На правах рукописи

Малозёмова Дарья Владимировна

Специальные асимптотические методы исследования высокомодовых стационарных режимов в системах с распределенными параметрами

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2011

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Научный руководитель –	доктор физико-математических наук, профессор Колесов Андрей Юрьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Розов Николай Христович
	доктор физико-математических наук, профессор Кубышкин Евгений Павлович
Ведущая организация –	Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

Защита состоится “___” ноября 2011 г. в __ часов __ минут на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова по адресу: г. Ярославль, ул.Полушкина роща, д.1.

Автореферат разослан “___”__________ 2011 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Глызин С.Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

В диссертационной работе рассматриваются специальные алгоритмы исследования феномена буферности в приложении к различным задачам, начиная от моделей из механики до моделей из математической физики.

О феномене буферности принято говорить в случае, когда в фазовом пространстве некоторой динамической системы при подходящем выборе параметров можно гарантировать сосуществование любого фиксированного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и т.д.).

Впервые этот феномен был отмечен еще в работах Витта [1], однако точная математическая постановка и соответствующий аналитический аппарат был разработан гораздо позднее в работах Колесова Ю.С., Мищенко Е.Ф., Колесова А.Ю., Розова Н.Х.[2,3]

Понятие «буферность» предполагает наличие некого бифуркационного процесса, в результате которого происходит неограниченное увеличение числа сосуществующих аттракторов. Упомянутый процесс характерен, главным образом, для систем с распределенными параметрами, хотя может наблюдаться и в системах с конечным числом степеней свободы.

Зачастую, реализация в системе феномена буферности приводит к сильному усложнению динамики системы с изменением параметров. В таких системах возникают так называемые диссипативные структуры, т.е. устойчивые самоподдерживающиеся образования с характерными пространственно-временными формами. Подобные структуры представляют интерес для исследователей, изучающих вопросы происхождения жизни, проблемы предбиологической эволюции и морфогенеза, они также могут быть интересны в связи с изучением законов популяционной динамики и т. д. Следует отметить, что для возникновения подобного феномена система с необходимостью должна быть открытой, а ее математическая модель — нелинейной.

---

[1] Витт А.А. Распределенные автоколебательные системы // Журн. технич. физ. 1934. — Т. 4, № 1. — С. 144-157.

[2] Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[3] Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 408 с.

Цель работы

Целью предпринятых автором исследований являлись разработка, адаптация и применение универсальных асимптотических методов анализа динамических систем различной природы, позволяющих получить строгие аналитические результаты о реализации в изучаемых системах феномена буферности.

Методы исследований

В диссертационной работе используются специальные асимптотические методы для исследования быстро осциллирующих устойчивых режимов. В их основе лежит классический метод нормальных форм и так называемый метод самоподобия, сущность которого поясняется в тексте диссертационной работы.

Положения, выносимые на защиту

1. Для уравнения с полутора степенями свободы были проведены исследования, позволяющие обосновать утверждение о реализации гамильтонового сценария буферности. То есть показано, что при подходящем выборе параметров в его фазовом пространстве существует любое наперед заданное конечное число устойчивых периодических решений как вращательного так и колебательного типа.

2. Для дифференциально-разностного уравнения второго порядка, описывающего работу RCL-генератора с запаздыванием в цепи обратной связи показано, что с увеличением параметра запаздывания происходит каскад бифуркаций, в результате которых может сосуществовать сколь угодно большое количество устойчивых циклов.

3. Для специальных обобщений уравнения Свифта-Хоэнберга с граничными условиями типа Дирихле установлено, что при увеличении длины промежутка изменения пространственной переменной и при фиксированной достаточно малой надкритичности количество сосуществующих устойчивых состояний равновесия у этих краевых задач неограниченно растет.

Научная новизна

Научная новизна результатов диссертационной работы состоит в том, что феномен буферности был обнаружен для нового класса краевых задач и динамических систем с запаздыванием. Эти результаты представляются новым и интересным дополнением уже существующих на данный момент исследований, посвященных феномену буферности.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Методы, применяемые в в данной работе, могут быть использованы в дальнейших исследованиях сложного поведения нелинейных краевых задач и систем дифференциально-разностных уравнений, связанного с мультистабильностью.

Материал диссертации представляет интерес для специалистов в области дифференциальных уравнений, нелинейной динамики и хаоса. Работа может быть востребована во многих отечественных и международных математических центрах, где ведутся исследования, связанные с дифференциальными уравнениями и их приложениями.

Апробация результатов

Основные результаты работы докладывались на научном семинаре, проводимом научно-образовательным центром ЯрГУ "Нелинейная динамика" , а также на семинаре кафедры дифференциальных уравнений МГУ в октябре 2009, и обсуждались на научных конференциях:

1) Воронежская математическая школа Крейна, январь 2008 года;

2) III Международная конференция, посвященная 85-летию Л.Д. Кудрявцева, март 2008;

3) 61-ая научно-техническая конференция студентов, магистрантов, и аспирантов, посвященная 1000-летию Ярославля, апрель 2008;

4) Международная конференция научно-образовательных центров, посвященная 10-летию программы BRHE в октябре 2008 года;

5) Всероссийская выставка научно-технического творчества молодежи НТТМ-2009, 24-27 июня;

6) Семинар кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова "Качественная теория дифференциальных уравнений" , Москва, 9 октября 2009 г.

7) XLVIII Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск, 10-14 апреля 2010;

8) Nonlinear Dynamics on Networks, Киев, июль 5-9 2010;

9) Research group "Dynamics and synchronization of complex systems", Research Seminar, Humboldt-Universität zu Berlin, October 11, 2010.

10) First German-Russian Interdisciplinary Workshop on the Structure and Dynamics of Matter, Berlin, October 18-20, 2010.

11) Всероссийский конкурс научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук в рамках всероссийского фестиваля науки, РГСУ, Москва, сентябрь 24, 2011.

Исследования по теме диссертационной работы были отмечены дипломом за победу во Внутривузовском конкурсе инновационных проектов аспирантов и студентов по приоритетным направлениям науки и техники "Молодежь и наука" 2009, медалью "Лауреат ВВЦ" Всероссийской выставки научно-технического творчества молодежи НТТМ-2009, а так же дипломом за первое место во Всероссийском конкурсе научно-исслеовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук в рамках Всеросийского фестиваля науки по направлению "Дифференциальные уравнения и функциональный анализ" 2011.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 10 работах, из них 4 статьи в научных журналах списка ВАК и 6 тезисов докладов, 2 из них опубликованы в тезисах международных конференций.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Диссертация содержит 17 рисунков. Общий объем диссертации составляет 79 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** описана сущность исследуемого явления, постановка всех рассмотренных задач, приводится общая характеристика работы, а также изложено содержание диссертации по главам и краткий обзор литературы по тематике диссертации.

Первая глава посвящена изучению дифференциального уравнения маятникового типа следующего вида:

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + \sin x = \varepsilon a \cos \nu t, \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1,\ a > 0,\ \nu > 0$.

В пункте 1.1 описывается постановка задачи и обсуждаются физический смысл, кратко упоминаются уже известные особенности динамики подобных систем, а также формулируется результат исследований системы (1) в виде теоремы 1.

При $\varepsilon = 0$ исследуемое уравнение обращается в уравнение математического маятника, которое, как известно, обладает помимо обычных (колебательных) периодических решений $x(t)$, $x(t+T) \equiv x(t)$, $T > 0$ ещё и вращательными периодическими движениями $x(t)$, для которых $x(t+T) \equiv x(t) + 2\pi m$, при некотором целом $m \neq 0$.

В связи с этим вводятся в рассмотрение две серии множеств. Через Ω_n^1 обозначим совокупность наборов параметров (ε, a, ν), при которых уравнение (1) имеет не менее n различных устойчивых колебательных периодических решений, а через Ω_n^2 обозначим аналогичное множество для вращательных периодических движений.

Теорема 1.1 *Множество $\Omega_n^1 \cap \Omega_n^2$ при любом $n \in \mathbb{N}$ не пусто.*

Доказательство приведенной теоремы проводится в пунктах 1.2 и 1.3 отдельно для вращательных и колебательных решений соответственно. Общая схема исследований одинакова и заключается в следующем.

Поскольку в фазовом пространстве невозмущенной системы (1) существует сепаратрисный контур, заполненный замкнутыми траекториями периодических решений, то при периодическом возмущении среди замкнутых кривых невозмущенной гамильтоновой системы выделяются резонансные уровни. После подходящих замен производится переход к системе, для которой достаточно просто выписывается условие существование неподвижных точек у отображения Пуанкаре. Используя асимптотические методы, удается установить факт наличия счетного множества начальных условий, порождающих в исходной системе колебательные и вращательные решения.

Анализ устойчивости полученных решений на основе асимптотических методов позволил сделать вывод, что периодические решения, как в случае вращательных, так и в случае колебательных решений, рождаются парами в результате бифуркации типа седло-узел в окрестности разрушившегося сепаратриссного контура автономной системы $\ddot{x} + \sin x = 0$.

В пункте 1.4 обсуждаются проведенные численные исследования, демонстрирующие возникающие в связи с буферностью мультистабильность и переходный хаос. Также даётся физическая интерпретация данного феномена для системы (1) и описываются общие закономерности феномена буферности.

Во второй главе вводится в рассмотрение некоторый аналог генератора с RCLG-распределенными параметрами в цепи обратной связи и с нелинейным элементом лампового типа. В пункте 2.1 описывается физический объект исследований, выводится изучаемая математическая модель и формулируется главный результат, который затем и доказывается.

Объектом анализа главы 2 является дифференциально-разностное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x = F\big(kx(t-\theta)\big), \tag{2}$$

где $0 < a < \sqrt{2}$, $c_2 > 0$, c_1 – любое, а

$$F(x) = -x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + ...$$

В качестве пространства начальных условий (2) берётся $C[-\theta, 0] \times \mathbb{R}$ и ставится вопрос о существовании и устойчивости его периодических решений, бифурцирующих из нуля при увеличении параметра θ.

Теорема 2.2 *Пусть значение параметра $0 < a < \sqrt{2}$ фиксировано. Для любого наперед заданного натурального n существуют значения положительных параметров $k < 1$ и запаздывания θ, что в системе существует не менее n устойчивых периодических решений.*

Доказательство приведенной теоремы распадается на несколько частей. Пункте 2.2 излагается линейный анализ устойчивости нулевого состояния равновесия.

Анализ корней вида $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$ характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 + k\, e^{-\lambda\theta} = 0 \tag{3}$$

показал, что при

$$(a, k) \in \Big\{(a, k) \mid 0 < a < \sqrt{2},\ \sqrt{1-\omega_0^4} < k < 1\Big\},$$

где $\omega_0 = \sqrt{1 - a^2/2}$, уравнение (3), имеет на полуоси $\omega > 0$ ровно два корня $\omega_\pm^2 = \omega_0^2 \pm \sqrt{k^2 + \omega_0^4 - 1}$. Более того, исходное уравнение (3) может иметь на мнимой оси только корни $\lambda = \pm i\omega_-$ или $\lambda = \pm i\omega_+$ при запаздываниях, равных соответственно

$$\theta_n^- = \frac{\varphi_-}{\omega_-} + \frac{2\pi}{\omega_-}n, \quad \theta_n^+ = \frac{\varphi_+}{\omega_+} + \frac{2\pi}{\omega_+}n, \tag{4}$$

где $\varphi^{\pm} = \arccos\left((\omega_{\pm}^2 - 1)/k\right),\ n = 0, 1, 2, ...$

Приходим к выводу, что область неустойчивости по параметру θ нулевого решения уравнения (2) имеет ячеистый вид

$$\theta \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (\theta_n^+, \theta_n^-). \tag{5}$$

Заметим, что поскольку с ростом n фигурирующие в (5) интервалы начинают пересекаться во все большем числе, то при $\theta \to \infty$ ненулевое состояние равновесия заведомо неустойчиво и степень его неустойчивости неограниченно растет.

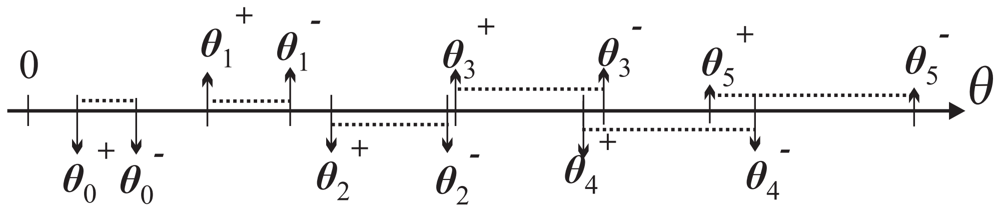

Рис. 1. Схематическое изображение области (2.2.5) неустойчивости нулевого решения.

Однако при увеличении θ состав корней уравнения (3), находящихся в полуплоскости $Re\lambda > 0$, постоянно обновляется. Следовательно при $\theta \to \infty$ в уравнении (2) должна происходить бесконечная последовательность бифуркаций рождения и смерти периодических решений.

В **пункте 2.2** обсуждается вопрос о существовании и устойчивости периодических решений. Из асимптотических разложений показывается, что при фиксированном a и при дополнительном предположении

$$k = k_0 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{6}$$

где $k_0 = \sqrt{1 - \omega_0^4}$, естественно положить

$$\theta = \theta_0 + \delta\sqrt{\varepsilon}, \tag{7}$$

где параметр δ, порядка единицы, отвечает за изменение θ на интервале $(\theta_0^+(\varepsilon), \theta_0^-(\varepsilon))$.

В уравнении (2) производилась замена времени

$$\tau = \omega_0(\varepsilon, \delta)\, t, \quad \omega_0(\varepsilon, \delta) = \omega_0 + \sqrt{\varepsilon}\,\omega_1(\delta) + \varepsilon\,\omega_2(\delta) + ..., \tag{8}$$

где $\omega_0 = \sqrt{1 - a^2/2}$, что позволило искать его периодическое решение в виде ряда по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$x = \sqrt{\varepsilon}\, x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^{3/2} x_2(\tau) + \varepsilon^2 x_3(\tau) + ..., \quad x_0(\tau) = \xi\,[e^{i\tau} + e^{-i\tau}], \tag{9}$$

где $\xi = \xi(\delta)$ – неизвестная вещественная постоянная, подлежащая определению вместе с постоянными ω_1, ω_2, ... в ходе алгоритма, а функции $x_j(\tau)$, $j \geqslant 1$, периодичны по τ с периодом 2π.

Лемма 2.1 *При выполнении условий (6), (7) и при всех ε, δ, удовлетворяющих неравенствам*

$$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \qquad -\Delta_+(\varepsilon) < \delta < \Delta_-(\varepsilon), \tag{10}$$

уравнение (2) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$x = x_0(\tau, \varepsilon, \delta), \qquad d\tau/dt = \omega_0(\varepsilon, \delta), \tag{11}$$

$$x_0(\tau, \varepsilon, \delta)\big|_{\delta=\mp\Delta_\pm(\varepsilon)} \equiv 0; \quad \omega_0(\varepsilon, \mp\Delta_\pm(\varepsilon)) = \omega_\pm(\varepsilon), \tag{12}$$

где $2\pi-$периодическая по τ функция $x_0(\tau, \varepsilon, \delta)$ и частота $\omega_0(\varepsilon, \delta)$ раскладываются в ряды (8), (9), сходящиеся равномерно по δ из любого фиксированного отрезка

$$[\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_*, \Delta_*). \tag{13}$$

Полагая, далее,

$$x_n(\tau, \theta, \varepsilon) = x_0(\tau, \varepsilon, \delta)\big|_{\delta=\delta_n(\theta,\varepsilon)}, \;\; \omega_n(\theta, \varepsilon) = \omega_0(\varepsilon, \delta)\big|_{\delta=\delta_n(\theta,\varepsilon)}, \tag{14}$$

где $\delta_n(\theta, \varepsilon)$ находится из соотношения

$$\theta = n\frac{2\pi}{\omega_0(\varepsilon, \delta)} + \theta_0 + \sqrt{\varepsilon}\,\delta, \tag{15}$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.3 *Пусть выполнено условие (6). Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ на каждом из интервалов*

$$\theta_n^+(\varepsilon) < \theta < \theta_n^-(\varepsilon), \quad n = 1, 2, ..., \tag{16}$$

уравнение (2) имеет цикл

$$x = x_n(\tau, \theta, \varepsilon), \quad d\tau/dt = \omega_n(\theta, \varepsilon). \tag{17}$$

Заметим, что поскольку параметры ε и θ независимы, то при фиксированном $\varepsilon > 0$ и при $\theta \to \infty$ количество сосуществующих циклов (17) неограниченно увеличивается (имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}\,\theta$). При этом, однако их состав постоянно обновляется, так как каждый цикл существует лишь в ячейке (16). Тем самым, при $\theta \to \infty$ наблюдается бесконечная последовательность бифуркаций их рождения и смерти.

В пункте 2.4 формулируется результат, решающий вопрос об устойчивости построенных выше циклов. Для этого предлагается зафиксировать произвольно два числа δ_1 и δ_2, удовлетворяющие неравенствам

$$-\Delta_*/\sqrt{3} < \delta_1 < \delta_2 < \Delta_*/\sqrt{3}, \tag{18}$$

и положим при $n = 1, 2, ...$

$$\theta_n^*(\varepsilon) = n\frac{2\pi}{\omega_0(\varepsilon, \delta_1)} + \theta_0 + \delta_1\sqrt{\varepsilon}, \tag{19}$$

$$\theta_n^{**}(\varepsilon) = n\frac{2\pi}{\omega_0(\varepsilon, \delta_2)} + \theta_0 + \delta_2\sqrt{\varepsilon}. \tag{20}$$

Теорема 2.4 *Пусть выполнено условие (6). Тогда найдется достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_1, \delta_2) > 0$ такое, что при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и при каждом $n \geqslant 0$ цикл (17) уравнения (2) экспоненциально орбитально устойчив на отрезке*

$$\theta_n^*(\varepsilon) \leqslant \theta \leqslant \theta_n^{**}(\varepsilon). \tag{21}$$

Доказательство этой теоремы основано на анализе мультипликаторов линеаризованной на периодическом решении $x_n(\tau, \theta, \varepsilon)$ системы и разделяется на два этапа. Первым делом доказывается, что у системы при любом n нет мультипликаторов, принадлежащих области

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geqslant 1, \ \lambda \neq 1\}.$$

Наличие одного мультипликатора $\lambda = 1$ очевидно, поэтому в дальнейшем требуется доказывать его единственность и простоту. Доказательство основывается на рассмотрении асимптотик по двум независимо стремящимся к нулю величинам: исходного параметра задачи ε и комплексной величины z, введенной специально и отвечающей за приближение корней к $\lambda = 1$.

Подведем итог. Проведенный в главе 2 анализ показывает, что при фиксированном $\varepsilon > 0$ и при $\theta \to \infty$ отрезки (21) начинают пересекаться во все большем количестве, а, значит, у рассматриваемой системы неограниченно растет число сосуществующих устойчивых циклов (17). Причем состав циклов при росте запаздывания постоянно обновляется, так как каждый из них "живет" лишь в ячейке (16). Стоит также отметить, что все периодические решения (17) получаются с помощью описанного выше принципа подобия из одного уникального цикла (11).

Упомянутые выводы были проиллюстрированы результатами численных исследований. Результаты наблюдений демонстрируют эволюцию устойчивых периодических решений системы при последовательном изменении величины запаздывания θ и фиксированных значениях параметров a и k

Третья глава посвящена изучению обобщения пространственно-одномерного уравнения Свифта-Хоэнберга, а именно нелинейному параболическому уравнению вида

$$\partial_t w = \varepsilon w - (1 + \partial_x^2)^2 w + f(w), \tag{22}$$

где $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $w = w(t, x)-$ вещественная скалярная функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = \partial_x^2 w|_{x=0} = \partial_x^2 w|_{x=l} = 0. \tag{23}$$

$\partial_t = \partial/\partial t, \partial_x = \partial/\partial x$, $\varepsilon-$ положительный параметр (надкритичность). Относительно функции $f(w)$ предполагаем, что $f(w) \in C^\infty$ нечётна и $f'(0) = 0$, $f'''(0)/3! = a < 0$.

После выполнения в краевой задаче (22), (23) замены $\pi x/l \to x$, уравнение примет вид

$$\partial_t w = \varepsilon w - (1 + \nu\, \partial_x^2)^2 w + f(w), \tag{24}$$

$$w|_{x=0} = w|_{x=\pi} = \partial_x^2 w|_{x=0} = \partial_x^2 w|_{x=\pi} = 0, \tag{25}$$

где $\nu = \pi^2/l^2$.

Фазовым пространством для данной задачи служит $\overset{\circ}{W}{}_2^4(0, \pi)$, где $\overset{\circ}{W}{}_2^4-$ замыкание в метрике соболевского пространства $W_2^4(0, \pi)$ линеала гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям (25). Нас интересует существование и устойчивость ее пространственно неоднородных состояний равновесия (так называемых диссипативных структур), бифурцирующих из нуля при уменьшении параметра ν и при фиксированной надкритичности ε, подчиненной требованиям

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Линейный анализ устойчивости состояния равновесия $w = 0$ задачи (25), (24) показал, что при

$$\nu \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{\nu_-(\varepsilon)}{n^2}, \frac{\nu_+(\varepsilon)}{n^2}\Big),\ \nu_\pm(\varepsilon) = 1 \pm \sqrt{\varepsilon} \tag{26}$$

оно экспоненциально неустойчиво.

В пункте 2.2 делается дополнительное предположение что

$$0 < \varepsilon << 1, \quad \nu = 1 + \delta\sqrt{\varepsilon}, \;\; \delta \in (-1, 1), \tag{27}$$

где параметр δ, имеющий порядок единицы, отвечает за изменение ν на требуемом интервале $(\nu_-(\varepsilon), \nu_+(\varepsilon))$.

Для отыскания диссипативных структур краевой задачи (24), (25) при условиях (27) используется аналог стандартного одночастотного метода, т.е. подставим в (24), (25) ряд по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$ вида

$$w = \sqrt{\varepsilon} w_1(x) + \varepsilon w_2(x) + \varepsilon^{3/2} w_3(x) + ..., \quad w_1(x) = \xi_0 \sin x, \tag{28}$$

где ξ_0— неизвестная "амплитуда".

Теорема 3.5 *При выполнении условий (27) краевая задача (24) имеет две экспоненциально устойчивые диссипативные структуры:*

$$w_1(x, \delta, \varepsilon) = w_0(x, \delta, \varepsilon), \quad w_2(x, \delta, \varepsilon) = w_0(\pi - x, \delta, \varepsilon), \tag{29}$$

$$w_0(x, -1, \varepsilon) \; = \; w_0(x, 1, \varepsilon) \; \equiv \; 0, \tag{30}$$

где функция $w_0(x, \delta, \varepsilon)$ допускает (в метрике пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^4(0, \pi)$) равномерное по δ из любого фиксированного отрезка $[\delta_1, \delta_2] \in (-1, 1)$ асимптотическое представление (28).

Из установленной теоремы и обсуждаемого в пункте 3.2 принципа подобия немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 3.6 *Найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, что при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и при каждом натуральном n на соответствующем интервале $(\nu_-(\varepsilon)/n^2, \nu_+(\varepsilon)/n^2)$ изменения параметра ν краевая задача (24) имеет пару диссипативных структур*

$$w_n^1(x, \nu, \varepsilon) = w_0(nx, \delta_n(\nu, \varepsilon), \varepsilon), \; w_n^2(x, \nu, \varepsilon) = w_0(\pi - nx, \delta_n(\nu, \varepsilon), \varepsilon), \tag{31}$$

где

$$\delta_n(\nu, \varepsilon) = (n^2\nu - 1)/\sqrt{\varepsilon}. \tag{32}$$

Поскольку в данной теореме параметры ε и ν независимы, то при фиксированном $\varepsilon > 0$ и при $\nu \to 0$ количество сосуществующих диссипативных структур (31) неограниченно увеличивается (имеет порядок $\sqrt{\varepsilon/\nu}$). При этом их состав постоянно обновляется, так как каждая пара состояния равновесия (31) существует лишь в своей ячейке. Тем самым, при $\nu \to 0$ наблюдается бесконечная последовательность бифуркаций их рождения и смерти.

В пункте 3.3 изучается вопрос об устойчивости найденных стационарных решений (31). Фиксируем произвольно два числа δ_1 и δ_2, удовлетворяющие неравенствам
$$-1/\sqrt{3} < \delta_1 < \delta_2 < 1/\sqrt{3}. \tag{33}$$
Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.7 *Найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_1, \delta_2) \in (0, 1)$, что при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и при каждом $n \geqslant 1$ пара диссипативных структур (31), (32) краевой задачи (24) экспоненциально устойчива на отрезке*

$$[(1 + \delta_1\sqrt{\varepsilon})/n^2, (1 + \delta_2\sqrt{\varepsilon})/n^2] \tag{34}$$

изменения параметра ν.

Для доказательства фиксируется произвольно номер n и на состоянии равновесия $w = w_n^1(x, \nu, \varepsilon)$ линеаризуется краевая задача (24). Затем выполняется замена $nx \to x$ и ищутся ее решения в форме Эйлера, т.е. в виде $w = h(x)\exp(\lambda t)$. В результате для определения $h(x)$ и возможных значений $\lambda \in C$ приходим к спектральной задаче

$$-(1 + (1 + \delta\sqrt{\varepsilon})\partial_x^2)^2 h + (\varepsilon + f'(w_0(x, \delta, \varepsilon)))h = \lambda h, \tag{35}$$
$$h|_{x=0} = h|_{x=n\pi} = \partial_x^2 h|_{x=0} = \partial_x^2 h|_{x=n\pi} = 0, \tag{36}$$

где $w_0(x, \delta, \varepsilon)$ – функция из (29), а параметр δ задан равенством $\delta = \delta_n(\nu, \varepsilon)$(см. (32)). Проблема устойчивости пары состояний равновесия (31), (32) свелась к анализу расположения спектра задачи (35), (36). В связи с этим обратим внимание, что в силу самосопряженности фигурирующего в левой части уравнения (35) дифференциального оператора этот спектр состоит из счетного числа действительных собственных значений.

Наряду с задачей (35), (36) рассматривается вспомогательную краевая задача
$$-(1 + \partial_x^2)^2 h = \lambda h, h|_{x=0,n\pi} = \partial_x^2 h|_{x=0,n\pi} = 0,$$
получающаяся из исходной при $\varepsilon = 0$. Непосредственная проверка показывает, что ее собственные значения имеют вид

$$\lambda(z) = -(1 - z^2)^2,\ z = m/n,\ m = 1, ..., \tag{37}$$

а отвечающие им собственные функции задаются равенствами $w = \sin(mx/n), m > 0$. Из формул (37) вытекает, что равномерно по n все пределы при $\varepsilon \to 0$ собственных значений задачи (35), (36) лежат на полуоси $(-\infty, 0]$. Однако, в силу того, что $\lambda(z)|_{z=1} = 0$, заведомо существуют и так называемые критические точки спектра, стремящиеся к нулю при $\varepsilon \to 0, n \to \infty$. Ясно, что именно от их знаков зависит в конечном итоге устойчивость интересующих нас состояний равновесия.

При построении асимптотики критических собственных значений существенно то обстоятельство, что при $\varepsilon = 0$ отвечающие им собственные функции

$$h = \sin(1+z)x, z = k/n, k \in \mathbb{Z} \tag{38}$$

можно представить в виде

$$h = h_1(x)\cos(zx) + h_2(x)\sin(zx), \tag{39}$$

$$h_1(x)|_{x=0,\pi} = \partial_x^2 h_1(x)|_{x=0,\pi}, \;\; \partial_x h_2(x)|_{x=0,\pi} = \partial_x^3 h_2(x)|_{x=0,\pi}; \tag{40}$$

Предлагается искать их в указанном виде и при $\varepsilon > 0$. Подставляя выражение (39) в уравнение (35), получаем новую систему с двумя параметрами: непрерывным ε и дискретным z. Однако изучать полученную систему, дополнив её естественными граничными условиями, удобнее в более общем случае, а именно когда z меняется непрерывно на некотором отрезке $|z| \leqslant z_0$, где $z_0 > 0$ достаточно мало. То же самое относится и к параметру δ: считаем, что он независимо от n, ε, ν непрерывно меняется на отрезке $[\delta_1, \delta_2]$ (см. (33)).

Для полученной системы производится асимптотический расчет собственных значений задачи стремящихся к нулю при $\varepsilon, z \to 0$ на основании которого и делается вывод о справедливости теоремы об устойчивости.

Следует отметить, что отрезки (34), как и исходные интервалы $(\nu_-(\varepsilon)/n^2, \nu_-(\varepsilon)/n^2)$, с ростом n начинают пересекаться во все большем числе. А это значит, что при любом фиксированном достаточно малом $\varepsilon > 0$ и при $\nu \to 0$ наряду с ростом общего числа сосуществующих диссипативных структур (31), (32) неограниченно увеличивается и количество устойчивых среди них. Точнее говоря, теорема 3.7 гарантирует сосуществование порядка $(\delta_2 - \delta_1)/(2\sqrt{\nu})$ устойчивых состояний равновесия. Тем самым, установлено, что при $\nu \to 0$ в рамках краевой задачи (22) реализуется хорошо известное явление буферности.

Проведению численных исследований системы посвящен пункт 3.4. Результаты численных исследований носят по большому счету иллюстративный характер. Попутно обсуждаются вопросы связанный с выбором под-

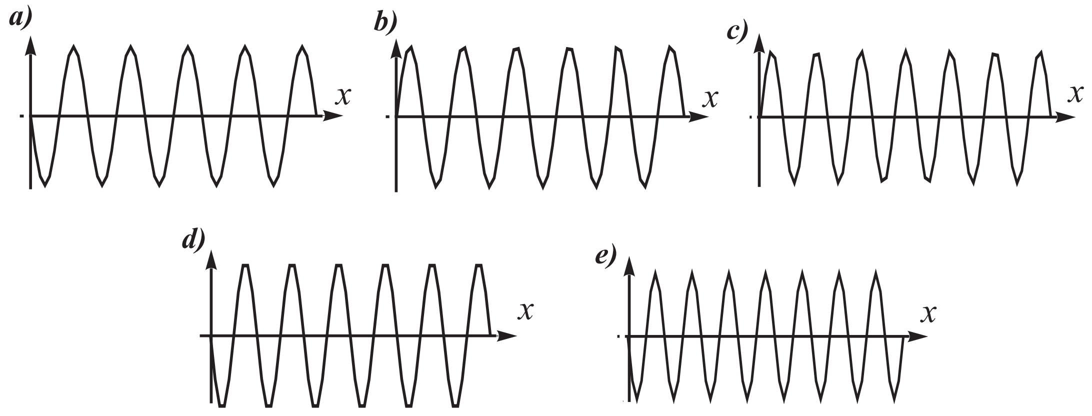

Рис. 2. Найденные стационарные решения при $\varepsilon = 0.2, \nu = 2.5$, $N = 50$ и последовательным изменением параметра nu начиная с 3.5 до 1.5. $\nu = 3$

ходящей дискретизации исходной непрерывной задачи и проблем, которые могут возникнуть в противном случае.

В частности в данном случае мы пользовались следующими приближенными представлениями частных производных по x

$$\begin{aligned}
\partial w_x^4|_{x=\pi k/N} &\approx \frac{N^4}{\pi^4}(w_{k+2}(t) - 4w_{k+1}(t) + 6w_{k-1}(t) + w_{k-2}(t)),\\
\partial w_x^3|_{x=\pi k/N} &\approx \frac{N^3}{2\pi^3}(w_{k+2}(t) - 2w_{k+1}(t) + 2w_{k-1}(t) - w_{k-2}(t)),\\
\partial w_x^2|_{x=\pi k/N} &\approx \frac{N^2}{\pi^2}(w_{k+1}(t) - 2w_k(t) + w_{k-1}(t)),\\
\partial w_x|_{x=\pi k/N} &\approx \frac{N^2}{2\pi}(w_{k+1}(t) - w_{k-1}(t)),
\end{aligned}$$

где $w_k(t) = w(t,x)|_{x=\pi k/N}, k = 0, 1, ..., N$. В результате для переменных $w_k(t)$ приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{w}_k = (\varepsilon - 1)w_k - 2\tilde{\nu}(w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}) - \tilde{\nu}^2(w_{k+2} - 4w_{k+1} + 6w_k-\\
-4w_{k-1} + w_{k-2}) - w_k(w_{k+1} - w_k)2\pi/N, \quad k = 0, 1, ..., N,
\end{aligned}$$

где $w_0 = 0, w_N = 0, w_{-1} = -w_1, w_{N-1} = -w_{N+1}, \tilde{\nu} = \nu N^2/\pi^2$.

Получившаяся конечномерная схема представляет собой модель исходной задачи (22). Она была изучена с помощью программы Tracer 3.70. По происходившим в системе бифуркационным процессам можно сделать вывод, что феномен буферности наблюдается не только при значения параметров асимптотически близких к критическим, но и когда они имеют величины порядка 1.

В **четвертой главе** так же как и в предыдущей рассматривается модификация уравнения Свифта-Хоэнберга с нулевыми граничными условиями типа Дирихле на концах конечного отрезка, а именно

$$\partial_t w = \varepsilon w - (1 + \nu\, \partial_x^2)^2 w - w \partial_x w, \tag{41}$$

где $\nu > 0, t \geqslant 0, 0 \leqslant x \leqslant l, w = w(t, x) -$ вещественная скалярная функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$w|_{x=0} = w|_{x=\pi} = \partial_x^2 w|_{x=0} = \partial_x^2 w|_{x=\pi} = 0, \tag{42}$$

$\partial_t = \partial/\partial t, \partial_x = \partial/\partial x$, $\varepsilon -$ положительный параметр (надкритичность).

Как и раньше нас интересует существование и устойчивость ее пространственно неоднородных состояний равновесия, бифурцирующих из нуля при уменьшении параметра ν и при фиксированной надкритичности ε, подчиненной требованиям

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Поскольку внесенные в модель изменения затрагивают лишь нелинейные слагаемые, результаты линейного анализа устойчивости нулевого состояния равновесия, проведенного для задачи (25), (24) остаются справедливыми и для этой задачи.

Аналогично предыдущей главе пункт 4.2 посвящен локальной постановке задачи. Будем считать, что

$$0 < \varepsilon << 1, \quad \nu = 1 + \delta\sqrt{\varepsilon}, \quad \delta \in (-1, 1), \tag{43}$$

где параметр δ, имеющий порядок единицы, отвечает за изменение ν на требуемом интервале $(\nu_-(\varepsilon), \nu_+(\varepsilon))$.

Для отыскания диссипативных структур краевой задачи (41), (42) при условиях (43) воспользуемся следующим разложением искомого стационарного решения в ряд

$$w = \sqrt{\varepsilon} w_1(x) + \varepsilon w_2(x) + \varepsilon^{3/2} w_3(x) + ..., \quad w_1(x) = \xi_0 \sin x, \tag{44}$$

где ξ_0- неизвестная "амплитуда" , далее однозначно определяемая.

Теорема 4.8 *При выполнении условий (43) краевая задача (41) имеет две экспоненциально устойчивые диссипативные структуры:*

$$w_1(x, \delta, \varepsilon) = w_0(x, \delta, \varepsilon), \quad w_2(x, \delta, \varepsilon) = w_0(\pi - x, \delta, \varepsilon), \tag{45}$$

$$w_0(x, -1, \varepsilon) \;=\; w_0(x, 1, \varepsilon) \;\equiv\; 0, \tag{46}$$

где функция $w_0(x,\delta,\varepsilon)$ *допускает (в метрике пространства* $\overset{\circ}{W}{}_2^4(0,\pi)$*) равномерное по* δ *из любого фиксированного отрезка* $[\delta_1,\delta_2]\in(-1,1)$ *асимптотическое представление (44).*

Из установленной теоремы и принципа подобия немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 4.9 *Найдется такое достаточно малое* $\varepsilon_0\in(0,1)$*, что при любом фиксированном* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *и при каждом натуральном* n *на соответствующем интервале* $(\nu_-(\varepsilon)/n^2,\nu_+(\varepsilon)/n^2)$ *изменения параметра* ν *краевая задача (41) имеет пару диссипативных структур*

$$w_n^1(x,\nu,\varepsilon)=w_0(nx,\delta_n(\nu,\varepsilon),\varepsilon),\ w_n^2(x,\nu,\varepsilon)=w_0(\pi-nx,\delta_n(\nu,\varepsilon),\varepsilon),\qquad(47)$$

где

$$\delta_n(\nu,\varepsilon)=(n^2\nu-1)/\sqrt{\varepsilon}.\qquad(48)$$

Фиксируем произвольно два числа δ_1 и δ_2, удовлетворяющие неравенствам

$$-1/\sqrt{3}<\delta_1<\delta_2<1/\sqrt{3}.\qquad(49)$$

Как и для случая обобщенного уравнения Свифта-Хоэнберга удается доказать следующее утверждение.

Теорема 4.10 *Найдется такое достаточно малое* $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\delta_1,\delta_2)\in(0,1)$*, что при всех* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ *и при каждом* $n\geqslant1$ *пара диссипативных структур (47), (48) краевой задачи (41) экспоненциально устойчива на отрезке*

$$[(1+\delta_1\sqrt{\varepsilon})/n^2,(1+\delta_2\sqrt{\varepsilon})/n^2]\qquad(50)$$

изменения параметра ν*.*

Следует отметить, что отрезки устойчивости рождающихся состояний равновесия, с ростом n начинают пересекаться во все большем числе. А это значит, что при любом фиксированном достаточно малом $\varepsilon>0$ и при $\nu\to0$ наряду с ростом общего числа сосуществующих диссипативных структур (47), (48) неограниченно увеличивается и количество устойчивых среди них. Точнее говоря, теорема 4.10 гарантирует сосуществование порядка $(\delta_2-\delta_1)/(2\sqrt{\nu})$ устойчивых состояний равновесия. Тем самым, установлено, что при $\nu\to0$ в рамках краевой задачи (41) реализуется хорошо известное явление буферности.

Для рассматриваемой в этой главе задачи проводятся аналогичные пункту 4 предыдущей главы численные исследования. Удается наблюдать порождаемую буферностью мультистабильность.

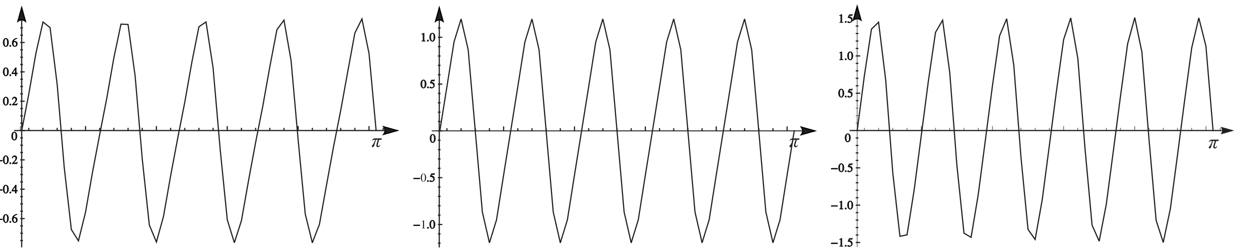

Рис. 3. Найденные стационарные решения при $\varepsilon = 0.2, \nu = 2.5, N = 50$.

С помощью программы Tracer 3.70 при значениях параметров $\varepsilon = 0.2, \nu = 2.5$ были обнаружены решения, графики которых приведены на рис. 4-5.

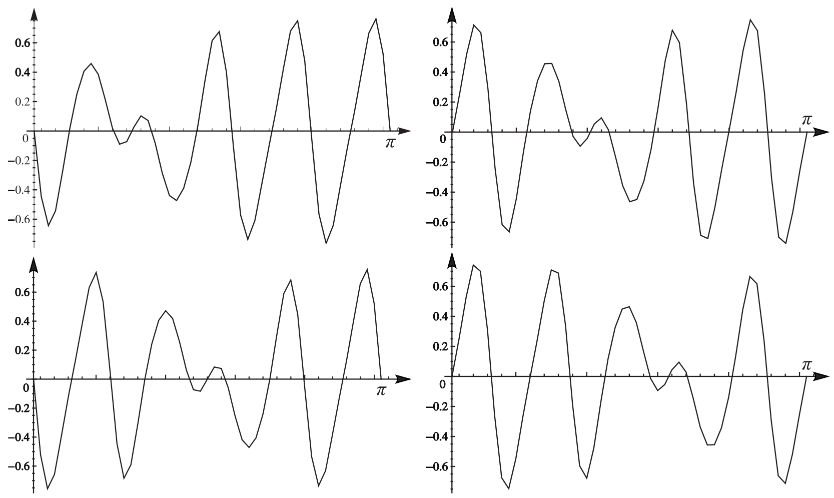

Рис. 4. Найденные стационарные решения при $\varepsilon = 0.2, \nu = 2.5,\ N = 50$.

Можно также отметить, что в системе явно наблюдается существование периодических решений, претерпевающих при изменении параметров бифуркацию удвоения периода(графики этих решений приведены в диссертационной работе). Их возникновение следствие особенностей глобальной динамики.

Публикации по теме диссертации[4]

Публикации в журналах из списка ВАК

1. *Сандуляк, Д. В.* Явление буферности в одном уравнении маятникового типа/ *Д. В. Сандуляк*// Моделирование и анализ информационных систем. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 68–74.
2. *Сандуляк, Д. В.* Явление буферности в уравнениях с запаздыванием/ *Д. В. Сандуляк*// Моделирование и анализ информационных систем. — 2008. — Т. 15, № 2. — С. 18–25.
3. *Сандуляк, Д. В.* Явление буферности в уравнениях с запаздыванием/*Д.В. Сандуляк*// Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 11 — С. 1664–1666.
4. *Сандуляк, Д. В.* Явление буферности в обобщенном уравнении Свифта-Хоэнберга/*Д.В.Сандуляк*// Моделирование и анализ информационных систем. — 2010. — Т. 17, № 1. — С. 83-92.

Прочие публикации

5. *Сандуляк, Д. В.* Явление буферности в одном уравнении маятникового типа/ *Д. В. Сандуляк* // Сборник лучших студенческих научных работ городского конкурса 2007 года "Ярославль на пороге тысячелетия". — Ярославль, 2007. — С. 11–19.

6. *Сандуляк, Д. В.*Гамильтонов сценарий явления буферности в уравнении маятникового типа//Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна. Тезисы докладов. — Воронеж: ВорГУ, 2008. — С.122

7. *Сандуляк, Д. В.* Явление буферности в уравнениях с запаздыванием/ *Д. В. Сандуляк* // Сборник лучших студенческих научных работ городского конкурса "Ярославль на пороге тысячелетия". — Ярославль, 2008. — С. 29–38.

8. *Сандуляк, Д. В.*Гамильтонов сценарий явления буферности в уравнении маятникового типа. /*Д.В. Сандуляк* // Тезисы докладов 3-й международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования посв. 85-летию Л.Д.Кудрявцева. — М.: МФТИ, 2008. — С.317

9. *Сандуляк, Д. В.* Гамильтонов сценарий явления буферности в уравнении маятникового типа /*Д. В. Сандуляк* // Шестьдесят первая научно-техническая конференция студентов, магистров и аспирантов. Тезисы докладов. — Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2008. — С. 317

10. *Сандуляк, Д. В.* Численные исследования явления буферности в уравнении однократного RCL-генератора с запаздыванием в цепи обратной связи/*Д. В. Сандуляк* //Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов.— Ярославль, 2008 — Вып. 9. — С. 72.

[4]Фамилия Сандуляк в связи с заключением брака изменена соискателем на фамилию Малозёмова