На правах рукописи

Уваров Артем Дмитриевич

Схема модулей стабильных пучков ранга 2 с малыми классами Черна на трехмерной квадрике

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2012

Работа выполнена на кафедре алгебры Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д.Ушинского

Научный руководитель -

доктор физико-математических наук, профессор
Тихомиров Александр Сергеевич

Официальные оппоненты:

Краснов Вячеслав Алексеевич,
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа ЯРГУ им. Демидова

Артамкин Игорь Вадимович
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры дискретной математики НИУ "Высшая школа экономики"

Ведущая организация -

Владимирский государственный университет

Защита состоится 25 мая 2012 года в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 при Ярославском государственном университете им. П.Г.Демидова по адресу: 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г.Демидова.

Автореферат разослан "____"__________ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Яблокова С.И.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Стабильные векторные расслоения на алгебраических многообразиях являются одним из центральных объектов алгебраической геометрии. Наиболее хорошо изучены свойства пространств модулей стабильных расслоений для малых размерностей один и два базы, то есть когда базовое многообразие расслоения является алгебраической кривой или поверхностью. В случае многообразий высших размерностей геометрия пространств модулей стабильных расслоений уже значительно сложнее и более или менее изучена лишь для некоторых специальных классов многообразий. В последние годы возрос интерес к изучению стабильных расслоений и, более общо, полустабильных когерентных пучков ранга ≥ 2 без кручения на трехмерных многообразиях Фано. Традиционно свойства таких пучков изучались с середины 70-х годов на проективных пространствах $\mathbb{P}_n$, $n \geq 3$, (см., в частности, работы [4], [5], [6], [8], [14], [27], [18], [29], [7], [9], [17], [22], [23]).

Первые работы по описанию расслоений на многообразиях Фано относятся к концу 80-х - началу 90-х годов прошлого века (см. [19], [24]). Описанию некоторых общих свойств многообразий модулей расслоений ранга ≥ 2 на трехмерных многообразиях посвящена работа А. Н. Тюрина [21]. В ней, в частности, выясняется взаимосвязь между многообразиями модулей расслоений на многообразиях Фано и на $K3$- поверхностях – гиперплоских сечениях многообразий Фано, осуществляемая операцией ограничения.

Более детальное изучение геометрии пространств модулей расслоений на многообразиях Фано, близких к $\mathbb{P}_3$, началось в конце 90-х годов. Здесь необходимо отметить статьи Д. Г. Маркушевича и А. С. Тихомирова [11], [12], [13] и А. С. Тихомирова [20] по расслоениям и пучкам на многообразиях Фано – трехмерной кубике в $\mathbb{P}_4$, двойном пространстве $\mathbb{P}_3$ и четырехмерной кубике.

Среди недавних работ по расслоениям ранга два на других многообразиях Фано следует отметить работы [15], [19], [25], [26].

Первая работа по многообразиям модулей расслоений ранга 2 на трехмерной квадрике Q, являющейся многообразием Фано индекса 3, – это работа [15] Дж. Оттавиани и М. Шурека. В ней авторы исследовали пространство модулей $M_Q(c_1, c_2)$ стабильных векторных расслоений ранга 2 на Q с минимално возможными классами Черна $(c_1,\ c_2) = (-1,1)$, $(0,2)$ и $(-1,2)$. В частности, они доказали, что $M_Q(-1,1)$ - точка (класс изоморфизма спинорного расслоения на Q), а $M_Q(0,2)$ и $M_Q(-1,2)$ являются соответственно 9-мерным и 6-мерным неприводимыми рациональными квазипроективными многообразиями. Позднее Н.Перрен в работе [16] описал замыкание многообразия $M_Q(0,2)$ в схеме модулей Гизекера-Маруямы $M_Q(2;0,2,0)$, а Д.И.Артамкин в работах [25], [26] нашел другие неприводимые компоненты в схеме $M_Q(2;0,2,0)$. В статье [29] автором было получено описание замыкания $\overline{M_Q(-1,2)}$ многообразия $M_Q(-1,2)$ в схеме модулей Гизекера-Маруямы $M = M_Q(2;-1,2,0)$ стабильных пучков ранга 2 на Q без кручения с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$. Вопрос о неприводимых компонентах схемы M, отличных от $\overline{M_Q(-1,2)}$, до настоящего времени оставался открытым.

Цели работы

Настоящее диссертационное исследование посвящено нахождению компонент в M, отличных от $\overline{M_Q(-1,2)}$, общие точки которых являются стабильными не локально свободными когерентными пучками ранга 2 без кручения.

Целью настоящей диссертации является доказательство гипотезы А.С.Тихомирова о том, что схема M наряду с неприводимой компонентой $\overline{M_Q(-1,2)}$ содержит единственную неприводимую компоненту. Основной результат диссертации - следующая теорема.

Теорема. В M существует единственная неприводимая компонента, отличная от $\overline{M_Q(-1,2)}$. Она является рациональным 10-мерным многообразием и представляет собой замыкание $\overline{M}_1$ в M семейства M_1 полустабильных пучков, не локально свободных в точке на Q.

Из других результатов диссертации наиболее важными являются следующие:

- замыкание $\overline{M_Q(-1,2)}$ пространства $M_Q(-1,2)$ модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 на Q с $c_1 = -1, c_2 = 2$ в схеме модулей Гизекера-Маруямы M есть гладкое проективное многообразие;

- доказано, что граница $\overline{M_Q(-1,2)} \setminus M_Q(-1,2)$ состоит из пучков, имеющих проективную прямую на Q в качестве особенностей.

- компонента $\overline{M}_1$ как схема не приведена вдоль замкнутого подмножества M_2 пучков, имеющих точку и проективную прямую на Q в качестве особенностей.

Методы работы и научная новизна

В работе применяются методы бирациональной и пучковой геометрии, в том числе конструкция Серра полустабильных пучков $\mathcal{E}$ ранга 2 на проективной трехмерной квадрике Q. Эта конструкция систематически используется для построения семейств полустабильных пучков на Q с подходящими базами, покрывающими пространство модулей M при модулярном морфизме.

Все полученные в работе результаты являются новыми.

Практическая и теоретическая значимость Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении геометрических свойств многообразий модулей стабильных когерентных пучков на проективной квадрике и других рациональных трехмерных многообразиях.

Апробация

Результаты диссертационного исследования докладывались на семинаре по алгебраической геометрии при кафедре алгебры

Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д.Ушинского, на научных конференциях "Чтения Ушинского" (Ярославль, 2005 и 2008 гг.), на всероссийских школах-конференциях по проблемам алгебраической геометрии (Ярославль, 2008 и 2009 гг.), на международных научных конференциях "Колмогоровские чтения " (Ярославль, 2006-2011 гг.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [29], [30], [31] .

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Текст диссертации изложен на 82 страницах. Список литературы содержит 31 наименование.

Содержание диссертации

Во **ВВЕДЕНИИ** формулируются задачи, решаемые в диссертации, и дается обзор используемых методов и основных результатов диссертации.

ГЛАВА 1 состоит из трех параграфов. В данной главе дается описание компактификации в схеме M многообразия модулей $M_Q(-1,2)$ стабильных векторных расслоений с классами Черна $c_1 = -1$ и $c_2 = 2$ на проективной трехмерной квадрике Q. Для этого строится такое семейство пучков $\mathcal{E}$ из M, получаемых как расширения вида $0 \to \mathcal{O}_Q(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_C \to 0$, где $C = l_1 \cup l_2$ - пара скрещивающихся прямых на Q либо схемное вырождение этой пары, что база этого семейства сюръективно отображается на $\overline{M_Q(-1,2)}$.

Основным результатом этой главы является следующая теорема:

Теорема 1.1.1. *Замыкание $\overline{M}$ пространства $M_Q(-1,2)$ модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 на Q с $c_1 = -1, c_2 = 2$ в схеме модулей Гизекера-Маруямы $M_Q(2,-1,2,0)$ есть 6-мерное гладкое проективное рациональное многообразие.*

В параграфе 1.1 рассматривается универсальное семейство Σ пар скрещивающихся прямых на Q и их схемных вырождений. Как известно, база семейства прямых на Q изоморфна проективному пространству $\mathbb{P}_3$. Поэтому база семейства Σ есть раздутие $\sigma : \ B := \widetilde{\mathbb{P}_3 \times \mathbb{P}_3} \to \mathbb{P}_3 \times \mathbb{P}_3$ прямого произведения $\mathbb{P}_3 \times \mathbb{P}_3$ вдоль диагонали Δ. Пусть $D_\Delta = \sigma^{-1}(\Delta)$ - исключительный дивизор раздутия σ.

Рассмотрим прямое произведение $T = B \times Q$ с проекцией $f : T \to B$. Пусть Γ, Λ - прообразы графика инциденции $\Upsilon = \{($прямая l, точка $x) \in \mathbb{P}_3 \times Q \mid x \in l\}$ при проекциях $p_1, p_2 : T = B \times Q \to \mathbb{P}_3 \times Q$ соответственно. Тогда Σ определяется как схемное объединение $\Gamma \cup \Lambda$.

Пусть $H = \mathrm{Hilb}_2\mathbb{P}_3$ - схема Гильберта пар точек в $\mathbb{P}_3$. Обозначим через $Z := H \times Q$ прямое произведение.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

$\mathcal{O}_T(a,b,c,\mathcal{G}) := \mathcal{O}_B(a,b,c) \boxtimes \mathcal{G}$, $\mathcal{O}_T(a,b,c,d) := \mathcal{O}_B(a,b,c) \boxtimes \mathcal{O}_Q(d)$, $\mathcal{O}_B(a,b,c) := \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(a) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(b)) \otimes \mathcal{O}_B(cD_\Delta)$,$\mathcal{O}_Z(0,e) := \mathcal{O}_H \boxtimes \mathcal{O}_Q(e)$, где $a,b,c,d,e \in \mathbb{Z}$, а $\mathcal{G}$ - произвольный $\mathcal{O}_Q$-пучок.

В параграфе 1.2 доказывается, что пучок $\mathcal{F}$, параметризующий расширения вида $0 \to \mathcal{O}_Q(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_C \to 0$, где $C = l_1 \cup l_2$ - пара скрещивающихся прямых на Q либо вырождение этой пары, является локально свободным пучком ранга 2. Для этого мы показываем, что пучок относительных Ext-ов $\mathcal{F} := \mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma,T}(0,0,0,1), \mathcal{O}_T)$ входит в точную тройку: $0 \to \mathcal{O}_B(2,0,0) \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}_B(0,2,1) \to 0$, из которой видно, что $\mathcal{F}$ - локально свободен и ранга 2. Затем, используя пучок $\mathcal{F}$, мы показываем, что пучок $\mathcal{G} := \mathcal{E}xt^1_g(\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1), \mathcal{O}_Z)$ также локально свободен и имеет ранг 2, где $g : Z \to H$ - проекция, $\Pi := \rho(\Sigma)$ и $\rho : T \to Z$ - проекция.

В параграфе 1.3 приводится доказательство основной теоремы этой главы, а именно, рассматривается многообразие $W := \mathbb{P}(\mathcal{G}^\vee)$, где $\mathcal{G}^\vee$ - локально свободный пучок ранга 2 на H, описанный в предыдущем параграфе. Доказывается, что W есть рациональное семимерное многообразие. Далее строится морфизм $\varphi : W \longrightarrow \overline{M}$, который является структурным морфизмом проективизации векторного расслоениея ранга 2 на $\overline{M}$ со слоем $P(H^0(\mathcal{E}(1)))$ над произвольной точкой $[\mathcal{E}] \in \overline{M}$.

Вначале мы показываем, что многообразие W параметризует некоторое семейство стабильных пучков ранга 2 на Q с $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ на Q_3. Этот факт вытекает из следующего предложения.

Предложение 1.3.1. *W - рациональное семимерное многообразие, параметризующее универсальное семейство расширений вида: $0 \to \mathcal{O}_Q(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_{l_1 \cup l_2} \to 0$, где (l_1, l_2) - пара прямых на Q, возможно совпавших, задаваемое (после подкрутки на пучок $\mathcal{O}_Z(0,1)$) как расширение пучков на $\widetilde{W} := W \times Q$*

$$0 \longrightarrow \widetilde{g}^*\mathcal{O}_W(1)) \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1) \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{O}_W(1)$ *- пучок Гротендика на* W*, а* $\widetilde{p} : \widetilde{W} \to Z$ *и* $\widetilde{g} : \widetilde{W} \to W$ *- естественные проекции.*

Пользуясь предложением 1.3.1, можно показать, что W есть гладкое многообразие.

Замечание 1.3.2. *По конструкции* W *- база универсального семейства всех классов расширений вида:* $0 \to \mathcal{O}_Q(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_{l_1 \cup l_2} \to 0$*, где* (l_1, l_2) *- пара прямых на* Q*, возможно совпавших. Поскольку* $\alpha : W \to Hilb_2(\mathbb{P}_3)$ *- проекция со слоем* $P(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}(1), \mathcal{O}_Q)) \simeq \mathbb{P}_1$*, то* W *- гладкое многообразие.*

Далее строится морфизм из W в $\overline{M}$ и показывается, что его слой имеет размерность 1.

Предложение 1.3.3. *Морфизм* $\varphi : W \longrightarrow \overline{M}$*:* $w \mapsto [\mathbf{E}\ |_{w\times Q}(-1)]$ *является структурным морфизмом проективизации векторного расслоениея ранга 2 на* $\overline{M}$ *со слоем* $P(H^0(\mathcal{E}(1)))$ *над произвольной точкой* $[\mathcal{E}] \in \overline{M}$*.*

Заметим, что $\overline{M}$ является рациональным многообразием, поскольку $M_Q(-1,2)$ рационально согласно [15, p. 217]. Кроме того, из предложения 1.3.3 и гладкости W (см. замечание перед предложением 1.3.3) следует гладкость $\overline{M}$. Отсюда непосредственно вытекает теорема 1.1.1.

ГЛАВА 2 состоит из пяти параграфов. Настоящая глава посвящена описанию неприводимых компонент схемы M. Мы доказываем гипотезу А.С.Тихомирова о том, что в M существует единственная неприводимая компонента, отличная от $\overline{M_Q(-1,2)}$, и показываем, что она является рациональным многообразием размерности 10.

Основным результатом данной главы является следующая теорема.

Теорема 2.1.1. *В* M *существует единственная неприводимая компонента, отличная от* $\overline{M_Q(-1,2)}$*. Она является рациональным 10-мерным многообразием и представляет собой замыкание* $\overline{M}_1$ *многобразия* $M_1 = \{\ [\mathcal{E}] \in M \,|\, \dim \mathrm{Sing}(\mathcal{E}) = 0\ \}$ *в* M*.*

В параграфе 2.2 строится неприводимое 10-мерное семейство $M_1 \subset M$ стабильных пучков без кручения ранга 2, не локально свободных в конечном числе точек на Q и имеющих своей рефлексивной оболочкой пучок с $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$. Доказывается, что в M не существует пучков с нульмерными особенностями, кроме пучков из M_1. В дальнейшем мы показываем (см. §2.4), что замыкание $\overline{M}_1$ этого семейства в M составляет компоненту в M (см. теорему 2.1.1).

Пусть $[\mathcal{E}] \in M \setminus \overline{M_Q(-1,2)}$ - стабильный пучок ранга 2 на Q с классами Черна $c_1 = -1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 0$. Рассмотрим точную тройку: $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mu \to 0$, где $\mu = \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$. В этом параграфе мы рассматриваем случай $\dim \mathrm{Supp}\mu = 0$. Случай $\mathrm{Supp}\mu = 1$ будет рассмотрен в параграфе 2.3.

Итак, пусть $\dim\ \mathrm{Supp}\mu = 0$, тогда верна следующая лемма.

Лемма 2.2.1. *Пусть $[\mathcal{E}] \in M$ - стабильный пучок ранга 2 на квадрике Q с $c_1 = -1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 0$, входящий в точную тройку, $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mu \to 0$, в которой $\dim \mu = 0$ и $c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2$. Тогда $\mu = \mathbf{k}_x$ - поле вычетов некоторой точки $x \in Q$.*

Для дальнейшего нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.2.2. *Пусть $[\mathcal{E}] \in M$ - стабильный рефлексивный пучок ранга 2 на квадрике Q с $c_1 = -1$, удовлетворяющий условию $\bigoplus\limits_{l\leq 0} H^1(\mathcal{E}(l)) \neq 0$. Тогда спектр пучка $\mathcal{E}$ существует.*

Эта лемма используется в доказательстве следующего результата.

Предложение 2.2.3. *Пусть $\mathcal{F}$ - стабильный рефлексивный пучок на Q с классами Черна $c_1 = -1,\ c_2 = 2,\ c_3 \geq 2$. Тогда $\bigoplus\limits_{i\leq 0} H^1(\mathcal{F}(i)) = 0$.*

С помощью предложения 2.2.3 доказываем следующее предложение.

Предложение 2.2.4. *На Q не существует стабильных рефлексивных пучков $\mathcal{B}$ с классами Чженя $c_1(\mathcal{B}) = -1,\ c_2(\mathcal{B}) = 2,\ c_3(\mathcal{B}) > 2$.*

Далее доказывается, что всякий стабильный рефлексивный пучок

$\mathcal{F}$ на Q с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$ входит в следующую точную тройку: $0 \to \mathcal{O}_Q(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}_C \to 0$, где C - плоская коника на Q. Следовательно, для пучков $\mathcal{F}$ выполняются условия теоремы 4.1 из статьи [4]. Пусть $M(2;-1,2,2)$ есть пространство модулей стабильных пучков ранга 2 на Q с $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$, а $\mathcal{M}$ - подмножество в $M(2;-1,2,2)$ классов рефлексивных пучков, получаемых как расширения вида $0 \to \mathcal{O}_Q(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}_C \to 0$. Можно показать, что $\mathcal{M}$ является тонким многообразием, то есть существует универсальное семейство $\mathbb{F}$ рефлексивных пучков на Q с базой $\mathcal{M}$.

Обозначим через X множество пар $(< \xi >, C)$, где $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q)$, а C - коника на Q. Заметим, что по конструкции Серра для пучков $\mathcal{F}$ (см. теорему 4.1 из статьи [4]) X как множество имеет следующее эквивалентное описание: $X = \{([\mathcal{F}], < s >) | < s > \in P(H^0(\mathcal{F}))\}$. Далее мы доказываем, что X - неприводимая приведенная схема.

Используя неприводимость X и тонкость $\mathcal{M}$, мы доказываем следующее предложение.

Предложение 2.2.5. *Пространство $\mathcal{M}$ модулей стабильных рефлексивных пучков с $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$ на Q является неприводимым многообразием.*

Затем доказывается, что размерность $\mathcal{M}$ равна 6.

Предложение 2.2.6. $\mathcal{M} \simeq Grass(2,5) \setminus \mathbb{P}_3$. *В частности,* $\dim \mathcal{M} = 6$.

Рассмотрим множество классов пучков $[\mathcal{E}] \in M$, входящее в тройку $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mu \to 0$, в которой $[\mathcal{E}^{\vee\vee}] \in \mathcal{M}$. Тогда из леммы 2.2.1 следует, что $\mu = \mathbf{k}_x$. Пользуясь предложением 2.2.6 и неприводимостью $\mathcal{M}$, мы доказываем основную теорему данного параграфа.

Теорема 2.2.7. *Множество классов пучков $[\mathcal{E}] \in M$, входящих в тройку $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mu \to 0$, где $\mu = \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$, в которой $[\mathcal{E}^{\vee\vee}] \in \mathcal{M}$ и $\mu = \mathbf{k}_x$, есть неприводимое многообразие M_1 размерности 10 в M.*

Пользуясь доказательством теоремы 2.2.7, показываем, что многообразие M_1 рационально.

Предложение 2.2.8. *Многообразие M_1 рационально.*

Из неравенства $c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) \geq 2$, а также предложений 2.2.3, 2.2.4 и теоремы 2.2.7 следует

Теорема 2.2.9. *Семейство пучков $[\mathcal{E}] \in M$ с $\dim(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}) = 0$ совпадает с M_1.*

В параграфе 2.3 рассматриваются пучки $[\mathcal{E}] \in M$, для которых $\dim \mathrm{Supp}\mu = 1$, где $\mu = \mathcal{E}^{\vee\vee} \setminus \mathcal{E}$ - пучок в точной тройке $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mu \to 0$. Тем самым, пучок $\mathcal{E}$ имеет одномерные особенности. Доказывается, что для любого такого пучка $\mathcal{E}$ его рефлексивная оболочка $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ есть спинорное расслоение $\mathcal{S}$ на Q (см. [15, p.191]). Далее мы показываем, что в M существует неприводимое семимерное семейство M_2 пучков на Q с особенностями вдоль подмножеств вида l, либо $l \cup x$, где l – прямая, а x – точка на Q и $x \notin l$ (теорема 2.3.3), и неприводимое семейство M_3 пучков с особенностью вдоль прямых l на Q (предложение 2.3.4), причем пучки в этих семействах M_2 и M_3 отличаются типом пучка μ, и пучки из M_3 не составляют компоненты в M. Далее мы показываем, что пучки с другими одномерными особенностями составляют множество $\overline{M_Q(-1,2)} \setminus M_Q(-1,2)$ в M (предложение 2.3.5). В конце параграфа мы показываем, что M есть дизъюнктное объединение множеств: $M = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \overline{M_Q(-1,2)}$ (теорема 2.3.7).

Сначала доказывается, что всякий рефлексивный стабильный пучок $\mathcal{A}$ на Q с классами Черна $c_1(\mathcal{A}) = -1,\ c_2(\mathcal{A}) = 1$ ранга 2 совпадает со спинорным расслоением $\mathcal{S}$ на Q.

Лемма 2.3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ - стабильный рефлексивный пучок ранга 2 на Q с классами Черна $c_1(\mathcal{A}) = -1,\ c_2(\mathcal{A}) = 1$. Тогда $\mathcal{A} \simeq \mathcal{S}$, где $\mathcal{S}$ - спинорное расслоение на Q.*

Для произвольного одномерного пучка $\mathcal{F}$ на Q через $mult(\mathcal{F})$ будем обозначать положительное число $h^0(\mathcal{F}|_H)$, где H - общее гиперплоское сечение квадрики Q.

С помощью леммы 2.3.1 мы показываем в следующем предложении, что рефлексивная оболочка $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ пучка $\mathcal{E}$, определенного в начале параграфа 2.3, есть спинорное расслоение $\mathcal{S}$ на Q.

Предложение 2.3.2. *Пусть* $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ *- пучок из тройки* $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mu \to 0$*, удовлетворяющий условию* $\dim(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}) = 1$*. Тогда* $\mathcal{E}^{\vee\vee} = \mathcal{S}$ *и* $mult(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}) = 1$.

Затем показываем, что над M существует неприводимое семимерное семейство пучков на Q с особенностями вдоль подсхем вида $Z = l \cup x$, где l – прямая на Q и x - точка на Q, $x \notin l$, и что пучки с другими одномерными особенностями не составляют компонент в M.

Рассматривается точная тройка $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mu \to 0$, в которой $\dim \mathrm{Supp}\mu = 1$. Из предложения 2.3.2 следует, что эта тройка имеет вид: $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{S} \to \mu \to 0$, и $mult(\mu) = 1$. В частности, $\mathrm{Supp}(\mu) = l$ – прямая на Q.

Далее показываем, что для пучка μ возможны 2 случая. Первый случай: μ входит в тройку: $0 \to \mathbf{k}_x \to \mu \to \mathcal{O}_l(-1) \to 0$. Второй случай: $\mu = \mathcal{O}_l$. Затем описываются все множества классов пучков $[\mathcal{E}] \in M$, входящих в тройку $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{S} \to \mu \to 0$, где μ - пучок из тройки $0 \to \mathbf{k}_x \to \mu \to \mathcal{O}_l(-1) \to 0$.

Теорема 2.3.3. *Множество* M_2 *классов пучков* $[\mathcal{E}] \in M$*, входящих в тройку* $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{S} \to \mu \to 0$*, где* μ *- пучок из тройки* $0 \to \mathbf{k}_x \to \mu \to \mathcal{O}_l(-1) \to 0$*, в которой либо а)* $x \notin l$ *и* $\mu = \mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathbf{k}_x$*, либо б)* $x \in l$ *и последняя тройка не расщепляется, является неприводимым семейством размерности 7.*

Далее показываем, что подмножество M_3 классов пучков $[\mathcal{E}] \in M$, входящих в тройку $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mu \to 0$, в которой $\mu = \mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathbf{k}_x$ и $x \in l$, имеет размерность 4.

Предложение 2.3.4. *Подмножество* M_3 *классов пучков* $[\mathcal{E}] \in M$*,* *входящих в тройку* $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mu \to 0$, *в которой* $\mu = \mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathbf{k}_x$ *и* $x \in l$, *имеет размерность 4.*

Затем описываем подмножество классов пучков $[\mathcal{E}] \in M$, входящих в тройку $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mu \to 0$, в которой $\mu = \mathcal{O}_l$.

Предложение 2.3.5. *Множество классов пучков* $[\mathcal{E}] \in M$, *входящих в точную тройку* $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{S} \to \mathcal{O}_l \to 0$, *совпадает с множеством* $\overline{M_Q(-1,2)} \setminus M_Q(-1,2)$.

Из теоремы 2.3.3 и предложений 2.3.2, 2.3.4 и 2.3.5 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.3.6. *Множество классов пучков* $[\mathcal{E}] \in M \setminus \overline{M_Q(-1,2)}$, *для которых* $\dim(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}) = 1$, *совпадает с* $M_2 \sqcup M_3$.

Из теорем 2.2.7, 2.2.9, 2.3.3, 2.3.6 и предложения 2.3.4 следует

Теорема 2.3.7. M *есть дизъюнктное объединение* $M = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \overline{M_Q(-1,2)}$. *При этом* $\dim M_1 = 10,\ \dim M_2 = 7,\ \dim M_3 = 4$.

В параграфе 2.4 доказывается теорема 2.1.1, в которой утверждается неприводимость схемы $M \setminus \overline{M_Q(-1,2)}$ (см. §2.1).

Так как для всякого пучка $[\mathcal{E}] \in M$ имеем $c_1(E) = -1$, то $\mathcal{E}$ стабилен (см., например, [3, p. 12]). Следовательно, $T_{[E]}M = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$, и по теории деформации [6, p. 101] для $\mathcal{E}$ выполняется неравенство: $\dim_{[\mathcal{E}]} M \geq \dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) - \dim\ \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})$. Положим $\chi(\mathcal{E},\mathcal{E}) := \sum_i (-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{E})$. В силу стабильности пучка $\mathcal{E}$ имеем $\dim \mathrm{Ext}^0(\mathcal{E},\mathcal{E}) = 1$, и с учетом двойственности Серра $\dim \mathrm{Ext}^3(\mathcal{E},\mathcal{E}) = 0$. Отсюда $\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) - \dim \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}) = -\chi(\mathcal{E},\mathcal{E}) + 1$. Далее, согласно [15, p. 194], для локально свободных пучков $[\mathcal{E}] \in M$ верна формула $\chi(\mathcal{E},\mathcal{E}) = 7 - 6c_2(\mathcal{E})$. Повторяя теперь для случая квадрики Q рассуждения, проведенные для случая $\mathbb{P}^3$ в доказательстве предложения 3.4 из [4], получаем, что эта же формула верна и для произвольного пучка $[\mathcal{E}] \in M$. Подставляя ее в предыдущее соотношение, получаем равенство $\dim_{[\mathcal{E}]} M \geq \dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) - \dim \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}) = 6$. Отсюда в силу теоремы 2.3.7 M_3 не является компонентой схемы M. Поэтому для доказательства теоремы 2.1.1 достаточно проверить, что $M_2 \subset \overline{M}_1$. А именно, мы показываем, что верна формула: $M_2 \sqcup M_3 \subset \overline{M}_1 = \overline{M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3}$. При этом компонента $\overline{M}_1$ имеет размерность 10 и в силу предложения 2.2.8 рациональна.

Далее приводится описание пучков $\mathcal{E}$ из $M_Q(2;-1,2,0)$ с помощью монад.

Теорема 2.4.1.*Всякий пучок из* $M_Q(2;-1,2,0) = \overline{M_Q(-1,2)} \sqcup \overline{M}_1$ *является когомологией монады* $0 \to \mathcal{O}(-1) \to 2S \to \mathcal{O} \to 0$ *либо монады* $0 \to \mathcal{O}(-2) \to 3\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}_y \to 0$, *где* y *- точка на* Q. *Более точно,*

(i) всякий пучок $[\mathcal{E}] \in \overline{M_Q(-1,2)}$ *является когомологией монады* $0 \to \mathcal{O}(-1) \to 2S \to \mathcal{O} \to 0$,

(ii) всякий пучок $[\mathcal{E}] \in \overline{M}_1 \setminus (\overline{M}_1 \cap \overline{M_Q(-1,2)})$ *является когомологией монады* $0 \to \mathcal{O}(-2) \to 3\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}_y \to 0$.

В параграфе 2.5 мы даем доказательство леммы 2.2.2 и предложений 2.2.3, 2.2.4 и 2.2.6 из § 2.2, а также леммы 2.3.1 из § 2.3.

Глава 3 состоит из двух параграфов. В данной главе исследуется неприводимое 7-мерное семейство M_2 стабильных пучков из M, которое строится следующим образом. Пусть $\mathcal{S}$ – спинорное расслоение ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ на Q (см. [2]). Семейство M_2 описывается следующим образом:

$$M_2 = \{\mathcal{E} \in M \mid \mathcal{E} = \ker(\mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathbf{k}_x),$$

$$\text{где } l \subset Q \ -\text{прямая, } x - \text{точка}, x \notin l\}$$

В главе 1 было показано, что замыкание $\overline{M_1}$ семейства M_1 в M является неприводимой компонентой в M. В настоящей главе доказывается, что компонента $\overline{M}_1$ является неприведенной вдоль M_2. А именно, мы вычисляем касательное по Зарисскому пространство $T_{[\mathcal{E}]}M$ в точке $[\mathcal{E}] \in M_2$, которое в силу стабильности $\mathcal{E}$ совпадает с группой $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$. Основной результат главы 3 – следующая теорема.

Теорема 3.1.1. *Размерности групп* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ *и* $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})$ *равны соответственно 10 и 4, где* $\mathcal{E}$ *- пучок из* M_2*.Тем самым, компонента* $\overline{M}_1$ *в* M *не приведена вдоль* M_2*.*

В параграфе 3.2 непосредственно вычисляется, что размерности групп $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ и $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})$ равны соответственно 10 и 4 и делается вывод о неприведенности компоненты $\overline{M}_1$ вдоль M_2.

Литература

[1] **Arrondo E., Sols I.** *Classification of smooth congruence of low degree*, // J.Reine Angew. Math. **393** (1989), 199-219.

[2] **Banica C., Putinar M., Schumacher G.** *Variation der globalen Ext in Deformationen kompakter komplexer Raume*, Mathematische Annalen **250**(1980), 135-155.

[3] **Ein L., Sols I.** *Stable vector bundles on quadric hypersurfaces*, Nagoya Math. J. **96**(1984), 11-22.

[4] **Hartshorne R.** *Stable reflexive sheaves* , Math. Ann. **254**(1980), 121-176.

[5] **Hulek K., Van de Ven A.** *the Horrocks-Mumford bundle and the Ferrand construction*, Manuscripta Math. **50**(1985), 313-335.

[6] **Huybrechts D., Lehn M.** *The Geometry of Moduli spaces of sheaves*, Aspects of Mathematics **E 31**, Braunschweig, Vieweg (1997).

[7] **Katsylo P. I., Ottaviani G.** *Regularity of the moduli Space of Instanton Bundles* $MI_{\mathbb{P}_3}(5)$,// Transformation Groups **8**, no. 2 (2003), 147-158.

[8] **Lange H.** *Universal Families of Extensions*, Journal of Algebra **83** (1983), 101-112.

[9] **LePotier J.** *Sur l'espace de modules des fibres de Yang et Mills*, // in Mathematique et Phisique, Seminaire de l'Ecole Normale Superieure 1979-1982, Birkhauser, (1983).

[10] **Lønsted K., Klieman S.** *Basic on families of hyperelliptic curves* , Compositio Math. V. **38** (1979), 83-111.

[11] **Markushevich D., Tikhomirov A. S.** *The Abel-Jakobi map of a moduli component of vector bundles on the cubic threefold*, // J. Algebraic Geometry V. **10** (2001), 37-62.

[12] **Markushevich D., Tikhomirov A. S.** *A parametrization of the theta divisor of quartic double solid*, // Intern. Math. Res. Notes **51** (2003), 2747-2778.

[13] **Markushevich D., Tikhomirov A. S.** *Symplectic structure on a moduli space of sheaves on the cubic fourfold*,// Izvestiya RAN, Ser. Mat. **67**, no.1 (2003), 131-158.

[14] **Maruyama M.** *Moduli of stable sheaves. II*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), 557-614.

[15] **Ottaviani J., Szurek M.** *On moduli of stable 2-bundles with small chern classes on Q_3*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **CLXVII** (1994), 191-241.

[16] **Perrin. N.** *Limites de fibres vectoriels dans $M_{\mathbf{Q_3}}(0,2)$.* Compte Rendus Acad. Sci. Paris, t. **334**, ser. I, no. 9 (2002), 779-782.

[17] **Skiti M.** *Sur une famille de fibres instantons*, // Math. Z. **225** (1997), 294-373.

[18] **Strømme A.** *Ample Divisors on fine Moduli spaces on progective plane*, Math. Z. **187** (1984), 405-423.

[19] **Szurek M., Wisniewski J. A.** *Fano bundles on Fine Moduli Spaces over $\mathbb{P}_3$ and Q_3*, // Pacific Journal of Mathematics V. **141**, no. 1 (1990), 197-208.

[20] **Tikhomirov A. S.** *New component of the moduli space $M(2;0,3)$ of stable vector bundles on the double space $\mathbb{P}^3$ of index two*, // Acta Appl. Math. **75** (2003), 271-279.

[21] **Tyurin A. N.** *The moduli spaces of vector bundles on threefolds, surfaces and curves I*, // preprint, Erlangen (1990).

[22] **Tyurin A. N.** *On the Superposition of mathematical Instantons II*, // in Arithmetic and Geometry, Progress in Mathematics **36**, Birkhauser (1983).

[23] **Tyurin A. N.** *The structure of the variety of pairs of commutating pencils of symmetric matrices,*// Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem. Tom 46, no. 2 (1982), English translation: Math. USSR Izvestiya, Vol **20**, no. 2 (1983), 391-410.

[24] **Wisniewski J. A.** *Ruled Fano 4-folds of index 2,* // Proceedings of the American Mathematical society V. **105** (1983), 55-61.

[25] **Артамкин Д. И.** *Компонента не локально свободных полустабильных пучков ранга 2 на трехмерной квадрике*// Материалы конференции "Чтения Ушинского".-Яросалвль: изд-во ЯГПУ, 2004.- С. 6-13.

[26] **Артамкин Д. И.** *Свойства стабильных пучков ранга 2 на трехмерной квадрике* // Ярославский педагогический вестник.- 2004.- № 1-2.-С.83-88.

[27] **Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х.** *Векторные расслоения на проективных пространствах.*- М.: Мир, 1984.

[28] **Хартсхорн Р.** *Алгебраическая геометрия.*- М.: Мир, 1981.

Публикации по теме диссертации

[29] **Уваров А. Д.** *Компактификация многообразия модулей* $M_Q(-1,2)$ *стабильных векторных расслоений ранга 2 на трехмерной квадрике* // Ярославский педагогический вестник.- 2011.- т. **3** (Естественные науки), № 3.- С.37-44.

[30] **Уваров А. Д.** *Об одном семействе стабильных пучков ранга 2 с классами Черна* $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ *на трехмерной проективной квадрике* // Ярославский педагогический вестник.- 2009.- № 1.- С. 56-60.

[31] **Уваров А. Д.** *Модули стабильных пучков ранга 2 с классами Черна* $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ *на трехмерной квадрике* // Моделирование и анализ информационных систем.-2012.- т. **19**, № 2.-С. 19-40.