ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Ермаковой Светланы Михайловны

"Векторные расслоения конечного ранга на полных пересечениях конечной коразмерности в линейном инд-грассманиане",

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

Согласно классической теореме А.Гротендика любое голоморфное векторное расслоение конечного ранга на проективной прямой представимо в виде прямой суммы расслоений ранга 1.

Хорошо известно, что касательное расслоение к $\mathbb{P}^n$ неразложимо при $n \geq 2$. К настоящему времени теория векторных расслоений на конечномерных проективных пространствах представляет собой хорошо развитую теорию, имеющую многочисленные приложения в геометрии. Известно, что некоторые важные математические результаты формулируются (и получаются) лишь при переходе к цепочкам (или башням) алгебраических объектов и их индуктивным или проективным пределам. Например, теорема Барта - Ван де Вена - Тюрина - Сато 1974 - 1977 годов утверждает, что любое векторное расслоение конечного ранга на бесконечномерном проективном пространстве

$$\mathbb{P}^\infty = \{\mathbb{P}^1 \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^2 \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \dots \overset{\varphi_{m-1}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^m \overset{\varphi_m}{\hookrightarrow} \dots\}$$

изоморфно прямой сумме линейных расслоений.

В серии недавних работ Донина, Пенкова и Тихомирова было показано, что теорема Барта - Ван де Вена - Тюрина - Сато допускает обобщения для некоторых бесконечномерных линейных инд-многообразий, отличных от $\mathbb{P}^\infty$. По определению, инд-многообразие $\mathbb{X} = \varinjlim X_m$ является индуктивным (прямым) пределом цепочки вложений

$$\mathbb{X} = \{X_1 \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} X_2 \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \dots \overset{\varphi_{m-1}}{\hookrightarrow} X_m \overset{\varphi_m}{\hookrightarrow} \dots\},$$

где X_m - гладкое алгебраическое многообразие для любого $m \geq 1$. Если, кроме того, вложение φ_m индуцирует сюръекцию групп Пикара $\varphi_m^* : \mathrm{Pic}(X_{m+1}) \to \mathrm{Pic}(X_m)$ для всех $m \geq 1$, то $\mathbb{X}$ называется линейным.

Вложение грассманианов $G(k_1,n_1) \hookrightarrow G(k_2,n_2)$ называется стандартным расширением, если имеется разложение $V^{n_2} = V^{n_1} \oplus W^{n_2-n_1}$ и образ вложения состоит из подпространств вида $U^{k_1} \oplus W^{k_2-k_1}$, где $U^{k_1} \subset V^{n_1}$, $W^{k_2-k_1}$ - фиксированное подпространство в $W^{n_2-n_1}$.

В работе Донина и Пенкова (2003 год) рассматривались инд-грассманианы, определенные как индуктивные пределы цепочек

$$\{G(k_1,n_1) \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_m}{\hookrightarrow} G(k_{m+1},n_{m+1}) \overset{\varphi_{m+1}}{\hookrightarrow} \ldots\},$$

где последовательности $n_m, k_m, n_m - k_m$ возрастают и стремятся к бесконечности, а вложения φ_m являются стандартными расширениями грассманианов. Известно, что все инд-грассманианы, определенные таким образом, изоморфны фиксированному инд-грассманиану $\mathbb{G}(\infty)$, причем любое конечномерное расслоение на $\mathbb{G}(\infty)$ расщепляется в сумму линейных.

Для линейного инд-грассманиана $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\infty)$ определено плюккерово вложение $\mathbb{G} \hookrightarrow \mathbb{P}^\infty$ как индуктивный предел плюккеровых вложений грассманианов $G(k_m,n_m)$. Инд-гиперповерхностью степени d в $\mathbb{P}^\infty$ называется индуктивный предел гиперповерхностей степени d. Пусть $\mathbb{Y}_1,\ldots,\mathbb{Y}_l$ - инд-гиперповерхности степеней $d_1,\ldots,d_l$ в $\mathbb{P}^\infty$. Линейное инд-многообразие

$$\mathbb{X} = \mathbb{G} \cap \mathbb{Y}_1 \cap \ldots \cap \mathbb{Y}_l$$

называется полным пересечением конечной коразмерности в $\mathbb{G}$, если для любого $m \geq 1$ многообразие $G(k_m,n_m) \cap \mathbb{Y}_1 \cap \ldots \cap \mathbb{Y}_l$ является полным пересечением.

Векторным расслоением $\mathbb{E}$ ранга $r > 0$ на $\mathbb{X}$ называется проективный (обратный) предел $\mathbb{E} = \lim\limits_{\leftarrow} E_m$ цепочки векторных расслоений $\{E_m\}_{m\geq 1}$ ранга r, где E_m - расслоение ранга r на $X_m \overset{\mathrm{def}}{=} G(k_m,n_m)$ с фиксированными изоморфизмами $E_m \overset{\sim}{\to} \varphi_m^*(E_{m+1})$.

Основным результатом диссертации является следующая теорема (сформулированная в п. 2.2):

Теорема 1. *Любое векторное расслоение $\mathbb{E}$ конечного ранга на полном пересечении $\mathbb{X}$ конечной коразмерности в линейном инд-грассманиане $\mathbb{G}$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений.*

Доказательство этой теоремы состоит из нескольких шагов, представляющих самостоятельный интерес.

Прежде всего, для полного пересечения X грассманиана $G(n,2n)$, вложенного по Плюккеру, с набором гиперповерхностей степеней $d_1,\ldots,d_l$ при выполнении неравенства $2\sum_i(d_i+1) \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ многообразие $P_n(u,v)$

всех путей длины n, составленных из проективных прямых и соединяющих любые две точки $u, v \in X$, непусто и связно (теорема 2 главы 3). По теореме 7 главы 4 любое конечномерное векторное расслоение $\mathbb{E}$ на полном пересечении $\mathbb{X}$ конечной коразмерности в линейном инд-грассманиане $\mathbb{G}$ равномерно (другими словами, его ограничение на все проективные прямые имеет одинаковый тип расщепления на линейные расслоения).

Линейное инд-многообразие $\mathbb{X}$ называется 1-связным, если для любых двух точек $x, y \in \mathbb{X}$ существует конечная связная цепочка проективных прямых в $\mathbb{X}$, соединяющая x с y.

Линейное инд-многообразие $\mathbb{X}$ называется 2-связным, если любые две проективные прямые из $\mathbb{X}$ могут быть связаны такой цепочкой проективных прямых $l_1, \ldots, l_k$, что любая пара (l_i, l_{i+1}) содержится в плоскости $\mathbb{P}^2$, принадлежащей $\mathbb{X}$.

По теореме 8 главы 4 полное пересечение $\mathbb{X}$ конечной коразмерности в линейном инд-грассманиане $\mathbb{G}$ является 2-связным.

В главе 5 для равномерного расслоения $\mathbb{E}$ на $\mathbb{X}$ доказано существование такой цепочки подрасслоений

$$0 = \mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{F}_s = \mathbb{E},$$

что каждое фактор-расслоение $\mathbb{F}_i/\mathbb{F}_{i-1}$ для $1 \leq i \leq s$ является подкруткой линейно тривиального расслоения (в действительности далее показано, что любое конечномерное линейно тривиальное расслоение $\mathbb{E}$ на $\mathbb{X}$ является тривиальным).

Наконец, используя теорему Кодаиры об обращении в нуль, доказывается, что $\mathbb{E} = \oplus_i \mathbb{F}_i/\mathbb{F}_{i-1}$ (теорема 17 главы 5). В итоге доказательство основной теоремы диссертации завершено.

Диссертация является законченным научным исследованием и выполнена соискателем самостоятельно. Она написана очень тщательно. Вместе с тем в автореферате отсутствует определение линейно тривиального расслоения (в диссертации это в точности определение 9 главы 4). На странице 11 автореферата сказано, что теорема 6 (правильно: теорема 7) является следствием теоремы 8. Эти незначительные погрешности не влияют на общую высокую оценку диссертации.

Материалы диссертации могут быть использованы в исследованиях по алгебраической геометрии, проводимых в МИРАН, МГУ, ВШЭ, СПбГУ.

В диссертации решены важные актуальные задачи алгебраической геометрии, продемонстрирован высокий уровень владения современными и классическими методами алгебраической геометрии, теорией расслоений на многообразиях. Достоверность полученных в диссертации теорем обеспечивается строгими подробными доказательствами и не вызывает сомнений. Основные результаты своевременно опубликованы (без соавторов) в 5 работах, из них 4 в изданиях из перечня ВАК. Автореферат правильно отражает содержание работы.

Считаю, что диссертационная работа отвечает требованиям ВАК "О порядке присуждения ученых степеней", а ее автор Ермакова Светлана Михайловна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры алгебры и геометрии
Института прикладной математики и информатики,
био- и нанотехнологий ФГБОУ ВПО
"Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых"
шифр специальности 01.01.06

Танкеев Сергей Геннадьевич

27 ноября 2015 года

Россия, 600000, г. Владимир,
улица Горького, 87, ВлГУ
рабочий телефон: 8(4922)479900
tankeev@vlsu.ru

Подпись официального оппонента
С.Г.Танкеева удостоверяю
Ученый секретарь ВлГУ

Конюва Татьяна Григорьевна