (b - a)/N$  так, что  $x_j = a + j\Delta x$ , где  $j = 0, \dots, N - 1$ . Обозначим через  $u_j(t)$  значение функции  $u(t, x)$  в соответствующих узлах сетки. В итоге получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2} + [1 - u_{j-k}]u_j, \quad j = 0, \dots, N - 1, \quad (3.3.1)$$

где  $k = \lfloor h/\Delta x \rfloor$  отвечает за пространственное отклонение (здесь  $\lfloor \cdot \rfloor$  обозначена целая часть числа). Для учета краевых условий полагаем  $u_{-1}(t) = u_N(t) = 0$ .

Численный эксперимент выполнялся на вычислительном кластере ЯрГУ (МНИЛ «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне). Одновременно решалось  $N = 1.8 \cdot 10^5$  обыкновенных дифференциальных уравнений. Для вычислений использовался метод Дормана–Принца пятого порядка с переменной длиной шага интегрирования. Абсолютная и относительная погрешности алгоритма были приняты равными  $10^{-12}$ . Начальный шаг интегрирования взят равным  $10^{-3}$ .

Начальные условия выбирались в виде прямоугольного импульса высоты 0.1 и единичной ширины, расположенного в центре отрезка  $[a, b]$ . В частно-

сти, для случая  $x \in [0, 1800]$ :

$$u_j(0) = \begin{cases} 0.1, & \text{если } j \in [89950, 90050], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Для последующего анализа и графического отображения полученные данные прореживались.

Перейдем к результатам численного моделирования. Описание поведения решений уравнения (3.0.3) с отклонением пространственной переменной будем проводить в сравнении с классическим уравнением КПП без отклонения. На рисунке 3.2 представлено распространение волны постоянной высоты от начального всплеска единичной ширины и высоты 0.1 при  $h = 1.2$ . Скорость распространения волны согласно [44] равнялась двум. (На соответствующих рисунках скорость распространения равна углу наклона профиля волны.) Нетрудно видеть, что при этих значениях отклонения график процесса распространения волны для задачи с отклонением и без отклонения практически не отличается.

При увеличении параметра  $h$  можно выделить несколько этапов качественно различного поведения решений системы (3.3.1).

1. При относительно малом значении  $h$  на промежутке от нуля до  $h_1^*$  поведение системы (3.3.1) практически не отличимо от поведения системы КПП без отклонения. Величина  $h_1^*$  ограничивает данный промежуток, по видимому, в связи с тем, что решения уравнения (3.1.1) на устойчивом инвариантном многообразии единичного состояния равновесия монотонно стремятся к этому состоянию (рисунок 3.2 при  $h = 1.2$ ).

2. При  $h_1^* < h < h^*$  фронт распространения волны приближается к единичному значению колебательным образом. На рисунке 3.3 показана такая волна при  $h = 2.7$ . В этом случае максимальная амплитуда всплеска равна примерно 1.5, а после прохождения фронта волны значение  $u(t, x)$  быстро приближается к единице.

3. Следующее существенное изменение в распространении фронта волны уравнения (3.0.3) наблюдается при  $h > h^*$ . Существенной особенностью решения в этом случае является то, что оно перестает удовлетворять уравнению (3.1.1). Это происходит в силу того, что решение  $u \equiv 1$  периодической краевой задачи (3.0.3), (3.2.1) колебательно теряет устойчивость и от него ответвляется орбитально асимптотически устойчивый пространственно неоднородный цикл. Указанное обстоятельство приводит к тому, что в правой части области распространения волны появляется расширяющийся с течением времени участок с интенсивными пространственными колебаниями.

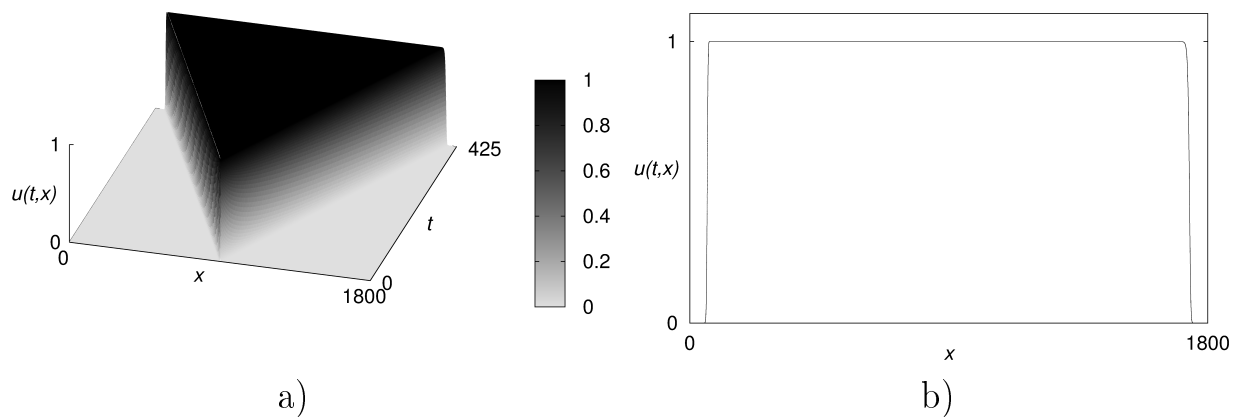


Рис. 3.2. Решение системы (3.3.1) с начальными условиями (3.3.2) при отклонении  $h = 1.2$  (а) распространение волны на плоскости  $(x, t)$ ; б) разрез при  $t = 425$ )

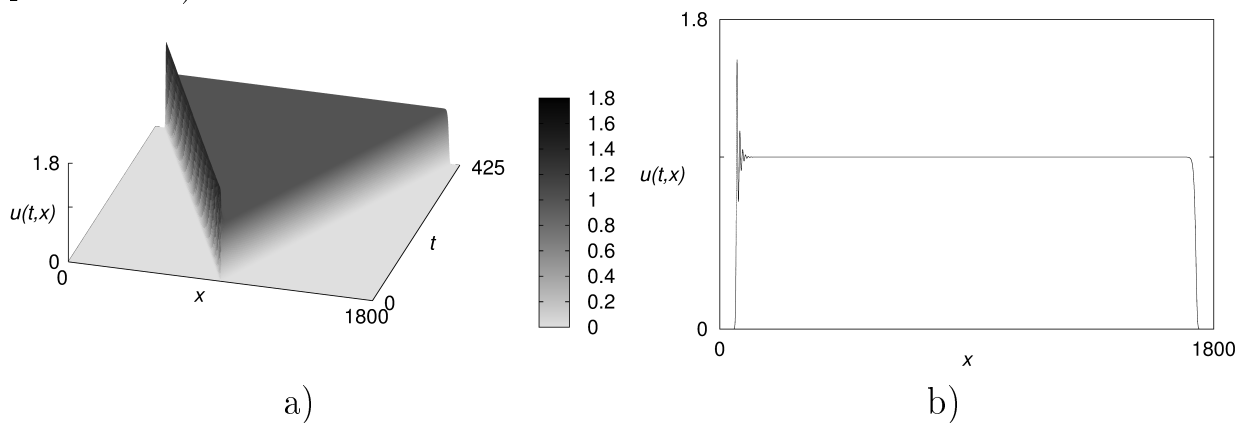


Рис. 3.3. Решение системы (3.3.1) с начальными условиями (3.3.2) при отклонении  $h = 2.7$  (а) распространение волны на плоскости  $(x, t)$ ; б) разрез при  $t = 425$ )

На рисунке 3.4 показано распространение волны при  $h = 2.81$ , при этом на рисунке 3.5 приведен график зависимости  $u(t, x)$  при  $t = 4500$  и изменении пространственной переменной  $x$  в пределах от 0 до 18000. Структура колебательного процесса, представленного на данных графиках, видимо, является установившейся. Во всяком случае, к моменту времени  $t = 4500$  амплитуда колебаний не растет и в целом сохраняется. При этом решение  $u(t, x)$  имеет довольно сложную пространственную структуру, о которой ниже будет сказано дополнительно.

4. Численный эксперимент не удалось продолжить для значений отклонения  $h$  существенно отличающихся от  $h^*$ . Так, уже при  $h = 3$  в правой части графика распространения волны возникают весьма интенсивные колебания, достигающие при  $t = 400$  значения около 9. На рисунке 3.6 показано рас-

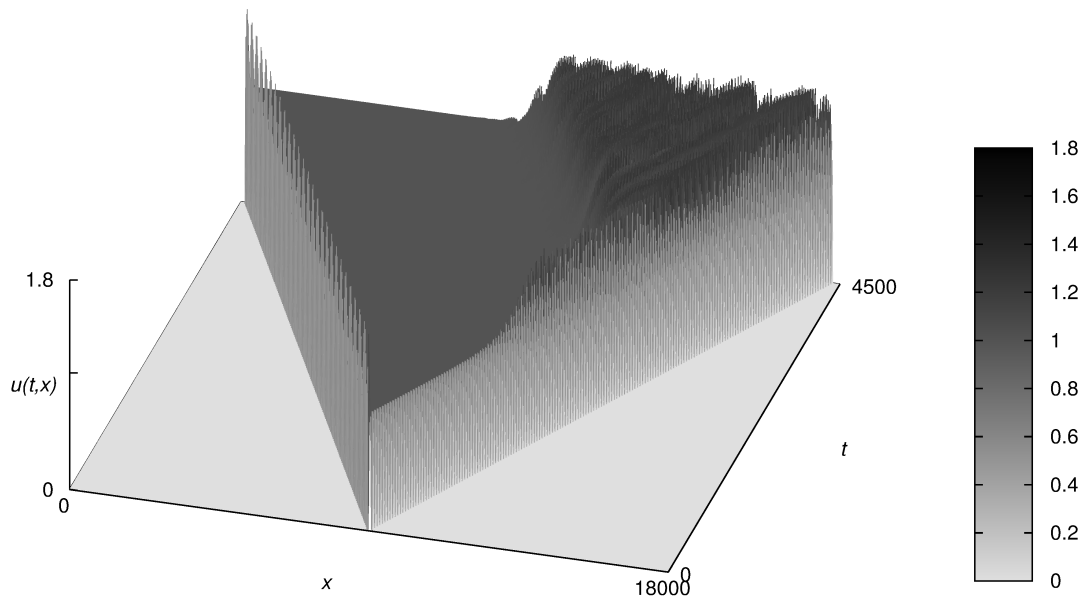


Рис. 3.4. Распространение волны в системе (3.3.1) при  $h = 2.81$

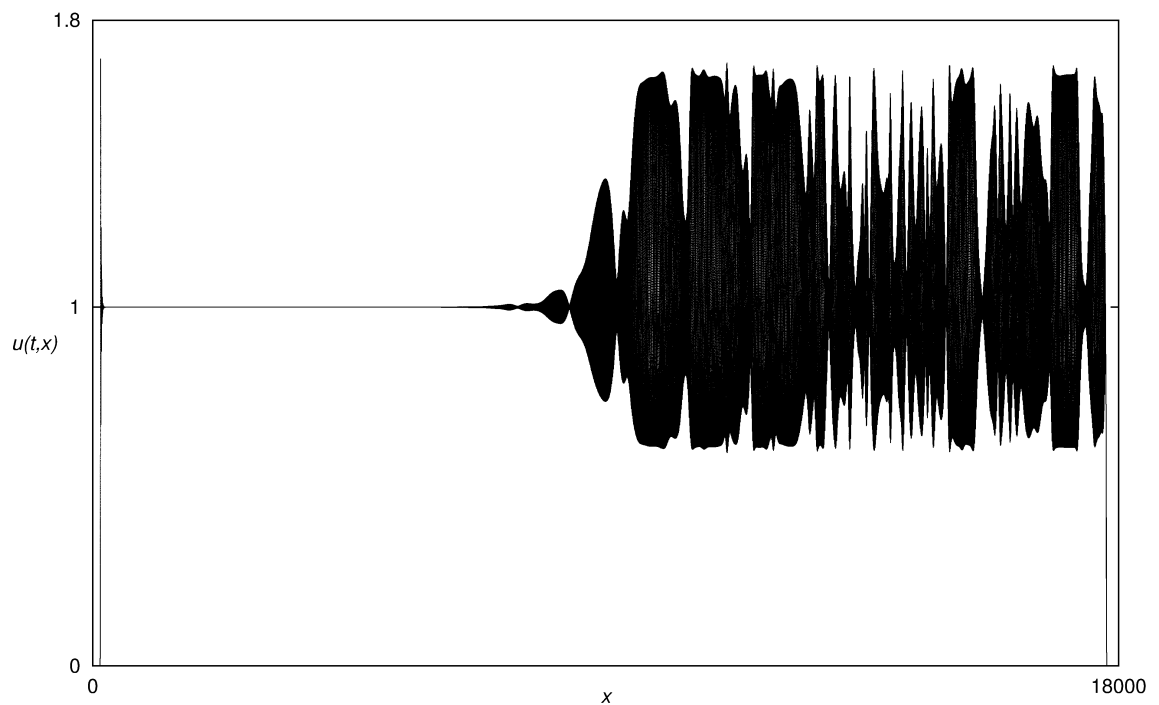


Рис. 3.5. Пространственное распределение решения системы (3.3.1) при  $t = 4500$  и отклонении  $h = 2.81$

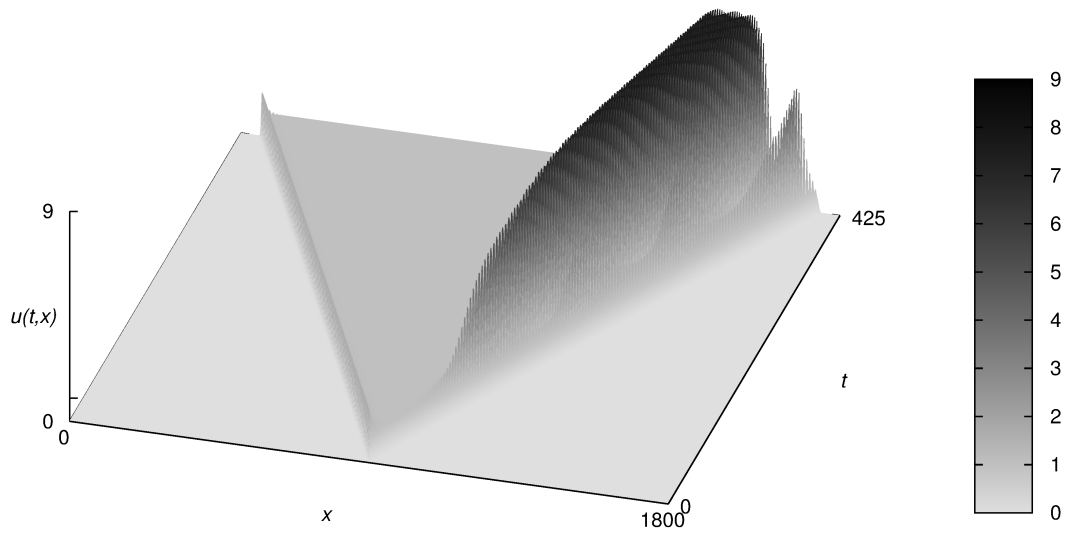


Рис. 3.6. Распространение волны в системе (3.3.1) при  $h = 3$

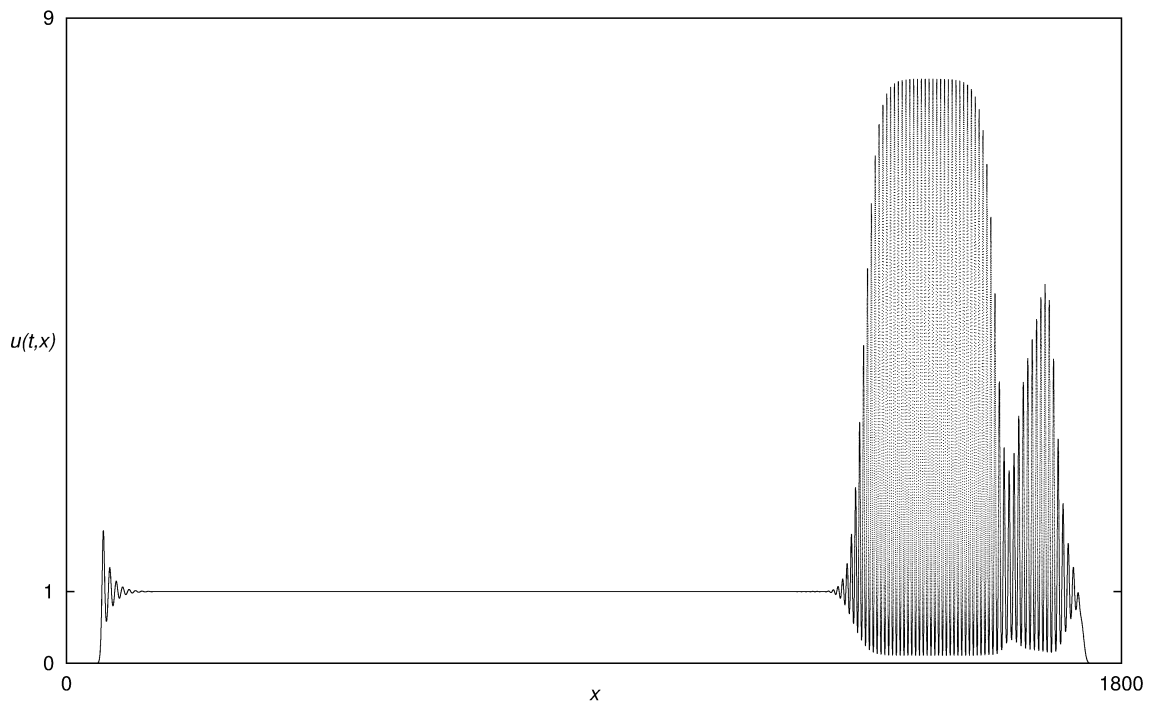


Рис. 3.7. Пространственное распределение решения системы (3.3.1) при  $t = 425$  и отклонении  $h = 3$



пространение волны при  $h = 3$ , при этом, на рисунке 3.7 приведен график зависимости  $u(t, x)$  при  $t = 425$  и  $x \in [0, 1800]$ . Дальнейшее изменение отклонения приводит к резкому увеличению амплитуды колебательного режима, что с одной стороны, влечет необходимость дробления шага по времени для сохранения точности вычислений, а с другой, значительно замедляет вычислительный процесс. По указанным причинам вычислительный эксперимент не был распространен на большие значения отклонения.

Рассмотрим более подробно пространственное распределение решения при  $h = 2.81$ . График решения  $u(t, x)$  при  $t = 4500$  может быть разбит на три части с визуально различной структурой. Ниже вычисляются статистические инвариантные характеристики для массивов данных, которые позволяют судить о сложности выделенных частей. Область интенсивных колебаний на рисунке 3.7 разбита на следующие подобласти:  $[9380, 12500]$ ;  $[12500, 14970]$ ;  $[14970, 17765]$ . На рисунке 3.8 эти участки графика приведены в более крупном масштабе, что позволяет увидеть отличия в их структуре.

В качестве инвариантных статистических характеристик, при помощи которых будем различать эти три части графика, были использованы корреляционный интеграл и корреляционная размерность. По выборке  $u_j(4500)$ ,  $j = 1, \dots, M$  был построен набор  $m$ -мерных векторов  $\xi_j$ , каждый из которых содержит значения из выборки  $u_j(4500)$  от  $u_{(i-1)*m+1}$  до  $u_{i*m}$ . Напомним, что корреляционный интеграл можно оценить при помощи корреляционной суммы (см., например, [50])

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^M \Theta(\varepsilon - \|\xi_i - \xi_j\|), \quad (3.3.3)$$

где  $M$  — объем выборки,  $\Theta$  — функция Хевисайда,  $\|\cdot\|$  — некоторая норма (нами использовалась евклидова норма  $\|x\|^2 = \sum x_l$ ),  $\varepsilon$  — некоторое пороговое значение,  $\xi_i$  — построенные  $m$ -мерные вектора,  $m$  — размерность пространства вложения.

Корреляционную размерность  $d_C$  можно определить как

$$d_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (3.3.4)$$

В случае эмпирического вычисления корреляционная размерность  $d_C$  берется равной углу наклона прямой наилучшего приближения в смысле наименьших квадратов к наиболее линейной части графика, построенного по узлам  $\{\log C(\varepsilon), \log \varepsilon\}$ .

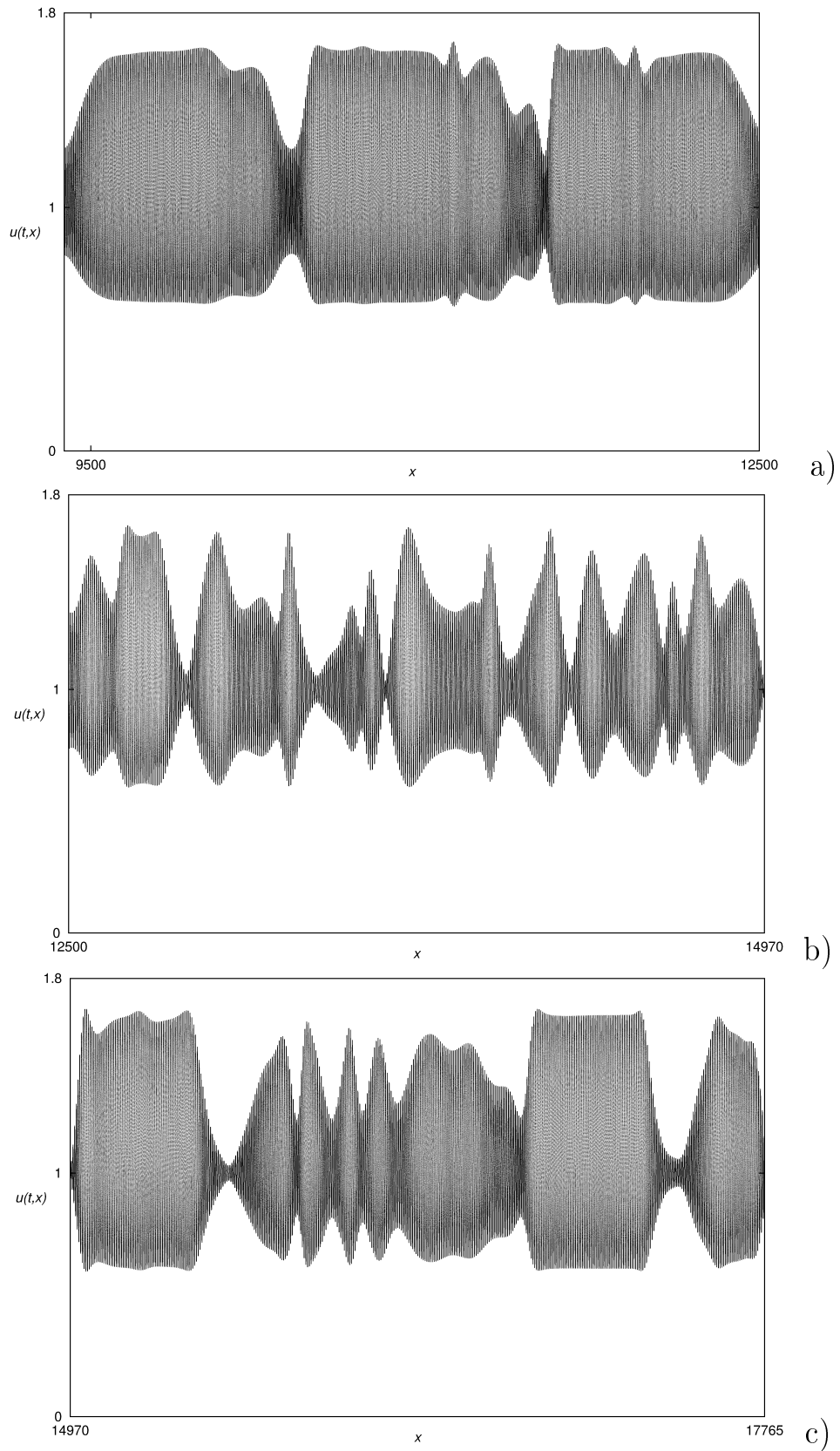


Рис. 3.8. Пространственное распределение решения системы (3.3.1) при  $t = 4500$  и отклонении  $h = 2.81$  а)  $x \in [9380, 12500]$ ; б)  $x \in [12500, 14970]$ ; в)  $x \in [14970, 17765]$

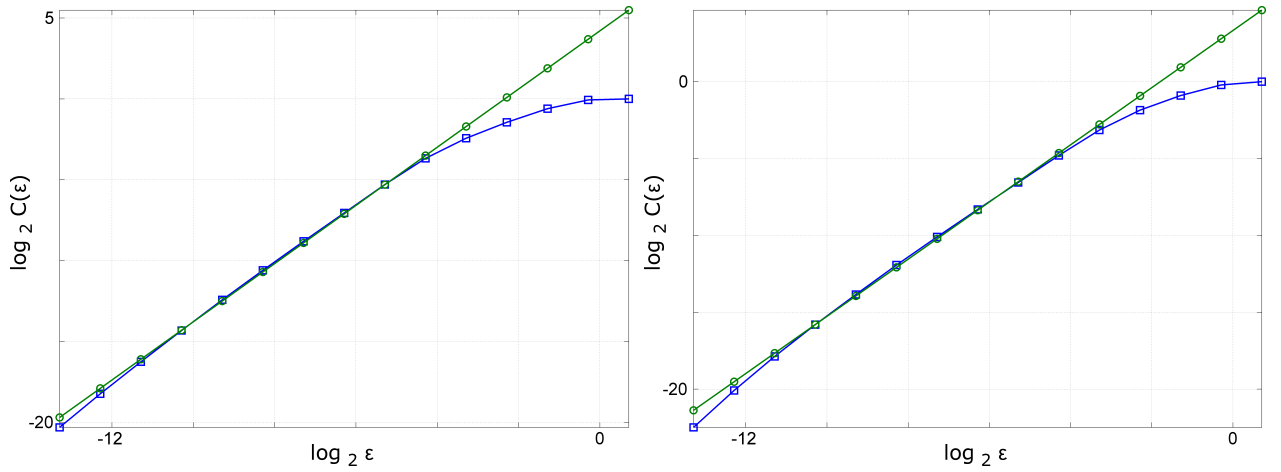


Рис. 3.9.  $x \in [9380, 17765]$ , шаг по  $x$  равен 0.1

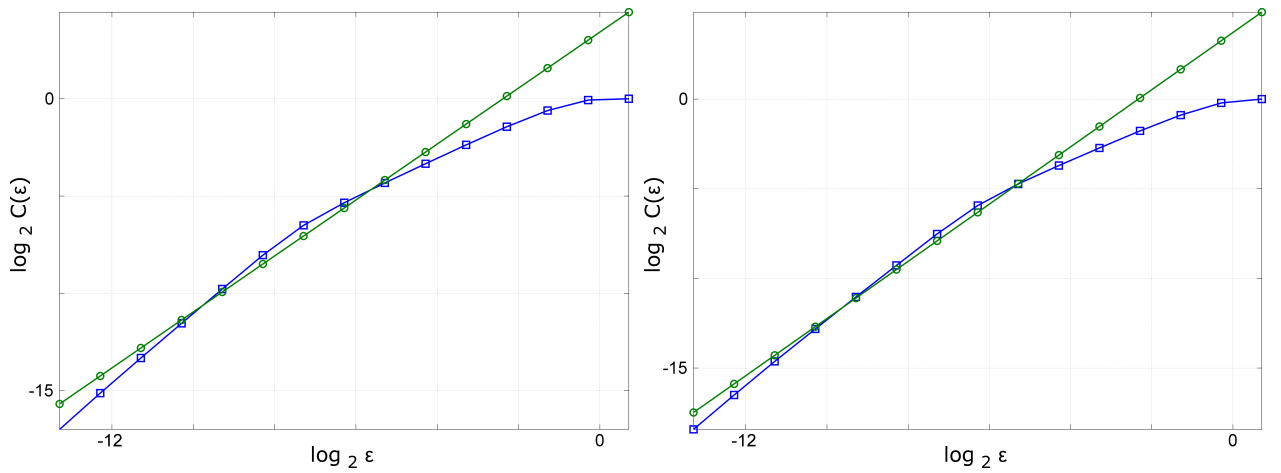


Рис. 3.10.  $x \in [9380, 12500]$ ,  $x$  равен 0.01

Были проведены вычисления корреляционного интеграла для размерностей пространства вложения  $m = 3$  и  $m = 5$ , а также с различным шагом по переменной  $x$ . На рисунках 3.9 и 3.10 приведены зависимости логарифма корреляционного интеграла от логарифма  $\epsilon$ , вычисленный для пространственного распределения решения системы (3.3.1) при  $t = 4500$  и отклонении  $h = 2.81$ . Размерность пространства вложения для графиков слева — три; справа — пять. При этом на рисунке 3.9 шаг по пространству выбран равным 0.1, а на рисунке 3.10 — 0.01. Нетрудно видеть, что в первом из этих случаев наиболее линейный участок выделяется лучше, чем во втором и, тем самым, шаг достаточно брать равным 0.1. Величина  $d_C$  оцениваемая по углу наклона графика зависимости корреляционного интеграла оказалась равной для шага 0.1 и  $m = 3$   $d_C \approx 1.799$  (среднеквадратичное отклонение  $\sigma \approx 0.289$ ), а для шага 0.01 —  $d_C \approx 1.437$  (среднеквадратичное отклоне-

ние  $\sigma \approx 1.13$ ). Последний случай, очевидно, показывает, что подходящего линейного участка нет. Аналогичные результаты выходят и для  $m = 5$  соответственно имеем для шага 0.1  $d_C \approx 1.859$  (среднеквадратичное отклонение  $\sigma \approx 0.35$ ), а для шага 0.01 —  $d_C \approx 1.595$  (среднеквадратичное отклонение  $\sigma \approx 0.907$ ).

Ситуация меняется, если выполнить расчеты для перечисленных выше участков решения. На рисунках 3.11, 3.12, 3.13 приведены графики зависимостей корреляционного интеграла для значений пространственной переменной из промежутков  $x \in [9380, 12500]$ ;  $x \in [12500, 14970]$  и  $x \in [14970, 17765]$  соответственно. Размерность пространства вложения для графиков слева  $m = 3$ ; справа —  $m = 5$ . Приведем оценки корреляционного интеграла.

$x \in [9380, 12500]$  при  $m = 3$   $d_C \approx 1.607107$ ,  $\sigma \approx 0.665808$ ; при  $m = 5$   $d_C \approx 1.712937$ ,  $\sigma \approx 0.705079$ .

$x \in [12500, 14970]$  при  $m = 3$   $d_C \approx 1.919940$ ,  $\sigma \approx 0.422702$ ; при  $m = 5$   $d_C \approx 2.017233$ ,  $\sigma \approx 0.473157$ .

$x \in [14970, 17765]$  при  $m = 3$   $d_C \approx 1.761479$ ,  $\sigma \approx 0.195196$ ; при  $m = 5$   $d_C \approx 1.800944$ ,  $\sigma \approx 0.156595$ .

Полученные оценки позволяют утверждать, что участки пространственного распределения решения  $u(t, x)$  уравнения (3.0.3) существенно отличаются, в частности, оценка корреляционного интеграла для среднего участка дает бóльшие значения, чем для крайних. Близость результатов для размерностей  $m = 3$  и  $m = 5$  пространства вложения показывает, что в рассмотрении больших значений размерности нет необходимости.

Отметим, что определенную информацию о решении уравнения (3.0.3) дает и отображение, построенное по идущим друг за другом экстремумам пространственного распределения решения системы (3.3.1) при  $t = 4500$  и отклонении  $h = 2.81$ . На рисунке 3.14 построены точки, соответствующие подряд идущим экстремумам, а на рисунке 3.15 точки построены через пять штук.

Корреляционный интеграл, вычисленный для пространственного распределения решения системы (3.3.1) при  $t = 4500$  и отклонении  $h = 2.81$ . Размерность пространства вложения для графиков слева — три; справа — пять

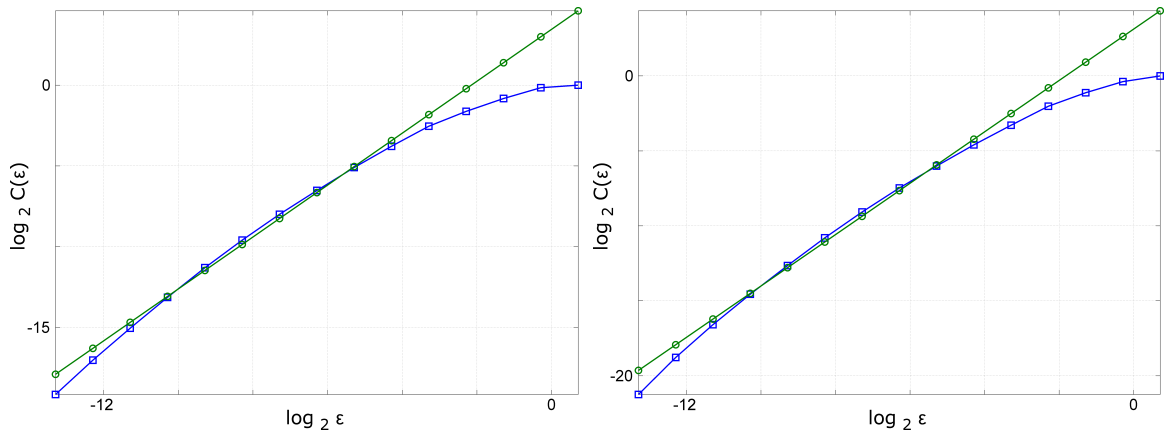


Рис. 3.11.  $x \in [9380, 12500]$

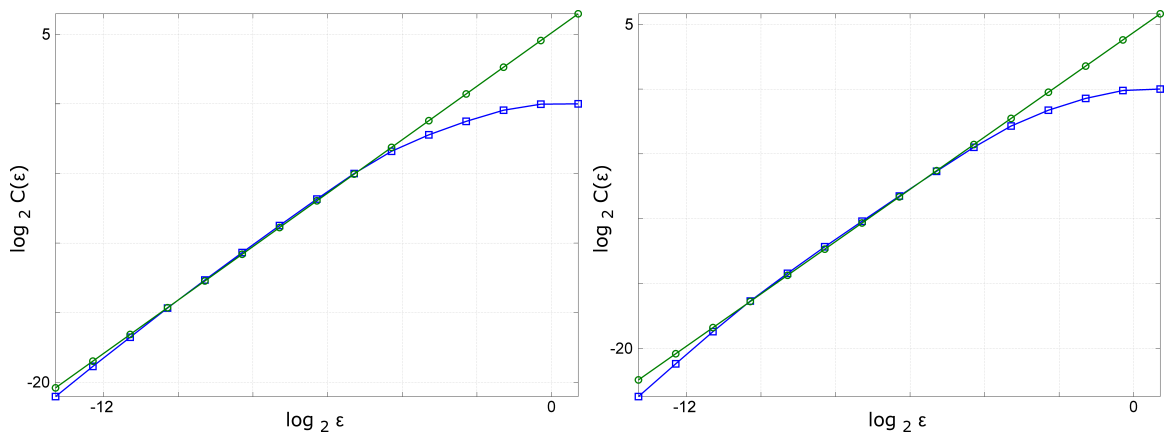


Рис. 3.12.  $x \in [12500, 14970]$

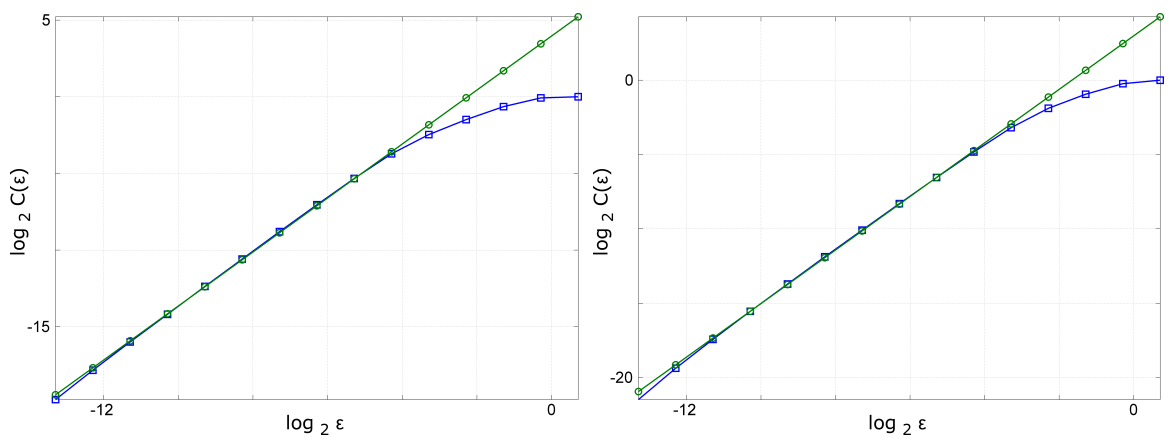


Рис. 3.13.  $x \in [14970, 17765]$

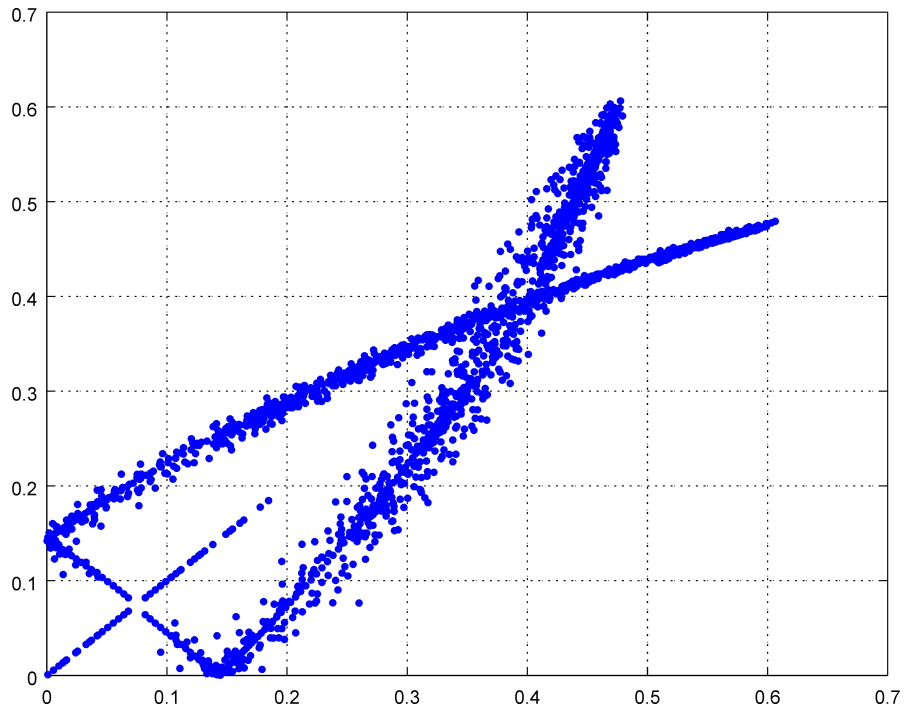


Рис. 3.14. Отображение, построенное по идущим друг за другом экстремумам пространственного распределения решения системы (3.3.1) при  $t = 4500$  и отклонении  $h = 2.81$

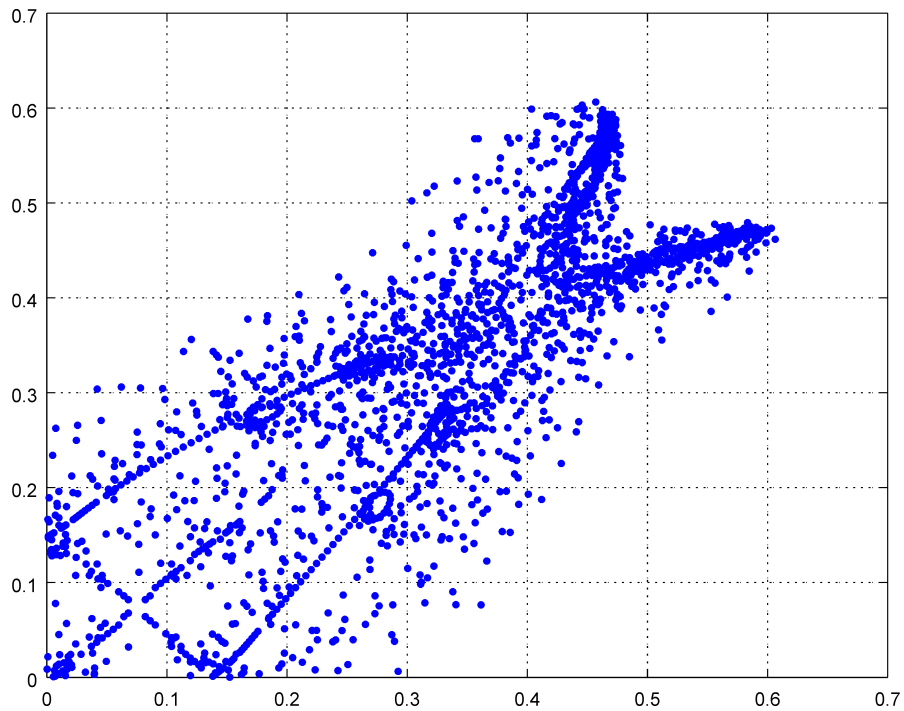


Рис. 3.15. Отображение, построенное по экстремумам пространственного распределения решения системы (3.3.1) при  $t = 4500$  и отклонении  $h = 2.81$ , идущим через 5 единиц друг за другом

## Заключение

Распространение возмущения в активной среде при учете отклонения по пространственной переменной представляет собой сложный процесс. Эта сложность обуславливает необходимость применения различных сочетаний аналитических и численных методов. На этом пути были получены следующие результаты.

- 1) Изучение уравнения распространения волны (3.1.1) позволило найти критические значения параметра отклонения, при которых меняется вид пространственного распределения решения задачи.
- 2) Для выяснения некоторых особенностей качественного поведения решений уравнения КПП с отклонением было изучено уравнение (3.0.3) с периодическими краевыми условиями вблизи состояния равновесия  $u_0 \equiv 1$ . Это позволило выяснить характер потери устойчивости пространственно однородного решения этой задачи и найти асимптотику режимов, возникающих при этом.
- 3) Численный анализ, выполненный с учетом аналитических результатов, позволил выделить следующие промежутки значений отклонения:
  - промежуток, на котором поведение решений уравнения с отклонением близко к их поведению в задаче без отклонения;
  - промежуток значений отклонения, при которых на левом фронте области распространения волны появляются участки с колебаниями, затухающими к единице.
  - промежуток значений отклонения, при которых вся область распространения волны заполняется интенсивными колебаниями решения со сложным пространственным распределением; найдены статистические характеристики (корреляционный интеграл) этих режимов.

## Глава 4.

# Вычисление спектра показателей Ляпунова для дифференциальных уравнений с запаздыванием

### 4.1. Описание алгоритма

В данной главе результаты носят экспериментальный характер. Предложен способ оценки инвариантных характеристик, близких к показателям Ляпунова, для дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Опишем алгоритм получения первых  $K$  показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида:

$$\dot{x}_0(t) = F(t, x_0(t), x_0(t - \tau)), \quad (4.1.1)$$

где для  $\forall t$   $x_0(t) \in \mathbb{R}^J$ ,  $J$  — размерность системы,  $0 < \tau \leq 1$ .

В качестве фазового пространства примем пространство непрерывных на отрезке  $[-\tau, 0]$  функций в  $\mathbb{R}^J$ , а именно  $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^J)$ .

Для решения системы (4.1.1) численными методами требуется перейти от непрерывного времени к дискретному. Для этого выберем  $N + 1 \geq K$  точек, с помощью которых разобьем отрезок длины  $\tau$  на  $N$  равных частей. Длина каждой части будет равна  $\delta = \tau/N$ .

В качестве численного метода для решения системы (4.1.1) с начальными условиями

$$x_0(\varphi) = f_0(\varphi), \quad \varphi \in [-\tau, 0], \quad f_0(\varphi) \in \mathbb{R}^J \quad (4.1.2)$$



выберем метод Дормана-Принса восьмого порядка (DOPRI853) [75] с постоянным шагом (в качестве длины шага выберем  $\delta$ ).

Будем решать данную систему (4.1.1) с соответствующим начальным условием (4.1.2) выбранным методом до момента времени  $\Theta$  — времени достаточного приближения траектории решения к аттрактору. При этом, на промежутке  $t \in [\Theta - \tau, \Theta]$  получим решение  $x_0^0(t) \in \mathbb{R}^J$ , которое в дальнейшем будет выступать в качестве начального условия. Используя его, получим решение  $x_*(t) \in \mathbb{R}^J$ , на котором будем оценивать ляпуновские показатели.

Дополним систему уравнений (4.1.1) с начальным условием  $x_0^0(t)$  следующими  $K$  идентичными системами

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bx_i(t - \tau), \quad (4.1.3)$$

где  $A = \{a_{ij}\}$ ,  $a_{ij} = \frac{\partial F_i(t, x_*(t), x_*(t - \tau))}{\partial x_j(t)}$ ,  $B = \{b_{ij}\}$ ,  $b_{ij} = \frac{\partial F_i(t, x_*(t), x_*(t - \tau))}{\partial x_j(t - \tau)}$ ,  $i = 1, \dots, K$ , и  $j = 1, \dots, J$ ,

$$F(t, x_*(t), x_*(t - \tau)) = \left( F_1(t, x_1(t), \dots, x_J(t), x_1(t - \tau), \dots, x_J(t - \tau)), \dots, F_J(t, x_1(t), \dots, x_J(t), x_1(t - \tau), \dots, x_J(t - \tau)) \right)^T.$$

Они представляют собой линеаризованные на решении  $x_*(t)$  системы уравнений (4.1.1). Для каждого уравнения из  $K \times J$  уравнений системы (4.1.3) используем начальные условия следующего вида:

$$x_{i,j}^0(\varphi) = \sqrt{\frac{KJ}{N}}, \text{ при } \varphi \in \left[ (\Theta - \tau) + \frac{N(iJ + j - 1)}{KJ}, (\Theta - \tau) + \frac{N(iJ + j)}{KJ} \right], \\ , i = 1, \dots, K, j = 1, \dots, J, \\ x_{i,j}^0(\varphi) = 0, \text{ в противоположном случае.} \quad (4.1.4)$$

Таким образом:

- евклидова норма начального условия  $i$ -ой системы уравнений из (4.1.3) равна единице:

$$|x_i^0(t)| = 1 = \sqrt{\sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^J x_{i,j,k}^2}, \quad i = 1, \dots, K; \quad (4.1.5)$$

- скалярное произведение начального условия  $i$ -ой системы уравнений на  $s$ -ую равно нулю ( $i \neq s$ ):

$$(x_i^0, x_s^0) = \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^J x_{i,j,k}^2 x_{s,j,k}^2 = \delta_{i,s}, \quad (4.1.6)$$

где  $\delta_{i,s}$  — символ Кронекера,  $x_{i,j,k}^2$  — квадрат значения функции  $x_{i,j}^0(\varphi)$  в точке  $(\Theta - 1) + kN/K + vN/(KJ)$ ,  $k = 1, \dots, N, v = 1, \dots, J$ .

Решая совместно систему (4.1.1) с начальным условием  $x_0(\varphi) = x_0^0(\varphi)$  и системы уравнений (4.1.3) с начальными условиями (4.1.4) ( $\varphi \in [\Theta - \tau, \Theta]$ ) на промежутке  $t \in [\Theta, \Theta + T]$  получаем для каждой из систем решения  $x_i^1(t) \in \mathbb{R}^J$  ( $i = 0, \dots, K$ ).

Учитывая, что величины  $x_i^k$  ведут себя экспоненциальным образом, необходимо время от времени их перенормировывать. Отметим, что проблему представляет как неограниченный рост, так и стремление решения к нулю. Выбор времени перенормировки ( $T$ ) можно осуществлять двумя различными способами: через равные промежутки времени или динамически [19].

Далее на промежутке  $t \in [\Theta + T - \tau, \Theta + T]$  ортонормируем полученные решения  $x_i^1(t)$ ,  $i = 1, \dots, K + 1$  методом Грама-Шмидта [16]. При этом, после процедуры ортогонализации и до начала процедуры нормирования вычисляем и запоминаем величины

$$\xi_i^1 = \|x_{\text{орт } i}^1(t)\|. \quad (4.1.7)$$

Затем повторно решаем систему (4.1.1), (4.1.3), где в качестве начальных условий используем полученные ортонормированные решения.

Посчитав

$$\lambda_i = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^M \ln \xi_i^k}{TM}, \quad i = 1, \dots, K + 1, \quad (4.1.8)$$

получаем оценку показателей Ляпунова.

Перейдем к результатам тестирования алгоритма.

## 4.2. Результаты тестирования приведенного алгоритма на примере уравнения Хатчинсона

Вычислительные эксперименты проводились для уравнения Хатчинсона [78]. Напомним, что оно имеет следующий вид:

$$\dot{x}_0 = rx_0(t)(1 - x_0(t - 1)), \quad \text{где } R > 0. \quad (4.2.1)$$

Ненулевые решения уравнения (4.2.1) асимптотически устойчивы при  $r \in [0, \pi/2]$ , причем при  $r \in [0, e^{-1}]$  монотонно, а при  $r \in [e^{-1}, \pi/2]$  решение стремится к нулю колебательным образом. В этом случае показатели Ляпунова для уравнения Хатчинсона совпадают с действительными частями решений следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}\tau + r \cos \omega e^{-\tau} &= 0, \\ \omega + r \sin \omega e^{-\tau} &= 0.\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

Действительные части  $\tau_i$  решения данной системы при  $r$  равных 1.5, 1.0 и 0.5 представлены во втором столбце таблицы 1. Будем называть их эталонными значениями.

Для уравнения (4.2.1) линеаризованные уравнения имеют следующий вид:

$$\dot{x}_i = r(1 - x_0(t-1))x_i(t) - rx_0(t)x_i(t-1).\tag{4.2.3}$$

Для всех опытов используются следующие параметры:

- количество вычисляемых показателей Ляпунова  $K = 10$ ;
- время выхода на аттрактор  $\Theta = 150$ ;
- время перенормировки вектора начальных условий  $T = 4$ ;
- количество пересчетов показателей Ляпунова  $M = 5000$ ;
- начальное условие  $x_0(\varphi) = 1/2 \sin(\varphi) + 1$ , где  $\varphi \in [-1, 0]$ .

Как видно из таблицы 4.1 точность вычисления показателей зависит от величины выбранного разбиения. При увеличении  $N$  в десять раз со 100 до 1000 абсолютная погрешность уменьшилась на порядок, в крайнем случае, когда количество точек разбиения равно количеству вычисляемых показателей Ляпунова, достигаемая точность, соответственно, мала. Следует впрочем отметить, что при  $r$  равных 1.0 и 0.5, когда показатели отрицательны и относительно велики по модулю, ошибка вычислений приемлемая. В случае близкого к критическому значению  $r$  равного 1.5 старший показатель мал, и, следовательно, относительная ошибка велика.

Перейдем к результатам численного моделирования.

Таблица 4.1. Первые десять показателей Ляпунова для уравнения Хатчинсона при различных значениях параметра  $R$ , и их разность с эталонными значениями.

$R = 1.5$									
$i$	$\tau_i$	$N = 10$		$N = 100$		$N = 1000$		$N = 2000$	
		$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$
1	-0.0328	-0.0680	0.0352	-0.0361	0.0033	-0.0331	0.0003	-0.0330	0.0002
2	-0.0328	-0.0681	0.0353	-0.0361	0.0033	-0.0332	0.0004	-0.0331	0.0003
3	-1.6509	-1.7693	0.1184	-1.6627	0.0118	-1.6521	0.0012	-1.6516	0.0007
4	-1.6509	-1.7693	0.1184	-1.6627	0.0118	-1.6521	0.0012	-1.6516	0.0007
5	-2.2447	-2.3687	0.1240	-2.2590	0.0143	-2.2462	0.0015	-2.2454	0.0007
6	-2.2447	-2.3687	0.1240	-2.2590	0.0143	-2.2462	0.0015	-2.2454	0.0007
7	-2.6130	-2.6992	0.0862	-2.6285	0.0155	-2.6145	0.0015	-2.6137	0.0007
8	-2.6130	-2.6992	0.0862	-2.6285	0.0155	-2.6145	0.0015	-2.6137	0.0007
9	-2.8811	-2.8598	0.0213	-2.8973	0.0162	-2.8827	0.0016	-2.8818	0.0007
10	-2.8811	-2.8599	0.0212	-2.8973	0.0162	-2.8827	0.0016	-2.8818	0.0007
$R = 1.0$									
$i$	$\tau_i$	$N = 10$		$N = 100$		$N = 1000$		$N = 2000$	
		$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$
1	-0.3181	-0.3663	0.0482	-0.3227	0.0046	-0.3186	0.0005	-0.3184	0.0003
2	-0.3181	-0.3664	0.0483	-0.3228	0.0047	-0.3187	0.0006	-0.3185	0.0004
3	-2.0623	-2.2014	0.1391	-2.0760	0.0137	-2.0637	0.0014	-2.0630	0.0007
4	-2.0623	-2.2014	0.1391	-2.0761	0.0138	-2.0637	0.0014	-2.0630	0.0007
5	-2.6532	-2.7995	0.1463	-2.6693	0.0161	-2.6548	0.0016	-2.6540	0.0008
6	-2.6532	-2.7995	0.1463	-2.6693	0.0161	-2.6548	0.0016	-2.6540	0.0008
7	-3.0202	-3.1315	0.1113	-3.0375	0.0173	-3.0219	0.0017	-3.0210	0.0008
8	-3.0202	-3.1315	0.1113	-3.0375	0.0173	-3.0219	0.0017	-3.0210	0.0008
9	-3.2878	-3.2937	0.0059	-3.3057	0.0179	-3.2895	0.0017	-3.2885	0.0007
10	-3.2878	-3.2938	0.0060	-3.3057	0.0179	-3.2895	0.0017	-3.2886	0.0007
$R = 0.5$									
$i$	$\tau_i$	$N = 10$		$N = 100$		$N = 1000$		$N = 2000$	
		$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$
1	-0.7941	-0.8637	0.0696	-0.8006	0.0065	-0.7947	0.0006	-0.7943	0.0002
2	-0.7941	-0.8639	0.0698	-0.8008	0.0067	-0.7948	0.0007	-0.7945	0.0004
3	-2.7721	-2.9470	0.1749	-2.7891	0.017	-2.7738	0.0017	-2.7730	0.0009
4	-2.7721	-2.9470	0.1749	-2.7891	0.017	-2.7738	0.0017	-2.7730	0.0009
5	-3.3533	-3.5382	0.1849	-3.3726	0.0193	-3.3553	0.0020	-3.3543	0.0010
6	-3.3533	-3.5382	0.1849	-3.3726	0.0193	-3.3553	0.0020	-3.3543	0.0010
7	-3.7173	-3.8720	0.1547	-3.7378	0.0205	-3.7193	0.0020	-3.7183	0.0010
8	-3.7173	-3.8720	0.1547	-3.7378	0.0205	-3.7193	0.0020	-3.7183	0.0010
9	-3.9835	-4.0371	0.0536	-4.0046	0.0211	-3.9855	0.0020	-3.9844	0.0009
10	-3.9835	-4.0371	0.0536	-4.0046	0.0211	-3.9855	0.0020	-3.9844	0.0009

### 4.3. Результаты численного моделирования

Численное моделирование проводилось для систем дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами, которые достаточно подробно были изучены ранее в работах [18, 22, 24, 25] но для которых ранее вычислялись лишь значения старших ляпуновских экспонент, но не нескольких первых.

На всех рисунках, представленных в данной работе, сплошной линией нанесен график старшего показателя Ляпунова ( $\lambda_1$ ). Остальные показатели, занумерованные в порядке возрастания (сверху вниз) изображены кривыми, нанесены пунктирными и штрих-пунктирными линиями.

#### Уравнение Хатчинсона с двумя запаздываниями

Для начала был проведен ряд вычислительных экспериментов для обобщенного уравнения Хатчинсона с двумя запаздываниями [22], имеющего следующий вид:

$$\dot{N}_0(t) = r [1 - aN_0(t-1) - (1-a)N_0(t-h)] N_0(t). \quad (4.3.1)$$

Как известно, это уравнение описывает простейший способ учета возрастной структуры в задаче о динамике популяции особей, борющихся за общую пищу. В уравнении (4.3.1) функция  $N_0(t)$  — численность популяции,  $r$  — мальтузианский коэффициент линейного роста, запаздывания  $1$  и  $h$  — возраста половозрелости,  $a$  и  $(1-a)$  — вклады возрастной группы в воспроизводство популяции.

Линеаризованная часть уравнения Хатчинсона с двумя запаздываниями выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{N}_i(t) = & r [(1 - aN_0(t-1) - (1-a)N_0(t-h)) N_i(t) - \\ & - (aN_i(t-1) + (1-a)N_i(t-h)) N_0]. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Наибольший интерес представлял промежуток изменения параметра  $r$  от 11.7 до 14.2, при фиксированных значениях других параметров  $a = 0.15$  и  $h = 0.2$ . (рисунок 4.1). На данном рисунке изображены графики зависимости первых пяти показателей Ляпунова от параметра  $\lambda$ . Как видно из представленного рисунка на указанном промежутке хаотические колебания многократно сменяют периодические.

Ляпуновская размерность системы вычислялась по формуле Каплана-Йорке [81]

$$D = m + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|}, \quad (4.3.3)$$

где  $m$  такое число, что  $\sum_{i=1}^m \lambda_i > m$  и  $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i < 0$ . Например, для значения параметра  $r = 13.5$  размерность  $D \approx 2.327$ .

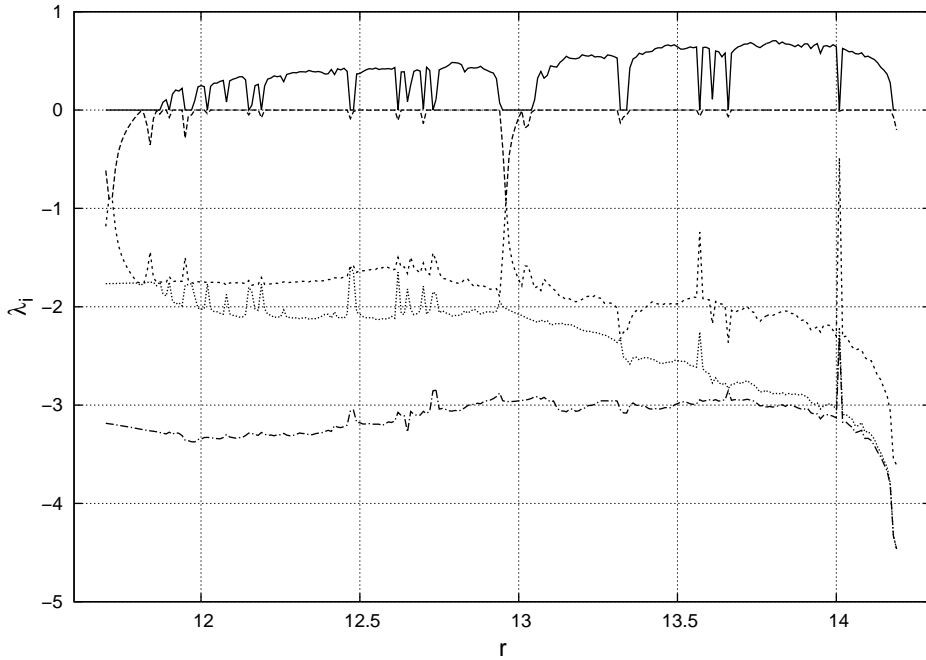


Рис. 4.1. Зависимость первых пяти показателей Ляпунова уравнения (4.3.1) от параметра  $r$  при  $h = 0.2$ ,  $a = 0.15$

### Уравнение диффузионного взаимодействия пары близких осцилляторов нейронного типа

Второй была рассмотрена система уравнений диффузионного взаимодействия пары близких осцилляторов нейронного типа, предложенная в [40] и изученная численно и аналитически в [24].

$$\begin{aligned} \dot{u}_{1,0}(t) &= \lambda \left[ -1 - r_1 e^{-u_{1,0}^2(t)} + r_2 e^{-u_{1,0}^2(t-1)} \right] u_{1,0}(t) + D(u_{2,0}(t) - u_{1,0}(t)) \\ \dot{u}_{2,0}(t) &= \lambda \left[ -1 - r_1 e^{-u_{2,0}^2(t)} + r_2 e^{-u_{2,0}^2(t-1)} \right] u_{2,0}(t) + D(u_{1,0}(t) - u_{2,0}(t)). \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Моделирование электрической активности нервных клеток основано на построении уравнений баланса токов, возникающих в результате ионного обмена через мембрану нервной клетки. В системе уравнений (4.3.4)  $u_{1,0}(t)$  и  $u_{2,0}(t)$  — мембранные потенциалы первого и второго одинаковых осцилляторов. Коэффициент  $\lambda$  определяет скорость протекания электрических

процессов в системе. Коэффициент  $D$  характеризует связь нейронов между собой.

Линеаризованная часть системы уравнений взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{1,i}(t) &= \lambda \left[ -1 - r_1 e^{-u_{1,0}^2(t)} + r_2 e^{-u_{1,0}^2(t-1)} \right] u_{1,i}(t) + \\
&\quad + 2\lambda \left[ r_1 e^{-u_{1,0}^2(t)} u_{1,0}(t) u_{1,i}(t) + r_2 e^{-u_{1,0}^2(t-1)} u_{1,0}(t-1) u_{1,i}(t-1) \right] u_{1,0}(t) + \\
&\quad + D(u_{2,i}(t) - u_{1,i}(t)) \\
\dot{u}_{2,i}(t) &= \lambda \left[ -1 - r_1 e^{-u_{2,0}^2(t)} + r_2 e^{-u_{2,0}^2(t-1)} \right] u_{2,i}(t) + \\
&\quad + 2\lambda \left[ r_1 e^{-u_{2,0}^2(t)} u_{2,0}(t) u_{2,i}(t) + r_2 e^{-u_{2,0}^2(t-1)} u_{2,0}(t-1) u_{2,i}(t-1) \right] u_{2,0}(t) + \\
&\quad + D(u_{1,i}(t) - u_{2,i}(t)).
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Интерес представлял промежуток изменения параметра  $\lambda$  от 2.85 до 2.91 при фиксированных значениях других параметров  $r_1 = 1.5$ ,  $r_2 = 2.6$ ,  $D = 0.055$  (рисунок 4.2). На данном рисунке изображена зависимость первых трех показателей Ляпунова от параметра  $\lambda$ .

Для значения параметра  $\lambda = 2.9$  размерность  $D \approx 2.43$ .

### **Система уравнений взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа с учетом запаздывания в цепочке связи между осцилляторами**

Далее была рассмотрена система уравнений взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа с учетом запаздывания в цепочке связи между осцилляторами [25]:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{1,0}(t) &= \lambda \left[ -1 - r_1 e^{-u_{1,0}^2(t)} + r_2 e^{-u_{1,0}^2(t-1)} \right] u_{1,0}(t) + D(u_{2,0}(t-h) - u_{1,0}(t)) \\
\dot{u}_{2,0}(t) &= \lambda \left[ -1 - r_1 e^{-u_{2,0}^2(t)} + r_2 e^{-u_{2,0}^2(t-1)} \right] u_{2,0}(t) + D(u_{1,0}(t-h) - u_{2,0}(t)).
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Линеаризованная на решениях  $u_{i,*}$  система уравнений взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа с учетом запаздывания в цепочке связи

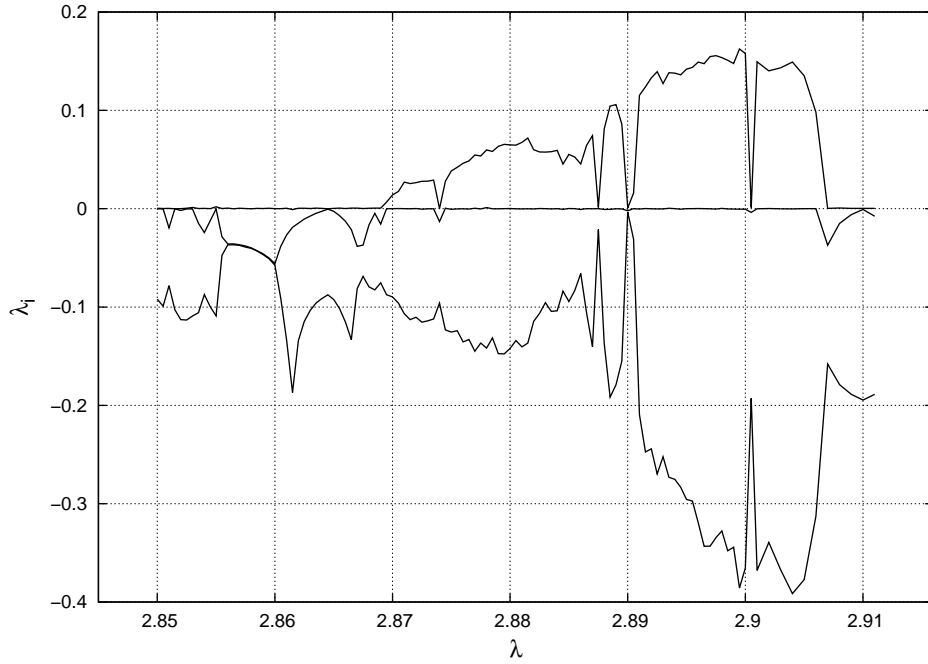


Рис. 4.2. Зависимость первых трех показателей Ляпунова уравнения (4.3.4) от параметра  $\lambda$  при  $r_1 = 1.5$ ,  $r_2 = 2.6$ ,  $D = 0.055$

между осцилляторами выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_{1,i}(t) &= \lambda \left[ -1 - r_1 e^{-u_{1,0}^2(t)} + r_2 e^{-u_{1,0}^2(t-1)} \right] u_{1,i}(t) + \\
 &\quad + 2\lambda \left[ r_1 e^{-u_{1,0}^2(t)} u_{1,0}(t) u_{1,i}(t) + r_2 e^{-u_{1,0}^2(t-1)} u_{1,0}(t-1) u_{1,i}(t-1) \right] u_{1,0}(t) + \\
 &\quad + D(u_{2,i}(t-h) - u_{1,i}(t)) \\
 \dot{u}_{2,i}(t) &= \lambda \left[ -1 - r_1 e^{-u_{2,0}^2(t)} + r_2 e^{-u_{2,0}^2(t-1)} \right] u_{2,i}(t) + \\
 &\quad + 2\lambda \left[ r_1 e^{-u_{2,0}^2(t)} u_{2,0}(t) u_{2,i}(t) + r_2 e^{-u_{2,0}^2(t-1)} u_{2,0}(t-1) u_{2,i}(t-1) \right] u_{2,0}(t) + \\
 &\quad + D(u_{1,i}(t-h) - u_{2,i}(t)).
 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Наибольший интерес представлял участок значения параметра  $\lambda$  от 2.84 до 3 при фиксированных значениях других параметров  $r_1 = 1.5$ ,  $r_2 = 2.6$ ,  $D = 0.074$ ,  $h = 0.1$  (рисунок 4.3). На данном рисунке изображены графики зависимости первых трех показателей Ляпунова от параметра  $\lambda$ . Выбор левой границы обусловлен тем, что при значениях  $\lambda < 2.84$  старший ляпуновский показатель равен нулю и система имеет устойчивый самосимметричный двумерный тор.

Для значения параметра  $\lambda = 2.94$  размерность  $D \approx 2.983$ .



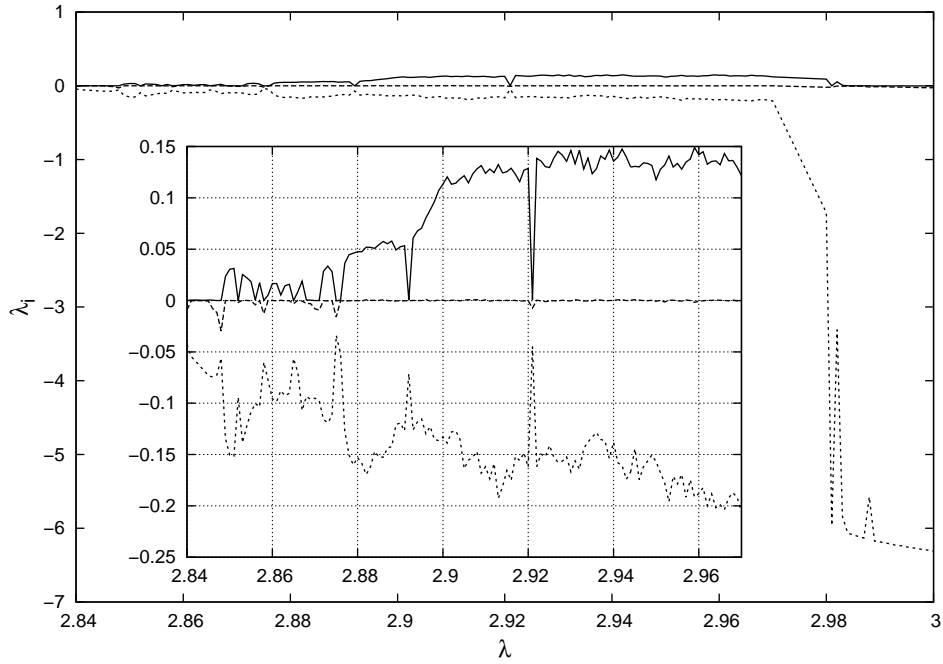


Рис. 4.3. Зависимость первых трех показателей Ляпунова уравнения (4.3.6) от параметра  $\lambda$  при  $r_1 = 1.5$ ,  $r_2 = 2.6$ ,  $D = 0.074$ ,  $h = 0.1$

### Система Ланга–Кобаяши

Далее была рассмотрена система уравнений Ланга–Кобаяши [18] динамики полупроводникового лазера, учитывающая воздействие отраженного излучения на резонатор

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= v(1 + i\alpha)EZ + \gamma e^{i(\omega - \omega_0)t} E(t - h), \\ \frac{dZ}{dy} &= Q - Z - (1 + Z)|E|^2, \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

где  $E(t)$  — комплексная амплитуда электрического поля,  $Z(t)$  — инверсия носителей,  $\gamma > 0$  — интенсивность внешнего излучения,  $\omega_1$  и  $\omega_0$  — оптическая частота задающего и синхронизируемого лазера соответственно;  $Q$  — превышение током накачки первой пороговой величины;  $v$  есть отношение времен затухания инверсии носителей и фотонов в резонаторе;  $\alpha$  — коэффициент уширения линии, отвечающий за нелинейное взаимодействие между амплитудой и фазой поля.

Для проведения вычислений перепишем систему уравнений (4.3.8) относительно вещественной и части, и делая замену  $E(t) = E(t)e^{i\omega t}$ , полагая

$$E = x_0 + iy_0$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -\omega y_0 + vz_0(x_0 - \alpha y_0) + \\ &\quad + \gamma[x_0(t-h) \cos((\omega - \omega_0)h) - y_0(t-h) \sin((\omega - \omega_0)h)] \\ \dot{y}_0 &= \omega x_0 + vz_0(y_0 + \alpha x_0) + \\ &\quad + \gamma[y_0(t-h) \cos((\omega - \omega_0)h) + x_0(t-h) \sin((\omega - \omega_0)h)] \\ \dot{z}_0 &= Q - z_0 - (1 - z_0)(x_0^2 + y_0^2). \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Линеаризованная на решениях  $x_{i,*}, y_{i,*}, z_{i,*}$  системы уравнений Ланга-Кобаяши имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= vz_0 x_i - y_i(vz_0 \alpha + \omega) + vz(x_0 - \alpha y_0) + \\ &\quad + \gamma[\cos((\omega - \omega_0)h)x_i(t-h) - \sin((\omega - \omega_0)h)y_i(t-h)] \\ \dot{y}_i &= vz_0 y_i + x_i(vz_0 \alpha + \omega) + vz(y_0 - \alpha x_0) + \\ &\quad + \gamma[\sin((\omega - \omega_0)h)x_i(t-h) + \cos((\omega - \omega_0)h)y_i(t-h)] \\ \dot{z}_i &= -(2(1 + z_0)x_0 x_i + 2(1 + z_0)y_0 y_i + z(1 + (x_0^2 + y_0^2))). \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

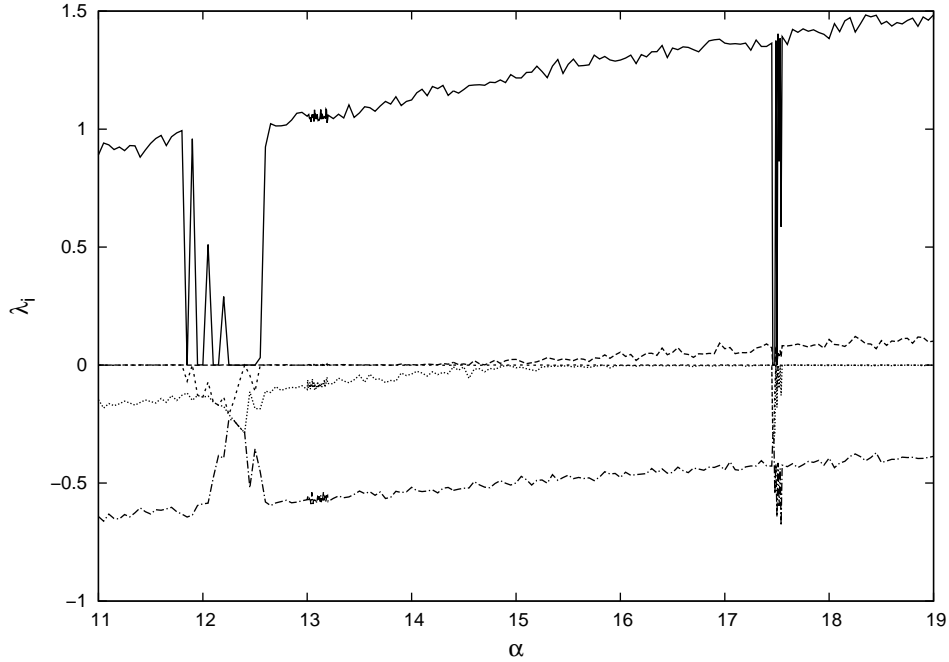


Рис. 4.4. Зависимость первых пяти показателей Ляпунова уравнения (4.3.9) от параметра  $\alpha$  при  $Q = 10, v = 2, \gamma = 2, \omega_0 = 0.3, \omega = 1, h = 1$

На рисунок 4.4 изображена зависимость первых пяти показателей Ляпунова от параметра  $\alpha$ . Его значения изменялись в промежутке от 11 до 19. При некоторых значениях  $\alpha$  были получены два положительных показателя Ляпунова, указывающих на появление режима гиперхаоса [97].

## Уравнение Стюарта-Ландау

Рассмотрим уравнение Стюарта-Ландау [111], имеющего следующий вид:

$$\dot{z}(t) = z(t) - (1 - i\beta)z(t)|z(t)|^2 + ke^{i\theta}z(t - \tau), \quad (4.3.11)$$

где  $z(t)$  — комплексная функция.

Для проведения вычислений перепишем систему уравнений (4.3.11) относительно вещественной и мнимой частей, полагая  $\theta = 0$  и  $z = x + iy$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - (x^2 + y^2)) - \beta y(x^2 + y^2) + kx(t - \tau), \\ \dot{y} &= y(1 - (x^2 + y^2)) - \beta x(x^2 + y^2) + ky(t - \tau). \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Линеаризованная на решениях  $x_*$ ,  $y_*$  система уравнений Стюарта-Ландау имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - 3x_*^2 - y_*^2 - 2\beta y_* x_*)x + (2x_* y_* - \beta x_*^2 - 2\beta y_*^2)y + kx(t - \tau), \\ \dot{y} &= (-2y_* x_* + 3\beta x_*^2 + \beta y_*^2)x + (1 - x_*^2 - 3y_*^2 + 2\beta x_* y_*)y + ky(t - \tau). \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

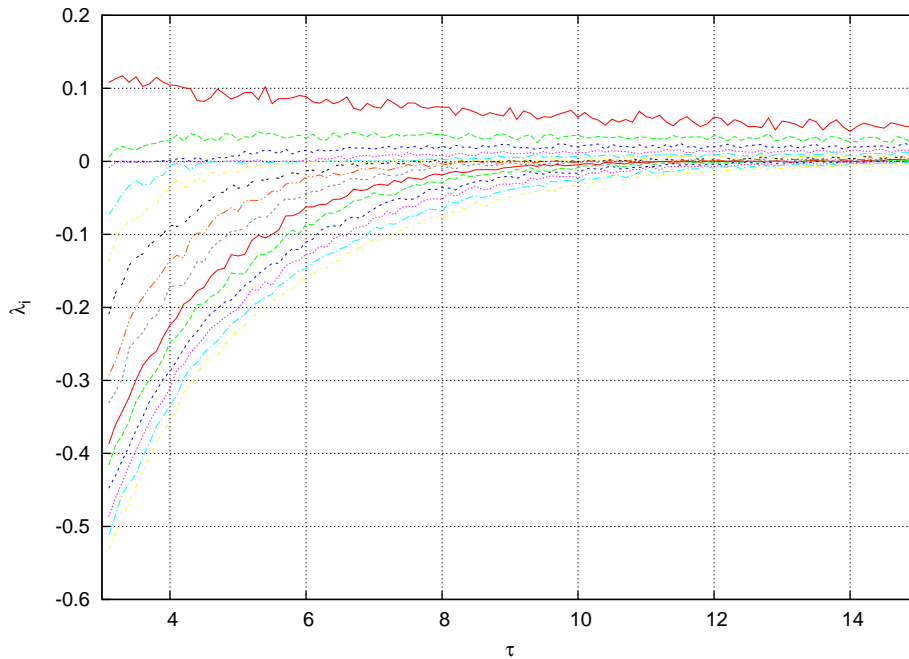


Рис. 4.5. Зависимость первых пятнадцати показателей Ляпунова уравнения (4.3.12) от запаздывания  $\tau$  при  $\beta = 4$  и  $k = 1,5$

На рисунке 4.5 изображена зависимость первых пяти показателей Ляпунова от запаздывания  $\tau$ . Значения параметра  $\tau$  изменялись от 3 до 15 с шагом 0.1.

Наличие нескольких положительных показателей Ляпунова указывает на появление режима гиперхаоса [97]. Например, при  $\tau = 15$ , с учетом погрешности работы вычислительного процесса, положительными оказываются около 10 показателей.

# Заключение

В заключение перечислим основные результаты, полученные в работе.

В диссертационной работе изложен ряд численных и аналитических результатов исследования динамики логистического уравнения с диффузией и отклонениями аргументов. Сначала было рассмотрено логистическое уравнение с добавлением слагаемого, характеризующего отклонение временной переменной. Исследована локальная динамика этого уравнения. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Показано, что в зависимости от одного из параметров уравнения либо все решения стремятся к состоянию равновесия, либо выходят на единственный устойчивый цикл. Проведен численный эксперимент, показывающий хорошее совпадение результатов численного моделирования и утверждений аналитического характера.

Далее, рассмотрена задача распространения волны плотности в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией. Для исследования качественного поведения решений этого уравнения были рассмотрены модельные краевые задачи, соответствующие данному уравнению, и вблизи их единичного состояния равновесия была построена квазинормальная форма, которая оказалась стандартным уравнением Гинзбурга–Ландау. Затем был проведен обширный численный эксперимент для изучения процесса распространения волны. Он показал, что при достаточно малых значениях запаздывания данное уравнение имеет решения, близкие к решениям стандартного уравнения КПП. Увеличение параметра запаздывания приводит сначала к появлению затухающей колебательной составляющей в пространственном распределении решения. Дальнейший рост данного параметра приводит к разрушению бегущей волны. Это выражается в том, что в окрестности участка начального возмущения сохраняются незатухающие по времени и медленно распространяющиеся по пространству колебания, близкие к решениям соответствующей краевой задачи с периодическими граничными условиями. Если значение запаздывания достаточно велико, то во всей области распространения волны наблюдаются интенсивные пространственно-

временные колебания. Наряду с отклонением временной переменной рассмотрена задача распространения волны плотности в логистическом уравнении с отклонением пространственной переменной и диффузией.

Наконец, в последней части работы разработан вычислительный алгоритм и получены результаты его тестирования на уравнении Хатчинсона в случае устойчивого единичного состояния равновесия. Численно показана близость полученных значений характеристик к корням характеристического квазимногочлена, что позволяет считать используемый метод вполне корректным. Проиллюстрировано применение алгоритма к некоторым задачам, в частности приводятся результаты численного моделирования для уравнений Ланга-Кобаяши и Стюарта-Ландау, для которых получены значения параметров, при которых в них наблюдается гиперхаотическая динамика. На основе алгоритма оценки спектра показателей Ляпунова был создан программный комплекс, получено свидетельство о регистрации в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам Российской Федерации.

# Литература

1. *Алешин, С.В.* Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова с запаздыванием / *С.В. Алешин, С.Д. Глызин, С.А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, №2. с. 304–321, 2015.
2. *Алешин, С.В.* Численный анализ уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова / *С.В. Алешин, С.А. Кащенко* // Сборник тезисов докладов Международный научный семинар Актуальные проблемы математической физики, Москва, МГУ, 2014 г., с 95–96.
3. *Алешин, С.В.* Численный анализ бегущих волн уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова с запаздывающим аргументом. О работе семинара «Нелинейная динамика» / *С.В. Алешин* // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, №6. С. 176–178.
4. *Алешин, С.В.* Оценка инвариантных числовых показателей аттракторов систем дифференциальных уравнений с запаздыванием / *С.В. Алешин* // Вычислительные технологии в естественных науках: методы суперкомпьютерного моделирования. 1–3 окт. 2014, Россия, Таруса: сб. тр. / Под ред. Р.Р. Назирова, Л.Н. Щура. М.: ИКИ РАН, 2014. С. 10–17.
5. *Алешин, С.В.* Локальная динамика логистического уравнения, содержащего запаздывание / *С.В. Алешин, С.А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, №1. С. 73–88.
6. *Алешин, С.В.* Вычисление инвариантных характеристик хаотического аттрактора Ланга–Кобаяши / *С.В. Алешин* // Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова. Серия Естественные науки, №2, 2013.
7. *Алешин, С.В.* Численный анализ генерации гиперхаоса в уравнении Стюарта–Ландау / *С.В. Алешин* // Международная конференция

«Нелинейные явления в задачах современной математики и физики», посвященная 210-летию Демидовского университета, Ярославль, 4–5 декабря 2013 г., тезисы докладов, с. 4–8.

8. *Алешин, С.В.* Численный анализ генерации гиперхаоса в модели Ланга–Кобаяши / *С.В. Алешин* // Современные проблемы математики и информатики. Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Выпуск 13. Ярославль 2013. с. 21–28.
9. *Алешин, С.В.* Вычисление спектра показателей Ляпунова для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / *С.В. Алешин* // Заметки по информатике и математике. 2012. №4. С. 7–12.
10. *Ахромеева, Т.С.* Структуры и хаос в нелинейных средах / *Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский* — М.: Физматлит, 2007.
11. *Балякин, А.А.* Вычисление спектра показателей Ляпунова для распределенных систем радиофизической природы / *А.А. Балякин, Е.В. Блохина* // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, №2. С. 87–110.
12. *Балякин, А.А.* Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных системах с запаздывающей обратной связью / *А.А. Балякин, Н.М. Рыскин* // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, №6. С. 3–21.
13. *Баутин, Н.Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / *Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович* — М.: Наука, 1990.
14. *Брюно, А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / *А.Д. Брюно* — М.: Наука, 1979.
15. *Былов, Б.Ф.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / *Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноградов, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий* — М.: Наука, 1966.
16. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / *Ф.Р. Гантмахер* — М., 2 изд., 1966.
17. *Гапонов-Грехов, А.В.* Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей / *А.В. Гапонов-Грехов, М.И. Рабинович* // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 7–44.



18. *Глазков, Д.В.* Особенности динамики модели Ланга-Кобаяши в одном критическом случае / *Д.В. Глазков* // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, №2. С. 36–45.
19. *Глызин, Д.С.* Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора / *Д.С. Глызин, С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, №2. С. 268–273.
20. *Глызин, С.Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке / *С.Д. Глызин* // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, №3. С. 96–116.
21. *Глызин, С.Д.* Сценарии фазовых перестроек одной конечноразностной модели уравнения «реакция-диффузия» / *С.Д. Глызин* // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, №6. С. 805–811.
22. *Глызин, С.Д.* Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона / *С.Д. Глызин* // Моделирование и анализ информационных систем, Т. 14, №3, 2007. С. 29–42.
23. *Глызин, С.Д.* Численное обоснование гипотезы Ландау - Колесова о природе турбулентности / *С.Д. Глызин* // Математические модели в биологии и медицине. Ин-т математики и кибернетики АН Лит. ССР. Вильнюс, 1989. Вып. 3. С. 31-36.
24. *Глызин, С.Д.* Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа / *С.Д. Глызин, Е.О. Киселева* // Моделирование и анализ информационных систем, Т. 15, №2, 2008. С. 75–88.
25. *Глызин, С.Д.* Учет запаздывания в цепочке связи между осцилляторами / *С.Д. Глызин, Е.О. Киселева* // Моделирование и анализ информационных систем, Т. 17, №2, 2010. С. 133–143.
26. *Глызин, С.Д.* Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов* // Ярославль: ЯрГУ, 2006. 92 с.
27. *Глызин, С.Д.* Конечномерные модели диффузионного хаоса / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2010, т. 50, №5 с. 860–875

28. *Глызин, С. Д.* Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона / *С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов* // Журнал Вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. №1. С. 76–89.
29. *Гурли, С.А.* Нелокальные уравнения реакции–диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика / *С.А. Гурли, Дж.В.-Х. Соу, Дж.Х. Ву* // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 1 (2003). с. 84–120.
30. *Дарвин, Ч.* Происхождение видов / *Ч. Дарвин* — М.-Л.: Сельхозгиз, 1935. — 630 с.
31. *Кащенко, А. А.* Устойчивость бегущих волн в уравнении Гинзбурга–Ландау с малой диффузией / *А. А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем, 2011, Т. 18, №3, с. 58–62
32. *Кащенко, И.С.* Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием / *И.С. Кащенко* // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 421, №5. с. 586–589.
33. *Кащенко, С. А.* Асимптотика периодического решения обобщенного уравнения Хатчинсона / *С. А. Кащенко* // Исследования по устойчивости и теории колебаний, Ярославль, ЯрГУ, 1981, с. 64–85
34. *Кащенко, С. А.* К вопросу об оценке в пространстве параметров области глобальной устойчивости уравнения Хатчинсона / *С. А. Кащенко* // Нелинейные колебания в задачах экологии, Ярославль, ЯрГУ, 1985, с. 55–62
35. *Кащенко, С. А.* О периодических решениях уравнения  $x'(t) = -\lambda x(t-1)[1+x(t)]$  / *С. А. Кащенко* // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1978. С. 110–117.
36. *Кащенко, С. А.* Об установившихся режимах уравнения Хатчинсона с диффузией / *С. А. Кащенко* // ДАН СССР, 1987, т. 292, №2, с. 327–330
37. *Кащенко, С. А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной / *С. А. Кащенко* // Диф. уравнения. 1989. Т. 25, №8. С. 1448–1451.

38. *Кащенко, С. А.* Пространственно-неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией / *С. А. Кащенко* // Математическое моделирование, 1990, т. 2, №9, с. 49–69
39. *Кащенко, С. А.* Уравнения Гинзбурга–Ландау — нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием / *С. А. Кащенко* // Журнал Вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38. №3. С. 457–465.
40. *Кащенко, С.А.,* Модели волновой памяти / *С.А. Кащенко, В.В. Майоров* // М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
41. *Колесов, А. Ю.* Об устойчивости пространственно однородного цикла в уравнении Хатчинсона с диффузией / *А. Ю. Колесов* // Математические модели в биологии и медицине, 1985, т. 1, Вильнюс, Ин-т математики АН Лит. ССР, с. 93–103
42. *Колесов, А. Ю.* Описание фазовой неустойчивости системы гармонических осцилляторов, слабо связанных через диффузию / *А. Ю. Колесов* // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, №1. С. 831–835.
43. *Колесов, А. Ю.* К вопросу об определении хаоса / *А. Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // УМН, 2009, т. 64, выпуск 4(388), с. 125–172.
44. *Колмогоров, А. Н.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме / *А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов* // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика, 1:6 (1937)
45. *Кудряшов, Н.А.* О точных решениях уравнений семейства Фишера / *Н.А. Кудряшов* // Теоретическая и математическая физика, 94:2 (1993), 296–306.
46. *Мищенко, Е.Ф.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / *Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* — М.: Физматлит, 2005.
47. *Оселедец, В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем / *В.И. Оселедец* // Труды Моск. матем. об-ва. 1968. Т. 19. С. 197–231
48. *Свирижев, Ю.М.* Устойчивость биологических сообществ / *Ю.М. Свирижев, Д.О. Логофет* — М.: Наука, 1978. - 352 с.

49. *Таверовский, В.А.* Млекопитающие Якутии / *В.А. Таверовский, О.В. Егоров, В.Г. Кривошеев, М.В. Попов, Ю.В. Лабутин* — М.: Наука, 1971. - 659 с.
50. *Шустер, Г.* Детерминированный хаос: введение / *Г. Шустер* — М.: Мир, 1988.
51. *Ablowitz, M.J.* Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed / *M.J. Ablowitz, A. Zeppetella* // *Bull. Math. Biology*, 41 (1979), 835–840.
52. *Ai, S.* Traveling wave fronts for generalized Fisher equations with spatio-temporal delays / *S. Ai* // *J. Differential Equations*, 232 (2007), pp. 104–133.
53. *Ashwin, P.* Travelling fronts for the KPP equation with spatio-temporal delay / *P. Ashwin, M.V. Bartuccelli, T.J. Bridges, S.A. Gourley* // *Z. Angew. Math. Phys.*, 53 (2002), pp. 103–122
54. *Assaf IV, D.* Definition of chaos / *D. Assaf IV, S. Gadbois* // *Amer. Math. Monthly*, 99:9 (1992), 865.
55. *Banks, J.* On Devaney's definition of chaos / *J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey* // *Amer. Math. Monthly*, 99:4 (1992), p. 332–334.
56. *Benettin, G.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application / *G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn* // *Meccanica*, 15, 1980, p. 9–30.
57. *Bramson, M.* Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to traveling waves / *M. Bramson* // *Mem. Amer. Math. Soc.*, 44 (285) (1983)
58. *Britton N. F.* Reaction-diffusion equations and their applications to biology / *N. F. Britton* — New York: Academic Press, 1986.
59. *Britton N. F.* Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model / *N. F. Britton* // *SIAM J. Appl. Math.* 1990. V. 50. P. 1663–1688.

60. *Coville, J.* Nonlocal anisotropic dispersal with monostable nonlinearity / *J. Coville, J. Dávila, S. Martínez* // *J. Differential Equations*, 244 (2008), pp. 3080–3118
61. *Danilov, V.G.* Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes / *V.G. Danilov, V.P. Maslov, K.A. Volosov* — Dordrecht, Kluwer, 1995.
62. *Devaney, R.L.* An introduction to chaotic dynamical systems / *R.L. Devaney* — Addison-Wesley Stud. Nonlinearity, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989.
63. *Faria, T.* Traveling waves for delayed reaction–diffusion equations with non-local response / *T. Faria, W. Huang, J. Wu* // *Proc. R. Soc. A*, 462 (2006), pp. 229–261.
64. *Fisher, R.A.* The Wave of Advance of Advantageous Genes / *R.A. Fisher* // *Annals of Eugenics*, 7 (1937), 355–369.
65. *Friesecke, G.* Exponentially growing solutions for a delay-diffusion equation with negative feedback / *G. Friesecke* // *J. Differential Equations*, 98 (1992), pp. 1–18.
66. *Glass, L.* Oscillations and chaos in physiological control systems / *L. Glass, M.C. Mackey* // *Science*. — 1977. — 197. — p. 287–289.
67. *Glass, L.* Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control systems / *L. Glass, M.C. Mackey* // *Ann. N. Y. Acad. Sci.* — 1979. — 316. — p. 214–235.
68. *Glyzin, S. D.* Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos / *S. D. Glyzin* // *Automatic Control and Computer Sciences*, 2013, vol. 47, №7, p. 452–469.
69. *Gomez, A.* Monotone traveling wavefronts of the KPP-Fisher delayed equation / *A. Gomez, S. Trofimchuk* // *Journal of Differential Equations*, Volume 250, Issue 4, 15 February 2011, Pages 1767–1787.
70. *Gopalsamy, K.* Oscillations and convergence in a diffusive delay logistic equation / *K. Gopalsamy, X.-Z. He, D.Q. Sun* // *Math. Nachr.*, 164 (1993), pp. 219–237.

71. *Gourley, S.A.* Travelling front solutions of a nonlocal Fisher equation / *S.A. Gourley* // *J. Math. Biol.*, 41 (2000), pp. 272–284.
72. *Gourley, S.A.* Instability of travelling wave solutions of a population model with nonlocal effects / *S.A. Gourley, N.F. Britton* // *IMA J. Appl. Math.* — 1993. — 51. — p. 299-310.
73. *Gourley, S.A.* Nonlocality of reaction–diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics / *S.A. Gourley, J.W.-H. So, J.H. Wu* // *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 124, №4, 2004, p. 5119–5153.
74. *Hadeler, K.P.* Transport, reaction, and delay in mathematical biology, and the inverse problem for traveling fronts / *K.P. Hadeler* // *J. Math. Sci.*, 149 (2008), pp. 1658–1678.
75. *Hairer, E.* Solving Ordinary Differential Equations 1 (Springer Series in Computational Mathematics): Nonstiff Problems / *E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner* — 2ed., revised, Springer, 2008.
76. *Hale, J.* Theory of Functional Differential Equations / *J. Hale* — Springer-Verlag, 1977.
77. *Hartman, Ph.* Ordinary differential equations / *Ph. Hartman* — New York, Wiley, 1964.
78. *Hutchinson, G.E.* Circular causal in ecology / *G.E. Hutchinson* // *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 1948. №50. P. 221–246.
79. *Jones, G.S.* The existence of periodic solutions of  $f'(x) = -\alpha f(x - 1)[1 + f(x)]$  / *G.S. Jones* // *T. Math. Anal. and Appl.* 1962. Vol. 5. P. 435–450.
80. *Kakutani, S.* On the non-linear difference-differential equation  $y'(t) = (a - by(t - \tau))y(t)$ . Contributions to the theory of non-linear oscillations / *S. Kakutani, L. Markus* // *Ann. Math. Stud.* Princeton University Press. Princeton, 1958. Vol. IV. P. 1–18.
81. *Kaplan, J.L.* Chaotic Behavior of Multidimensional Difference Equations / *J.L. Kaplan, J.A. Yorke* // In *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*, edited by H.-O. Peitgen and H.-O. Walter, *Lecture Notes in Mathematics*, 730 (Springer, Berlin, 1979b), p. 204.

82. *Kaschenko, S.A.* Normalisation in the systems with small diffusion / *S.A. Kaschenko* // Int. J. of Bifurcation and chaos. 1996. V. 6, №7. P. 1093–1109.
83. *Kashchenko, S.A.* Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation / *S.A. Kashchenko* // Automatic Control and Computer Science. 2013. Vol. 47, №7. P. 470–494.
84. *Knudsen, C.* Chaos without nonperiodicity / *C. Knudsen* // Amer. Math. Monthly, 101:6 (1994), 563–565.
85. *Kopell, N.* Plane wave solutions to reaction-diffusion equations / *N. Kopell, L.N. Howard* // Stud. Appl. Math. — 1973. —52. — p. 291–328.
86. *Kuang, Y.* Delay Differential Equations: With Applications in Population Dynamics / *Y. Kuang* — Academic Press, 1993.
87. *Kuramoto, Y.* Diffusion-Induced Chaos in Reaction Systems / *Y. Kuramoto* // Prog. Theor. Phys. Supplement. 1978. №64(1978). P. 346–367.
88. *Lau, K.-S.* On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov, Petrovsky, and Piskounov / *K.-S. Lau* // J. Differential Equations, 59 (1985), pp. 44–70.
89. *Lloyd, B. Keith.* Wildlife's ten-year cycle / *B. Keith. Lloyd*, — The university of Wisconsin press. Madison, 1963.
90. *Lorenz, E.N.* Deterministic nonperiodic flow / *E.N. Lorenz* // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130–141.
91. *Luckhaus, S.* Global boundedness for a delay-differential equation / *S. Luckhaus* // Trans. Amer. Math. Soc., 294 (1986), pp. 767–774.
92. *Malthus, T.* An Essay on the Principle of Population / *T. Malthus* — London, 1798.
93. *Murray, J.D.* Mathematical Biology. I. An Introduction / *J.D. Murray* — Third Edition, Berlin, 2001.
94. *Nicolis, G.* Self-Organization in Non-Equilibrium Systems / *G. Nicolis, I. Prigogine* — Wiley. 1977.

95. *Pan, S.* Asymptotic behavior of traveling fronts of the delayed Fisher equation / *S. Pan* // Nonlinear Anal. Real World Appl., 10 (2009), pp. 1173–1182.
96. *Raugel, G.* Stability of fronts for a KPP-system. II. The critical case / *G. Raugel, K. Kirchgässner* // J. Differential Equations, 146 (1998), pp. 399–456.
97. *Rossler, O.E.* An equation for hyperchaos / *O.E. Rossler* // Phys.Lett. 1979. Vol. A71, №2–3. P.155.
98. *Ruelle, D.* On the nature of turbulence / *D. Ruelle, F. Takens* // Comm. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167–192.
99. *Touhey, P.* Yet another definition of chaos / *P. Touhey* // Amer. Math. Monthly, 104:5 (1997), p. 411–414.
100. *Vellekoop, M.* On intervals, transitivity = chaos / *M. Vellekoop, R. Berglund* // Amer. Math. Monthly, 101:4 (1994), p. 353–355.
101. *Verhulst, P.F.* Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement / *P.F. Verhulst* // Correspondance mathématique et physique. 1838. 10. P. 113–121.
102. *Volpert, A.* Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems / *A. Volpert, V. Volpert, V. Volpert* — American Mathematical Society, 2000.
103. *Volterra, V.* Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie / *V. Volterra* — Paris, 1931.
104. *Wang, Z.-C.* Travelling wave fronts in reaction–diffusion systems with spatio-temporal delays / *Z.-C. Wang, W.T. Li, S. Ruan* // J. Differential Equations, 222 (2006), pp. 185–232.
105. *Wolf, A.* Determining Lyapunov exponents from a time series / *A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano* // Physica D 16 (1985) 285 p.
106. *Wright, E. M.* A non-linear differential equation / *E. M. Wright* // J. Reine Angew. Math., 1955, vol. 194, №1–4, p. 66–87.
107. *Wu, J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations / *J. Wu* — New York, Springer-Verlag, 1996.



108. *Wu, J.* Traveling wave fronts of reaction–diffusion systems with delay / *J. Wu, X. Zou* // *J. Dynam. Differential Equations*, 13 (2001), pp. 651–687.
109. *Wu, J.* Introduction to neural dynamics and signal transmission delay / *J. Wu* — In: *De Gruyter series in nonlinear analysis and applications*. — Berlin: de Gruyter, 2002.
110. *Yanagida, E.* Irregular behavior of solutions for Fisher’s equation / *E. Yanagida* // *J. Dynam. Differential Equations*, 19 (2007), pp. 895-914.
111. *Yanchuk, S.* Delay and periodicity / *S. Yanchuk, P. Perlikowski* // *Phys. Rev. E*.79.046221, 2009.
112. *Yoshida, K.* The Hopf bifurcation and its stability for semilinear diffusion equations with time delay arising in ecology / *K. Yoshida* // *Hiroshima Math. J.*, 12 (1982), pp. 321–348.

# Приложения

## Приложение А. Фрагменты исходного кода программного комплекса «Оценка показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом»

Файл Run.java

```
package javasolver;

import gui.MainFrame;

public class Run {
    public static void main(String[] args) {
        MainFrame mainFrame = new MainFrame();
        mainFrame.setVisible(true);
    }
}
```

Файл MainFrame.java

```
package gui;

import alg.GSH;
import java.io.IOException;
import java.math.BigDecimal;
import java.util.ArrayList;
import java.util.List;
import java.util.logging.Level;
import java.util.logging.Logger;
import javasolver.constantStep.DPMethodConstantStep;
import javax.swing.JFileChooser;
import javax.swing.filechooser.FileNameExtensionFilter;
import javax.xml.parsers.DocumentBuilder;
import javax.xml.parsers.DocumentBuilderFactory;
```

```

import javax.xml.parsers.ParserConfigurationException;
import javax.xml.transform.Transformer;
import javax.xml.transform.TransformerException;
import javax.xml.transform.TransformerFactory;
import javax.xml.transform.dom.DOMSource;
import javax.xml.transform.stream.StreamResult;
import org.w3c.dom.Document;
import org.w3c.dom.Element;
import org.xml.sax.SAXException;

public class MainFrame extends javax.swing.JFrame {

    public MainFrame() {
        initComponents();
    }

    private void initComponents() {
        //...
    }

    private void jButton1ActionPerformed(
        java.awt.event.ActionEvent evt) {
        final BigDecimal ONE = BigDecimal.ONE;
        final int COUNT_OF_STEP =
            Integer.parseInt(this.jTextFieldCountOfStep.getText());
        final int D =
            Integer.parseInt(this.jTextFieldD.getText());
        final int N =
            Integer.parseInt(this.jTextFieldN.getText());
        final BigDecimal dt =
            ONE.divide(BigDecimal.valueOf(N));
        final BigDecimal A =
            new BigDecimal(this.jTextFieldA.getText());
        final BigDecimal Ldt =
            new BigDecimal(this.jTextFieldLdt.getText());
        final int SYSTEM_SIZE =
            Integer.parseInt(this.jTextFieldSystemSize.getText());
        DPMethodConstantStep dpm
            = new DPMethodConstantStep(dt);
        dpm.setScripts(this.jTextAreaSystem.getText(),
            this.jTextAreaInit.getText());
        dpm.setSystemSize(SYSTEM_SIZE);
        double[] y0 =
            new double[SYSTEM_SIZE * D + SYSTEM_SIZE];
        dpm.core(BigDecimal.ZERO, y0, A);
        int dd = N / (SYSTEM_SIZE * D);
        for (int i = SYSTEM_SIZE;

```

```

        i < SYSTEM_SIZE * D + SYSTEM_SIZE;
        i++) {
    for (int j = dpm.solution.size() - 1 - N
          + (i - SYSTEM_SIZE) * dd;
         j < dpm.solution.size() - 1 - N
          + (i - SYSTEM_SIZE + 1) * dd;
         j++) {
        dpm.solution.get(j).k5[i] = Math.sqrt(1.0 / dd);
    }
}

List<double[]> lyap200 = new ArrayList<>();
GSH.log = new double[/*SYSTEM_SIZE * */D];
for (int ii = 0; ii < COUNT_OF_STEP; ii++) {
    BigDecimal from =
        A.add(Ldt.multiply(BigDecimal.valueOf(ii)));
    BigDecimal to =
        A.add(Ldt.multiply(BigDecimal.valueOf(ii + 1)));
    dpm.core(from, y0, to);
    from = to.subtract(ONE);
    int fromInd =
        dpm.fbin_search(from, dpm.solution);
    int toInd =
        dpm.fbin_search(to, dpm.solution);
    GSH gsh = new GSH();
    gsh.process(gsh.solutionToArray(
        dpm.solution.subList(fromInd, toInd + 1), SYSTEM_SIZE));
    gsh.arrayToSolution(dpm.solution
        .subList(fromInd, toInd + 1), SYSTEM_SIZE);
    double[] lyap = new double[D];
    System.out.println();
    System.out.print(ii + " ");
    for (int j = 0; j < GSH.log.length; j++) {
        lyap[j] = GSH.log[j] / ((ii + 1) * Ldt.doubleValue());
        System.out.print(" " + lyap[j]);
    }
    System.out.println();
    lyap200.add(lyap);
    if (lyap200.size() == 200) {
        double avg100[] = new double[D];
        double avg200[] = new double[D];
        for (int j = 0; j < 100; j++) {
            for (int k = 0; k < D; k++) {
                avg100[k] +=
                    lyap200.subList(0, 100).get(j)[k];
                avg200[k] +=
                    lyap200.subList(100, 200).get(j)[k];
            }
        }
    }
}

```

```

    }
}
boolean flag = true;
for (int j = 0; j < D; j++) {
    if (Math.abs(avg100[j] / 100
        - avg200[j] / 100) > 0.0001) {
        flag = false;
    } else {
        System.out.println(j
            + "-ые средние меньше 0.0001");
    }
}
System.out.println("Все!");
for (int j = 0; j < D; j++) {
    System.out.println(j + ": " + avg200[j] / 100);
}
lyap200.subList(0, 1).clear();
}
}

private void jButton2ActionPerformed(
    java.awt.event.ActionEvent evt) {
    JFileChooser chooser = new JFileChooser();
    FileNameExtensionFilter filter =
        new FileNameExtensionFilter("JavaSolver problems", "xml");
    chooser.setFileFilter(filter);
    int returnVal = chooser.showSaveDialog(this);
    if (returnVal == JFileChooser.APPROVE_OPTION) {
        try {
            DocumentBuilderFactory docFactory =
                DocumentBuilderFactory.newInstance();
            DocumentBuilder docBuilder =
                docFactory.newDocumentBuilder();
            Document doc = docBuilder.newDocument();
            Element rootElement = doc.createElement("problem");
            doc.appendChild(rootElement);
            Element xmlD = doc.createElement("D");
            xmlD.appendChild(
                doc.createTextNode(jTextFieldD.getText()));
            rootElement.appendChild(xmlD);
            Element xmlN = doc.createElement("N");
            xmlN.appendChild(
                doc.createTextNode(jTextFieldN.getText()));
            rootElement.appendChild(xmlN);
            Element xmlA = doc.createElement("A");

```

```

xmlA.appendChild(
    doc.createTextNode(jTextFieldA.getText()));
rootElement.appendChild(xmlA);
Element xmlLdt = doc.createElement("Ldt");
xmlLdt.appendChild(
    doc.createTextNode(jTextFieldLdt.getText()));
rootElement.appendChild(xmlLdt);
Element xmlCountOfStep =
    doc.createElement("CountOfStep");
xmlCountOfStep.appendChild(
    doc.createTextNode(jTextFieldCountOfStep.getText()));
rootElement.appendChild(xmlCountOfStep);
Element xmlSystemSize =
    doc.createElement("SystemSize");
xmlSystemSize.appendChild(
    doc.createTextNode(jTextFieldSystemSize.getText()));
rootElement.appendChild(xmlSystemSize);
Element xmlSystem = doc.createElement("System");
xmlSystem.appendChild(
    doc.createTextNode(jTextAreaSystem.getText()));
rootElement.appendChild(xmlSystem);
Element xmlInit = doc.createElement("Init");
xmlInit.appendChild(
    doc.createTextNode(jTextAreaInit.getText()));
rootElement.appendChild(xmlInit);
TransformerFactory transformerFactory =
    TransformerFactory.newInstance();
Transformer transformer =
    transformerFactory.newTransformer();
DOMSource source = new DOMSource(doc);
StreamResult result =
    new StreamResult(chooser.getSelectedFile());
transformer.transform(source, result);
System.out.println("Успешно сохранено.");
} catch (RuntimeException |
    ParserConfigurationException |
    TransformerException ex) {
    Logger.getLogger(MainFrame.class
        .getName()).log(Level.SEVERE, null, ex);
}
}
}

private void jButton3ActionPerformed(
    java.awt.event.ActionEvent evt) {
    JFileChooser chooser =
        new JFileChooser();

```

```

FileNameExtensionFilter filter =
    new FileNameExtensionFilter("JavaSolver problems", "xml");
chooser.setFileFilter(filter);
int returnVal = chooser.showOpenDialog(this);
if (returnVal == JFileChooser.APPROVE_OPTION) {
    try {
        DocumentBuilderFactory docFactory =
            DocumentBuilderFactory.newInstance();
        DocumentBuilder docBuilder =
            docFactory.newDocumentBuilder();
        Document doc =
            docBuilder.parse(chooser.getSelectedFile());
        jTextFieldD.setText(
            doc.getElementsByTagName("D").item(0)
                .getTextContent());
        jTextFieldN.setText(
            doc.getElementsByTagName("N").item(0)
                .getTextContent());
        jTextFieldA.setText(
            doc.getElementsByTagName("A").item(0)
                .getTextContent());
        jTextFieldLdt.setText(
            doc.getElementsByTagName("Ldt").item(0)
                .getTextContent());
        jTextFieldCountOfStep.setText(
            doc.getElementsByTagName("CountOfStep").item(0)
                .getTextContent());
        jTextFieldSystemSize.setText
            (doc.getElementsByTagName("SystemSize").item(0)
                .getTextContent());
        jTextFieldAreaSystem.setText(
            doc.getElementsByTagName("System").item(0)
                .getTextContent());
        jTextFieldAreaInit.setText(
            doc.getElementsByTagName("Init").item(0)
                .getTextContent());
        System.out.println("Успешно загружено.");
    } catch (RuntimeException |
        ParserConfigurationException |
        SAXException | IOException ex) {
        Logger.getLogger(MainFrame.class.getName())
            .log(Level.SEVERE, null, ex);
    }
}

private javax.swing.JButton jButton1;

```

```

private javax.swing.JButton jButton2;
private javax.swing.JButton jButton3;
private javax.swing.JLabel jLabel1;
private javax.swing.JLabel jLabel10;
private javax.swing.JLabel jLabel2;
private javax.swing.JLabel jLabel3;
private javax.swing.JLabel jLabel4;
private javax.swing.JLabel jLabel5;
private javax.swing.JLabel jLabel6;
private javax.swing.JLabel jLabel7;
private javax.swing.JLabel jLabel8;
private javax.swing.JPanel jPanel1;
private javax.swing.JPanel jPanel2;
private javax.swing.JPanel jPanel3;
private javax.swing.JScrollPane jScrollPane1;
private javax.swing.JScrollPane jScrollPane2;
private javax.swing.JScrollPane jScrollPane3;
private javax.swing.JTabbedPane jTabbedPane1;
private javax.swing.JTextArea jTextArea1;
private javax.swing.JTextArea jTextAreaInit;
private javax.swing.JTextArea jTextAreaSystem;
private javax.swing.JTextField jTextFieldA;
private javax.swing.JTextField jTextFieldCountOfStep;
private javax.swing.JTextField jTextFieldD;
private javax.swing.JTextField jTextFieldLdt;
private javax.swing.JTextField jTextFieldN;
private javax.swing.JTextField jTextFieldSystemSize;
private javax.swing.JTextField jTextFieldTau;
}

```

Файл GSH.java

```

package alg;

import java.math.BigDecimal;
import java.util.ArrayList;
import java.util.List;
import javasolver.constantStep.SolutionConstantStep;

public class GSH {

    private double[][] g;
    private double[][] e;
    public static double[] log;

    public void process(double[][] f) {
        g = f.clone();
    }
}

```



```

    for (int i = 1; i < f.length; i++) {
        double[] s=f[i].clone();
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            double[] mup = mult(g[j],innerProduct(f[i],
                                                    g[j])/squaredVectorNorm(g[j]));
            s = min(s,mup);
        }
        g[i]=s.clone();
    }
    for(int i=0;i<log.length;i++){
        log[i]+=Math.log(Math.sqrt(squaredVectorNorm(g[i])));
    }
    e=g.clone();
    for(int i=0;i<f.length;i++){
        e[i]=vectorNormalisation(g[i]);
    }
}

private double[] min(double[] v1, double[] v2) {
    double[] res = v1.clone();
    for (int i = 0; i < v1.length; i++) {
        res[i] -= v2[i];
    }
    return res;
}

private double[] mult(double[] v, double a) {
    double[] res=v.clone();
    for (int i = 0; i < v.length; i++) {
        res[i] = res[i] * a;
    }
    return res;
}

private double innerProduct(double[] v1, double[] v2) {
    double res = 0;
    for (int i = 0; i < v1.length; i++) {
        res += v1[i] * v2[i];
    }
    return res;
}

private double squaredVectorNorm(double[] v) {
    double res = 0;
    for (int i = 0; i < v.length; i++) {
        res += v[i]*v[i];
    }
}

```

```

        return res;
    }

    private double[] vectorNormalisation(double[] d) {
        double sum=0;
        for(int i=0;i<d.length;i++){
            sum+=d[i]*d[i];
        }
        double[] res=new double[d.length];
        for(int i=0;i<d.length;i++){
            res[i]=d[i]/Math.sqrt(sum);
        }
        return res;
    }

    public double[][] solutionToArray(
        List<SolutionConstantStep> solution, int systemSize) {
        int N = solution.get(0).k5.length-systemSize;
        int L = solution.size();
        int M = N/systemSize;
        double[][] res=new double[M][L*systemSize];
        for(int i=0;i<M;i++){
            for(int j=0;j<L*systemSize;j++){
                res[i][j]=solution.get(j%L)
                    .k5[systemSize+systemSize*i+(j/L)];
            }
        }
        return res;
    }

    public void arrayToSolution(
        List<SolutionConstantStep> solution,int systemSize) {
        int N = solution.get(0).k5.length-systemSize;
        int L = solution.size();
        int M = N/systemSize;
        for(int i=0;i<M;i++){
            for(int j=0;j<L*systemSize;j++){
                solution.get(j%L)
                    .k5[systemSize+systemSize*i+(j/L)]=e[i][j];
            }
        }
    }
}

```

SolutionConstantStep.java

```
package javasolver.constantStep;
```

```

import java.math.BigDecimal;

public class SolutionConstantStep {
    //...
}

```

DPMethodConstantStep.java

```

package javasolver.constantStep;

import java.io.FileNotFoundException;
import java.io.IOException;
import java.io.PrintWriter;
import static java.lang.Math.*;
import java.math.BigDecimal;
import java.util.ArrayList;
import java.util.List;
import java.util.logging.Level;
import java.util.logging.Logger;
import javax.script.Bindings;
import javax.script.Compilable;
import javax.script.CompiledScript;
import javax.script.ScriptEngine;
import javax.script.ScriptEngineManager;
import javax.script.ScriptException;
import javax.script.SimpleBindings;

public class DPMethodConstantStep {
    public static final double C_2 =
        (12.0 - 2.0 * sqrt(6.0)) / 135.0;
    public static final double C_3 = (6.0 - sqrt(6.0)) / 45.0;
    public static final double C_4 = (6.0 - sqrt(6.0)) / 30.0;
    public static final double C_5 = (6.0 + sqrt(6.0)) / 30.0;
    public static final double C_6 = 1.0 / 3.0;
    public static final double C_7 = 1.0 / 4.0;
    public static final double C_8 = 4.0 / 13.0;
    public static final double C_9 = 127.0 / 195.0;
    public static final double C_10 = 3.0 / 5.0;
    public static final double C_11 = 6.0 / 7.0;
    public static final double C_12 = 1.0;
    public static final double C_13 = 1.0;
    public static final double C_14 = 1.0 / 10.0;
    public static final double C_15 = 1.0 / 5.0;
    public static final double C_16 = 7.0 / 9.0;
    public static final double A_2_1 =
        (12.0 - 2.0 * sqrt(6.0)) / 135.0;
    public static final double A_3_1 = (6.0 - sqrt(6.0)) / 180.0;
}

```

```

public static final double A_3_2 = (6.0 - sqrt(6.0)) / 60.0;
public static final double A_4_1 = (6.0 - sqrt(6.0)) / 120.0;
public static final double A_4_3 = (6.0 - sqrt(6.0)) / 40.0;
public static final double A_5_1 =
    (462.0 + 107.0 * sqrt(6.0)) / 3000.0;
public static final double A_5_3 =
    (-402.0 - 197.0 * sqrt(6.0)) / 1000.0;
public static final double A_5_4 =
    (168.0 + 73.0 * sqrt(6.0)) / 375.0;
public static final double A_6_1 = 1.0 / 27.0;
public static final double A_6_4 = (16.0 + sqrt(6.0)) / 108.0;
public static final double A_6_5 = (16.0 - sqrt(6.0)) / 108.0;
public static final double A_7_1 = 19.0 / 512.0;
public static final double A_7_4 =
    (118.0 + 23.0 * sqrt(6.0)) / 1024.0;
public static final double A_7_5 =
    (118.0 - 23.0 * sqrt(6.0)) / 1024.0;
public static final double A_7_6 = -9.0 / 512.0;
public static final double A_8_1 = 13772.0 / 371293.0;
public static final double A_8_4 =
    (51544.0 + 4784.0 * sqrt(6.0)) / 371293.0;
public static final double A_8_5 =
    (51544.0 - 4784.0 * sqrt(6.0)) / 371293.0;
public static final double A_8_6 = -5688.0 / 371293.0;
public static final double A_8_7 = 3072.0 / 371293.0;
public static final double A_9_1 =
    58656157643.0 / 93983540625.0;
public static final double A_9_4 =
    (-1324889724104.0 - 318801444819.0 * sqrt(6.0)) / 626556937500.0;
public static final double A_9_5 =
    (-1324889724104.0 + 318801444819.0 * sqrt(6.0)) / 626556937500.0;
public static final double A_9_6 = 96044563816.0 / 3480871875.0;
public static final double A_9_7 =
    5682451879168.0 / 281950621875.0;
public static final double A_9_8 = -165125654.0 / 3796875.0;
public static final double A_10_1 = 8909899.0 / 18653125.0;
public static final double A_10_4 =
    (-4521408.0 - 1137963.0 * sqrt(6.0)) / 2937500.0;
public static final double A_10_5 =
    (-4521408.0 + 1137963.0 * sqrt(6.0)) / 2937500.0;
public static final double A_10_6 = 96663078.0 / 4553125.0;
public static final double A_10_7 = 2107245056.0 / 137915625.0;
public static final double A_10_8 = -4913652016.0 / 147609375.0;
public static final double A_10_9 = -78894270.0 / 3880452869.0;
public static final double A_11_1 = -20401265806.0 / 21769653311.0;
public static final double A_11_4 =
    (354216.0 + 94326.0 * sqrt(6.0)) / 112847.0;

```

```

public static final double A_11_5 =
    (354216.0 - 94326.0 * sqrt(6.0)) / 112847.0;
public static final double A_11_6 = -43306765128.0 / 5313852383.0;
public static final double A_11_7 =
    -20866708358144.0 / 1126708119789.0;
public static final double A_11_8 =
    14886003438020.0 / 654632330667.0;
public static final double A_11_9 =
    35290686222309375.0 / 14152473387134411.0;
public static final double A_11_10 = -1477884375.0 / 485066827.0;
public static final double A_12_1 = 39815761.0 / 17514443.0;
public static final double A_12_4 =
    (-3457480.0 - 960905.0 * sqrt(6.0)) / 551636.0;
public static final double A_12_5 =
    (-3457480.0 + 960905.0 * sqrt(6.0)) / 551636.0;
public static final double A_12_6 = -844554132.0 / 47026969.0;
public static final double A_12_7 = 8444996352.0 / 302158619.0;
public static final double A_12_8 = -2509602342.0 / 877790785.0;
public static final double A_12_9 =
    -28388795297996250.0 / 3199510091356783.0;
public static final double A_12_10 = 226716250.0 / 18341897.0;
public static final double A_12_11 = 1371316744.0 / 2131383595.0;
public static final double A_13_1 = 104257.0 / 1920240.0;
public static final double A_13_6 = 3399327.0 / 763840.0;
public static final double A_13_7 = 66578432.0 / 35198415.0;
public static final double A_13_8 = -1674902723.0 / 288716400.0;
public static final double A_13_9 =
    54980371265625.0 / 176692375811392.0;
public static final double A_13_10 = -734375.0 / 4826304.0;
public static final double A_13_11 = 171414593.0 / 851261400.0;
public static final double A_13_12 = 137909.0 / 3084480.0;
public static final double B_1 = 104257.0 / 1920240.0;
public static final double B_6 = 3399327.0 / 763840.0;
public static final double B_7 = 66578432.0 / 35198415.0;
public static final double B_8 = -1674902723.0 / 288716400.0;
public static final double B_9 =
    54980371265625.0 / 176692375811392.0;
public static final double B_10 = -734375.0 / 4826304.0;
public static final double B_11 = 171414593.0 / 851261400.0;
public static final double B_12 = 137909.0 / 3084480.0;
public static final double E_1_01 = 116092271.0 / 8848465920.0;
public static final double E_1_06 = -1871647.0 / 1527680.0;
public static final double E_1_07 = -69799717.0 / 140793660.0;
public static final double E_1_08 =
    1230164450203.0 / 739113984000.0;
public static final double E_1_09 =
    -1980813971228885.0 / 5654156025964544.0;

```

```

public static final double E_1_10 = 464500805.0 / 1389975552.0;
public static final double E_1_11 =
    1606764981773.0 / 19613062656000.0;
public static final double E_1_12 = -137909.0 / 6168960.0;
public static final double E_2_01 = -364463.0 / 1920240.0;
public static final double E_2_06 = 3399327.0 / 763840.0;
public static final double E_2_07 = 66578432.0 / 35198415.0;
public static final double E_2_08 = -1674902723.0 / 288716400.0;
public static final double E_2_09 =
    -74684743568175.0 / 176692375811392.0;
public static final double E_2_10 = -734375.0 / 4826304.0;
public static final double E_2_11 = 171414593.0 / 851261400.0;
public static final double E_2_12 = 69869.0 / 3084480.0;
public static final double K14_01 =
    13481885573.0 / 240030000000.0 - B_1;
public static final double K14_06 = 0.0 - B_6;
public static final double K14_07 =
    139418837528.0 / 549975234375.0 - B_7;
public static final double K14_08 =
    -11108320068443.0 / 45111937500000.0 - B_8;
public static final double K14_09 =
    -1769651421925959.0 / 14249385146080000.0 - B_9;
public static final double K14_10 =
    57799439.0 / 377055000.0 - B_10;
public static final double K14_11 =
    793322643029.0 / 96734250000000.0 - B_11;
public static final double K14_12 =
    1458939311.0 / 192780000000.0 - B_12;
public static final double K14_13 = -4149.0 / 500000.0;
public static final double K15_01 =
    1595561272731.0 / 50120273500000.0 - B_1;
public static final double K15_06 =
    975183916491.0 / 34457688031250.0 - B_6;
public static final double K15_07 =
    38492013932672.0 / 718912673015625.0 - B_7;
public static final double K15_08 =
    -1114881286517557.0 / 20298710767500000.0 - B_8;
public static final double K15_09 = 0.0 - B_9;
public static final double K15_10 = 0.0 - B_10;
public static final double K15_11 =
    -2538710946863.0 / 23431227861250000.0 - B_11;
public static final double K15_12 =
    8824659001.0 / 23066716781250.0 - B_12;
public static final double K15_13 =
    -11518334563.0 / 33831184612500.0;
public static final double K15_14 = 1912306948.0 / 13532473845.0;
public static final double K16_01 = -13613986967.0 / 31741908048.0 - B_1;

```

```

public static final double K16_06 =
    -4755612631.0 / 1012344804.0 - B_6;
public static final double K16_07 =
    42939257944576.0 / 5588559685701.0 - B_7;
public static final double K16_08 =
    77881972900277.0 / 19140370552944.0 - B_8;
public static final double K16_09 =
    22719829234375.0 / 63689648654052.0 - B_9;
public static final double K16_10 = 0.0 - B_10;
public static final double K16_11 = 0.0 - B_11;
public static final double K16_12 = 0.0 - B_12;
public static final double K16_13 =
    -1199007803.0 / 857031517296.0;
public static final double K16_14 =
    157882067000.0 / 53564469831.0;
public static final double K16_15 =
    -290468882375.0 / 31741908048.0;
public static final double D_4_1 =
    -17751989329.0 / 2106076560.0;
public static final double D_4_6 =
    4272954039.0 / 7539864640.0;
public static final double D_4_7 =
    -118476319744.0 / 38604839385.0;
public static final double D_4_8 =
    755123450731.0 / 316657731600.0;
public static final double D_4_9 =
    3692384461234828125.0 / 1744130441634250432.0;
public static final double D_4_10 =
    -4612609375.0 / 5293382976.0;
public static final double D_4_11 =
    2091772278379.0 / 933644586600.0;
public static final double D_4_12 =
    2136624137.0 / 3382989120.0;
public static final double D_4_13 = -126493.0 / 1421424.0;
public static final double D_4_14 = 98350000.0 / 5419179.0;
public static final double D_4_15 = -18878125.0 / 2053168.0;
public static final double D_4_16 = -1944542619.0 / 438351368.0;
public static final double D_5_1 = 32941697297.0 / 3159114840.0;
public static final double D_5_6 = 456696183123.0 / 1884966160.0;
public static final double D_5_7 =
    19132610714624.0 / 115814518155.0;
public static final double D_5_8 =
    -177904688592943.0 / 474986597400.0;
public static final double D_5_9 =
    -4821139941836765625.0 / 218016305204281304.0;
public static final double D_5_10 = 30702015625.0 / 3970037232.0;
public static final double D_5_11 =

```

```

-85916079474274.0 / 2800933759800.0;
public static final double D_5_12 = -5919468007.0 / 634310460.0;
public static final double D_5_13 = 2479159.0 / 157936.0;
public static final double D_5_14 = -18750000.0 / 602131.0;
public static final double D_5_15 = -19203125.0 / 2053168.0;
public static final double D_5_16 = 15700361463.0 / 438351368.0;
public static final double D_6_1 = 12627015655.0 / 631822968.0;
public static final double D_6_6 = -72955222965.0 / 188496616.0;
public static final double D_6_7 =
-13145744952320.0 / 69488710893.0;
public static final double D_6_8 =
30084216194513.0 / 56998391688.0;
public static final double D_6_9 =
-296858761006640625.0 / 25648977082856624.0;
public static final double D_6_10 = 569140625.0 / 82709109.0;
public static final double D_6_11 =
-18684190637.0 / 18672891732.0;
public static final double D_6_12 = 69644045.0 / 89549712.0;
public static final double D_6_13 = -11847025.0 / 4264272.0;
public static final double D_6_14 = -978650000.0 / 16257537.0;
public static final double D_6_15 = 519371875.0 / 6159504.0;
public static final double D_6_16 = 5256837225.0 / 438351368.0;
public static final double D_7_1 = -450944925.0 / 17550638.0;
public static final double D_7_6 = -14532122925.0 / 94248308.0;
public static final double D_7_7 =
-595876966400.0 / 2573655959.0;
public static final double D_7_8 =
188748653015.0 / 527762886.0;
public static final double D_7_9 =
2545485458115234375.0 / 27252038150535163.0;
public static final double D_7_10 = -1376953125.0 / 36759604.0;
public static final double D_7_11 = 53995596795.0 / 518691437.0;
public static final double D_7_12 = 210311225.0 / 7047894.0;
public static final double D_7_13 = -1718875.0 / 39484.0;
public static final double D_7_14 = 58000000.0 / 602131.0;
public static final double D_7_15 = -1546875.0 / 39484.0;
public static final double D_7_16 = -1262172375.0 / 8429834.0;

public BigDecimal maxStep;
public BigDecimal xStart;
public BigDecimal xEnd;
public int coreRun;
public ArrayList<SolutionConstantStep> solution;
public int systemSize = 1;
public String systemScript = "";
public String initialScript = "";
ScriptEngine systemEngine =

```



```

    new ScriptEngineManager().getEngineByName("JavaScript");
ScriptEngine initialEngine =
    new ScriptEngineManager().getEngineByName("JavaScript");
CompiledScript compiledSystemScript;
CompiledScript compiledInitialScript;
Bindings systemBindings;
Bindings initialBindings;

public DPMethodConstantStep(BigDecimal maxStep) {
    this.maxStep = maxStep;
    solution = new ArrayList<SolutionConstantStep>();
    coreRun = 0;
}

public void setSystemSize(int systemSize) {
    this.systemSize = systemSize;
}

public int getSystemSize() {
    return systemSize;
}

public double initialFun(int j, BigDecimal x) {
    try {
        initialBindings.put("j", j);
        initialBindings.put("x", x);
        initialBindings.put("result", 0.0);
        compiledInitialScript.eval(initialBindings);
    } catch (ScriptException ex) {
        Logger.getLogger(DPMethodConstantStep.class.getName())
            .log(Level.SEVERE, null, ex);
    }
    return (double) initialBindings.get("result");
}

public void setScripts(String systemScript,
                      String initialScript) {
    this.systemScript = systemScript;
    this.initialScript = initialScript;
    Compilable compSEngine = (Compilable) systemEngine;
    Compilable compIEngine = (Compilable) initialEngine;
    systemBindings = new SimpleBindings();
    initialBindings = new SimpleBindings();
    try {
        compiledSystemScript = compSEngine
            .compile(this.systemScript);
    }
}

```

```

        compiledInitialScript = compEngine
            .compile(this.initialScript);
    } catch (ScriptException ex) {
        Logger.getLogger(DPMethodConstantStep.class.getName())
            .log(Level.SEVERE, null, ex);
    }
}

public void func(BigDecimal x, double[] y, double[] f) {
    try {
        systemBindings.put("x", x);
        systemBindings.put("y", y);
        systemBindings.put("f", f);
        systemBindings.put("dpm", this);
        compiledSystemScript.eval(systemBindings);
    } catch (ScriptException ex) {
        Logger.getLogger(DPMethodConstantStep.class.getName())
            .log(Level.SEVERE, null, ex);
    }
}

public void core(BigDecimal tStart, double[] y, BigDecimal tEnd) {
    BigDecimal x = tStart;
    if (coreRun == 0) {
        this.xStart = x;
        coreRun++;
    }
    for (int j = 0; j < y.length; j++) {
        y[j] = ylag(j, tStart);
    }
    this.xEnd = tEnd;
    boolean isLast = false;
    double[] k1, k2, k3, k4, k5, k6, k7, k8, k9, k10, k11, k12;
    k1 = new double[y.length];
    k2 = new double[y.length];
    k3 = new double[y.length];
    k4 = new double[y.length];
    k5 = new double[y.length];
    k6 = new double[y.length];
    k7 = new double[y.length];
    k8 = new double[y.length];
    k9 = new double[y.length];
    k10 = new double[y.length];
    k11 = new double[y.length];
    k12 = new double[y.length];
    func(x, y, k1);
    BigDecimal h = maxStep;
}

```

```

while (true) {
    if (solution.size() > 1 &&
        solution.get(solution.size() - 1).x
            .subtract(solution.get(0).x)
            .compareTo(BigDecimal.valueOf(100L)) >= 0) {
        solution.subList(0, (int) (solution.size() * 0.9))
            .clear();
    }
    if (x.add(h).compareTo(xEnd) >= 0) {
        isLast = true;
    }
    double[] tempY = new double[y.length];
    k4 = new double[y.length];
    k5 = new double[y.length];
    //k2
    for (int i = 0; i < y.length; i++) {
        tempY[i] = y[i] + h.doubleValue() * A_2_1 * k1[i];
    }
    func(x.add(BigDecimal.valueOf(C_2).multiply(h)),
        tempY, k2);
    //k3
    for (int i = 0; i < y.length; i++) {
        tempY[i] = y[i] + h.doubleValue()
            * (A_3_1 * k1[i] + A_3_2 * k2[i]);
    }
    func(x.add(BigDecimal.valueOf(C_3).multiply(h)),
        tempY, k3);
    //k4
    for (int i = 0; i < y.length; i++) {
        tempY[i] = y[i] + h.doubleValue()
            * (A_4_1 * k1[i] + A_4_3 * k3[i]);
    }
    func(x.add(BigDecimal.valueOf(C_4).multiply(h)),
        tempY, k4);
    //k5
    for (int i = 0; i < y.length; i++) {
        tempY[i] = y[i] + h.doubleValue()
            * (A_5_1 * k1[i] + A_5_3 * k3[i] + A_5_4 * k4[i]);
    }
    func(x.add(BigDecimal.valueOf(C_5).multiply(h)),
        tempY, k5);
    //k6
    for (int i = 0; i < y.length; i++) {
        tempY[i] = y[i] + h.doubleValue()
            * (A_6_1 * k1[i] + A_6_4 * k4[i] + A_6_5 * k5[i]);
    }
    func(x.add(BigDecimal.valueOf(C_6).multiply(h)),

```

```

        tempY, k6);
//k7
for (int i = 0; i < y.length; i++) {
    tempY[i] = y[i] + h.doubleValue()
        * (A_7_1 * k1[i] + A_7_4 * k4[i] + A_7_5 * k5[i]
            + A_7_6 * k6[i]);
}
func(x.add(BigDecimal.valueOf(C_7).multiply(h)),
    tempY, k7);
//k8
for (int i = 0; i < y.length; i++) {
    tempY[i] = y[i] + h.doubleValue()
        * (A_8_1 * k1[i] + A_8_4 * k4[i] + A_8_5 * k5[i]
            + A_8_6 * k6[i] + A_8_7 * k7[i]);
}
func(x.add(BigDecimal.valueOf(C_8).multiply(h)),
    tempY, k8);
//k9
for (int i = 0; i < y.length; i++) {
    tempY[i] = y[i] + h.doubleValue()
        * (A_9_1 * k1[i] + A_9_4 * k4[i] + A_9_5 * k5[i]
            + A_9_6 * k6[i] + A_9_7 * k7[i] + A_9_8 * k8[i]);
}
func(x.add(BigDecimal.valueOf(C_9).multiply(h)),
    tempY, k9);
//k10
for (int i = 0; i < y.length; i++) {
    tempY[i] = y[i] + h.doubleValue()
        * (A_10_1 * k1[i] + A_10_4 * k4[i] + A_10_5 * k5[i]
            + A_10_6 * k6[i] + A_10_7 * k7[i] + A_10_8 * k8[i]
            + A_10_9 * k9[i]);
}
func(x.add(BigDecimal.valueOf(C_10).multiply(h)),
    tempY, k10);
//k11
for (int i = 0; i < y.length; i++) {
    tempY[i] = y[i] + h.doubleValue()
        * (A_11_1 * k1[i] + A_11_4 * k4[i] + A_11_5 * k5[i]
            + A_11_6 * k6[i] + A_11_7 * k7[i] + A_11_8 * k8[i]
            + A_11_9 * k9[i] + A_11_10 * k10[i]);
}
func(x.add(BigDecimal.valueOf(C_11).multiply(h)),
    tempY, k11);
//k12
for (int i = 0; i < y.length; i++) {
    tempY[i] = y[i] + h.doubleValue()
        * (A_12_1 * k1[i] + A_12_4 * k4[i] + A_12_5 * k5[i]

```

```

        + A_12_6 * k6[i] + A_12_7 * k7[i] + A_12_8 * k8[i]
        + A_12_9 * k9[i] + A_12_10 * k10[i]
        + A_12_11 * k11[i]);
    }
    func(x.add(h), tempY, k12);
    //y1 результат содержится в k5
    for (int i = 0; i < y.length; i++) {
        k4[i] = B_1 * k1[i] + B_6 * k6[i] + B_7 * k7[i]
            + B_8 * k8[i] + B_9 * k9[i] + B_10 * k10[i]
            + B_11 * k11[i] + B_12 * k12[i];
        k5[i] = y[i] + h.doubleValue() * k4[i];
    }
    func(x.add(h), k5, k4);
    solution.add(new SolutionConstantStep(x.add(h), k5));
    k1 = k4;
    y = k5;
    x = x.add(h);
    if (isLast) {
        return;
    }
}
}
//...
}

```

## Пример сохраненной вычислительной задачи

```

<?xml version="1.0" encoding="UTF-8" standalone="no"?>
<problem>
  <D>4</D>
  <N>1000</N>
  <A>150</A>
  <Ldt>4</Ldt>
  <CountOfStep>5000</CountOfStep>
  <SystemSize>1</SystemSize>
  <System>
    importClass(java.math.BigDecimal);
    importClass(Packages.javasolver.constantStep
      .DPMethodConstantStep);
    x =new BigDecimal(x);
    var R = 1.5;
    f[0] = R * y[0] * (1 - dpm.ylag(0, x.subtract(BigDecimal.ONE)));
    for (var i = dpm.getSystemSize();
      i < y.length;
      i += dpm.getSystemSize()) {
      f[i] = R * (1 - dpm.ylag(0,

```

```

        x.subtract(BigDecimal.ONE))) * y[i]
        - R * y[0] * dpm.ylag(i,
            x.subtract(BigDecimal.ONE));
    }
</System>
<Init>
importClass(java.math.BigDecimal);
x =new BigDecimal(x);
if (j == 0) {
    result = 0.5 * Math.sin(x.doubleValue()) + 1;
}else{
    result = 0;
}
</Init>
</problem>

```

## Описание программы

В диссертационной работе использовались численные методы, как уже имеющиеся в известных программных комплексах, так и те, программно реализовать которые пришлось самостоятельно. Перейдем к описанию программного продукта, использованного для вычисления спектра показателей Ляпунова.

### Системные требования

Программа написана на языке Java. Версия Java Development Kit 1.7. Для работы программы требуется операционная система Windows XP, Windows 7, Windows 8, пакет разработчика Oracle JDK 1.7.

Вычисления требуют достаточно мощную аппаратную платформу. Это диктуется, прежде всего, количеством вычисляемых показателей Ляпунова, максимальным временем запаздывания и количеством точек на промежутке запаздывания. С увеличением любого из перечисленных параметров требования возрастают.

При увеличении любого из перечисленных параметров также возрастает время работы программы. Высвобождение неиспользуемой оперативной памяти производится автоматически сборщиком мусора виртуальной машины Java.

## Ввод данных и описание интерфейса

Рабочая область главного окна программы поделена вкладками на три части:

- «Параметры»;
- «Системы»;
- «Начальные условия».

Вкладка «Параметры» представлена на рисунке 6. На этой вкладке находятся кнопки «Сохранить» и «Загрузить», которые позволяют вызвать диалоги сохранения и загрузки вычислительных задач. Вычислительная задача сохраняется в xml файл. Пример сохраненной задачи в xml файл приводится в приложении.

Параметр	Значение
Кол-во вычисляемых показателей Ляпунова:	4
Кол-во точек на промежуток запаздывания:	1000
Время выхода решения на аттрактор:	150
Время перенормировки:	4
Время максимального запаздывания:	1
Кол-во перенормировок:	5000
Размерность системы:	1

Кнопки: Сохранить как..., Загрузить, Вычислить

Рис. 6. Окно ввода параметров алгоритма

Кроме того, на вкладке представлены поля для ввода следующих данных:

- Количество вычисляемых показателей Ляпунова. Целое число, не меньше 1.
- Количество точек на промежутке запаздывания. Такое целое число, не меньше 2, чтобы при делении длины промежутка запаздывания на это число не получалась бесконечная периодическая дробь.
- Время выхода решения на аттрактор. Достаточно большое положительное число.
- Время перенормировки. Положительное число.
- Время максимального запаздывания. Положительное число.
- Количество перенормировок. Целое положительное достаточно большое число.
- Размерность системы. Целое положительное число.

Следующая вкладка — это «Системы» (рисунок 7). В поле ввода следует ввести вычисляемую и линеаризованную системы. Для ввода систем используется язык JavaScript. В качестве интерпретатора используются встроенные в Oracle JDK 1.7 средства интерпретации. Следующие переменные зарезервированы:

- $x$  — имеет тип `BigDecimal`. Это текущее время.
- $f$  — имеет тип `double[]`. В эти переменные записываются результаты вычислений (производные).
- $y$  — имеет тип `double[]`. Эти переменные хранят значения функции.
- $dpm$  — имеет тип `DPMethodConstantStep`. Используется для доступа к решениям в момент времени  $t - \tau$ .

Пример системы Хатчинсона можно найти в приложении.

Следующая вкладка — это «Начальные условия» (рисунок 8). В поле ввода следует ввести выражение, которое определяет начальные условия. Так же, как и в поле ввода систем, используется язык JavaScript. Зарезервированными переменными являются:

- $x$  — текущее время. Имеет тип `BigDecimal`.
- $j$  — номер уравнения в системе. Тип `int`.



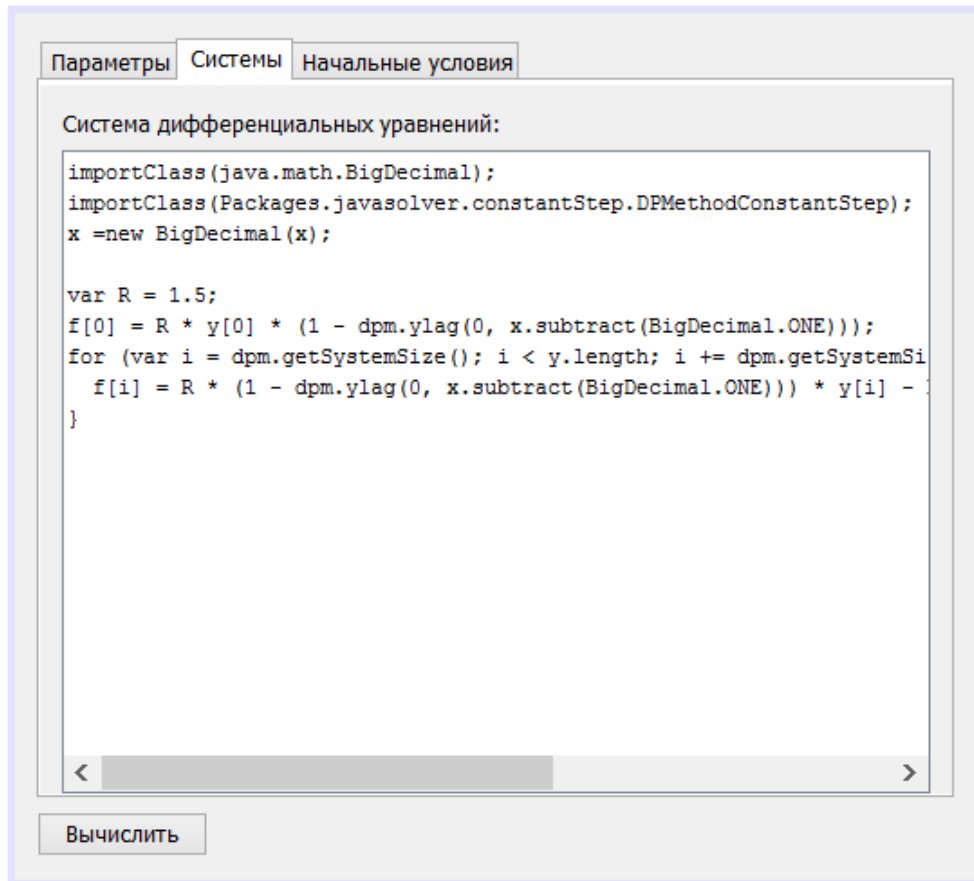


Рис. 7. Окно ввода систем для вычисления

- `result` — вычисленное значение для  $j$ -ой системы.

Пример ввода начальных условий для уравнения Хатчинсона приведен в Приложении.

Вывод результата выполнения программы происходит в консоль.

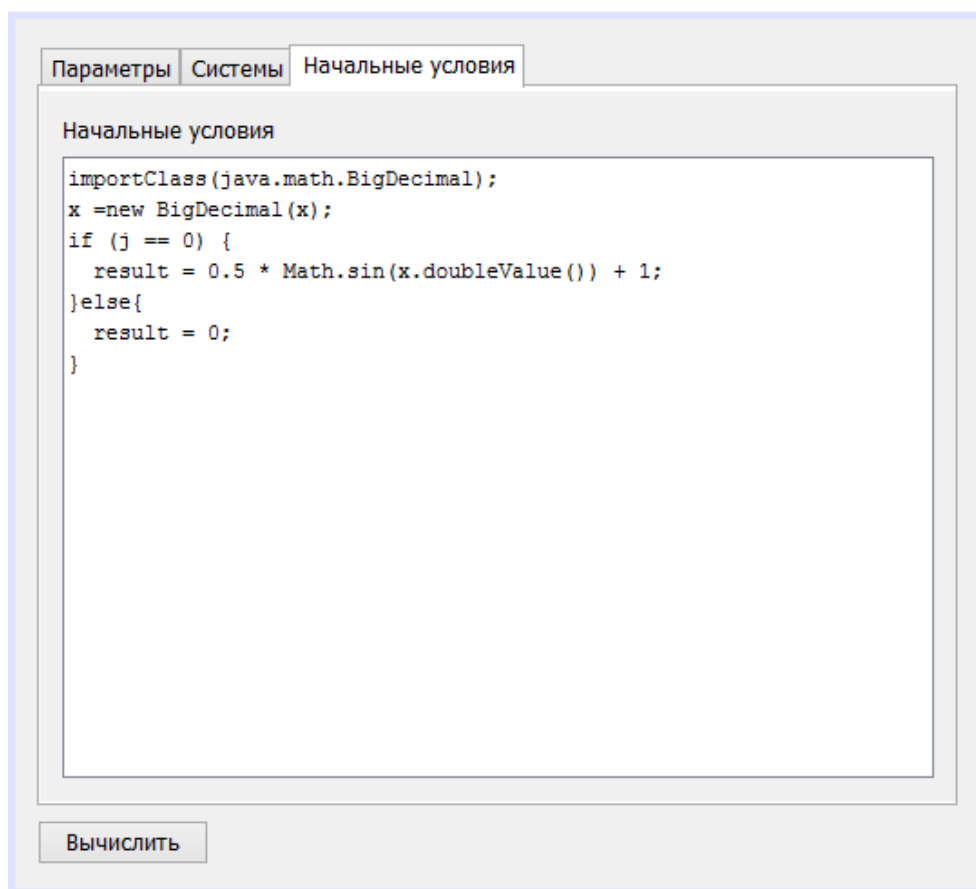


Рис. 8. Окно ввода начальных условий для систем