

На правах рукописи

**Овсянникова Екатерина Олеговна**

**РЕЗОНАНСНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЗАДАЧЕ  
О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ  
НЕЙРОННОГО ТИПА**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2010

Работа выполнена на кафедре математического моделирования  
Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук,  
доцент Глызин Сергей Дмитриевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор  
Колесов Андрей Юрьевич  
доктор физико-математических наук, профессор  
Старков Сергей Олегович

Ведущая организация — Самарский государственный университет

Защита состоится “\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2010 г. в 15:00 на заседании диссер-  
тационного совета Д 212.002.05 при Ярославском государственном универ-  
ситете им П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская,  
д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского госу-  
дарственного университета им П.Г. Демидова по адресу: г. Ярославль, ул.  
Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан “\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2010 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Глызин С.Д.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность темы**

Динамика систем взаимодействующих осцилляторов представляет собой универсальный модельный объект, находящий применение в различных областях математического моделирования. При этом, если взаимодействие нелинейных осцилляторов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями довольно хорошо изучено, то случай, когда модель отдельного осциллятора представляет собой уравнение с запаздыванием, изучен хуже. В настоящее время наблюдается всплеск интереса к уравнениям с запаздыванием, по данной тематике выходит большое число публикаций. Особенно пристально изучаются задачи, связанные с поведением нейронных систем. В работе исследуется уравнение с запаздыванием, которое по ряду признаков является удачной феноменологической моделью электрической активности нервной клетки. Эта модель была предложена С.А. Кащенко, В.В. Майоровым и И.А. Мышкиным и представляет собой удачный баланс между простотой исследования и биологической реалистичностью. Она на качественном уровне воспроизводит генерацию короткого высокоамплитудного спайка и реакцию нейрона на внешнее воздействие и одновременно с этим достаточно проста и допускает асимптотический анализ. В настоящее время именно импульсные модели биологических нейронов используются для построения нейронных сетей, которые являются одной из приоритетных областей современной прикладной математики. Изучение динамики взаимодействия пары таких осцилляторов — основная задача диссертационной работы.

Весьма актуальным является учет запаздывания в цепи связи между осцилляторами, которое, очевидным образом, всегда имеется в прикладных задачах. Наконец, при изучении динамики исследуемых моделей особое внимание уделено актуальному с точки зрения приложений вопросу о синхронизации колебаний и создания условий десинхронизации.

### **Цель работы**

Основная цель диссертационной работы заключается в выявлении особенностей динамики дифференциальных уравнений с запаздыванием, моделирующих слабое электрическое взаимодействие нервных клеток. Отдельное внимание уделено роли запаздывания в цепи связи между осцилляторами.

## **Методы исследования**

В работе используется известный метод локальной теории — метод нормальных форм. Доказанная для этого метода теорема о соответствии позволяет распространять свойства решений укороченной нормальной формы на решения исходной задачи. Однако такое соответствие выполняется лишь локально при близости бифуркационного параметра к критическим значениям и в ограниченной области фазового пространства. В связи с этим при выходе за границы применимости локального анализа уместно использование численного счета. Именно поэтому в случае возникновения в системе сложных колебаний привлекались различные статистические методы. Среди них в наибольшей мере — методы, связанные с вычислением ляпуновских показателей. Для обработки разномасштабных по амплитуде колебаний, наблюдаемых в системе, когда не работают вовсе или работают недостаточно точно методы определения ляпуновских показателей, применялось вычисление статистических характеристик, таких как корреляционный интеграл и статэнтропия.

## **Научная новизна**

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Локальными асимптотическими методами и дополняющими их численными методами исследована динамика взаимодействия пары осцилляторов, моделирующих поведение электрически связанных импульсных нейронов.
2. Изучена роль запаздывания в цепи связи между осцилляторами, показано ее значение для изменения качественного поведения динамической системы.
3. В пространстве параметров системы найдена область, для значений из которой реализуются режимы высокоамплитудных пакетов импульсов, разработаны методы их статистической обработки.
4. Исследована модель нейрона с двумя запаздываниями, определены случаи наибольшего вырождения, построена асимптотика решений.

## **Положения, выносимые на защиту**

1. Выполнен полный локальный анализ системы двух диффузионно связанных осцилляторов нейронного типа.

2. Найдены условия возникновения в системе двух связанных осцилляторов режимов разномасштабных колебаний и изучены их статистические характеристики.
3. Показано, что введение запаздывания в элемент связи между осцилляторами может служить механизмом вывода системы из состояния мультстабильности, связанной с сосуществованием нескольких устойчивых режимов.
4. Изучен характер потери устойчивости ненулевого состояния равновесия в обобщенной нейронной модели с двумя запаздываниями.
5. Выполнен локальный анализ модели нейрона с двумя запаздываниями в случае максимальных вырождений.

### **Теоретическая и практическая ценность**

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы при исследовании автоколебательных процессов в импульсных нейронных сетях, состоящих из осцилляторных элементов, описываемых уравнением с запаздыванием, со связями между элементами сети, содержащими задержку. Разработанная методика определения статистических характеристик импульсных процессов может применяться при решении широкого спектра задач, связанных с исследованием структуры автоколебательных процессов в системах связанных осцилляторов нейронного типа.

### **Апробация работы**

Основные результаты работы были представлены на следующих научных конференциях:

1. XV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, 2008.
2. Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Секция 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи), Самара, 2008.
3. Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Воронеж, 2009.
4. Всероссийская выставка научно-технического творчества молодежи (НТТМ-2009), Москва, 2009.

5. 9-я Международная школа «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2010), Саратов, 2010.

Кроме того, результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре «Нелинейная динамика» кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

### Публикации

По теме диссертации автором опубликовано 4 статьи и 7 тезисов докладов, в том числе 3 статьи в изданиях из списка ВАК. Список публикаций приведен в конце автореферата. Из указанных в списке публикаций работы [2], [3], [7] выполнены совместно с научным руководителем С.Д. Глызиным, которому принадлежит постановка рассмотренных задач.

### Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, содержащего 65 наименований. Диссертация содержит 51 рисунок. Общий объем диссертации составляет 102 страницы.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** описана постановка задачи, приводится общая характеристика работы, а также изложено содержание диссертации по главам и краткий обзор литературы по тематике диссертации.

**Первая глава** посвящена исследованию системы диффузионно слабо связанных осцилляторов нейронного типа<sup>1</sup>. В пункте 1.1 кратко описываются основные электрохимические процессы, проходящие в нейронах, и ставится следующая задача о слабом электрическом взаимодействии двух нейроподобных элементов:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \lambda \left[ -1 - f_{\text{Na}}(u_1) + f_{\text{K}}(u_1(t-1)) \right] u_1 + D(u_2(t-h) - u_1), \\ \dot{u}_2 &= \lambda \left[ -1 - f_{\text{Na}}(u_2) + f_{\text{K}}(u_2(t-1)) \right] u_2 + D(u_1(t-h) - u_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где функции  $f_{\text{Na}}$  и  $f_{\text{K}}$  характеризуют проводимости натриевых и калиевых каналов соответственно и выбраны в виде

$$f_{\text{Na}}(u) = r_1 \exp(-u^2), \quad f_{\text{K}}(u(t-1)) = r_2 \exp(-u^2(t-1)). \quad (2)$$

В пунктах 1.2 – 1.3 величина запаздывания  $h$  в элементе связи между осцилляторами предполагается нулевой. В пункте 1.2 проводится локальный анализ задачи (1), (2). Найдено критическое значение параметра  $\lambda$ ,

---

<sup>1</sup>Кащенко, С.А. Модели волновой памяти / С.А. Кащенко, В.В. Майоров. – М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ". – 2009. – 288 с.

$\lambda_* = \frac{\omega_0(r_2 - r_1)}{2r_2 u_*^2 \sin \omega_0}$ , где  $\omega_0 = \arccos(r_1/r_2)$ ,  $u = u_* = \sqrt{\ln(r_2 - r_1)}$ , при котором характеристический квазимногочлен

$$P(\mu) = \mu - \frac{2\lambda u_*^2 (r_1 - r_2 \exp(-\mu))}{(r_2 - r_1)} \quad (3)$$

имеет пару чисто мнимых корней  $\pm i\omega_0$ , в то время как остальные корни лежат в левой комплексной полуплоскости. В близком к критическому случае  $\lambda = \lambda_* + \varepsilon$  для задачи (1), (2) с помощью стандартной замены методов нормальных форм

$$(u_1(t, s), u_2(t, s))^T = \sqrt{\varepsilon} (z_1(s) \mathbf{e}_1 e^{i\omega_0 t} + z_2(s) \mathbf{e}_2 e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.}) + \varepsilon w_1(t, s) + \varepsilon^{3/2} w_2(t, s) + \dots, \quad (4)$$

где  $s = \varepsilon t$  — медленное время,  $\mathbf{e}_j$  — единичные орты,  $z_j(s)$  — медленно меняющиеся комплексные амплитуды ( $j=1, 2$ ), построена укороченная нормальная форма вида

$$\begin{aligned} \eta_1' &= \varkappa \eta_2 \cos(\alpha + \delta) + (1 - \varkappa \cos \delta - \eta_1^2) \eta_1, \\ \eta_2' &= \varkappa \eta_1 \cos(\alpha - \delta) + (1 - \varkappa \cos \delta - \eta_2^2) \eta_2, \\ \alpha' &= -\varkappa \left[ \frac{\eta_2}{\eta_1} \sin(\alpha + \delta) + \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin(\alpha - \delta) \right] + b(\eta_1^2 - \eta_2^2), \end{aligned} \quad (5)$$

параметры которой определяются из соотношений

$$\begin{aligned} z_j(s) &= \sqrt{-\gamma/d_0} \eta_j(s) \exp(i\varphi_j(s)), \quad j = 1, 2, \quad k \exp(i\delta) = d/P'(i\omega_0), \\ \varkappa &= k/\text{Re } \varphi_0, \quad \alpha = \varphi_2 - \varphi_1, \quad \varphi_0 = i\omega_0/\lambda_* P'(i\omega_0), \\ d_0 + ic_0 &= \frac{1}{P'(i\omega_0)} \left[ \frac{i\omega_0}{u_*} \left( 2(1 - u_*^2)v_0 + 2(u_* - v_1)u_*^2 - 3u_* \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_*}{(r_2 - r_1)} \left( r_1(2u_*(v_0 + v_1) - 3(2u_*^2 - 1)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r_2((2u_*^2 - 1)(2 + \exp(-2i\omega_0)) - 2u_*(v_0 + v_1 \exp(-2i\omega_0))) \right) \right], \\ v_0 &= 2u_* - \frac{1}{u_*}, \quad v_1 = \frac{2i\omega_0 - (2u_*^2 - 1)(2i\omega_0 - P(2i\omega_0))}{2u_* \cdot P(2i\omega_0)}, \quad b = c_0/d_0, \end{aligned} \quad (6)$$

Для системы (5) справедливо следующее утверждение:

**Теорема 1.** *Предположим, что система (5) имеет некоторое устойчивое состояние равновесия (цикл). Тогда найдется такое достаточно малое*

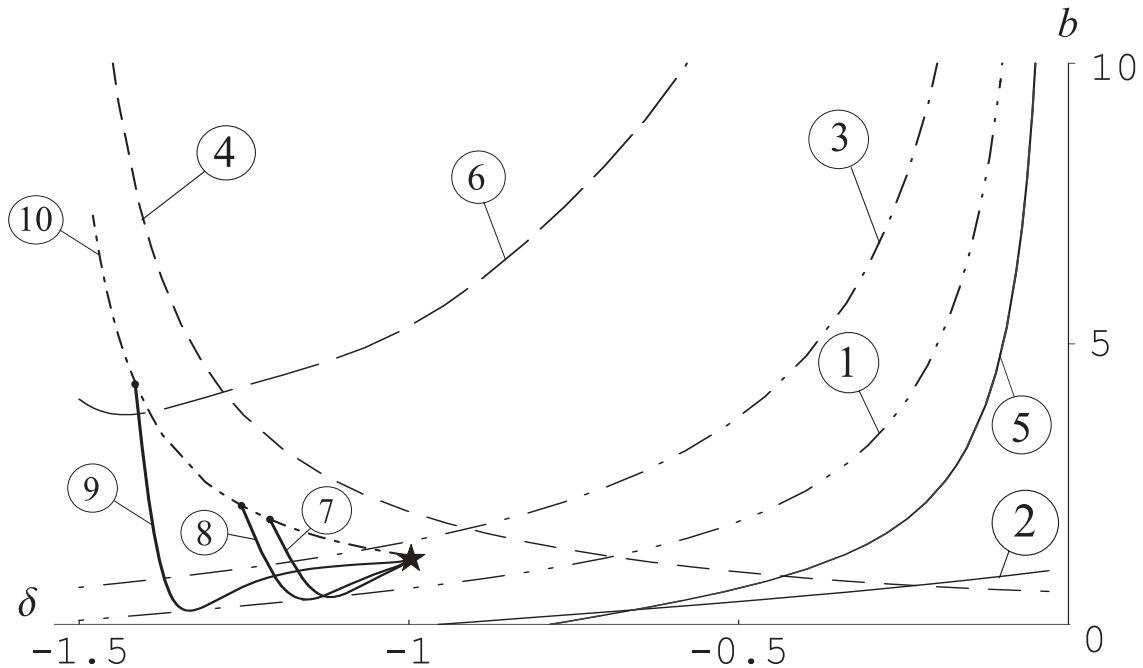


Рис. 1. Разбиение плоскости параметров на области с разными сценариями фазовых перестроек

$\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  система (1), (2) при условии  $\lambda = \lambda_* + \varepsilon$  имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл (двумерный инвариантный тор) той же устойчивости с асимптотикой (4).

Для систем вида (5) ранее было определено разбиение плоскости параметров  $b$  и  $\delta$  на области с различными сценариями фазовых перестроек<sup>2</sup> (см. рис. 1). На этом рисунке номерами от одного до шести обозначены кривые, разделяющие плоскость параметров на области с разными фазовыми сценариями, а номерами от семи до девяти — кривые зависимости  $b$  от  $\delta$ , определенные в диссертационной работе, при которых реализуется критическое значение параметров системы (1), (2). Звездой на рисунке 1 отмечены значения параметров  $b = (\pi + 6)/(3\pi - 2)$ ,  $\delta = -\arctg(\pi/2)$ , которые реализуются в исследуемой нами системе (1), (2) при  $r_2 \rightarrow \infty$ .

Опишем кривые на рисунке 1. Кривая под номером один представляет собой график зависимости  $b = -\text{ctg}\delta$ , для значений  $b$  и  $\delta$  ниже этой кривой состояние равновесия  $(1, 1, 0)^T$  устойчиво при любом положительном  $\varkappa$ . Кривые под номерами два и три разбивают плоскость параметров таким образом, что для значений  $b$  и  $\delta$  между кривыми два и три система (5) имеет

<sup>2</sup>Глызин, С. Д. Сценарии фазовых перестроек одной конечноразностной модели уравнения “реакция-диффузия”/ С. Д. Глызин // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33, № 6. — С. 805–811.



при  $\varkappa > \varkappa_{\text{кр}}$  неоднородные состояния равновесия  $A, B, C, D$ , а для других областей таких состояний нет. На кривой, отмеченной числом четыре, лежат значения параметров, при которых равна нулю вещественная часть ляпуновской величины, вычисленной для неоднородного состояния равновесия  $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$  в критической точке потери устойчивости ( $\varkappa = \varkappa_{\pi,2}$ ), это означает, что при значениях  $b$  и  $\delta$  выше этой кривой при увеличении  $\varkappa$  рождается устойчивый цикл, а ниже нее в состояние равновесия  $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$  стягивается неустойчивый цикл. Кривая под номером пять представляет собой функцию  $b = -\text{ctg}2\delta$ , для значений  $b$  и  $\delta$  выше этого графика состояние равновесия  $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$  теряет устойчивость колебательным образом. Кривая шесть соответствует равенству нулю вещественной части ляпуновской величины, вычисленной для симметричных состояний равновесия  $A$  и  $B$ , поэтому для значений  $b$  и  $\delta$  ниже этой кривой состояния  $A$  и  $B$  мягко теряют устойчивость с рождением устойчивых циклов  $C_A$  и  $C_B$ , а выше этой кривой в состояния  $A$  и  $B$  стягиваются неустойчивые циклы и потеря устойчивости происходит жестко.

Для определения бифуркаций, которые могут наблюдаться в системе (5) при различном выборе параметров, на рисунок с разбиением плоскости параметров  $(b, \delta)$  на области с различными сценариями фазовых перестроек были нанесены графики зависимости  $b$  от  $\delta$  системы (5). При этом  $r_1$  считается фиксированным, а  $r_2$  будем изменяться от  $r_1 + 1 + 0$  до  $+\infty$ . Для различных значений параметров  $r_1$  и  $r_2$  графики зависимости  $b(\delta)$  могут находиться в областях, соответствующих разным сценариям фазовых перестроек. Начальная и конечная точки для графиков  $b(\delta)$  получены с использованием предельных соотношений, остальные — путем численного счета. Кривая под номером 7 соответствует  $r_1 = 1$ , при  $r_1 = 1.5$  получаем график под номером 8, при  $r_1 = 8.5$  — график номер 9. Кривая под номером десять соответствует зависимости  $b$  от  $\delta$  при  $r_2 \rightarrow r_1 + 1 + 0$  и ограничивает сверху все кривые  $b(\delta)$  для рассматриваемой нами системы (5).

В пункте 1.3 для конкретных значений параметров, выбранных для примера, производится численный анализ исходной системы, который значительно облегчается знанием бифуркационных значений нормальной формы (5). Вначале берутся наиболее типичные значения параметров  $r_1, r_2$ , рассмотренные в предыдущем пункте, с целью обнаружения при  $\lambda$  близких к  $\lambda_{\text{кр}}$  фазовых перестроек, аналогичных описанным для нормальной формы. Для всех трех рассмотренных случаев в окрестности критического значения  $\lambda_*$  фазовые перестройки системы (1), (2) происходят в соответствии с фазовыми перестройками нормальной формы (5).

Во второй части численного анализа будем увеличивать  $\lambda$  и проследим за характером разрушения сценариев фазовых перестроек, найденных ранее. При этом значения  $r_1, r_2$  выбираются таким образом, чтобы продемонстрировать наиболее типичное поведение системы (1), (2) в широкой области изменения параметров.

Один из типичных сценариев реализуется, к примеру, при  $r_1=1, r_2=2.5$  и состоит в следующем. При увеличении параметра  $\lambda$  от критического значения  $\lambda_* \approx 0.935872$  динамика системы (1), (2) становится релаксационной и резко упрощается, например, при  $\lambda > 1.5$  наблюдаются только циклы большой амплитуды с релаксационными свойствами. Аналогичный сценарий наблюдается всякий раз, когда разность между  $r_2$  и  $r_1$  относительно велика. Отметим, что по смыслу задачи  $r_2 - r_1 > 1$ .

Существенно более сложное поведение система (1), (2) демонстрирует при  $r_2 - r_1$  близком к единице (естественно, неравенство  $r_2 - r_1 > 1$  выполнено). Для иллюстрации фазовых перестроек, происходящих в этом случае при увеличении  $\lambda$  выбраны значения  $r_1=1.5, r_2=2.6$ . Заметим, что критическое значение  $\lambda$  при этом равно  $\lambda_* \approx 2.59729$ . Выберем сначала значение  $\lambda$  достаточно близким к  $\lambda_*$  так, чтобы работала локальная теория, и зафиксируем параметр  $D$  системы (1), (2) в области устойчивости двухчастотных колебаний. Примером могут служить значения  $\lambda=2.86, D=0.055$ , входящие в приведенный выше промежуток. Будем затем увеличивать значение  $\lambda$ , сохраняя остальные параметры неизменными. Для того, чтобы иметь представление о происходящих в системе фазовых перестройках, была численно определена зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра  $\lambda$  (см. рис. 2), а также зависимость от  $\lambda$  максимального значения переменных  $u_1(t), u_2(t)$  на аттракторе системы (1), (2).

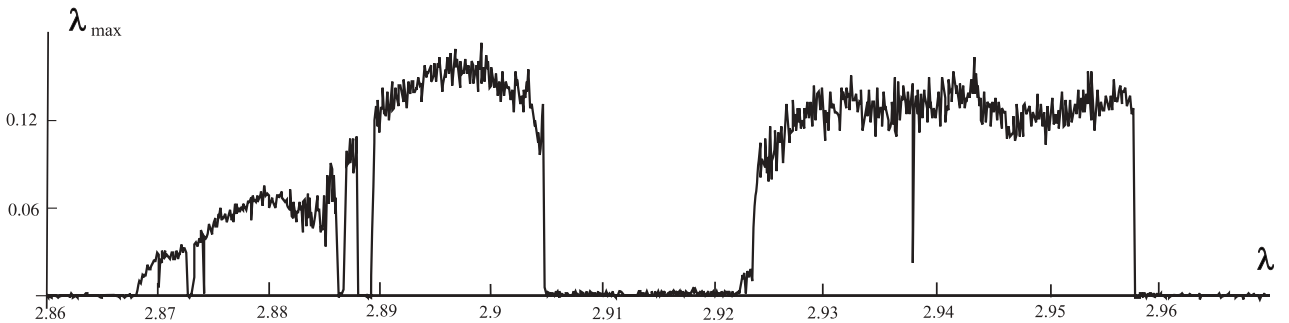


Рис. 2. Зависимость  $\lambda_{max}$  от  $\lambda$  при  $r_1=1.5, r_2=2.6, D=0.055$

Анализируя зависимости  $\lambda_{max}(\lambda)$  и  $u_{max}(\lambda)$ , можно выделить несколько областей изменения  $\lambda$ , для которых поведение решений системы (1), (2)

принципиально различается. По виду рисунка 2 очевидным образом выделяются четыре области, в первой из которых ( $\lambda \in (2.868, 2.884)$ ) старший ляпуновский показатель сильно изрезан и возрастает, для второго соседнего с ним участка ( $\lambda \in (2.8894, 2.9048)$ ) величина  $\lambda_{max}$  отделена от нуля. Третий участок ( $\lambda \in (2.9048, 2.9234)$ ) находится посередине представленного на рисунке 2 графика и для него  $\lambda_{max}$  близок к нулю, наконец, на четвертом участке ( $\lambda \in (2.9235, 2.9577)$ ) реализуется относительно большое значение  $\lambda_{max}$ , отделенное от нуля.

Для значений параметра  $\lambda$  из первой из указанных областей устойчивый инвариантный тор системы (1), (2) теряет устойчивость с возникновением хаотического аттрактора, амплитуда которого сравнима с амплитудой породившего его тора. Вторая и четвертая области характеризуются режимами с сочетанием колебаний большой и малой амплитуды. Представляет интерес вопрос об отличиях колебаний, реализующихся на втором и четвертом участках, который решен ниже статистическими методами. Вторую и четвертую области разделяет зона устойчивых циклов большой амплитуды с выраженными релаксационными свойствами.

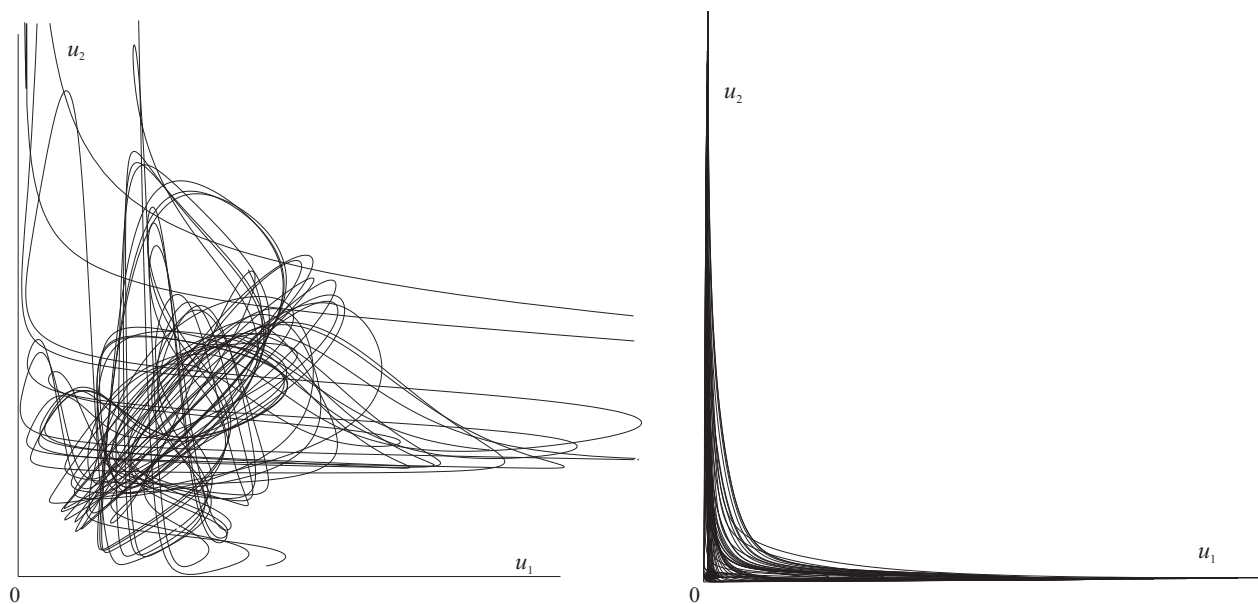


Рис. 3. Хаотические колебания при  $\lambda=2.89$

Проекция хаотического аттрактора системы (1), (2) на плоскость  $(u_1, u_2)$  для значений параметров из второй области содержится на рис. 3 для  $\lambda = 2.89$ . На правом из рисунков изображена траектория с использованием масштаба колебаний большой амплитуды, а на левом выделена часть этой проекции, соответствующая масштабу колебаний малой амплитуды. При

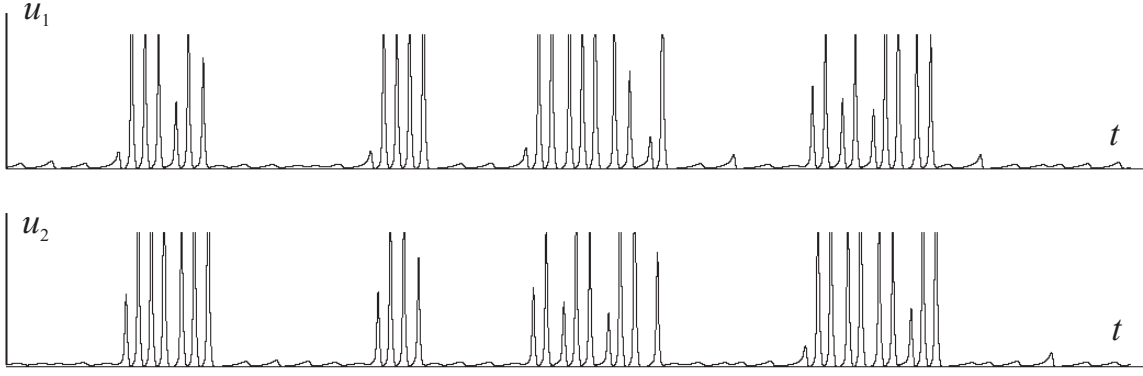


Рис. 4. Зависимость  $u_1, u_2$  от  $t$  при  $\lambda=2.89$

меньших значениях параметра  $\lambda$  проекция фазового портрета оказывается практически идентичной приведенной за исключением выбросов большой амплитуды. На рис. 4 приводится график зависимости  $u_1, u_2$  от  $t$  на промежутке изменения  $t$  длины 350 при  $\lambda=2.89$ , иллюстрирующий сочетание колебаний большой и малой амплитуды.

Суммируя результаты, полученные для рассмотренной области значений параметров, отметим, что в данном случае на границе области применимости локального анализа, в узком промежутке изменения параметров, реализуются сложные устойчивые режимы, характеризующиеся наличием разномасштабных колебаний, причем движения большой амплитуды представляют собой случайную последовательность импульсных пакетов.

Следующий раздел (1.4) главы 1 посвящен изучению новых эффектов, появляющихся в системе (1), (2) при ненулевом запаздывании  $h$  в элементе связи. Действуя аналогично случаю  $h=0$ , строится нормальная форма вида

$$\begin{aligned}
 \eta_1' &= \varkappa \eta_2 \cos(\alpha + \delta - \omega_0 h) + (1 - \varkappa \cos \delta - \eta_1^2) \eta_1, \\
 \eta_2' &= \varkappa \eta_1 \cos(\alpha - \delta + \omega_0 h) + (1 - \varkappa \cos \delta - \eta_2^2) \eta_2, \\
 \alpha' &= -\varkappa \left[ \frac{\eta_2}{\eta_1} \sin(\alpha + \delta - \omega_0 h) + \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin(\alpha - \delta + \omega_0 h) \right] + b(\eta_1^2 - \eta_2^2),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где все коэффициенты определяются по тем же формулам, что и для случая отсутствия запаздывания. Система (7) допускает преобразование к виду (5) при условии  $(1 - \varkappa(\cos \delta - \cos \delta^*)) > 0$ . В этом случае выполняются замены  $\eta_j = \sqrt{1 - \varkappa(\cos \delta - \cos \delta^*)} \eta_j$ ,  $(1 - \varkappa(\cos \delta - \cos \delta^*)) s \rightarrow s$ , в результате которых система (7) переходит в систему

$$\begin{aligned}
\eta_1' &= k\eta_2 \cos(\alpha + \delta^*) + (1 - k \cos \delta^* - \eta_1^2)\eta_1, \\
\eta_2' &= k\eta_1 \cos(\alpha - \delta^*) + (1 - k \cos \delta^* - \eta_2^2)\eta_2, \\
\alpha' &= -k \left[ \frac{\eta_2}{\eta_1} \sin(\alpha + \delta^*) + \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin(\alpha - \delta^*) \right] + b(\eta_1^2 - \eta_2^2),
\end{aligned} \tag{8}$$

идентичную системе (5), при этом

$$\delta^* = \delta - \omega_0 h, \quad k = \frac{\varkappa}{1 - \varkappa(\cos \delta - \cos \delta^*)}. \tag{9}$$

Добавление на плоскость параметров, разбитую на области с разными сценариями фазовых перестроек, зависимостей  $b(\delta^*)$  позволяет определить не только последовательность бифуркаций, происходящих в системе (8), но и установить результаты введения запаздывания в систему (1), (2). А именно, при фиксированных значениях  $r_1$ ,  $r_2$  и увеличении  $h$  точка  $\{b(r_1, r_2, h), \delta^*(r_1, r_2, h)\}$  переходит из области с одним сценарием фазовых перестроек в другую область. Для всех рассмотренных значений параметра  $r_1$  удалось подобрать параметр  $h$  таким образом, чтобы на рис. 1 точки кривой 7, лежащие при  $h=0$  между кривыми 1 и 3, перешли в область выше кривой 3. С точки зрения бифуркационного сценария это означает, что у системы (8) пропадают докритические режимы.

Таким образом, из проделанного локального анализа следует, что для некоторых областей значений параметров за счет изменения запаздывания в элементе связи системы (1), (2) можно добиться такой ситуации, в которой оказывается невозможным сосуществование однородного цикла с другими устойчивыми режимами. Тем самым, учет запаздывания в цепи связи позволяет получить механизм вывода системы из состояния мультистабильности, связанной с сосуществованием нескольких устойчивых режимов.

В качестве примера определены фазовые перестройки системы (8) при  $r_1=1.5$ ,  $r_2=2.6$  и  $h=0.1$  и показано, что при  $\lambda$  близких к критическому значению  $\lambda_*$  исходная система (1), (2) демонстрирует аналогичные фазовые перестройки. Такой сценарий фазовых перестроек сохраняется вплоть до  $\lambda=2.847$ . Далее нами рассмотрен характер разрушения описанного локального сценария при увеличении параметра  $\lambda$ . Заметим, что в случае ненулевого запаздывания приходим к иным результатам, чем найденные ранее для случая  $h=0$ .

В результате каскада различных фазовых перестроек система переходит в состояние разномасштабных колебаний. Момент этого перехода можно оценить по величине старшего ляпуновского показателя, зависимость которого от  $\lambda$  представлена на рисунке 5. Анализируя построенные зависи-

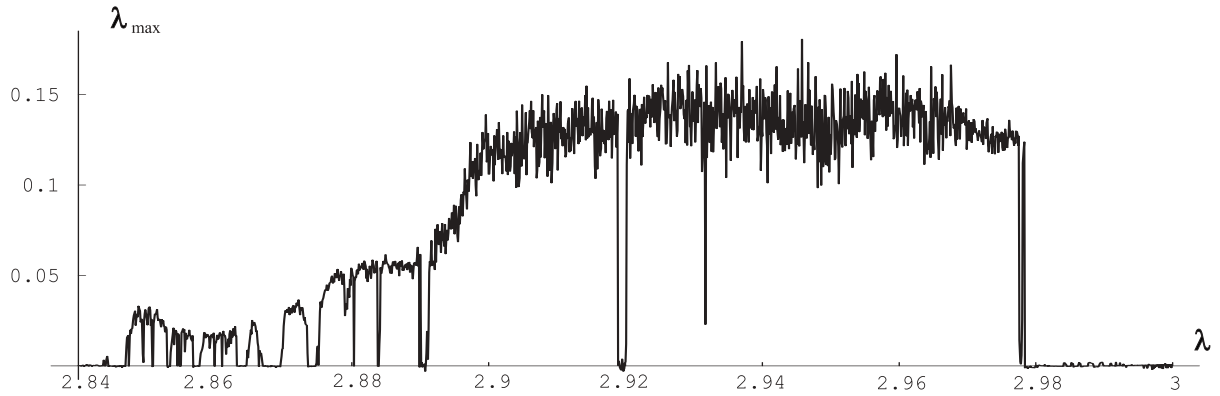


Рис. 5. Зависимость  $\lambda_{max}$  от  $\lambda$  при  $r_1=1.5$ ,  $r_2=2.6$ ,  $D=0.074$ ,  $h=0.1$

мости  $\lambda_{max}(\lambda)$  и  $u_{max}(\lambda)$  можно, как и для случая  $h=0$ , выделить четыре области с различным поведением решений системы (1), (2). Первой области ( $\lambda \in (2.8447, 2.8946)$ ) соответствуют хаотические колебания малой амплитуды, второй смежный с ней участок ( $\lambda \in (2.8947, 2.9188)$ ) характеризуется сочетанием малой и большой амплитуды, с постепенным возрастанием последней. При значениях  $\lambda$  из третьей области ( $\lambda \in (2.9189, 2.9201)$ ) решения системы (1), (2) представляют собой лежащие на торе циклы большого периода. Заметим, что величина данной области изменения параметров значительно сократилась по сравнению с аналогичной областью в случае нулевого запаздывания. Для четвертой области ( $\lambda \in (2.9202, 2.9784)$ ), как и для второй, характерны разномасштабные по амплитуде колебания. Обратим внимание, что так же, как и при отсутствии запаздывания в цепочке связи между осцилляторами, фазовые портреты при значениях  $\lambda$  из второй и четвертой областей визуально совпадают, хотя их статистические характеристики существенно отличаются.

Таким образом, основным результатом введения запаздывания в элемент связи между осцилляторами следует считать возможность борьбы с состояниями мультистабильности, когда сосуществуют режимы с теми или иными признаками синхронизма (однородные циклы, колебания в противофазе), а также более сложно устроенные колебания.

Также подходящий выбор величины запаздывания  $h$  позволяет получить область изменения параметра связи  $D$ , в которой устойчив лишь режим без синхронизации. В случае, когда работают локальные методы, данный эффект состоит в изменении сценария фазовых перестроек системы (1), (2) и переходе к набору бифуркаций, исключающих сосуществование синхронных и несинхронных режимов. Наиболее интересен, впрочем, случай относитель-

но большого  $\lambda$  вне пределов применимости локальных методов, который рассмотрен численно. В этой ситуации введение запаздывания приводит к сокращению области существования циклов, которые соответствуют в данном случае синхронным колебаниям, и расширению области устойчивости неупорядоченных режимов импульсного характера. В качестве дополнительных новых эффектов, к которым приводит введение запаздывания в цепь связи, нужно отметить кроме сужения области существования устойчивого цикла, разделяющего области с разномасштабными колебаниями, значительное уменьшение его амплитуды. Наряду с этим при  $h > 0$  расширяется область хаотических колебаний, которые возникают при меньших значениях  $\lambda$ . Также следует упомянуть увеличение отношения амплитуд больших и малых колебаний в импульсных пакетах по сравнению со случаем отсутствия запаздывания.

Следующий пункт 1.5 посвящен статистической обработке пакетов высокоамплитудных импульсов. Как отмечено выше, во второй и четвертой областях изменения параметра  $\lambda$  реализуются импульсные пакеты большой амплитуды, пример которых приведен на рисунке 3. Основной задачей раздела является выбор подходящих статистических методов, позволяющих разделить режимы, соответствующие этим двум областям.

Для формирования псевдослучайных последовательностей для реализаций  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  нами использовался простейший и наиболее естественный в данной ситуации пороговый фильтр, то есть были занулены те значения функции, которые не превосходят некоторого порога. В качестве величин, более адекватно характеризующих процесс возникновения импульсов или пачек импульсов, были выбраны статистические характеристики двух случайных величин: дискретной случайной величины количества спаек в пачке импульсов и непрерывной случайной величины расстояния между последовательно идущими пачками.

В качестве примера были рассмотрены следующие четыре случая:  $\lambda=2.89$ ,  $D=0.055$ ;  $\lambda=2.897$ ,  $D=0.074$ ;  $\lambda=2.93$ ,  $D=0.074$  и  $\lambda=2.95$ ,  $D=0.074$  при  $h=0$  и  $h=0.1$  (в случае  $\lambda=2.89$  выбирались значения  $h=0$  и  $h=0.02$ ). Первый случай  $\lambda=2.89$  относится к второй области изменения параметра  $\lambda$  (см. рис. 2, 5), два последних  $\lambda=2.93$  и  $\lambda=2.95$  соответствует четвертой области, случай  $\lambda=2.897$  представляет собой переходный процесс между двумя указанными типами колебаний.

Выборка данных для вычисления статистических характеристик осуществлялась следующим образом. Было выбрано пороговое значение амплитуды колебаний равное восьми, при превышении которого считалось, что наблюдается высокоамплитудный импульс. Такое значение было взя-

то в связи с тем, что эмпирически определенная максимальная амплитуда спайка приблизительно равна 30, а колебания малой амплитуды не превышают 1. Средний период колебаний большой амплитуды составляет менее десяти единиц по  $t$ , в связи с этим импульсный пакет считаем законченным, если прошло более 15 единиц времени без спайков. Вычисляя решение системы (1), (2), в соответствии с описанными выше правилами по первой его компоненте удается построить два массива данных

$$\{x_1, \dots, x_N\} \quad (10)$$

для расстояний между пачками импульсов и

$$\{p_1, \dots, p_N\} \quad (11)$$

для числа спайков в каждой пачке.

В процессе получения статических выборок для случайной величины расстояний между пачками импульсов была обнаружена разница, невидимая на взгляд по реализации компонент  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ . Наиболее наглядно её можно продемонстрировать с помощью графика зависимости между предыдущим и последующим отсчетами в (10). Так, при  $\lambda=2.89$ ,  $D=0.055$  и при  $\lambda=2.897$ ,  $D=0.074$ ,  $h=0.1$  в плоскости  $\{x(n), x(n+1)\}$  будет наблюдаться неструктурированное облако точек (см. рис 6а). В случаях  $\lambda=2.93$ ,  $\lambda=2.95$  зависимость  $x(n+1)$  от  $x(n)$  имеет очевидную внутреннюю структуру, которая продемонстрирована на рисунке 6б.

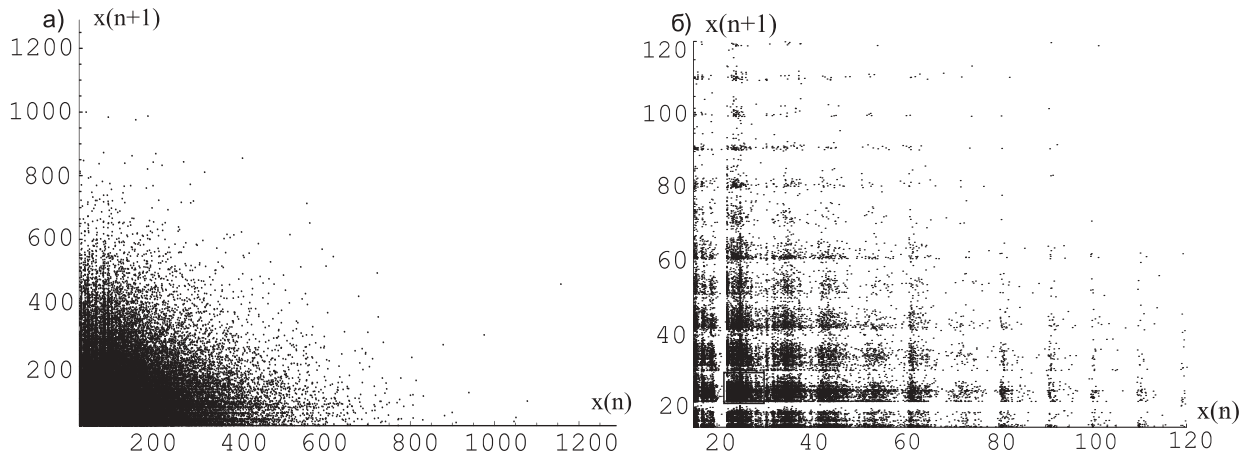


Рис. 6. Зависимость  $x(n+1)$  от  $x(n)$  а)  $\lambda = 2.89$ ,  $h = 0$ ; б)  $\lambda = 2.93$ ,  $h = 0.1$



Далее были рассмотрены различные числовые характеристики массивов данных (10) и (11), обосновывающие их разделение на два класса. Наиболее информативной характеристикой, позволяющей отнести колебательный режим системы (1), (2) к одному из двух классов, являются функции плотности вероятности. По выборкам (10) и (11) для соответствующих случайных величин был проведен регрессионный анализ, с помощью которого определено наилучшее приближение эмпирической функции плотности распределения в смысле наименьших квадратов. В качестве приближающей функции статистической выборки для расстояний между пачками было выбрано показательное распределение, данные для количества спайков в пачке наилучшим образом приближает распределение Пуассона.

Анализируя графики эмпирической функции плотности вероятности и её приближения для случайной величины расстояний между пачками импульсов можно судить, к какому из двух классов относится наблюдаемый режим. Если закон плотности показательного распределения хорошо согласуется с построенной эмпирической функцией плотности вероятности, то в плоскости  $\{x(n), x(n+1)\}$  будет наблюдаться неоформленное облако точек. Если же закон плотности распределения более сложен и недостаточно адекватно приближается функцией плотности показательного распределения, то в проекции на плоскость  $\{x(n), x(n+1)\}$  будет видна сложная структура.

В качестве дополнительных характеристик, с помощью которых возможно разделить два типа режимов, были использованы корреляционный интеграл (корреляционная размерность) и статистическая оценка энтропии. Оказалось, что величина корреляционного интеграла не всегда позволяет надежно разделять режимы. В случае, когда проекция зависимости  $x(n)$  от  $x(n+1)$  представляет собой неструктурированное облако точек, корреляционная размерность превышает аналогичную величину для случая сложной внутренней структуры, наблюдаемой на плоскости  $\{x(n), x(n+1)\}$ . Однако по некоторым выборкам размерность аттрактора определить не удается.

Статистическая оценка нового инварианта мер, названная  $\beta$ -статэнтропией<sup>3</sup>, позволяет более надежно идентифицировать, к какому классу режимов принадлежит исследуемый процесс. Данная оценка наилучшим образом зарекомендовала себя и с точки зрения функциональности, так и с вычислительной стороны.

**Вторая глава** диссертационной работы посвящена изучению модели импульсного нейрона в случае, когда трансмембранный ток ионов  $\text{Na}^+$  также, как и ионов  $\text{K}^+$ , зависит от времени, взятого с запаздыванием. Также

---

<sup>3</sup> Тимофеев, Е. А. Статистически оцениваемые инварианты мер / Е. А. Тимофеев // Алгебра и анализ. — 2005. — Т. 17, № 3. — С. 204–236.

рассматривается модель, в которой электрохимическая активность нейрона обеспечивается переходом ионов калия и хлора с помощью механизма пассивного распределения. В первом случае динамика клетки описывается дифференциальным уравнением с двумя запаздываниями вида

$$\dot{u} = \lambda \left[ -1 - r_1 \exp(-u^2(t-h)) + r_2 \exp(-u^2(t-1)) \right] u, \quad (12)$$

вторая ситуация также моделируется уравнением с двумя запаздываниями с той разницей, что направление токов противоположно

$$\dot{u} = \lambda \left[ -1 + r_1 \exp(-u^2(t-h)) + r_2 \exp(-u^2(t-1)) \right] u. \quad (13)$$

После замены

$$a = \frac{r_2}{r_2 - r_1}, \quad r = 2\lambda \ln(r_2 - r_1), \quad (14)$$

для уравнения (12) и

$$a = \frac{r_2}{r_2 + r_1}, \quad r = 2\lambda \ln(r_2 + r_1), \quad (15)$$

для уравнения (13) характеристический квазимногочлен (12) – (13) допускает более простой вид

$$P(\mu) \equiv \mu + r(ae^{-\mu} + (1-a)e^{-\mu h}). \quad (16)$$

При этом для уравнения (12) получаем  $a > 1$ , а для уравнения (13) величина  $0 < a < 1$ . Отметим, что аналогичный вид принимает характеристический квазимногочлен обобщенного уравнения Хатчинсона с двумя запаздываниями, которое в ряде работ также используется в качестве нейроподобного элемента. Поэтому в пункте 2.2 проводится изучение и данного уравнения.

В пунктах 2.1.1 – 2.1.2 приведена постановка задачи о динамике обобщенного нейронного уравнения с двумя запаздываниями и проводится исследование его характеристического квазимногочлена при различных значениях параметра  $a$ . В отличие от квазимногочлена (3) квазиполином (16) при ненулевом  $h$  в критическом случае может иметь две чисто мнимые пары собственных значений, при этом все остальные его корни лежат в левой комплексной полуплоскости. Учитывая, что в квазимногочлене (16) остается еще один свободный параметр, возникает задача о существовании резонансных соотношений между частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Оказалось, что ситуация для уравнений (12) и (13) существенно различается. Для первого из них старшие резонансы 1:1, 1:2, 1:3 не реализуются, а для второго (уравнение (13)) возможен резонанс 1:2. В частности, справедливы следующие утверждения:

**Лемма 1.** При  $a > 1$ ,  $r > 0$ ,  $0 < h < 1$  характеристический квазимногочлен (16) не может иметь две пары чисто мнимых корней, связанных резонансом 1:1, 1:2 или 1:3.

**Лемма 2.** Пусть  $0 < a < 1$ ,  $r > 0$ ,  $0 < h < 1$ , тогда характеристический квазимногочлен (16) не может иметь две пары чисто мнимых корней, связанных резонансом 1:1 или 1:3. При значениях параметров

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{9 - \sqrt{6}}{18} \approx 0.363917, & h_0 &= \frac{\arccos\left(\sqrt{\frac{a_0}{2(1-a_0)}}\right)}{\omega_0}, \\ r_0 &= \frac{\omega_0}{a_0 \sin(\omega_0) + (1 - a_0) \sin(\omega_0 h_0)}, \end{aligned} \quad (17)$$

квазиполином  $P(\mu)$  имеет две пары чисто мнимых собственных значений вида  $\pm i\omega_0$ ,  $\pm 2i\omega_0$ , где

$$\omega_0 = 2\pi - \arccos\left(-\sqrt{\frac{1 - a_0}{2a_0}}\right), \quad (18)$$

а все остальные его корни лежат в левой комплексной полуплоскости.

Леммы 1,2 позволяют определить наибольшее вырождение при потере устойчивости ненулевого состояния равновесия. Таковым является выход на мнимую ось двух пар корней характеристического квазиполинома, в то время как остальные корни лежат в левой комплексной полуплоскости. Более того, лемма 2 дает условия на параметры, при которых дополнительно реализуется резонанс 1:2.

В пункте 2.1.3 рассмотрена задача о потере устойчивости состояния равновесия уравнения (12) в критическом случае двух пар чисто мнимых собственных значений. В этой ситуации построена укороченная нормальная форма задачи

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \varphi_1 \xi_1 + (a_{11} \xi_1^2 + a_{12} \xi_2^2) \xi_1, \\ \dot{\xi}_2 &= \varphi_2 \xi_2 + (a_{21} \xi_1^2 + a_{22} \xi_2^2) \xi_2, \\ \dot{\tau}_1 &= \psi_1 + b_{11} \xi_1^2 + b_{12} \xi_2^2, \\ \dot{\tau}_2 &= \psi_2 + b_{21} \xi_1^2 + b_{22} \xi_2^2, \end{aligned} \quad (19)$$

параметры которой вычисляются по следующим формулам:

$$\varphi_j + i\psi_j = \frac{i\omega_j}{\lambda P'(i\omega_j)}, \quad a_{jk} + ib_{jk} = A_{jk}, \quad j, k = 1, 2, j \neq k,$$

$$A_{jj} = \frac{1}{u_* P'(i\omega_j)} \left( -i\omega_j((2u_*^2 - 1)(w_0 + w_{jj}) + (3u_* + 2u_*^3) + (w_{jj} - w_0)) + \right. \\ \left. + (P(2i\omega_j) - 2i\omega_j)(u_* - w_{jj} - \frac{1}{2u_*}) + 2\lambda u_*(2u_*^2 - w_0 u_* - 1) \right), \quad j = 1, 2,$$

$$A_{12} = \frac{1}{u_* P'(i\omega_1)} \left( (P(i(\omega_1 + \omega_2)) - i(\omega_1 + \omega_2))(2u_* - w_{12} - 1/u_*) + \right. \\ \left. + (P(i(\omega_1 - \omega_2)) - i(\omega_1 - \omega_2))(2u_* - w_{21} - 1/u_*) + 2\lambda u_*(u_*^2 - w_0 u_* - 1) - \right. \\ \left. - i\omega_1((2u_*^2 - 1)(w_0 + w_{12} + w_{21}) + 2(3u_* + 2u_*^3) - w_0) + i\omega_2(w_{21} - w_{12}) \right),$$

$$A_{21} = \frac{1}{u_* P'(i\omega_2)} \left( (P(i(\omega_1 + \omega_2)) - i(\omega_1 + \omega_2))(2u_* - w_{12} - 1/u_*) + \right. \\ \left. + (P(i(\omega_2 - \omega_1)) - i(\omega_2 - \omega_1))(2u_* - \bar{w}_{21} - 1/u_*) + 2\lambda u_*(u_*^2 - w_0 u_* - 1) - \right. \\ \left. - i\omega_2((2u_*^2 - 1)(w_0 + w_{12} + \bar{w}_{21}) + 2(3u_* + 2u_*^3) - w_0) + i\omega_1(\bar{w}_{21} - w_{12}) \right),$$

$$w_0 = 2u_* - \frac{1}{u_*}, \quad w_{jj} = \frac{(2u_*^2 - 1)(P(2i\omega_j) - 2i\omega_j) + 2i\omega_j}{2u_* P(2i\omega_j)},$$

$$w_{jk} = \frac{1}{u_* P(i(\omega_1 + (-1)^k \omega_2))} \left( i(\omega_1 + (-1)^k \omega_2) + \right. \\ \left. + (2u_*^2 - 1)(P(i(\omega_1 + (-1)^k \omega_2)) - i(\omega_1 + (-1)^k \omega_2)) \right).$$

Система (19) кроме нулевого решения может иметь еще три состояния равновесия, два из которых находятся на осях, а третье — в первом квадранте плоскости  $(\xi_1, \xi_2)$ . Отметим, что для нормальной формы (19) очевидным образом выполнена теорема о соответствии, аналогичная теореме 1. В связи с этим и учитывая, что нулевая неподвижная точка неустойчива, возможны две ситуации поведения ненулевых решений. Одна из них связана с устойчивостью состояний равновесия на осях (эти решения существуют при любых значениях параметров), а вторая — с существованием и устойчивостью решения, обе компоненты которого ненулевые. В первом из этих двух случаев потеря устойчивости состояния равновесия исходного уравнения (12) связана с рождением одночастотного устойчивого режима, во втором же случае ответвляется устойчивый двумерный тор.

Численный анализ коэффициентов системы (19) позволил определить области значения параметров уравнения (12), для которых реализуется каждый из этих случаев. Отметим, что бифуркация двумерного тора с большим отношением частот может рассматриваться как возникновение режимов уравнения (12), близких к режимам так называемой пачечной активности.

Во второй части главы 2 изучаются режимы, ответвляющиеся от состояния равновесия  $u_*$  в ситуации резонанса 1:2 (при значениях параметров, определяемых формулами (17) – (18), и  $r=r_0+\varepsilon$ ). В этом случае в пункте 2.1.4 для уравнения (13) строится укороченная нормальная форма вида

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \gamma_1 \xi_1 + k_1 \xi_1 \xi_2 \cos(\theta + \delta_1), \\ \dot{\xi}_2 &= \gamma_2 \xi_2 + k_2 \xi_1^2 \cos(\theta + \delta_2), \\ \dot{\theta} &= c - 2k_1 \xi_2 \sin(\theta + \delta_1) - k_2 \frac{\xi_1^2}{\xi_2} \sin(\theta + \delta_2),\end{aligned}\tag{20}$$

где

$$\gamma_j = \operatorname{Re}\Phi_j, \quad c = \operatorname{Im}\Phi_2 - 2\operatorname{Im}\Phi_1, \quad \Phi_j = \frac{i\omega_0 j}{\lambda_* P'(i\omega_0 j)}, \quad k_j e^{i\delta_j} = \frac{-2i\omega_0(u_*^2 - 1)}{u_* P'(i\omega_0 j)}.$$

Для системы (20) справедливо следующее полезное утверждение.

**Лемма 3.** Пусть  $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ , тогда любое состояние равновесия системы (20) является неустойчивым.

Поскольку параметры  $\gamma_1, \gamma_2$  системы (20) принимают положительные значения, то выполнена лемма 3 и устойчивые состояния равновесия отсутствуют. Неустойчивость неподвижных точек системы (20) вынуждает для определения динамики системы найти следующие по порядку малости слагаемые в нормальной форме (20). Вычисления показали, что определение этих величин приводит к уточненной нормальной форме

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \gamma_1 \xi_1 + k_1 \xi_1 \xi_2 \cos(\theta + \delta_1 + \delta_{10}) + \\ &\quad + \varepsilon[\gamma_{10} \xi_1 + k_{10} \xi_1 \xi_2 \cos(\theta + \delta_1 + \delta_{10}) + m_{11} \xi_1^2 + m_{12} \xi_2^2] \xi_1, \\ \dot{\xi}_2 &= \gamma_2 \xi_2 + k_2 \xi_1^2 \cos(\theta + \delta_2 + \delta_{20}) + \\ &\quad + \varepsilon[\gamma_{20} \xi_2 + k_{20} \xi_1^2 \cos(\theta + \delta_2 + \delta_{20}) + m_{21} \xi_1^2 + m_{22} \xi_2^2] \xi_2, \\ \dot{\theta} &= c - 2k_1 \xi_2 \sin(\theta + \delta_1 + \delta_{10}) - k_2 \frac{\xi_1^2}{\xi_2} \sin(\theta + \delta_2 + \delta_{20}) + \\ &\quad + \varepsilon[c_0 - 2k_{10} \xi_2 \sin(\theta + \delta_1 + \delta_{10}) - k_{20} \frac{\xi_1^2}{\xi_2} \sin(\theta + \delta_2 + \delta_{20}) + c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2].\end{aligned}\tag{21}$$

Величины  $\gamma_{j0}$ ,  $k_{j0}$ ,  $\delta_{j0}$ ,  $m_{jk}$ ,  $c_j$  ( $j, k=1, 2, j \neq k$ ), вычисленные в диссертационной работе, имеют громоздкий вид и здесь не приводятся.

Анализ системы (21) показал, что в этой ситуации состояние равновесия  $u_*$  уравнения (13) теряет устойчивость грубо и существуют докритические устойчивые колебательные режимы.

В пункте 2.1.5 выполнен численный эксперимент, иллюстрирующий последовательность фазовых перестроек, полученные аналитически.

В пункте 2.2 ставится и исследуется задача о динамике обобщенного уравнения Хатчинсона с учетом двух возрастных групп

$$\dot{N} = r[1 - aN(t-1) - (1-a)N(t-h)]N \quad (22)$$

в случае резонанса 1:2. Результаты этого изучения вполне аналогичны результатам, полученным в предыдущем пункте.

В **приложении А** приводятся выдержки из программного кода для пакета символьных вычислений Mathematica, а также на языке С для среды Builder.

## Список публикаций по теме диссертации

### Статьи в изданиях из списка ВАК

1. *Киселева<sup>4</sup>, Е. О.* Локальная динамика уравнения Хатчинсона с двумя запаздываниями в критическом случае резонанса 1:2 / *Е. О. Киселева* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 53–57.
2. *Глызин, С. Д.* Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа / *С. Д. Глызин, Е. О. Киселева* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2008. — Т. 15, № 2. — С. 75–88.
3. *Глызин, С. Д.* Учет запаздывания в цепочке связи между осцилляторами / *С. Д. Глызин, Е. О. Киселева* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2010. — Т. 17, № 2. — С. 140–150.

### Работы, опубликованные в других журналах

4. *Киселева, Е. О.* Асимптотические свойства решений нормальной формы одного класса динамических систем с внутренним резонансом 1:2 / *Е. О. Киселева* // Сборник лучших научно-исследовательских работ студентов. — Ярославль: ЯрГУ, 2007. — С. 28–29.

---

<sup>4</sup>Работа Овсянниковой Е.О. опубликована под фамилией Киселева

5. *Киселева, Е. О.* Локальная динамика уравнения Хатчинсона с двумя запаздываниями в критическом случае резонанса 1:2 / *Е. О. Киселева* // Тезисы докладов 60-й научно-технической конференции студентов, магистрантов и аспирантов. — Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2007. — С. 221.
6. *Киселева, Е. О.* Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа / *Е. О. Киселева* // Материалы докладов XV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» — М.: Издательство МГУ; СП МЫСЛЬ, 2008. — С. 20–21.
7. *Глызин, С. Д.* Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа / *С. Д. Глызин, Е. О. Киселева* // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. — Самара: СамГТУ, 2008. — С. 77–80.
8. *Киселева, Е. О.* Локальный анализ взаимодействия осцилляторов нейронного типа / *Е. О. Киселева* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции Воронежской зимней математической школы. — Воронеж: изд. ВГУ, 2009. — С. 84–86.
9. *Киселева, Е. О.* Генерация и идентификация импульсных пакетов в простейших системах нейронного типа / *Е. О. Киселева* // Материалы IX Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур». — Саратов: РИО журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», 2010. — С. 111–112.