

На правах рукописи

Тряхов Михаил Сергеевич

**РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ ПОВЕДЕНИЕМ РЕШЕНИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕЛЕСКОПИЧЕСКОГО
МАНИПУЛЯТОРА**

05.13.18. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Кубышкин Е.П.

Ярославль – 2015

Содержание

Введение	3
1. Построение математической модели. Математическая постановка изучаемых задач	9
1.1. Уравнения движения телескопического манипулятора	9
1.2. Математическая постановка задач управления.	13
2. Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи (1.17)-(1.21) для случая $l(t) = l_0 = const.$	15
2.1. Постановка задачи. Построение решения.	15
2.2. Решение задач оптимального управления.	23
3. Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи с переменной границей	33
3.1. Постановка задачи	33
3.2. Определение решения начально-краевой задачи (3.1)-(3.4)	33
3.3. Практический способ построения решения начально-краевой задачи (3.8)-(3.10)	40
3.4. Алгоритм построения оптимальных управлений	44
4. Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи (1.17)-(1.21)	49
4.1. Постановка задачи	49
4.2. Алгоритм построения оптимальных управлений поведением решений начально-краевой задачи (1.17)-(1.21)	63
Заключение	69
Литература	70
Приложение 1	78
Приложение 2	80

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Диссертация посвящена разработке алгоритмов оптимального управления поведением решений математической модели телескопического манипулятора. Манипулятор состоит из твердого тела (направляющей), которое представляет собой полый цилиндр, внутри которого вдоль оси цилиндра расположен однородный вал постоянного кольцевого сечения, на конце которого расположен схват. Рука манипулятора может перемещаться вдоль оси направляющей. Вся механическая система может поворачиваться вокруг оси, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно оси цилиндра. Манипулятор имеет две степени свободы - поворот манипулятора и перемещение руки со схватом. Под действием управляющего момента и внешней силы система соответственно может поворачиваться и перемещать руку вдоль своей оси. Предполагается, что рука обладает упругой податливостью. Упругая податливость руки моделируется упругим стержнем в рамках модели Эйлера-Бернули (см., например, [1]). Математическая модель изучаемой механической системы представляет собой гибридную систему дифференциальных уравнений, т.е. систему, содержащую как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и уравнения с частными производными, связь между ними осуществляется через интегральные операторы и функционалы. Изучаются задачи перевода решений математической модели из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени, минимизируя некоторые функционалы от управлений и задача быстрогодействия при ограничении значений функционалов от управлений.

Манипуляторы подобного вида являются составными частями сложных робототехнических комплексов, используемых в разных областях науки, промышленности и обороны. Разработка алгоритмов оптимального управления поведением таких устройств, учитывающих их упругие свойства, является весьма актуальной задачей. Полученные результаты могут представлять как научный интерес, так и практическую значимость - могут быть использованы при проектировании робототехнических комплексов.

Решению задач управления механическими системами, содержащими упругие элементы, посвящена обширная литература. Отметим, во-первых, монографию Черноусько Ф.Л., Болотника Н.Н., Градецкого В.Г. [2], которая содержит большой библиографический обзор. В монографии наряду со многими другими рассмотрена также изучаемая в диссертации задача управления телескопическим манипулятором. Показано существование программных управлений, переводящих систему из одного состояния в другое, однако задачи оптимального управления в монографии не рассматривались. Большое количество работ посвящено зада-

чам управления поведением твердого тела с упругим стержнем. Такие системы изучались в работах Бербюка В.Е. [3–7], где решаются различные проблемы динамики и оптимизации управляемых дискретно-континуальных систем, моделирующих роботы, шагающие аппараты, манипуляторы и др. В [8] рассмотрена задача оптимального управления поворотом двух твердых тел связанных между собой упругим стержнем. Основным методом исследования, возникающих при этом дискретно-распределенных систем – это замена распределенной составляющей конечномерной по методу Галёркина. В качестве базисных функций берутся балочные функции. Для конечномерного аналога строится оптимальное управление, которое и берется в качестве управления распределенной системой. В работе Sakawa Y., Ito R., Fujii N. [9], где рассматривается задача поворота гибкой руки манипулятора с полным гашением поперечной вибрации в конце процесса управления, используется метод приближений Галёркина. При изучении задач управления медленно вращающейся балкой Тимошенко Krabs W., Sklyar G.M. [10] также использовали метод Галеркина. Авторы показали, что существует не более чем счетная последовательность значений радиуса диска, при которых балка Тимошенко не является управляемой (не стабилизируемой). В статьях Бербюка В.Е. и Демидюка М.В. [11, 12] задачи динамики и оптимизации манипуляционных роботов с распределенными параметрами решаются методами, основанными на концепции обратных задач динамики. Сходную тематику имеют совместные работы Акуленко Л.Д. и Болотника Н.Н. [13–16]. Асимптотические методы построения оптимальных управлений и их приложение к решению различных задач механики рассмотрены в монографии Акуленко Л.Д. [17].

Значительное количество работ посвящено изучению динамики и построению управлений для механической системы, состоящей из твердого тела с упругим стержнем, моделируемым балкой Тимошенко. Это работы Зеликина М.Н. [18], Gugat M. [19], Krabs W. [20, 21], Leugering, G. [22, 23].

Говоря об управлении системами с распределенными параметрами в общем, нельзя не упомянуть монографии Бутковского А.Г. [24–31], где положено начало системному использованию проблемы моментов в решении задач управления распределенными системами. Исследования Лурье К.А. [32, 33] способствовали широкому распространению операторного подхода в области задач управления объектами с распределенными параметрами. Вопросам о необходимых условиях типа принципа максимума Понтрягина Л.С. в задачах оптимального управления в уравнениях с частными производными посвящена его монография [34]. Широкий круг задач теории оптимального управления системами с распределенными параметрами освещен в работах Лионса Ж.-Л. [35, 36]. В заключение, не претендуя на полноту приведенного обзора, отметим работы Егорова А.И. [37, 38], где рассматриваются как систе-

мы с сосредоточенными так и с распределенными параметрами, и Красовского Н.Н. [39–43], сделавшего фундаментальный вклад в создание теории управления и развитие теории дифференциальных игр.

Цели и задачи работы. Основной целью работы является разработка и обоснование нового метода построения оптимальных управлений поведением решений математической модели телескопического манипулятора, рука которого обладает упругой податливостью. Рассмотрены задачи оптимального управления переводом решения из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени с минимумом нормы управляющих функций в пространствах L_2 и L_∞ и задачи быстрогодействия при ограничении нормы управления функций в этих пространствах.

Методы исследования. В диссертационной работе в качестве метода исследования сформулированных в начале введения задач оптимального управления используется подход, предложенный в работах Кубышкина Е.П. [44–55]. Подход основан на сведении задач оптимального управления поведением решений начально-краевых задач для гибридных систем дифференциальных уравнений к проблеме моментов в функциональных пространствах. Для решения проблемы моментов, которые бывают часто нелинейными, привлекаются либо аналитические, либо итерационные методы.

Научная новизна. Теоретическая и практическая значимость работы. В диссертации разработан новый метод построения оптимальных управлений поведением решений математической модели телескопического манипулятора, рука которого обладает упругой податливостью. Метод основан на сведении задач управления поведением решений начально-краевой задачи для гибридной системы дифференциальных уравнений, являющейся математической моделью рассматриваемой механической системы к нелинейной проблеме моментов. Решение проблемы моментов осуществляется итерационными методами. Указанный подход является новым и может быть использован при решении других задач оптимального управления механическими системами, содержащими распределенные и сосредоточенные элементы, а также при проектировании подобных систем.

Положения, выносимые на защиту.

1. Разработан алгоритм построения оптимального управления поведением решений математической модели поворота твердого тела с упругим стержнем из начального положение в конечное в заданный момент времени с минимизацией нормы управляющей функции в пространстве L_∞ .

2. Разработан алгоритм решения задачи быстрогодействия поворота механической системы, состоящей из твердого тела с упругим стержнем при ограничении нормы управляющей

функции в пространстве L_∞ .

3. Разработан алгоритм построения оптимального управления поведением решения математической модели телескопического манипулятора из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени с минимумом норм управляющих функций в пространстве L_2 .

4. Для математической модели телескопического манипулятора разработан алгоритм построения оптимального управления в задаче быстрогодействия при ограничении норм управляющих функций в пространстве L_2 .

5. Разработан алгоритм построения оптимального управления поведением решения математической модели телескопического манипулятора из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени с минимумом норм управляющих функций в пространстве L_∞ .

6. Для математической модели телескопического манипулятора разработан алгоритм построения оптимального управления в задаче быстрогодействия при ограничении норм управляющих функций в пространстве L_∞ .

Апробация результатов. Результаты диссертации опубликованы в работах автора [56–62, 64, 65]. Для построения оптимальных управлений разработан программный комплекс, прошедший государственную регистрацию программы для ЭВМ [65] (см. прилож. 1, 2). Результаты докладывались на Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2013), международной конференции "Нелинейная динамика и ее приложения", посвящ. столетию со дня рождения Поля Пенлеве (1863-1933) (Ярославль, 2013), II Международной молодежной научно-практической конференции (Ярославль, 2014), International Conference "Nonlinear Methods in Physics and Mechanics" (Munich, Germany, 2014), III Международной молодежной научно-практической конференции (Ярославль, 2015), Международная научная конференция "Нелинейные методы в физике и механике" (Ярославль, 2015).

Остановимся кратко на содержании диссертации. В первой главе работы дается описание рассматриваемой механической системы (телескопического манипулятора), сформулированы гипотезы, в рамках которых рассматриваются движения системы, приведен вывод уравнений движения, осуществлен переход к безразмерным переменным. Результатом является следующая математическая модель рассматриваемой системы, представляющая собой начально-краевую задачу вида

$$J(l)\ddot{\theta} - \int_0^l (b+l-x)u_{tt}(x,t)dx + 2i\dot{\theta}(b+l - \frac{1}{2}) = M(t), \quad (0.1)$$

$$\ddot{l} - \dot{\theta}^2(b + l - \frac{1}{2}) = F(t), \quad (0.2)$$

$$u_{tt} + u_{xxxx} = \ddot{\theta}(b + l - x) + 2\dot{\theta}\dot{l}, \quad (0.3)$$

$$u_{xx}(0, t) = u_{xxx}(0, t) = 0, u_x(l, t) = u(l, t) = 0, \quad (0.4)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, l(0) = l_0, \dot{l}(0) = \dot{l}_0, u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = \dot{u}_0(x), \quad (0.5)$$

$$J(l) = J + 1/3 + (b + l)(b + l - 1),$$

относительно функций $\theta(t), l(t), u(x, t)$ в области $Q_{lT} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ с переменной границей $l(t) > 0$. В (0.1)-(0.2) функции $M(t)$ и $F(t)$ характеризуют соответственно управляющий момент внешней силы, осуществляющий поворот системы и силу, приложенную к руке манипулятора и вызывающую ее перемещение.

Обозначим, как обычно, $L_2(0, T)$ - пространство вещественных функций, для которых интеграл по Лебегу $\|u\|_{L_2(0, T)} = \left(\int_0^T u^2 dt\right)^{1/2} < \infty$, $L_\infty(0, T)$ - подпространство функций из $L_2(0, T)$, для которых $\|u\|_{L_\infty(0, T)} = \text{vrai sup}_t |u(t)| < \infty$.

Для начально-краевой задачи (0.1)-(0.5) формулируются следующие задачи оптимального управления.

Задача 1.1 Определить функции $F(t), M(t) \in L_2(0, T)$, переводящие решение начально-краевой задачи (0.1)-(0.5) из начального состояния (0.5) в конечное

$$\theta(T) = \theta_T, \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T, l(T) = l_T, \dot{l}(T) = \dot{l}_T, u(x, T) = u_T(x), \dot{u}_t(x, T) = \dot{u}_T(x), \quad (0.6)$$

в заданный момент времени T и минимизирующие функционал

$$\Phi_1(F, M) = \|F(t)\|_{L_2(0, T)}^2 + \|M(t)\|_{L_2(0, T)}^2.$$

Задача 1.2 (Задача быстрогодействия). Определить функции $F(t), M(t) \in L_2(0, T)$, переводящие решение начально-краевой задачи (0.1)-(0.4) из начального состояния (0.4) в конечное (0.5) за минимальное время T при условии $\|\Phi_1(F, M)\| \leq L_1 < \infty$.

Задача 1.3. Определить функции $F(t), M(t) \in L_\infty(0, T)$, переводящие решение начально-краевой задачи (0.1)-(0.5) из начального положения (0.5) в конечное (0.6), минимизируя функционал

$$\Phi_2(F, M) = \|F(t)\|_{L_\infty(0, T)} + \|M(t)\|_{L_\infty(0, T)}$$

Задача 1.4. (Задача быстрогодействия). Определить функции $F(t), M(t) \in L_\infty(0, T)$, переводящие решение начально-краевой задачи (0.1)-(0.5) из начального состояния (0.5) в конечное (0.6) за минимальное время T при условии $\Phi_2(F, M) \leq L_2 < \infty$.

Во второй главе рассматривается задача поворота манипулятора, т.е. предполагается, что $l(t) \equiv l_0 = const$. В этом случае из начально-краевой задачи (0.1)-(0.5) выпадает уравнение (0.2). Для такой начально-краевой задачи в предположении $M(t) \in L_2(0, T)$ и $M(t) \in L_\infty(0, T)$ сформулировано понятие решения начально-краевой задачи, определены функциональные пространства для $u_0(x)$ и $\dot{u}_0(x)$, доказана разрешимость начально-краевой задачи, единственность решения и непрерывная зависимость от начальных условий. Решены задачи 1.1-1.4 построения оптимальных управлений поведением решений. Для этого используется сведение задачи оптимального управления к проблеме моментов в соответствующих функциональных пространствах. Сформулирован и доказан принцип максимума для рассматриваемых задач управления. На конкретных примерах продемонстрировано применение изложенных методов.

В третьей главе изучается система (0.1)-(0.5) в предположении, что $l(t)$ - известная функция. В этом случае также уравнение (0.2) выпадает из рассматриваемой начально-краевой задачи. Краевая задача рассматривается в области с заданной переменной границей. Для такой начально-краевой задачи сформулировано понятие решения, доказаны существование и единственность решения, а также непрерывная зависимость решения от начальных условий. Задачи управления для рассматриваемой задачи сводятся к проблеме моментов, которые решаются рассмотренными во второй главе методами.

В заключительной главе рассматривается решение задач 1.1-1.4 для начально-краевой задачи (0.1)-(0.5). Результаты глав 2, 3 позволяют свести рассмотрение задач управления к нелинейной проблеме моментов в некоторых функциональных пространствах. Указанная проблема моментов решается итерационным процессом. Показаны сходимость соответствующих итераций. Применение указанных методов демонстрируется на конкретных примерах.

Диссертация выполнена при поддержке проекта № 984 «Методы исследования динамики сингулярно возмущенных бесконечномерных систем» в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

1. Построение математической модели. Математическая постановка изучаемых задач

1.1. Уравнения движения телескопического манипулятора

Рассматривается механическая система (телескопический манипулятор), состоящая из твердого тела (направляющей), которое представляет собой полый цилиндр (однородный, постоянного кольцевого сечения), внутри которого вдоль оси цилиндра расположен однородный вал постоянного кольцевого сечения (рука манипулятора), на конце которого находится схват (рис. 1.1).

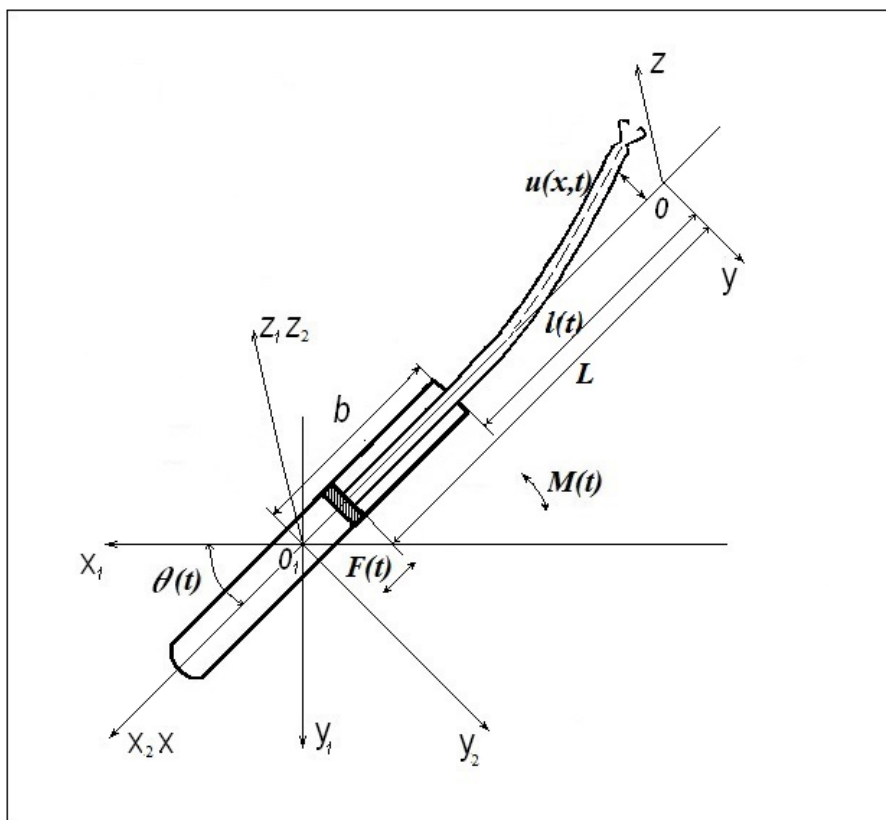


Рис. 1.1. Математическая модель телескопического манипулятора

Рука манипулятора может без трения перемещаться вдоль оси направляющей. Вся механическая система может поворачиваться вокруг оси, проходящей через центр масс направляющей перпендикулярно оси цилиндра. Таким образом телескопический манипулятор имеет две механических степени свободы в плоскости вращения - поворот манипулятора и перемещение руки со схватом.

Введем правые прямоугольные системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$, связанную с инерциальным пространством, центр которой находится в центре масс твердого тела, а ось OZ совпадает с осью вращения системы, и $O_1X_2Y_2Z_2$, связанную с направляющей манипулятора и расположенную таким образом, чтобы оси O_1Z_2 и O_1Z_1 совпадали, а ось O_1X_2 проходила через ось направляющей и недеформированной руки манипулятора. Введем еще одну подвижную систему координат $OXYZ$ с началом в точке O , соответствующей точке схвата недеформированной руки манипулятора. Ось OZ направим параллельно оси O_1Z_1 , ось OX вдоль недеформированной оси руки в направлении оси вращения O_1X_2 .

Введем следующие обозначения: b - расстояние от оси вращения OZ до кромки направляющей; L - полная длина руки; $\vec{u}(x, t)$ - вектор упругого смещения руки в плоскости OXY в точке с координатой x в момент времени t ; $\vec{R}(x, t)$ - радиус-вектор точки руки с координатой x в момент времени t относительно точки O_1 ; ρ - линейная плотность материала руки; S - площадь поперечного сечения; EI - жесткость сечения руки; J - момент инерции направляющей относительно оси OZ ; $\vec{\omega}$ - угловая скорость вращения системы относительно инерциального пространства (угол между осями O_1X_1 и O_1X_2) в момент времени t ; $l(t)$ - рабочая длина руки в момент времени t .

Таким образом, положение рассматриваемой механической системы может быть охарактеризовано следующими величинами: $\theta(t)$, $l(t)$ и $\vec{u}(x, t)$. Упругие деформации руки будем рассматривать в рамках гипотез Эйлера-Бернули малого изгиба прямолинейных стержней, т.е. сечения руки при изгибе остаются плоскими, смещения точек руки происходят в направлении оси OY , деформации линейным образом зависят от смещений. В соответствии с этим в системе координат $OXYZ$ векторы $\vec{u}(x, t)$, $\vec{R}(x, t)$, $\vec{\omega}$ имеют следующее координатное представление:

$$\vec{u}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u(x, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{R}(x, t) = \begin{pmatrix} x - b - l \\ u(x, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

где $u(x, t)$ - величина смещения точек руки в направлении оси OY .

Кинетическая энергия и потенциальная энергия деформации рассматриваемой механи-

ческой системы соответственно равны

$$\begin{aligned}
T(\dot{\theta}, \dot{l}, u_t, l, u) &= \frac{J\dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{2}\rho S \int_0^L \left(\vec{R}_t + \vec{\omega} \times \vec{R}, \vec{R}_t + \omega \times \vec{R} \right) dx = \\
&= \frac{1}{2} \left[J + \rho S \left(\int_0^l u^2(x, t) dx + \int_0^L (b+l-x)^2 dx \right) \right] \dot{\theta}^2 + \frac{\rho S L}{2} \dot{l}^2 + \\
&+ \rho S \dot{\theta} \left[\dot{l} \int_0^l u(x, t) dx - \int_0^l (b+l-x) u_t(x, t) dx \right] + \frac{1}{2} \rho S \int_0^l u_t^2(x, t) dx, \quad (1.1)
\end{aligned}$$

$$U(u_{xx}) = \frac{1}{2} EI \int_0^l u_{xx}^2(x, t) dx. \quad (1.2)$$

Функция Лангаржа рассматриваемой механической системы будет иметь вид

$$L(\theta, l, u, \dot{\theta}, \dot{l}, u_t) = T(\dot{\theta}, \dot{l}, u_t, l, u) - U(u_{xx}). \quad (1.3)$$

Обозначим через $M(t)$ - момент внешних сил управления, приложенный к оси O_1Z , через $F(t)$ внешнюю управляющую силу, приложенную к руке вдоль оси направляющей.

Уравнения движения рассматриваемой системы получим из принципа Гамильтона (см., например [67]), согласно которому

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\theta, l, u, \dot{\theta}, \dot{l}, u_t) dt + \int_{t_1}^{t_2} M(t) \delta \theta(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} F(t) \delta l(t) dt = 0, \quad (1.4)$$

где вариации $\delta \theta(t)$, $\delta l(t)$, $\delta u(x, t)$ - гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$\delta \theta(t_1) = \delta \theta(t_2) = 0, \quad \delta l(t_1) = \delta l(t_2) = 0, \quad \delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0, \quad (1.5)$$

$$\delta u_{xx}(0, t) = \delta u_{xxx}(0, t) = 0, \quad \delta u(l, t) = \delta u_x(l, t) = 0. \quad (1.6)$$

В соответствии с (1.3) - (1.6) имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} \left(\left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + M(t) \right) \delta \theta(t) + \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} + \frac{\partial L}{\partial l} + F(t) \right) \delta l(t) + \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) \delta u(x, t) \right) dt = 0 \quad (1.7)
\end{aligned}$$

В силу произвольности $\delta \theta(t)$, $\delta l(t)$, $\delta u(x, t)$ выражения в (1.7), стоящие в скобках при этих величинах должны быть равны нулю. Они и определяют уравнения движения рассматриваемой системы. Запишем их с учетом вида (1.1)-(1.2), а также краевых условий для функции $u(x, t)$

$$EI u_{xx}(0, t) = EI u_{xxx}(0, t) = 0, \quad u(l, t) = u_x(l, t) = 0, \quad (1.8)$$

первые из которых в (1.8) означает отсутствие на конце руки изгибающего момента и перерезающей силы, вторые - жесткое закрепление в точке $x = l$.

В результате будем иметь следующие уравнения движения

$$\begin{aligned} \{J + \rho S[\int_0^L (b+l-x)^2 dx + \int_0^l u^2(x,t) dx]\} \ddot{\theta} + \rho S\{2[\int_0^L (b+l-x) dx \cdot \dot{l} + \int_0^l u(x,t) u_t(x,t) dx] \dot{\theta} + \\ + \int_0^l u(x,t) dx \ddot{l} - \int_0^l (b+l-x) u_{tt}(x,t) dx\} = M(t), \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\rho S[L \ddot{l} + \int_0^l u(x,t) dx \ddot{\theta} + 2 \int_0^l u_t(x,t) dx \dot{\theta} - \int_0^L (b+l-x) dx \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} EI u_{xx}^2(l,t)] = F(t), \quad (1.10)$$

$$\rho S[u_{tt} - (b+l-x) \ddot{\theta} - 2\dot{\theta} \dot{l} - u\theta^2] + EI u_{xxxx} = 0. \quad (1.11)$$

Отметим, что при выводе уравнения (1.11) использовалось равенство

$$\int_0^l (b+l-x) \delta u_t(x,t) dx = [\int_0^l (b+l-x) \delta u(x,t) dx]_t - \dot{l} \int_0^l \delta u_t(x,t) dx.$$

В (1.9)-(1.11) перейдем к безразмерным переменным, положив

$$x' = x/L, u'(x',t) = u(x,t)/L, l' = l/L, b' = b/L, t' = tt_0, t_0^2 = EI/(\rho S \cdot l^4),$$

$$M'(t) = M(t)L/(EI), F'(t) = F(t) \cdot L^2/(EI), J' = J/(\rho S L^3).$$

Опустив теперь везде штрих, получим систему уравнений в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} [J + \int_0^1 (b+l-x)^2 dx + \int_0^l u^2(x,t) dx] \ddot{\theta} + 2[\int_0^1 (b+l-x) dx \cdot \dot{l} + \int_0^l u(x,t) u_t(x,t) dx] \dot{\theta} + \\ + \int_0^l u(x,t) dx \ddot{l} - \int_0^l (b+l-x) u_{tt}(x,t) dx = M(t), \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\ddot{l} + \int_0^l u(x,t) dx \ddot{\theta} + 2 \int_0^l u_t(x,t) dx \dot{\theta} - \int_0^1 (b+l-x) dx \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} u_{xx}^2(l,t) = F(t), \quad (1.13)$$

$$u_{tt} + u_{xxxx} = \ddot{\theta}(b+l-x) + 2\dot{\theta} \dot{l} + u\theta^2, \quad (1.14)$$

$$u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = 0, u(l,t) = u_x(l,t) = 0 \quad (1.15)$$

и начальными условиями

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, l(0) = l_0, \dot{l}(0) = \dot{l}_0, u(x,0) = u_0(x), \dot{u}_t(x,0) = \dot{u}_0(x). \quad (1.16)$$

По аналогии с [2], учитывая соотношения порядков величин, входящих в (1.12)-(1.14), уравнения, записанные в безразмерных переменных, некоторые слагаемые можно опустить.

В теории малых колебаний прямолинейных стержней [68] смещения, их первые и вторые производные по пространственной переменной, первые производные по времени являются малыми величинами одного порядка, т.е.

$$u \sim u_x \sim u_{xx} \sim u_t \sim \epsilon \ll 1.$$

Предположим, что угол поворота системы $\theta_* \sim 1$. Тогда в силу (1.9) $M(t) \sim \epsilon$. Это означает, что на угол θ_* система повернется за время $T \sim \epsilon^{-1/2}$, а угловая скорость при этом будет $\dot{\theta}(t) \sim \epsilon^{1/2}$, т.е. угловая скорость мала по сравнению с первой собственной частотой колебаний упругой руки. Аналогичные порядки справедливы и для $l(t)$ и $\dot{l}(t)$. С учетом этого, оставим в уравнения (1.12)-(1.14) лишь величины, имеющие порядок ϵ . В результате получим следующую начально-краевую задачу

$$J(l)\ddot{\theta} - \int_0^l (b+l-x)u_{tt}(x,t)dx + 2i\dot{\theta}(b+l-\frac{1}{2}) = M(t), \quad (1.17)$$

$$\ddot{l} - \dot{\theta}^2(b+l-\frac{1}{2}) = F(t), \quad (1.18)$$

$$u_{tt} + u_{xxxx} = \ddot{\theta}(b+l-x) + 2\dot{\theta}\dot{l}, \quad (1.19)$$

$$u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = 0, u_x(l,t) = u(l,t) = 0, \quad (1.20)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, l(0) = l_0, \dot{l}(0) = \dot{l}_0, u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = \dot{u}_0(x), \quad (1.21)$$

$$J(l) = J + 1/3 + (b+l)(b+l-1),$$

записанную в безразмерных переменных и являющуюся математической моделью рассматриваемой механической системы в рамках принятых гипотез.

1.2. Математическая постановка задач управления.

Сформулируем постановку задачи оптимального управления, решаемых ниже.

В дальнейшем $L_1(0, T)$ - пространство определенных на $[0, T]$ вещественнозначных функций $u(t)$, для которых интеграл по Лебегу $\|u\|_{L_1(0,T)} = \int_0^T |u(t)|dt < \infty$, $L_2(0, T)$ - подпространство функций $L_1(0, T)$, для которых $\|u\|_{L_2(0,T)} = \left(\int_0^T u^2(t)dt \right)^{1/2} < \infty$; $L_\infty(0, T)$ - подпространство $L_2(0, T)$, для которых $\|u\|_{L_\infty(0,T)} = \text{vrai sup}_t |u(t)| < \infty$ (существенный *supremum*). Отметим, что пространство $L_2(0, T)$ является гильбертовым со скалярным произведением $(u, v)_{L_2(0,T)} = \int_0^T u(t) \cdot v(t)dt$, $u(t), v(t) \in L_2(0, T)$. $W_2^k(0, T)$ - пространство определенных на

$[0, T]$ вещественнозначных функций $u(t)$, имеющих непрерывную почти всюду переменную k -го порядка в пространстве $L_2(0, T)$, $\|u\|_{W_2^k(0, T)} = \sum_{j=0}^k \|u^{(j)}\|_{L_2(0, T)}$.

Для начально-краевой задачи (1.17)-(1.21) решаются следующие задачи оптимального управления

Задача 1.1 Определить функции $F(t), M(t) \in L_2(0, T)$, переводящие решение начально-краевой задачи (1.17)-(1.21) из начального состояния (1.21) в конечное

$$\theta(T) = \theta_T, \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T, l(T) = l_T, \dot{l}(T) = \dot{l}_T, u(x, T) = u_T(x), \dot{u}_t(x, T) = \dot{u}_T(x), \quad (1.22)$$

в заданный момент времени T и минимизирующие функционал

$$\Phi_1(F, M) = \|F(t)\|_{L_2(0, T)}^2 + \|M(t)\|_{L_2(0, T)}^2. \quad (1.23)$$

Задача 1.2 (Задача быстрогодействия). Определить функции $F(t), M(t) \in L_2(0, T)$, переводящие решение начально-краевой задачи (1.17)-(1.21) из начального состояния (1.21) в конечное (1.22) за минимальное время T при условии $\|\Phi_1(F, M)\| \leq L_1 < \infty$.

Задача 1.3. Определить функции $F(t), M(t) \in L_\infty(0, T)$, переводящие решение начально-краевой задачи (1.17)-(1.21) из начального положения (1.21) в конечное (1.22), минимизируя функционал

$$\Phi_2(F, M) = \|F(t)\|_{L_\infty(0, T)} + \|M(t)\|_{L_\infty(0, T)} \quad (1.24)$$

Задача 1.4. (Задача быстрогодействия). Определить функции $F(t), M(t) \in L_\infty(0, T)$, переводящие решение начально-краевой задачи (1.17)-(1.21) из начального состояния (1.21) в конечное (1.22) за минимальное время T при условии $\Phi_2(F, M) \leq L_2 < \infty$.

Ниже формулируются условия на функции $u_0(x), \dot{u}_0(x), u_T(x), \dot{u}_T(x)$, обеспечивающие разрешимость рассматриваемых задач и алгоритмы построения оптимальных управлений.

2. Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи (1.17)-(1.21) для случая $l(t) = l_0 = const$.

2.1. Постановка задачи. Построение решения.

Рассмотрим сначала случай $l(t) = l_0 = const$, т. е. механическая система только поворачивается вокруг оси O_1Z_1 . В этом случае начально-краевая задача (1.17)-(1.21) примет вид

$$J(l_0)\ddot{\theta} - \int_0^{l_0} (b + l_0 - x)u_{tt}(x, t)dx = M(t), \quad (2.1)$$

$$u_{tt} + u_{xxxx} = (b + l_0 - x)\ddot{\theta}, \quad (2.2)$$

$$u_{xx}(0, t) = u_{xxx}(0, t) = 0, u(l_0, t) = u_x(l_0, t) = 0, \quad (2.3)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x). \quad (2.4)$$

Сформулируем корректную постановку начально-краевой задачи для (2.1)-(2.4) при $M(t) \in L_2(0, T)$ и $M(t) \in L_\infty(0, T)$ и покажем ее разрешимость.

Выразим $\ddot{\theta}$ из уравнения (2.1) и подставим в уравнение (2.2). В результате для определения $u(x, t)$ получим следующую начально-краевую задачу

$$u_{tt} - J^{-1}(l_0)(b + l_0 - x) \int_0^{l_0} (b + l_0 - x_1)u_{tt}(x_1, t)dx_1 + u_{xxxx} = -J^{-1}(l_0)(b + l_0 - x)M(t), \quad (2.5)$$

$$u_{xx}(0, t) = u_{xxx}(0, t) = 0, u(l_0, t) = u_x(l_0, t) = 0, \quad (2.6)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \quad (2.7)$$

Положим сначала $M(t) \equiv 0$. Определяя решение $u(x, t)$ в виде $u(x, t) = v(x)s(t)$, подставим его в краевую задачу (2.5)-(2.6). В результате получим для определения $v(x)$ спектральную краевую задачу

$$v^{IV}(x) = \lambda(l_0) \left(v(x) - J^{-1}(l_0)(b + l_0 - x) \int_0^{l_0} (b + l_0 - x_1)v(x_1)dx_1 \right), \quad (2.8)$$

$$v''(0) = v'''(0) = 0, v'(l_0) = v(l_0) = 0, \quad (2.9)$$

а для $s(t)$ – следующее уравнение

$$\ddot{s}(t) + \lambda(l_0)s(t) = 0.$$

Изучим спектральную краевую задачу (2.8)-(2.9). Интегральный оператор

$$\begin{aligned} Av(x) &\equiv v(x) - J^{-1}(l_0)(b + l_0 - x) \int_0^{l_0} (b + l_0 - x_1)v(x_1)dx_1 \equiv \\ &\equiv v(x) - J^{-1}(l_0)(b + l_0 - x) (b + l_0 - x, v(x))_{L_2(0, T)}, \end{aligned}$$

действующий в $L_2(0, l_0)$ является ограниченным, симметричным и положительно определенным

$$\begin{aligned} \|Av\|_{L_2(0,T)}^2 &= \|v\|_{L_2(0,T)}^2 - (J_0 + J(l_0))J^{-2}(l_0)(b + l_0 - x, v)_{L_2(0,T)}^2 \leq \|v\|_{L_2(0,T)}^2 < \\ &< J_0 = J_1(l_0) - \int_0^{l_0} (b + l_0 - x)^2 > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Av, u)_{L_2(0,T)} &= (v, u)_{L_2(0,T)} - J^{-1}(b + l_0 - x, v)_{L_2(0,T)}(b + l_0 - x, u)_{L_2(0,T)} = (v, Au)_{L_2(0,T)}, \\ (Av, v)_{L_2(0,T)} &= (v, v)_{L_2(0,T)} - J^{-1}(b + l_0 - x, v)_{L_2(0,T)}^2 \geq \\ &\geq (v, v)_{L_2(0,T)} - J^{-1}(b + l_0 - x, b + l_0 - x)_{L_2(0,T)}^2 (v, v)_{L_2(0,T)} = J_0 J^{-1}(v, v)_{L_2(0,T)}. \end{aligned}$$

При этом $A^{-1}v(x) \equiv v(x) + J_0^{-1}(b + l_0 - x)(b + l_0 - x_1, v(x))_{L_2(0,T)}$. Оператор $Bv(x) \equiv v^{IV}(x)$, действующий в $L_2(0, l_0)$ с областью определения $D(B) = \{v(x) \in W_2^4(0, l_0), v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0\}$ является симметричным и положительно определенным. Расширим его до самосопряженного в энергетическом пространстве $H_B \subset W_2^2(0, l_0)$, при этом B^{-1} вполне непрерывный оператор. Запишем спектральную краевую задачу (2.8)-(2.9) в операторной форме

$$Bv = \lambda(l_0)Av \quad (2.10)$$

Выполнив в (2.10) замену $B^{1/2}v = y \in L_2(0, l_0)$, где $B^{1/2}$ - положительный корень из оператора B ($v = B^{-1/2}y$), получим спектральную задачу

$$\mu y = B^{-1/2}AB^{-1/2}y \quad (\mu = \lambda^{-1}(l_0)) \quad (2.11)$$

для вполне непрерывного самосопряженного и положительно определенного оператора $B^{-1/2}AB^{-1/2}$. Такая спектральная задача имеет (см., например, [69]) счетное число вещественных положительных конечнократных точек спектра $\mu_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, которым соответствуют линейно независимые, ортогональные в $L_2(0, l_0)$ собственные функции $y_j = y_j(x)$. Ниже будет показано, что точки спектра однократны. Для $v_j = B^{-1/2}y_j$ согласно (2.10) имеем

$$(y_j, y_k)_{L_2(0,T)} = (B^{1/2}v_j, B^{1/2}v_k)_{L_2(0,T)} = \lambda_j(Av_j, v_k)_{L_2(0,T)} = \lambda_j \langle v_j, v_k \rangle = \lambda_j \delta_{kj}, \quad (2.12)$$

где скалярное произведение

$$\langle v, y \rangle = (v, y)_{L_2(0,T)} - J^{-1}(l_0)(b + l_0 - x, v)_{L_2(0,T)}(b + l_0 - x, y)_{L_2(0,T)}, \quad (2.13)$$

δ_{kj} - символ Кронекера. Отметим, что $v_j(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(0, l_0)$ и ортогональный в H_B .

Для построения функций $v_j(x)$ применим к обеим частям уравнения (2.8) оператор A^{-1} , $A^{-1}w(x) \equiv w(x) + J_0(l_0)^{-1}(b + l_0 - x) \int_0^{l_0} (b + l_0 - x_1) dx_1$, $J_0(l_0) = J(l_0) - b^2 l_0 - b l_0^2 - l_0^3/3 > 0$. В результате получим эквивалентное (2.8) в уравнение

$$v^{\text{IV}}(x) + J_0^{-1}(b + l_0 - x)(bv'''(l_0) + v''(l_0)) = \lambda(l_0)v(x). \quad (2.14)$$

Покажем, что собственные значения $\lambda_j(l_0)$ однократны. Предположим, что для некоторого $\lambda_k(l_0)$ имеется две линейно независимых собственных функции $v_{k1}(x)$ и $v_{k2}(x)$. Возьмем их линейную комбинацию $\tilde{v}_k(x) = (bv'''_{k2}(l_0) - v''_{k2}(l_0))v_{k1}(x) - (bv'''_{k1}(l_0) - v''_{k1}(l_0))v_{k2}(x)$ и подставим ее в уравнение (2.14). В результате получим, что $\tilde{v}_k^{\text{IV}}(x) = \lambda_k(l_0)\tilde{v}_k(x)$. Таким образом, $\tilde{v}_k(x)$ является балочной функцией, удовлетворяющей краевым условиям (2.9), т.е.

$$\tilde{v}_k(x) = w_k(x)/\langle w_k(x), w_k(x) \rangle^{1/2}, \quad (2.15)$$

$$w_k(x) = (\text{sh}(\beta_k(l_0)l_0) + \sin(\beta_k(l_0)l_0))(\text{ch}(\beta_k(l_0)x) - \cos(\beta_k(l_0)x)) - (\text{ch}(\beta_k(l_0)l_0) + \cos(\beta_k(l_0)l_0))(\text{sh}(\beta_k(l_0)x) - \sin(\beta_k(l_0)x)),$$

а $\beta_k(l_0) > 0$ корень уравнения $\text{ch}(\beta(l_0)) \cos(\beta(l_0)) + 1 = 0$ [70]. Для любого $\beta_k(l_0)$ $bw_k'''(0) - w_k''(0) = -2(b\beta_k^3(l_0)(\text{ch}(\beta_k(l_0)) + \cos(\beta_k(l_0))) + \beta_k^2(l_0)(\text{sh}(\beta_k(l_0)) + \sin(\beta_k(l_0)))) < 0$. Получили противоречие.

Положим в $\lambda(l_0) = \beta^4(l_0)$ и заметим, что общее решение уравнения (2.14) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\beta(l_0)x) = & A \text{ch}(\beta(l_0)(l-x)) + B \text{sh}(\beta(l_0)(l-x)) + C \cos(\beta(l_0)(l-x)) + \\ & + D \sin(\beta(l_0)(l-x)) - \frac{1}{J_0(l_0)\beta^2} (b + l_0 - x)(b\beta(B-D) - A + C). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Подставив (2.16) в краевые условия (2.9), получим для определения A, B, C, D линейную однородную алгебраическую систему вида

$$\begin{cases} A(1 + b/J_0(l_0)\beta^2(l_0)) - B(b^2/J_0(l_0)\beta(l_0)) + C(1 - b/J_0(l_0)\beta^2(l_0)) + D(b^2/J_0(l_0)\beta(l_0)) = 0, \\ -A(1/J_0(l_0)\beta^3(l_0)) - B(1 - b/J_0(l_0)\beta^2(l_0)) + C(1/J_0(l_0)\beta^3(l_0)) - D(1 + b/J_0(l_0)\beta^2(l_0)) = 0, \\ A \text{ch}(\beta(l_0)l_0) + B \text{sh}(\beta(l_0)l_0) - C \cos(\beta(l_0)l_0) - D \sin(\beta(l_0)l_0) = 0, \\ A \text{sh}(\beta(l_0)l_0) + B \text{ch}(\beta(l_0)l_0) + C \sin(\beta(l_0)l_0) - D \cos(\beta(l_0)l_0) = 0. \end{cases}$$

Система имеет нулевые решения тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} 1 + (b/J_0(l_0)\beta^2(l_0)) & -b^2/J_0(l_0)\beta(l_0) & 1 - b/J_0(l_0)\beta^2(l_0) & b^2/J_0(l_0)\beta(l_0) \\ -1/J_0(l_0)\beta^3(l_0) & -1 + b/J_0(l_0)\beta^2(l_0) & 1/J_0(l_0)\beta^3(l_0) & 1 + b/(J_0(l_0)\beta^2(l_0)) \\ \text{ch}(\beta(l_0)l_0) & \text{sh}(\beta(l_0)l_0) & \cos(\beta(l_0)l_0) & \sin(\beta(l_0)l_0) + \\ + \text{sh}(\beta(l_0)l_0) & \text{ch}(\beta(l_0)l_0) & \sin(\beta(l_0)l_0) & \cos(\beta(l_0)l_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Это определяет характеристическое уравнение

$$\cos(\beta(l_0)l_0) \operatorname{ch}(\beta(l_0)l_0) + 1 + \frac{1}{J_0(l_0)} \cdot \left(\left(\frac{1}{\beta^3(l_0)} + \frac{b^2}{\beta(l_0)} \right) \sin(\beta(l_0)l_0) \cdot \right. \quad (2.17)$$

$$\left. \cdot \operatorname{ch}(\beta(l_0)l_0) + \left(\frac{b^2}{\beta(l_0)} - \frac{1}{\beta^3(l_0)} \right) \cos(\beta(l_0)l_0) \operatorname{sh} \left(\beta(l_0)l_0 + \frac{2b}{\beta^2(l_0)} \sin(\beta(l_0)l_0) \operatorname{sh}(\beta(l_0)l_0) \right) \right) = 0,$$

положительные корни которого определяют точки спектра $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots < \lambda_n = \beta_n^4$, ($n = 1, 2, \dots$) спектральной краевой задачи (2.8)-(2.9). Ненулевые решения линейной алгебраической системы при соответствующем $\beta_n(l_0)$ имеют вид

$$\begin{cases} A_n = \operatorname{sh}(\beta_n(l_0)l) + (1 - 2b/(J_0\beta_n^2(l_0))) \sin(\beta_n(l_0)l_0) - 2b^2/(J_0\beta_n(l_0)) \cos(\beta_n(l_0)l_0), \\ B_n = -\operatorname{ch}(\beta_n(l_0)l_0) - (1 + 2b/(J_0\beta_n(l_0))) \cos(\beta_n(l_0)l_0) - 2/(J_0\beta_n^3(l_0)) \sin(\beta_n(l_0)l_0), \\ C_n = -(1 + 2b^2/(J_0\beta_n^2(l_0))) \operatorname{sh}(\beta_n(l_0)l_0) - \sin(\beta_n(l_0)l_0) - 2b^2/(J_0\beta_n(l_0)) \operatorname{ch}(\beta_n(l_0)l_0), \\ D_n = (1 - 2b^2/(J_0\beta_n^2(l_0))) \operatorname{ch}(\beta_n(l_0)l_0) + \cos(\beta_n(l_0)l_0) - 2/(J_0\beta_n^3(l_0)) \operatorname{sh}(\beta_n(l_0)l_0) \end{cases} \quad (2.18)$$

и, будучи подставленные в (2.12), определяют собственные функции

$$v_n(x, l_0) = \tilde{v}(\beta_n(l_0)x) / \langle \tilde{v}(\beta_n(l_0)x), \tilde{v}(\beta_n(l_0)x) \rangle^{1/2} \quad (2.19)$$

спектральной краевой задачи (2.8)-(2.9).

Перейдем к построению решения начально-краевой задачи (2.1)-(2.4). Для его определения введем некоторые функциональные пространства. В дальнейшем $\overline{Q}_{l_0T} = \{(x, t), 0 \leq x \leq l_0, 0 \leq t \leq T\}$. Обозначим через $H(0, l_0)$ пространство функций $u(x) \in L_2(0, l_0)$, снабженное скалярным произведением (2.13) и нормой $\|u(x)\|_H = \langle u(x), u(x) \rangle^{1/2}$. Через $H_j(0, l_0)$ будем обозначать пространство функций вида

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n(x, l_0) \quad u_n = \langle u_n(x), v_n(x, l_0) \rangle,$$

$$\|u(x)\|_{H_j} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n u_n^2(x) \right)^{1/2} < \infty, \quad \omega_n(l_0) = \beta_n^2(l_0).$$

Отметим, что эти пространства являются соответственно замкнутыми подпространствами $W_2^j(0, l_0)$.

Через $H(\overline{Q}_{l_0T})$ – пространство $L_2(\overline{Q}_{l_0T})$ функций $u(x, t)$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u(x, t), v(x, t))_{H(\overline{Q}_{l_0T})} = \int_0^T \langle u(x, t), v(x, t) \rangle dt, \quad \|u(x, t)\|_{H(\overline{Q}_{l_0T})} = (u(x, t), u(x, t))_{H(\overline{Q}_{l_0T})}^{1/2}.$$

Через $H_2(\overline{Q}_{l_0T})$ обозначим гильбертово пространство функций $u(x, t)$, полученных замыканием множества функций $u(x, t) \in C^{3,1}(\overline{Q}_{l_0T})$, $u_{xx}(0, t) = u_{xxx}(0, t) = 0$, $u(l_0, t) = u_x(l_0, t) = 0$ в норме

$$\|u(x, t)\|_{H_2(\overline{Q}_{l_0T})} = (u(x, t), u(x, t))_{H_2(\overline{Q}_{l_0T})}^{1/2},$$

$$(u(x, t), v(x, t))_{H_2(\overline{Q}_{l_0T})} = (u_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t))_{L_2(\overline{Q}_{l_0T})} + (u_t(x, t), v_t(x, t))_{H(\overline{Q}_{l_0T})}.$$

Умножим обе части уравнения (2.5) на функцию

$$v(x, t) \in H_2(\overline{Q}_{l_0T}), v(x, T) \equiv 0 \quad (2.20)$$

и проинтегрируем по $(x, t) \in \overline{Q}_{l_0T}$. В результате, вычисляя интегралы по частям при учете краевых и начальных условий (2.6)–(2.7), условия (2.20), а также учтя соотношение $J_0(b + l_0 - x, v(x, t))_{L_2(0, T)} = J(l_0)\langle(b + l_0 - x, v(x, t))\rangle$, получим интегральное равенство

$$\int_0^T \left(\langle u_t(x, t), v_t(x, t) \rangle - (u_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t))_{L_2(0, T)} + J_0^{-1}(l_0)\langle b + l_0 - x, v(x, t) \rangle M(t) \right) dt +$$

$$+ \langle u_1(x), v(x, 0) \rangle = 0. \quad (2.21)$$

Пусть

$$u_0(x) \in H_2(0, l_0), u_1(x) \in H(0, l_0). \quad (2.22)$$

Используя вариационный подход в определении решений задач математической физики [72–74], под решением начально-краевой задачи (2.5)–(2.6), определенным в области \overline{Q}_{l_0T} , с начальными условиями (2.22) будем понимать функцию $u(x, t) \in H_2(\overline{Q}_{l_0T})$, ($u(x, 0) = u_0(x)$), удовлетворяющую интегральному соотношению (2.21) для любой функции $v(x, t)$ вида (2.20)

Представим

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{-1} a_{0n}(l_0) v_n(x, l_0), \quad a_{0n}(l_0) = \omega_n(l_0) \langle u_0(x), v_n(x, l_0) \rangle, \quad \|u_0(x)\|_{H_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}^2(l_0),$$

$$\dot{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}(l_0) v_n(x, l_0), \quad b_{0n}(l_0) = \langle \dot{u}_0(x), v_n(x, l_0) \rangle, \quad \|\dot{u}_0(x)\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}^2(l_0), \quad (2.23)$$

$$b + l_0 - x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(l_0) v_n(x, l_0), \quad d_n(l_0) = \langle b + l_0 - x, v_n(x, l_0) \rangle, \quad \|b + l_0 - x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2(l_0).$$

Утверждение 2.1. Пусть $M(t) \in L_2(0, T)$, тогда решение $u(x, t)$ начально-краевой задачи (2.5)–(2.7) с начальными условиями (2.22) существует, единственно и представимо в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, l_0) \omega_n(l_0)^{-1} (a_{0n}(l_0) \cos(\omega_n(l_0)t) + b_{0n}(l_0) \sin(\omega_n(l_0)t) +$$

$$+ J_0^{-1}(l_0) d_n(l_0) \int_0^t \sin(\omega_n(l_0)(t - \tau)) M(\tau) d\tau, \quad (2.24)$$

где $a_{0n}(l_0), b_{0n}(l_0), d_n(l_0)$ определены в (2.23). При этом справедлива оценка

$$\|u(x, t)\|_{H_2(Q_T)} \leq C \left(\|u_0(x)\|_{H_2}^2 + \|\dot{u}_0(x)\|_H^2 + \|b + l_0 - x\|_H^2 \|M(t)\|_{L_2(0, T)}^2 \right)^{1/2}, \quad (2.25)$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная.

Доказательство. Докажем сначала единственность решения. Предположив существование двух решений $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, для их разности $u(x, t)$ получим интегральное соотношение

$$\int_0^T (\langle u_t(x, t), u_t(x, t) \rangle - (u_{xx}(x, t), u_{xx}(x, t))_{L_2(0, T)}) dt = 0. \quad (2.26)$$

Выберем в качестве $v(x, t)$ функцию

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_t^\tau u(x, \xi) d\xi, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau \leq t < T, \end{cases}$$

зависящую от параметра $0 < \tau < T$, и подставим ее в (2.26). В результате имеем

$$\int_0^T \langle u_t(x, t), v_t(x, t) \rangle = -\frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \langle u(x, t), u(x, t) \rangle dt = -\frac{1}{2} \langle u(x, \tau), u(x, \tau) \rangle,$$

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t))_{L_2(0, T)} dt &= \int_0^{l_0} \left(\int_0^\tau u_{xx}(x, t) dt \int_t^\tau u_{xx}(x, \xi) d\xi \right) dx = \\ &= \int_0^{l_0} \left(\int_0^\tau u_{xx}(x, \xi) d\xi \int_0^\xi u_{xx}(x, t) dt \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \left(\int_0^\tau u_{xx}(x, t) dt \right)^2 dx. \end{aligned}$$

В итоге равенство (2.26) примет вид

$$\frac{1}{2} \langle u(x, \tau), u(x, \tau) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \left(\int_0^\tau u_{xx}(x, t) dt \right)^2 dx = 0,$$

из которого в силу произвольности τ следует, что $u(x, t) \equiv 0$. Единственность решения доказана.

Перейдем к доказательству существования решения начально-краевой задачи (2.5)-(2.7). Выберем в качестве $u_0(x) = a_{0n} v_n(x) \omega_n^{-1}(l_0)$, $\dot{u}_0(x) = b_{0n} v_n(x)$ и пусть в правой части уравнения (2.5) вместо функции $b + l_0 - x$ стоит функция $d_n(l_0) v_n(x)$, где $a_{0n}(l_0), b_{0n}(l_0), d_n(l_0)$ – некоторые постоянные. Тогда функция

$$u_n(x, t) = v_n(x, l_0) \omega_n^{-1}(l_0) (a_{0n}(l_0) \cos(\omega_n(l_0)t) + b_{0n}(l_0) \sin(\omega_n(l_0)t) -$$

$$-J_0^{-1}d_n(l_0) \int_0^t \sin(\omega_n(l_0)(t-\tau))M(\tau)d\tau \quad (2.27)$$

является решением начально краевой задачи (2.5)- (2.8), удовлетворяющим выбранным начальным условиям. Это проверяется непосредственной подстановкой (2.24) в (2.21) с использованием разложения

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(l_0)^{-1} f_n(t) v_n(x, l_0), \quad f_n(t) = \omega_n(l_0) \langle v(x, t), v_n(x) \rangle,$$

$$f_n(t) \in W_2^1(0, T), \quad f_n(T) = 0.$$

Аналогичное утверждение справедливо, если

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^N \omega_n(l_0)^{-1} a_{0n}(l_0) v_n(x, l_0),$$

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^N b_{0n}(l_0) v_n(x, l_0)$$

и в правой части уравнения (2.5) вместо функции $b+l-x$ стоит ряд $\sum_{n=1}^N d_n(l_0) v_n(x, l_0)$. В этом случае решение начально-краевой задачи (2.5)- (2.7) будет иметь вид $u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N u_n(x, t)$.

Покажем теперь, что ряд (2.24), где $a_{0n}(l_0), b_{0n}(l_0), d_n(l_0)$ определены в (2.23), дает решение начально-краевой задачи (2.5)-(2.7), принадлежащее $H_2(\overline{Q}_{l_0T})$ и удовлетворяющее начальным условиям (2.22). Согласно сказанному выше, ряд (2.35) является формальным решением начально-краевой задачи (2.5)-(2.7). Докажем сходимость ряда (2.24) в норме пространства $H_2(\overline{Q}_{l_0T})$. Формально дифференцируя ряд (2.24) дважды по x , оценим отрезок полученного ряда

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+m} v_n''(x, l_0) \omega_n(l_0)^{-1} \left(a_{0n}(l_0) \cos(\omega_n(l_0)t) + b_{0n}(l_0) \sin(\omega_n(l_0)t) - J_0^{-1}d_n(l_0) \cdot \int_0^t \sin(\omega_n(l_0)(t-\tau))M(\tau)d\tau \right) \right\|_{L_2(\overline{Q}_{l_0T})}^2 = \sum_{n=N}^{N+m} \int_0^T \left(a_{0n}(l_0) \cos(\omega_n(l_0)t) + b_{0n}(l_0) \sin(\omega_n(l_0)t) - J_0^{-1}d_n(l_0) \int_0^t \sin(\omega_n(l_0)(t-\tau))M(\tau)d\tau \right)^2 dt \leq 3 \sum_{n=N}^{N+m} \int_0^T \left(a_{0n}^2(l_0) \cos^2(\omega_n(l_0)t) + b_{0n}^2(l_0) \sin^2(\omega_n(l_0)t) + \left(J_0^{-1}d_n(l_0) \right)^2 \left(\int_0^t \sin(\omega_n(l_0)(t-\tau))M(\tau)d\tau \right)^2 \right) dt \leq \leq 3T \sum_{n=N}^{N+m} \left(a_{0n}^2(l_0) + b_{0n}^2(l_0) + \left(J_0^{-1}d_n(l_0) \right)^2 \|M(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right). \quad (2.28)$$

Здесь использовано равенство $(v_n''(x, l_0), v_m''(x, l_0))_{L_2(0, T)} = \omega_n^2(l_0)\delta_{nm}$ и неравенство $2ab \leq a^2 + b^2$. Согласно (2.23) величина (2.28) может быть сделана за счет выбора N и $m > 0$ меньше любого заданного $\varepsilon > 0$.

Аналогично, формально дифференцируя ряд (2.24) по t , оценим отрезок полученного ряда

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{n=N}^{N+m} v_n(x) \left(-a_{0n} \sin(\omega_n t) + b_{0n} \cos(\omega_n t) - J_0^{-1} d_n \int_0^t \cos(\omega_n(t-\tau)) M(\tau) d\tau \right) \right\|_{H(Q_T)}^2 = \\
& = \sum_{n=N}^{N+m} \int_0^T \left(-a_{0n} \sin(\omega_n t) + b_{0n} \cos(\omega_n t) - J_0^{-1} d_n \int_0^t \cos(\omega_n(t-\tau)) M(\tau) d\tau \right)^2 dt \leq \\
& \leq 3 \sum_{n=N}^{N+m} \int_0^T \left(a_{0n}^2 \sin^2(\omega_n t) + b_{0n}^2 \cos^2(\omega_n t) + J_0^{-1} d_n \right)^2 \left(\int_0^t \cos(\omega_n(t-\tau)) M(\tau) d\tau \right)^2 dt \leq \\
& \leq 3T \sum_{n=N}^{N+m} \left(a_{0n}^2 + b_{0n}^2 + \left(J_0^{-1} d_n \right)^2 \|M(t)\|_{L_2(0, T)}^2 \right). \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Величина (2.29) также за счет выбора N и m может быть сделана меньше любого заданного $\varepsilon > 0$. Это означает, что последовательность частичных сумм ряда (2.24) фундаментальна в пространстве $H_2(\overline{Q}_{l_0 T})$. В силу полноты этого пространства ряд (2.24) сходится к функции $u(x, t) \in H_2(\overline{Q}_{l_0 T})$. Существование решения начально-краевой задачи (2.5)–(2.7) доказано.

Из (2.23), (2.28), (2.29) для решения (2.24) следует справедливость оценки (2.25), обеспечивающая корректность постановки начально-краевой задачи (2.5)–(2.8). *Утверждение доказано.*

В случае $M(t) \in L_\infty(0, T)$ справедливо неравенство $\|M(t)\|_{L_2(0, T)} \leq T^{1/2} \|M(t)\|_{L_\infty}$

В связи с этим для решения $u(x, t)$ справедливо представление (2.24) и оценка аналогична (2.25).

Построим теперь решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.3). Пусть функция

$$p(t) \in W_2^1(0, T), \quad p(T) = 0. \tag{2.30}$$

Умножим уравнение (2.1) на $p(t)$ и проинтегрируем по $t \in [0, T]$. Вычисляя интегралы,

входящие в полученное равенство по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} & -J(l_0) \int_0^T \dot{\theta}(t) \dot{p}(t) dt - J(l_0) \theta_1 p(0) - p(0) \int_0^{l_0} (b + l_0 - x) u_1(x) dx - \\ & - \int_0^T \dot{p}(t) \int_0^{l_0} (b + l_0 - x) u_t(x, t) dx dt = \int_0^T M(t) p(t) dt, \end{aligned}$$

что эквивалентно равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^T (J \dot{\theta}(t) \dot{p}(t) + J(l_0) J_0^{-1} \langle b + l_0 - x, u_t(x, t) \rangle \dot{p}(t) + \\ & + (J(l_0) \dot{\theta}_1 + J(l_0) J_0^{-1} \langle b + l_0 - x, u_1(x) \rangle) p(0) + M(t) p(t)) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Под решением уравнения (1.1) будем понимать функцию $\theta(t) \in W_2^1(0, T)$ $\theta(0) = \theta_0$, удовлетворяющую интегральному равенству (2.31) для любой функции $p(t)$ вида (2.30).

Легко видеть, что искомым решением уравнения (2.1) будет функция

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + J_0^{-1}(l_0) (\langle b + l_0 - x, u_0(x) \rangle t - \int_0^t \langle b + l_0 - x, u_{t_1}(x, t_1) \rangle dt_1) + \\ & + J(l_0)^{-1}(l_0) \int_0^t (t - t_1) M(t_1) dt_1 = \theta_0 + \theta_1 t + J_0^{-1}(l_0) (\langle b + l_0 - x, u_0(x) \rangle t - \\ & - \langle b + l_0 - x, u(x, t) \rangle + \langle b + l_0 - x, u_0(x) \rangle) + J^{-1}(l_0) \int_0^t (t - t_1) M(t_1) dt_1. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.2. Решение задач оптимального управления.

Рассмотрим решение задач 1.1-1.4 для начально-краевой задачи (2.1)-(2.4).

Выберем

$$u_0(x), u_T(x) \in H_3(0, l_0), \quad \dot{u}_0(x), \dot{u}_T(x) \in H_1(0, l_0) \quad (2.33)$$

и переформулируем с учетом (2.24), (2.32) задачу 1 следующим образом: найти минимум функционала (1.23) при следующих ограничениях

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_T &= \dot{\theta}_0 - J_0^{-1}(l_0) (\langle b + l_0 - x, \dot{u}_0(x) \rangle - \langle b + l_0 - x, \dot{u}_T(x) \rangle) + J_0^{-1}(l_0) \int_0^T M(\tau) d\tau, \\ \theta_T &= \theta_0 + \dot{\theta}_0 T + J_0^{-1}(l_0) (\langle b + l_0 - x, \dot{u}_0(x) \rangle T + \langle b + l_0 - x, u_0(x) \rangle - \\ & - \langle b + l_0 - x, u_T(x) \rangle) - J^{-1}(l_0) \int_0^T (T - \tau) M(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$a_{Tn}(l_0) = a_{0n} \cos(\omega_n(l_0)T) + b_{0n}(l_0) \sin(\omega_n(l_0)T) + J_0^{-1}(l_0)d_n \int_0^T \sin(\omega_n(l_0)(T - \tau))M(\tau)d\tau, \quad (2.34)$$

$$b_{Tn}(l_0) = -a_{0n}(l_0) \sin(\omega_n(l_0)T) + b_{0n}(l_0) \cos(\omega_n(l_0)T) + J_0^{-1}(l_0)d_n \int_0^T \cos(\omega_n(l_0)(T - \tau))M(\tau)d\tau,$$

$$a_{Tn}(l_0) = \omega_n(l_0) \langle u_T(x), v_n(x, l_0) \rangle, \quad b_{Tn}(l_0) = \langle \dot{u}_T(x), v_n(x, l_0) \rangle \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Утверждение 2.2. *Величины*

$$d_n(l_0) \neq 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad d_n(l_0) = O(n^{-1}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.35)$$

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$J_0^{-1}(l_0)\omega_n^2(l_0)d_n(l_0) = (bv_n'''(l_0, l_0) - v_n''(l_0, l_0)), \quad (2.36)$$

которое получается, если в уравнение (2.14) подставить $v(x) = v_n(x, l_0)$, $\lambda(l_0) = \omega_n^2(l_0)$, полученное равенство умножить на $b + l_0 - x$ и проинтегрировать по отрезку $[0, l_0]$ с учетом краевых условий (2.9). Предположим, что для некоторого n $d_n(l_0) = 0$. Из (1.8) следует, что $bv_n'''(l_0, l_0) = v_n''(l_0, l_0) = 0$. Это равенство совместно с первой частью краевых условий (2.9) влечет выполнение следующих равенств

$$A_n + C_n = 0, \quad B_n + D_n = 0, \quad (2.37)$$

для коэффициентов, фигурирующих в определении $v_n(x, l_0)$ в соответствии с (2.16), (2.19). Подставим в (2.37) выражения для A_n и C_n , определяемые согласно (2.18). В результате получим выражение

$$-2b(J_0\beta_n(l_0))^{-1}[\beta_n(l_0)^{-1}(\sin(\beta_n(l_0)) + \text{sh}(\beta_n(l_0))) + a(\cos(\beta_n(l_0)) + \text{ch}(\beta_n(l_0)))] < 0.$$

Получили противоречие. Для получения второго соотношения (2.35) заметим, что при $\beta(l_0) \rightarrow \infty$ характеристическое уравнение (2.17) имеет вид $\cos(\beta(l_0)) + O(\beta^{-1}(l_0)) = 0$. В соответствии с этим $\beta_n(l_0) \sim \pi/2(2n + 1)$ при $n \rightarrow \infty$, а соответствующие собственные функции $v_n(x)$ близки к балочным функциям (2.15), в которых $\langle w_k(x), w_k(x) \rangle^{1/2} = \exp(\beta_n(l_0))/2(1 + O(\beta_n^{-1}(l_0)))$ при $n \rightarrow \infty$. С учетом этого, вида функций (2.16) и равенства (2.36) имеем второе соотношение (2.35). *Утверждение доказано.*

Отметим, что первое условие (2.35) является необходимым условием управляемости поведением решений начально-краевой задачи (2.1)–(2.4).

Преобразуем равенства (2.34) с учетом (2.23) к следующему виду

$$\begin{aligned}
\int_0^T M(t)dt &= \alpha_1(T) = J(l_0)(\dot{\theta}_T - \dot{\theta}_0) - J(l_0)J_0^{-1}(l_0) \sum_{n=1}^{\infty} d_n(l_0)(b_{Tn}(l_0) - b_{0n}(l_0)), \\
\int_0^T tM(t)dt &= \alpha_2(T) = J(l_0)(\theta_0 - \theta_T + \dot{\theta}_T T) - \\
&- J(l_0)J_0^{-1}(l_0) \sum_{n=1}^{\infty} d_n(l_0)(a_{0n}\omega_n^{-1}(l_0) - a_{Tn}(l_0)\omega_n^{-1}(l_0) - b_{Tn}(l_0)T), \\
\int_0^T \sin(\omega_n(l_0)t)M(t)dt &= \alpha_{2n+1}(T) = \\
&= J_0(l_0)d_n^{-1}(-a_{Tn}(l_0)\cos(\omega_n(l_0)T) + b_{Tn}(l_0)\sin(\omega_n(l_0)T) + a_{0n}(l_0)), \\
\int_0^T \cos(\omega_n t)M(t)dt &= \alpha_{2n+2}(T) = \\
&= J_0(l_0)d_n^{-1}(l_0)(a_{Tn}(l_0)\sin(\omega_n(l_0)T) + b_{Tn}(l_0)\cos(\omega_n(l_0)T) - b_{0n}(l_0)) \\
&(n = 1, 2, \dots).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Отметим, что согласно (2.23), (2.35) справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2(T) < \infty. \tag{2.39}$$

Обозначим через $Q_2(0, T)$ подпространство $L_2(0, T)$, являющееся замкнутой в норме этого пространства линейной оболочкой функций

$$\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = t, \varphi_{2n+1}(t) = \sin(\omega_n(l_0)t), \varphi_{2n+2}(t) = \cos(\omega_n(l_0)t), n = 1, 2, \dots \tag{2.40}$$

Утверждение 2.3. *Функции (2.40) образуют базис Рисса в пространстве $Q_2(0, T)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что для некоторого n функции

$$\varphi_{2(n+j)+1}(t), \varphi_{2(n+j)+2}(t), (j = 1, 2, \dots) \tag{2.41}$$

образуют базис Рисса в подпространстве $Q_2^n(0, T)$, являющимся замкнутой линейной оболочкой функций (2.41). Согласно [74, с. 56], для этого необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матриц Грамма $G_m^n = \{g_{pq}\}, g_{pq} = (\varphi_p(t), \varphi_q(t))_{L_2(0, T)}, (p, q = 2(n+j) +$

$1, 2(n+j)+2, j = 1, 2, \dots, m)$ были в совокупности отделены от нуля и бесконечности. Из вида функции (2.41) имеем

$$g_{2(n+j)+1} g_{2(n+j)+1}, g_{2(n+j)+2} g_{2(n+j)+2} = T/2 + O((n+j)^{-2}), g_{2(n+j)+1} g_{2(n+j)+2} = O((n+j)^{-2})$$

при $(n+j) \rightarrow \infty$, и

$$g_{2(n+j)+1} g_{2(n+k)+1}, g_{2(n+j)+1} g_{2(n+k)+2} = O([n(j-k)]^{-1})$$

при $i \neq k, |n(j-k)| \rightarrow \infty$.

В связи с этим характеристическое уравнения матрицы G_m^n порядка $2m$ будет иметь вид $(T/2 - \lambda)^{2m} + O(n^{-1})$. Отсюда следует совокупная отделенность от нуля и бесконечности собственных значений матриц G_m^n . Таким образом, функции (2.41) образуют базис Рисса в $Q_2^n(0, T)$. Добавление к функциям (2.41) конечного числа линейно независимых функций не меняет свойства базиса. Следовательно функции (2.40) образует базис Рисса в $Q_2(0, T)$. Это означает, что собственные значения $\lambda_j > 0$ бесконечной матрицы Грамма G , построенной по системе функций (2.41), в совокупности отделены от нуля и бесконечности, т.е. существуют постоянные $m_g, M_g > 0$, для которых $m_g < \lambda_j < M_g$ ($j = 1, 2, \dots$). Таким образом справедливо неравенство

$$m_j \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \sum_{j,k=1}^{\infty} g_{j,k} \xi_j \xi_k < M_j \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2. \quad (2.42)$$

для любого $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2, \|\xi\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \infty$. *Утверждение доказано.*

Общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве $L_2(0, T)$ следующий [74]

$$F_2(u) = (u(t), M(t))_{L_2(0,T)}, M(t) \in L_2(0, T); \|F_2\| = \|M(t)\|_{L_2(0,T)} \quad (2.43)$$

Таким образом, задача 1.1 построения оптимального управления на основании (2.37), (2.40) сводится к следующей проблеме моментов в пространстве $L_2(0, T)$.

Найти функционал вида (2.43), удовлетворяющий условиям

$$F_2(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T) (j = 1, 2, \dots) \quad (2.44)$$

и имеющий минимальную норму $\|F_2\|_{min} = m(T)$.

Решение этой задачи дано в работе [49]. Изложим кратко алгоритм решения. По системе функций $\varphi_j(t)$ построим ортонормированную в $L_2(0, T)$ систему функций $\psi_j(t)$, используя

ортогонализацию Шмидта [74]. Положим

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1(t) &= \varphi_1(t), & \psi_1(t) &= \bar{\psi}_1(t)/\eta_1, \\
\bar{\psi}_2(t) &= \varphi_2(t) - \alpha_{21}\psi_1(t), & \psi_2(t) &= \bar{\psi}_2(t)/\eta_2, \\
&\dots & & \dots \\
\bar{\psi}_n(t) &= \varphi_n(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}\psi_j(t), & \psi_n(t) &= \bar{\psi}_n(t)/\eta_n, \\
\alpha_{nj} &= (\varphi_n(t), \psi_j(t))_{L_2(0,T)}, & \eta_n &= \|\bar{\psi}_n(t)\|_{L_2(0,T)}.
\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение величины $\beta_n(T)$ по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
\beta_1(T) &= \alpha_1(T)/\eta_1, \\
\beta_2(T) &= (\alpha_2(T) - \alpha_{21}\beta_1(T))/\eta_2, \\
&\dots \\
\beta_n(T) &= (\alpha_n(T) - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}\beta_j(T))/\eta_n.
\end{aligned}$$

Отметим, что согласно (2.41),(2.44)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2(T) < \infty. \tag{2.45}$$

Утверждение 2.4. Существует единственная функция

$$M^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(T)\psi_n(t), \tag{2.46}$$

удовлетворяющая условию

$$\|M^*(t)\|_{L_2(0,T)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2(T) \right)^{1/2} = m(T).$$

Доказательство. Представим $L_2(0, T) = Q_2(0, T) \oplus P_2(0, T)$, где $P_2(0, T) = \{u(t) \in L_2(0, T), (u(t), \psi_j(t))_{L_2(0,T)} = 0, j = 1, 2, \dots\}$. Условия (2.44) эквивалентны условиям

$$F_2(\psi_j(t)) = \beta_j(T) \quad (j = 1, 2, \dots). \tag{2.47}$$

Произвольная функция $M(t) \in L_2(0, T)$, определяющая (2.43) и удовлетворяющая условиям (2.47) имеет вид $M(t) = M^*(t) + P(t)$, где $p(t) \in P_2(0, T)$, но $\|M(t)\|_{L_2(0,T)}^2 = \|M^*(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \|P(t)\|_{L_2(0,T)}^2$.

Отсюда $\min \|M(t)\|_{L_2(0,T)} = \|M^*(t)\|_{L_2(0,T)} = m(T) \in H_2(0, T)$, $Q(t) \in Q_2(0, T)$. Утверждение доказано.

Обозначим через $S(m(T))$ множество функционалов вида (2.42), имеющих норму $m(T)$, каждый из которых характеризуется функцией $M(t)$. Имеющий единичную норму элемент $e_0(t) = M^*(t)/\|M^*(t)\|_{L_2(0,T)}$, назовем экстремальным. Обобщением функционального подхода к задачам оптимального управления, предложенного в монографии [39], на рассматриваемый бесконечномерный случай является следующее утверждение.

Утверждение 2.5. Принцип максимума *Оптимальный функционал $F_2^*(u)$, вида (2.43) и определяемый функцией $M^*(t)$, выделяется из всех функционалов вида (2.43), имеющих ту же норму $m(T)$, следующим свойством максимума на экстремальном элементе*

$$F_2^*(e_0) = \max_{F(u) \in S(m(T))} F(e_0).$$

Непосредственно из вида коэффициентов $\beta_n(T)$ следует

Утверждение 2.6.

$$\lim_{T \rightarrow 0} m(T) = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} m(T) = 0.$$

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $m(T) = L$.

Утверждение 2.7. *Решение задачи 4 дает пара $(T^*, M^*(t))$, где $M^*(t)$ определяется формулой (2.46).*

Рассмотрим теперь решение задач 3, 4. Линейный непрерывный функционал в пространстве $L_1(0, T)$ имеет вид [69]:

$$F_1(u) = \int_0^T u(t)M(t)dt, \quad M(t) \in L_\infty(0, T), \quad \|F_1\| = \|M(t)\|_{L_\infty(0,T)}. \quad (2.48)$$

С учетом (2.24), (2.38), (2.46) задача 1.3 может быть сформулирована как следующая проблема моментов в пространстве $L_1(0, T)$.

Найти функционал вида (2.48), удовлетворяющий условиям

$$F_1(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (2.49)$$

и имеющий минимальную норму $\|F_1\|_{min} = m(T)$.

Отметим, что указанная проблема моментов при конечном числе ограничений (2.49) рассмотрена в [75]. Некоторые результаты [75] могут быть распространены на рассматриваемый случай.

Обозначим через $Q_1(0, T)$ подпространство $L_1(0, T)$, полученное замыканием в норме пространства $L_1(0, T)$ множества функций вида $u_N(t) = \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j(t)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$. В силу соотношения $\|u_N(t)\|_{L_1(0,T)} \leq T \|u_N(t)\|_{L_2(0,T)}^2$ и неравенства (2.42) $Q_1(0, T)$ является замкнутым линейным подпространством $L_1(0, T)$.

Введем двойственную к проблеме моментов задачу.

Найти

$$\min_{\xi \in l_2} \left\| \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} = \left\| \sum_{j=1}^N \xi_j^* \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} = \|u_n^*(t)\|_{L_1(0,T)} = l^{-1}(T), \quad (2.50)$$

при условии $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^* \alpha_j(T) = 1$.

Утверждение 2.8. $m(T) = l(T)$

Доказательство. Для любых $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$ и $N > 0$ согласно (2.34)

$$\left| \sum_{j=1}^N \xi_j \alpha_j(T) \right| = \left| F_1 \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j(t) \right) \right| \leq \|F_1\| \left\| \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} \leq \|F_1\| \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|F_1\|^{-1} &\leq \min_{\xi \in l_2} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} / \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) \right\|_{L_1(0,T)} = \\ &= \min_{\xi \in l_2, \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) = 1} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|F_1\| \geq l(T)$ и $m(T) \geq l(T)$.

Определим в $Q_1(0, T)$ функционал

$$\Phi(u) = \Phi \left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j \right) = \sum |j = 1|^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) \quad (\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2).$$

Норма $\Phi(u)$ в $Q_1(0, T)$ равна

$$\|\Phi\| = \sup_{u \in Q_1(0,T)} \Phi(u) / \|u\|_{L_1(0,T)} = \sup_{\xi \in l_2} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) \right| / \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} = l(T).$$

Продолжим функционал $\Phi(u)$ на все пространство $L_1(0, T)$ с сохранением нормы (теорема Хана-Банаха, см. [76, с. 244]). Этот функционал обозначим $F_1(u)$. Соответственно имеем $F_1(u_j) = \alpha_1(T)$ ($j = 1, 2, \dots$). Следовательно, $m(T) = l(T)$. *Утверждение доказано.*

Отсюда на основании (2.48) имеем следующее утверждение.

Утверждение 2.9.

Решение задачи 3 дается формулой

$$M^*(t) = l(T) \text{sign}(u^*(t)). \quad (2.51)$$

Отметим, что на основании (2.50)

$$|F(u^*)| = l(T) \|u^*(t)\|_{L_1(0,T)} = 1. \quad (2.52)$$

Очевидно, что справедливо и обратное. Если для некоторого элемента $u^*(t) \in Q_1(0, T)$ выполнено (2.52) $u^*(t)$ выполнено (2.50) и $u^*(t)$ является решением двойственной задачи.

Пространство $L_1(0, T)$ не является строго нормированным. Поэтому равенство (2.51) и соответственно решение двойственной задачи (2.50) справедливо не для единственного элемента.

Пусть $u^*(t)$ и $v^*(t)$ - решения задачи (2.50). Тогда для функционала $F_1(u)$ вида (2.49) и дающего решение проблемы моментов (2.48), в котором $M^*(t)$ определяется согласно (2.18), справедливы на основании (2.48) равенства $|F_1(u^*)| = |F_1(v^*)| = 1$. Но тогда на основании (2.49) почти всюду $l(T)sign(u^*(t)) = l(T)sign(v^*(t))$. Таким образом, решение задачи 1.3 единственно.

Обозначим через $S(m_1(T))$ множество функционалов вида (2.48), имеющих норму $m_1(T)$, каждый из которых характеризуется функцией $M(t)$. Имеющий единичную норму элемент $e_0(t) = u^*(t)/\|u^*(t)\|_{L_1(0, T)}$, назовем экстремальным.

Утверждение 2.10 (Принцип максимума). *Оптимальный функционал $F_*(u)$ вида (2.48) и определяемый функцией $M^*(t)$, выделяется из всех функционалов вида (2.48), имеющих ту же норму $m_1(T)$, следующим свойством максимума на любом экстремальном элементе*

$$F_*(e_0) = \max_{M(t) \in S(m_1(T))} F(e_0).$$

Утверждение 2.11.

$$\lim_{T \rightarrow 0} m_1(T) = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} m_1(T) = 0. \quad (2.53)$$

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $m_1(T) = P_2$.

Утверждение 2.12. *Решение задачи 4 дает пара $(T^*, M^*(t))$, где $M^*(t)$ определяется формулой (2.51).*

Пример 2.1.

В качестве примера рассмотрим механическую систему, в которой направляющая имеет следующие размеры: внешний диаметр 0.1125 м, внутренний диаметр 0.0825 м, длина 0.75 м; рука имеет следующие размеры: внешний диаметр 0.05 м, внутренний диаметр 0.035 м; материал направляющей и руки - сталь: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м³. Имеем следующие безразмерные параметры начально-краевой задачи (1.17)-(1.21): $J = 0.304$, $b = 1/2$.

Ниже на рис. 2.1-2.3 для различных значений времени T приведены графики оптимальных управлений в пространствах $L_2(0, T)$ и $L_\infty(0, T)$ соответственно, обеспечивающих

поворот рассматриваемой системы на угол $\pi/2$ с полным гашением колебаний из начального положения $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, $u(x, 0) = u_t(x, 0) \equiv 0$. Графики оптимальных управлений приведены в безразмерных переменных.

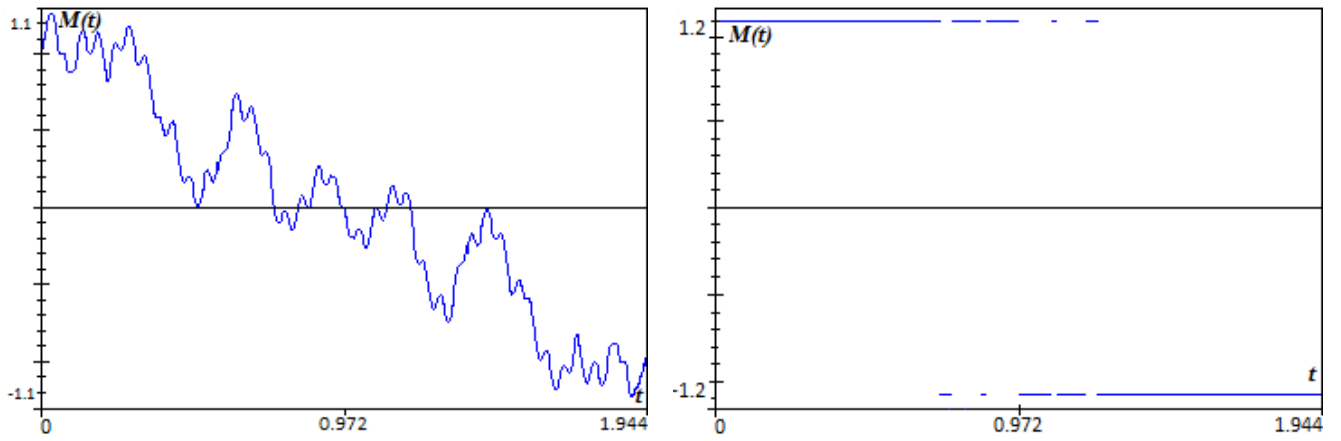


Рис. 2.1. Оптимальные управления в пространствах L_2 и L_∞ для времени $T = 0.05$ с

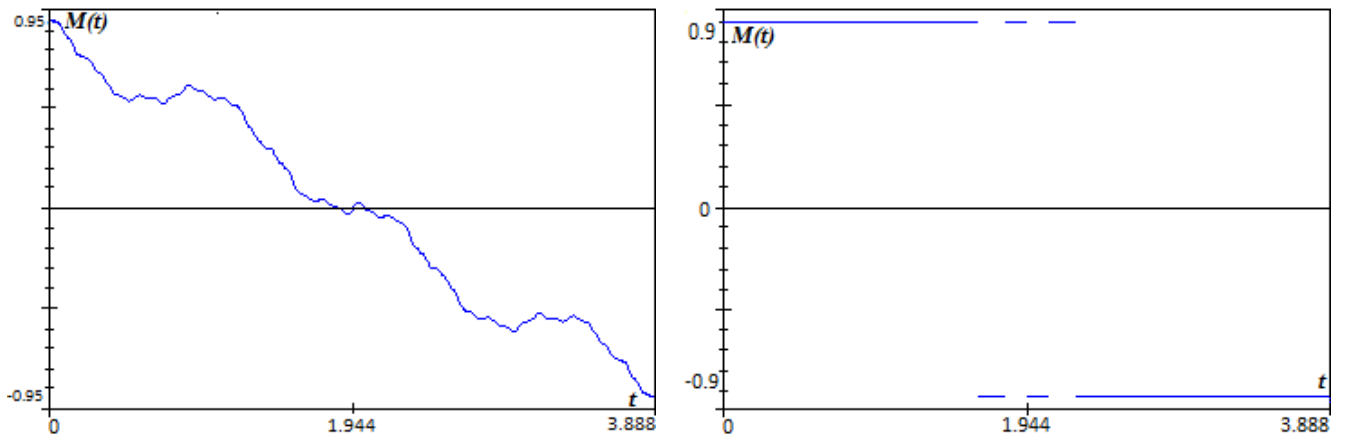


Рис. 2.2. Оптимальные управления в пространствах L_2 и L_∞ для времени $T = 0.1$ с

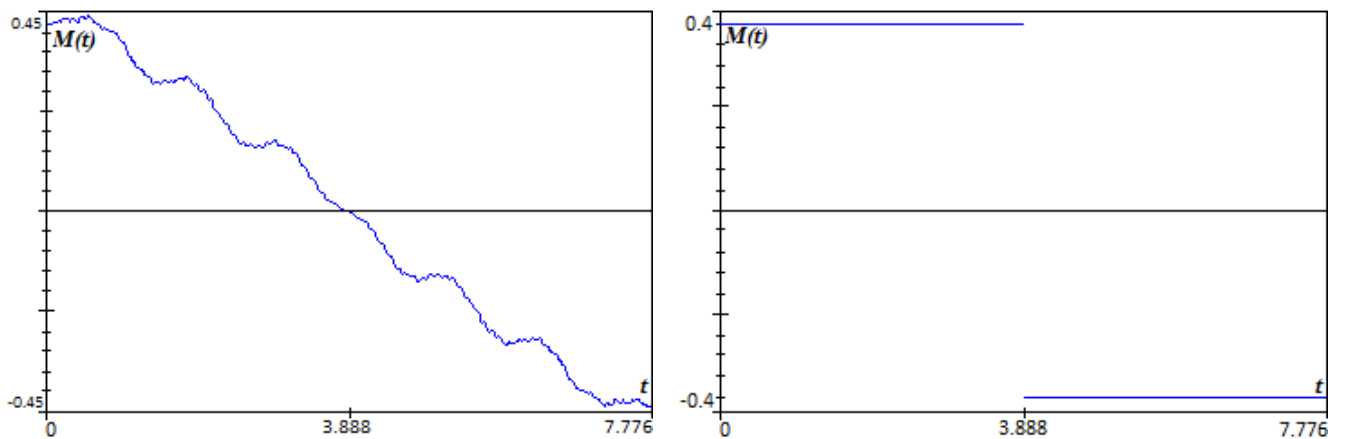


Рис. 2.3. Оптимальные управления в пространствах L_2 и L_∞ для времени $T = 0.2$ с

3. Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи с переменной границей

3.1. Постановка задачи

Рассматривается следующая начально-краевая задача

$$J(l)\ddot{\theta} - \int_0^l (b+l-x_1)u_{tt}(x,t)dx = M(t), \quad (3.1)$$

$$u_{tt} + u_{xxxx} = (b+l-x)\ddot{\theta}_1 + f(x,t), \quad (3.2)$$

$$u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = 0, u_x(l,t) = u(l,t) = 0, \quad (3.3)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = \dot{u}_0(x), \quad (0 \leq x \leq l_0) \quad (3.4)$$

относительно функций $\theta = \theta(t)$, $u = u(x,t)$ в области $\bar{Q}_{l_0,T} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, где $l = l(t)$ - заданная функция, $l(t) \in W_2^2(0,T)$, $l(t) > 0$, $l_0 = l(0)$, $M(t) \in L_2(0,T)$, $b > 0$ - постоянная, $J(l)$ определена в п. 1.1, функция $f(x,t)$ принадлежит $L_2(0,l)$ при каждом t и непрерывна по t в метрике этого пространства, $u_0(x)$ и $\dot{u}_0(x)$ - заданные функции, принадлежащие некоторым функциональным пространствам.

Ниже для начально-краевой задачи (3.1)-(3.4) рассматривается решение задач 1.1-1.4 оптимального управления поведением решений. При этом вводится определение решения, показано его существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных условий, т.е. показана математическая корректность поставленной начально-краевой задачи. Отметим, что (3.1)-(3.4) является промежуточной между начально-краевыми задачами (2.1)-(2.4) и (1.17)-(1.21) и будет использоваться при решении задач оптимального управления 1.1-1.4 для начально-краевой задачи (1.17)-(1.21).

3.2. Определение решения начально-краевой задачи (3.1)-(3.4)

Сформулируем для (3.1)-(3.4) постановку начально-краевой задачи и докажем ее корректность.

Выразим из уравнения (3.1) $\ddot{\theta}$ и подставим в (3.2). В результате получим для определения $u(x,t)$ следующее уравнение

$$\begin{aligned} A(l)u_{tt} + u_{xxxx} &\equiv u_{tt} - J^{-1}(l)(b+l-x) \int_0^l (b+l-x_1)u_{tt}(x_1,t)dx_1 + u_{xxxx} = \\ &= \frac{1}{J(l)}(b+l-x)M(t) + f(x,t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

которое совместно с краевыми и начальными условиями (3.3), (3.4) определяет начально-краевую задачу для определения $u(x, t)$.

В случае $l(t) = l_0$, как следует из результатов главы 2, решение начально-краевой задачи (3.3)-(3.5) при условии (3.2) может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \langle G_t(t, x, \xi)u_0(\xi) \rangle + \langle G(t, x, \xi)\dot{u}_0(\xi) \rangle + \\ + J_0^{-1}(l_0) \int_0^t \langle G_t(t - \tau, x, \xi) \cdot M(t), b + l_0 - \xi \rangle d\tau + \int_0^t (G_t(t - \tau, x, \xi) \cdot f(\xi, \tau))_{L_2(0, l_0)} d\tau, \quad (3.6)$$

где

$$G(t, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{-1}(l_0) \sin(\omega_n(l_0)t) \cdot v_n(x, l_0) \cdot v_n(\xi, l_0)$$

непрерывная по совокупности переменных функция, которая называется функцией Грина начально-краевой задачи (2.1)-(2.4).

Построим формулу, определяющую решение начально-краевой задачи (3.1)-(3.4) в случае переменного $l(t)$, аналогичную (3.6). Положим $l(t) = l_0 l_1(t)$, $l_0 = l(0)$ и выполним в (3.5) замену переменной $x = l_1(t)\xi$, $0 \leq \xi \leq l_0$, введя в рассмотрение функцию $v(\xi, t) = u(l_1(t)\xi, t)$. Таким образом, от области с переменной границей перешли к области с постоянной границей $\overline{Q}_{l_0 T} = \{(\xi, t), 0 \leq \xi \leq l_0, 0 \leq t \leq T\}$. Пересчитаем производные

$$u_t = v_\xi \dot{\xi} + v_t = -v_\xi \xi l_1^{-1}(t) \dot{l}_1(t) + v_t, \\ u_{tt} = v_{\xi\xi} \dot{\xi}^2 + v_\xi \ddot{\xi} + 2v_{\xi t} \dot{\xi} + v_{tt} = v_{\xi\xi} \xi^2 \dot{l}_1^2(t) \cdot l_1^{-2}(t) + v_\xi \xi (2\dot{l}_1^2(t) - l_1(t) \ddot{l}_1(t)) l_1^{-2}(t) - \\ - 2v_{\xi t} \xi \dot{l}_1(t) l_1^{-1}(t) + v_{tt} = L(\xi, v_{\xi\xi}, v_{\xi t}, v_\xi, l_1(t)) + v_{tt}, \\ u_{xxxx} = v_{\xi\xi\xi\xi} l_1^{-4}(t). \quad (3.7)$$

Введя действующий в $L_2(0, l_0)$ оператор

$$A(l_1(t))v \equiv v(\xi) - J^{-1}(l_1(t))l_1(t) [b + l_1(t)(l_0 - \xi)] \int_0^{l_0} [b + l_1(t)(l_0 - \xi)] v(\xi) d\xi,$$

запишем с учетом (3.7) уравнение (3.5) в следующем виде

$$A(l_1(t)) (v_{tt} + L(\xi, v_{\xi\xi}, v_{\xi t}, v_\xi, l_1(t))) + l_1^{-4}(t) v_{\xi\xi\xi\xi} = J^{-1}(l(t)) [b + l_1(t)(l_0 - \xi)] M(t) + f(\xi, t), \quad (3.8)$$

где $f(\xi, t) = f(l_1(t)\xi, t)$. Краевые и начальные условия для $v(\xi, t)$ примут вид

$$v_{\xi\xi}(0, t) = v_{\xi\xi\xi}(0, t) = 0, \quad v_\xi(l_0, t) = v(l_0, t) = 0, \quad (3.9)$$

$$v(\xi, 0) = u_0(\xi), \quad v_t(\xi, 0) = \dot{u}_0(\xi). \quad (3.10)$$

Введем в рассмотрение функции вида

$$z(x, t) \in H_2(\overline{Q}_{l_0 T}), \quad z(x, T) \equiv 0. \quad (3.11)$$

Умножим (3.8) на $z(x, t)$ и проинтегрируем по (x, t) в области $Q_{l_0 T}$ с учетом (3.8), (3.10). В результате получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \{ - (v_t(\xi, t), (A(l_1(t))z(\xi, t))_t)_{L_2(0, l_0)} - (L(\xi, v_{\xi\xi}, v_{\xi t}, v_\xi, l_1(t)), (A(l_1(t)), z(\xi, t))_t) + \\ & + (v_{\xi\xi}(\xi, t), z_{\xi\xi}(\xi, t))_{L_2(0, l_0)} \cdot l_1^{-4}(t) - (J(l(t)) \cdot [b + l_1(t)(l_0 - \xi)] M(t), z(\xi, t))_{L_2(0, l_0)} - \\ & - (f(\xi, t) \cdot z(\xi, t))_{L_2(0, l_0)} \} dt + (A(l_0) \cdot \dot{u}_0(\xi), z(\xi, 0))_{L_2(0, l_0)} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Под решением начально-краевой задачи (3.8)-(3.10) будем понимать функцию $v(\xi, t) \in H_2(Q_{l_0 T})$, $(v(\xi, 0) = u_0(\xi))$ и удовлетворяющую равенству (3.12) для любой функции (3.11).

Покажем, что решение начально-краевой задачи (3.8)-(3.10) существует и единственно. Построение решения разобьем на несколько этапов. Построим сначала решение начально-краевой задачи

$$A(l_1(t))v_{tt} + l_1^{-4}(t)v_{\xi\xi\xi\xi} = 0, \quad (3.13)$$

$$v_{\xi\xi}(0, t) = v_{\xi\xi\xi}(0, t) = 0, \quad v_\xi(0, t) = v(0, t) = 0, \quad (3.14)$$

$$v(\xi, 0) = u_0(\xi), \quad v_t(\xi, 0) = \dot{u}_0(\xi). \quad (3.15)$$

В этом случае соотношение (3.12) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[- (v_t(\xi, t), (A(l_1(t))z(\xi, t))_t)_{L_2(0, l_0)} + l_1^{-4}(t) (v_{\xi\xi}(\xi, t), z_{\xi\xi}(\xi, t))_{L_2(0, l_0)} \right] dt + \\ & + (A(l_0) \cdot \dot{u}_0(\xi), z(\xi, 0))_{L_2(0, l_0)} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Разобьем отрезок $[0, T]$ на N частей ширины $\Delta t = T/N$ и обозначим $t_j = \Delta t_j$, $j = 0, 1, \dots, N$. Соотношение (3.16) заменим соотношением

$$\sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[- (v_t^j(\xi, t), (A(l(t_j))z(\xi, t))_t)_{L_2(0, l_0)} + l_1^{-4}(t) (v_{\xi\xi}^j(\xi, t), z_{\xi\xi}(\xi, t))_{L_2(0, l_0)} \right] dt + O(\Delta t) = 0, \quad (3.17)$$

которое с учетом вида оператора $A(l_1(t))$ и свойств $l_1(t)$ выполняется равномерно относительно разбиения отрезка $[0, T]$. На каждом отрезке $T_{j+1} = [t_j, t_{j+1}]$ решение строится согласно изложенной в главе 2 схеме по формуле (3.6). При этом за начальные условия решения принимается значение решения $v^{j-1}(\xi, t_j)$ и $v_t^{j-1}(\xi, t_j)$, полученного на предыдущем отрезке. Эти

функции принадлежат H_2 и H соответственно. Решение $v^j(\xi, t) \in H_2(Q_{l_0 T_{j+1}})$. Согласно (2.24) справедлива оценка

$$\|v^j(\xi, t)\|_{H_2(Q_{l_0 T_{j+1}})}^2 \leq \Delta t (\|v^{j-1}(\xi, t_j)\|_{H_2}^2 + \|v_t^{j-1}(\xi, t_j)\|_H^2)$$

из (2.27) и (2.28) также следует, что

$$\|v^{j-1}(\xi, t_j)\|_{H_2}^2 + \|v_t^{j-1}(\xi, t_j)\|_H^2 = \|v^{j-1}(\xi, t_{j-1})\|_{H_2}^2 + \|v_t^{j-1}(\xi, t_{j-1})\|_H^2.$$

Продолжая этот процесс по слоям, получим, что

$$\|v^j(\xi, t)\|_{H_2(Q_{l_0 T_{j+1}})}^2 \leq \Delta t (\|u_0(\xi)\|_{H_2}^2 + \|\dot{u}_0(\xi)\|_{H_2}^2). \quad (3.18)$$

Отсюда следует, что для прямой суммы функций

$$v^{\Delta t}(\xi, t) = \sum_{j=1}^N v^j(\xi, t),$$

определенной в $\bar{Q}_{l_0 T}$ и удовлетворяющей соотношению (3.17), справедлива оценка

$$\|v^{\Delta t}(\xi, t)\|_{H_2(\bar{Q}_{l_0 T})}^2 \leq T (\|u_0(\xi)\|_{H_2}^2 + \|\dot{u}_0(\xi)\|_{L_2(0, l_0)}^2). \quad (3.19)$$

Устремляя теперь $\Delta t \rightarrow 0$, получим функцию $v^*(\xi, t)$, которая удовлетворяет интегральному равенству (3.16) для любой $z(\xi, t)$ вида (3.11), т. е. является решением (3.13)-(3.15). Из (3.19) следует также единственность решения и непрерывная зависимость от начальных условий.

Рассмотрим начально-краевую задачу (3.14)-(3.15) для уравнения

$$A(l_1(t)) (v_{tt} + L(\xi, v_{\xi\xi}, v_{\xi t}, v_{\xi}, l_1(t)) + l_1^{-4}(t) v_{\xi\xi\xi\xi}) = 0. \quad (3.20)$$

Решение этой начально-краевой задачи определяется из интегрального соотношения

$$\begin{aligned} & \int_0^T [- (v_t(\xi, t), (A(l_1(t))z(\xi, t))_t)_{L_2(0, l_0)} + 2 (v_{\xi}(\xi, t), (\xi \dot{l}_1(t) l_1^{-1}(t) A(l_1(t))z(\xi, t))_t)_{L_2(0, l_0)} + \\ & + (v_{\xi\xi} \xi^2 \dot{l}_1^2(t_1) l_1^{-2}(t_1) + v_{\xi\xi} (2\dot{l}_1^2(t) - l_1(t) \ddot{l}_1(t_1)) l_1^{-2}(t_1), z(\xi, t))_{L_2(0, l_0)} + \\ & + (v_{\xi\xi}(\xi, t), z_{\xi\xi}(\xi, t))_{L_2(0, l_0)} + (A(l_0) \cdot \dot{u}_0(\xi), z(\xi, 0))_{L_2(0, l_0)} = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

которое должно выполняться при любой функции $z(\xi, t)$ вида (3.11). При этом $v(\xi, 0) = u_0(\xi)$.

Для краткости изложения рассмотрим построение решения (3.14)-(3.15), (3.22) для одного слагаемого $v_{\xi\xi}(\xi, l) \dot{l}_1^2(t) l_1^{-2}(t)$, входящего в оператор $L(\cdot)$, т.е. рассмотрим начально-краевую задачу

$$A(l_1(t)) v_{tt} + l_1^{-4}(l_1) v_{\xi\xi\xi\xi} = -A(l_1(t)) v_{\xi\xi}(\xi, t) \dot{l}_1^2(t) l_1^{-2}(t), \quad (3.22)$$

$$v_{\xi\xi}(0, t) = v_{\xi\xi\xi}(0, t) = 0, v_{\xi}(l_0, t) = v(l_0, t) = 0, \quad (3.23)$$

$$v(\xi, 0) = u_0(\xi), v_t(\xi, 0) = \dot{u}_0(\xi). \quad (3.24)$$

Обозначим через $w(\xi, t, \tau)$ решение вспомогательной краевой задачи

$$A(l_1(t))w_{tt} + l^{-4}(l_1)w_{\xi\xi\xi\xi} = 0, \quad (3.25)$$

$$w_{\xi\xi}(0, t, \tau) = w_{\xi\xi\xi}(0, t, \tau) = 0, w(l_0, t, \tau) = w_{\xi}(l_0, t, \tau) = 0, \quad (3.26)$$

$$w(\xi, \tau, \tau) = 0, w_t(\xi, \tau, \tau) = -A(l_1(\tau)) \cdot v_{\xi\xi}(\xi, \tau). \quad (3.27)$$

в области $\bar{Q}_{l_0 T, \tau} = \{0 \leq \xi \leq l_0, 0 \leq \tau \leq t \leq T\}$, считая $v_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ известной функции, принадлежащей при каждом фиксированном t пространству H и непрерывную в метрике этого пространства.

Отметим, что для $w(\xi, t, \tau)$ согласно (3.19) справедлива оценка

$$\|w(\xi, \tau, \tau)\|_{H_2(Q_{l_0 T, \tau})}^2 = \int_{\tau}^T (\|w_t\|_{L_2(0, l_0)}^2 + \|w_{\xi\xi}\|_{L_2(0, l_0)}^2) dt \leq T \|A(l_1(\tau)) \cdot v_{\xi\xi}(\xi, \tau)\|_{L_2(0, l_0)}^2. \quad (3.28)$$

Решение (3.22)-(3.24) может быть представлено в виде

$$v(\xi, t) = v^*(\xi, t) + \int_0^t w(\xi, t, \tau) i_1^2(\tau) l_1^{-2}(\tau) d\tau, \quad (3.29)$$

где $v^*(\xi, t)$ - решение начально-краевой задачи (3.13)-(3.15), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой.

Для нахождения $v(\xi, t)$ из (3.29) построим итерационный процесс

$$A(l_1(t))v_{tt}^{(k+1)} + l_1^{-4}(t)v_{\xi\xi\xi\xi}^{(k+1)} = -A(l_1(t))v_{\xi\xi}^{(k)}(\xi, t) \cdot i_1^2(t) \cdot l_1^{-2}(t), \quad (3.30)$$

$$v_{\xi\xi}^{(k+1)}(0, t) = v_{\xi\xi\xi}^{(k+1)}(0, t) = 0, v^{(k+1)}(l_0, \tau) = v_{\xi}^{(k+1)}(l_0, \tau) = 0, \quad (3.31)$$

$$v^{(k+1)}(\xi, 0) = u_0(\xi), v_t^{(k+1)}(\xi, 0) = \dot{u}_0(\xi), k = 0, 1, \dots, v^0(\xi, t) \equiv 0. \quad (3.32)$$

Из (3.29) имеем

$$\alpha^{(k+1)}(\xi, t) = v^{(k+1)}(\xi, t) - v^{(k)}(\xi, t) = \int_0^t (w^{(k+1)}(\xi, \tau, \tau) - w^k(\xi, \tau, \tau)) i_1^2(\tau) \cdot l_1^{-2}(\tau) d\tau,$$

где $w^k(\xi, \tau, \tau)$ решение (3.25)-(3.27), отвечающее $v_{\xi\xi}^k(\xi, t)$. Согласно (3.28)

$$\|\alpha_t^{(k+1)}(\xi, t)\|_{L_2(0, l_0)}^2 + \|\alpha_{\xi\xi}^{(k+1)}(\xi, t)\|_{L_2(0, l_0)}^2 = T A_* L_* \int_0^t (\|\alpha_t^k(\xi, t)\|_{L_2(0, l_0)}^2 + \|\alpha_{\xi\xi}^k(\xi, t)\|_{L_2(0, l_0)}^2) d\tau.$$

Здесь $A_* = \max_t \|A(l_1(t))\|_*^2$, где $\|\cdot\|_*$ норма линейного ограниченного оператора в H , $L_* = \max_t |\dot{l}_1^2(t) \cdot l_1^{-2}(t)|$.

Обозначим через $K = \max_t \left(\|\alpha_t^1(\xi, t)\|_{L_2(0, l_0)}^2 + \|\alpha_{\xi\xi}^1(\xi, t)\|_{L_2(0, l_0)}^2 \right) = \max_t (\|v_t^*(\xi, t)\|_{L_2(0, l_0)}^2 + \|v_{\xi\xi}^*(\xi, t)\|_{L_2(0, l_0)}^2)$. Тогда имеем

$$\|\alpha_t^2(\xi, t)\|_{L_2(0, l_0)}^2 + \|\alpha_{\xi\xi}^2(\xi, t)\|_{L_2(0, l_0)}^2 \leq KTA_*L_*t, \dots$$

$$\|\alpha_t^{(k+1)}(\xi, t)\|_{L_2(0, l_0)} + \|\alpha_{\xi\xi}^{(k+1)}(\xi, t)\|_{L_2(0, l_0)} \leq (KTA_*L_*t)^k/k!$$

Отсюда $\|v^{(k+1)}(\xi, t) - v^{(k)}(\xi, t)\|_{H_2(\overline{Q}_{l_0T})} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Это обеспечивает фундаментальность последовательности функций $v^{(k)}(\xi, t)$ в $H_2(\overline{Q}_{l_0T})$ и сходимость к некоторой функции $v^{**}(\xi, \tau)$, которая является решением начально-краевой задачи (3.30)-(3.32).

В общем случае решение начально-краевой задачи (3.14)-(3.15), (3.22) запишем в виде

$$v^*(\xi, t; l_1) = w^0(\xi, t; l_1) + w^1(\xi, t; l_1), \quad (3.33)$$

подчеркнув функциональную зависимость решения от функции $l_1(t)$. Здесь $w^0(\xi, t; l_1)$, $w^1(\xi, t; l_1)$ - решения, отвечающие начальным условиям: $w^0(\xi, 0; l_1) = u_0(\xi)$; $w_t^0(\xi, 0; l_1) = 0$, а $w^1(\xi, 0; l_1) = 0$; $w_t^1(\xi, 0; l_1) = \dot{u}_0(\xi)$.

Рассмотрим теперь начально-краевую задачу

$$A(l_1(t)) (v_{tt} + L(\xi, v_{\xi\xi}, v_{\xi t}, v_\xi, l_1(t)) + l_1^{-4}(t)v_{\xi\xi\xi\xi}) = J(l(t))[b + l_1(t)(l_0 - \xi)]M(t), \quad (3.34)$$

$$v_{\xi\xi}(0, t) = v_{\xi\xi\xi}(0, t) = 0, v(l_0, \tau) = v_\xi(l_0, \tau) = 0, \quad (3.35)$$

$$v(\xi, 0) = 0, v_t(\xi, 0) = 0, \quad (3.36)$$

решение которой определяется из интегрального соотношения

$$\int_0^T \left\{ - (v_t(\xi, t) + L(\xi, v_{\xi\xi}, v_{\xi t}, v_\xi, l_1(t)), (A(l_1(t))z(\xi, t))_{L_2(0, l_0)} + l_1^{-4}(t)(v_{\xi\xi}(\xi, t), z_{\xi\xi}(\xi, t)))_{L_2(0, l_0)} - \right. \\ \left. - (J(l(t))[b + l_1(t)(l_0 - \xi)]M(t), z(\xi, t))_{L_2(0, l_0)} \right\} dt = 0, \quad (3.37)$$

выполняемого для любой функции $z(\xi, t)$ вида (3.11). При этом $v(\xi, 0) \equiv 0$, $v_t(\xi, 0) \equiv 0$.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для функции $w(\xi, t, \tau)$ в области $\overline{Q}_{l_0T\tau}$

$$A(l_1(t)) (w_{tt} + L(\xi, w_{\xi\xi}, w_{\xi t}, w_\xi, l_1(t)) + l_1^{-4}(t)w_{\xi\xi\xi\xi}) = 0, \quad (3.38)$$

$$w_{\xi\xi}(0, t, \tau) = w_{\xi\xi\xi}(0, t, \tau) = 0, w(l_0, \tau) = w_\xi(l_0, \tau) = 0, \quad (3.39)$$

$$w(\xi, \tau, \tau) = 0, w_t(\xi, \tau, \tau) = J(l(\tau))[b + l_1(\tau)(l_0 - \xi)]. \quad (3.40)$$

Решение начально-краевой задачи (3.38)-(3.40) $w(\xi, t, \tau; l_1)$ строится аналогично решению начально-краевой задачи (3.14)-(3.15),(3.22) для каждого τ в области $0 \leq \tau \leq t \leq T$. При этом для решения справедлива оценка вида (3.19). Непосредственной подстановкой проверяется, что решение начально-краевой задачи (3.34)-(3.36) с учетом (3.37) определяется формулой

$$v(\xi, \tau) = \int_0^t w(\xi, t, \tau; l_1)M(\tau)d\tau, \quad (3.41)$$

В (3.41) подчеркнута функциональная зависимость функции $w(*)$ от $l_1(t)$.

Аналогично рассматривается начально-краевая задача

$$A(l_1(t)) (v_{tt} + L(\xi, v_{\xi\xi}, v_{\xi t}, v_\xi, l_1(t))) + l^{-4}(l_1)v_{\xi\xi\xi\xi} = f(\xi, t), \quad (3.42)$$

$$v_{\xi\xi}(0, t) = v_{\xi\xi\xi}(0, t) = 0, v_{\xi\xi}(l_0, t) = v(l_0, t) = 0, \quad (3.43)$$

$$v(\xi, 0) = 0, v_t(\xi, 0) = 0. \quad (3.44)$$

Найдя решение $w^*(\xi, t, \tau)$ вспомогательной начально-краевой задачи

$$A(l_1(t)) (w_{tt} + L(\xi, w_{\xi\xi}, w_{\xi t}, w_\xi, l_1(t))) + l^{-4}(l_1)w_{\xi\xi\xi\xi} = 0,$$

$$w_{\xi\xi}(0, t) = w_{\xi\xi\xi}(0, t) = 0, w(l_0, t, \tau) = w_\xi(l_0, t, \tau) = 0,$$

$$w(\xi, \tau, \tau) = 0, w_t(\xi, \tau, \tau) = f(\xi, \tau)$$

в области $Q_{l_0T,\tau}$, получим решение (3.42)-(3.44), которое представимо в виде

$$v(\xi, t) = \int_0^t w^*(\xi, t, \tau; l_1)d\tau. \quad (3.45)$$

Объединяя построенные решения получим решение начально-краевой задачи (3.8)-(3.10), которое запишется согласно (3.33),(3.41),(3.45) в виде

$$v(\xi, t) = w^0(\xi, t; l_1) + w^1(\xi, t; l_1) + \int_0^t w(\xi, t; t_1; l_1) \cdot M(t_1)dt_1 + \int_0^t w^*(\xi, t, \tau; l_1)dt_1, \quad (3.46)$$

которое является единственным и непрерывно зависит от начальных условий. Этим доказывается корректность поставленной начально-краевой задачи. В (3.46) подчеркнута функциональная зависимость от функции $l_1(t)$.

3.3. Практический способ построения решения начально-краевой задачи (3.8)-(3.10)

Применим к обеим частям уравнения (3.5) интегральный оператор

$$A^{-1}(l)w \equiv w(x) + J_0^{-1}(l)(b+l-x) \int_0^l (b+l-x_1)w(x_1)dx_1,$$

являющийся обратным к оператору $A(l)$. В результате получим следующую начально-краевую задачу

$$u_{tt} + u_{xxxx} + J_0^{-1}(l)(b+l-x)(bu_{xxx}(l,t) + u_{xx}(l,t)) = J_0^{-1}(l)(b+l-x)M(t) + f_*(x,t), \quad (3.47)$$

$$u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = 0, u_x(l,t) = u(l,t) = 0, \quad (3.48)$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = \dot{u}_0(x) \quad (3.49)$$

для определения $u(x,t)$. В (3.7) $f_*(x,t) = A^{-1}(l(t))f(x,t)$. В дальнейшем знак * опустим.

Перейдем в (3.47)-(3.49) от переменных (x,t) к переменным (ξ,t) , $\xi = x/l_1(t)$ и новой функции $v(\xi,t) = u(\xi l_1(t), t)$. С учетом (3.7) получим начально-краевую задачу вида

$$v_{tt} + \Lambda(v_{\xi\xi\xi\xi}, v_{\xi\xi\xi}, v_{\xi\xi}, v_{\xi t}, v_{\xi}, l_1(t)) = J_0^{-1}(l_0 l_1(t)) [b + l_1(t)(l_0 - \xi)] M(t) + f(\xi, t), \quad (3.50)$$

$$v_{\xi\xi}(0,t) = v_{\xi\xi\xi}(0,t) = 0, v_{\xi}(l_0,t) = v(l_0,t) = 0, \quad (3.51)$$

$$v(\xi,0) = u_0(\xi), v_t(\xi,0) = \dot{u}_0(\xi), \quad (3.52)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(*) &= v_{\xi\xi\xi\xi} l_1^{-4}(t) + J_0^{-1}(l_0 l_1(t)) [b + l_1(t)(l_0 - \xi)] \cdot (bv_{\xi\xi\xi}(l_0, t) l_1^{-3}(t) + v_{\xi\xi}(l_0, t) l_1^{-2}(t)) \\ &+ v_{\xi\xi} \xi^2 l_1^2(t) l_1^{-2}(t) - 2v_{\xi t} \xi l_1(t) l_1^{-1}(t) + v_{\xi} \xi (2\dot{l}_1^2(t) + \ddot{l}_1 l_1(t)) l_1^{-2}(t), \\ &f(\xi, t) \equiv f(l_1(t)\xi, t). \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение следующие функции

а. $w^0(\xi, t)$ и $w^1(\xi, t)$, определенные в $\bar{Q}_{l_0 T}$, являющиеся решениями следующих начально-краевых задач

$$w_{tt}^0 + \Lambda(w_{\xi\xi\xi\xi}^0, w_{\xi\xi\xi}^0, w_{\xi\xi}^0, w_{\xi t}^0, w_{\xi}^0, l_1(t)) = 0, \quad (3.53)$$

$$w_{\xi\xi}^0(0,t) = w_{\xi\xi\xi}^0(0,t) = 0, w_{\xi}^0(l_0,t) = w^0(l_0,t) = 0, \quad (3.54)$$

$$w^0(\xi,0) = u_0(\xi), w_t^0(\xi,0) = 0, \quad (3.55)$$

$$w_{tt}^1 + \Lambda(w_{\xi\xi\xi\xi}^1, w_{\xi\xi\xi}^1, w_{\xi\xi}^1, w_{\xi t}^1, w_{\xi}^1, l_1(t)) = 0, \quad (3.56)$$

$$w_{\xi\xi}^1(0, t) = w_{\xi\xi\xi}^1(0, t) = 0, w_{\xi}^1(l_0, t) = w^1(l_0, t) = 0, \quad (3.57)$$

$$w^1(\xi, 0) = 0, w_t^1(\xi, 0) = u_0(\xi), \quad (3.58)$$

б. $w(\xi, t, \tau)$ и $w^*(\xi, t, \tau)$, определенные в области $\overline{Q}_{l_0 T \tau} = \{0 \leq \xi \leq l_0, 0 \leq \tau \leq T, \tau \leq t \leq T\}$ и являющиеся решениями следующих начально-краевых задач:

$$w_{tt} + \Lambda(w_{\xi\xi\xi\xi}, w_{\xi\xi\xi}, w_{\xi\xi}, w_{\xi t}, w_{\xi}, l_1(t)) = 0, \quad (3.59)$$

$$w_{\xi\xi}(0, t) = w_{\xi\xi\xi}(0, t) = 0, w_{\xi}(l_0, t) = w(l_0, t) = 0, \quad (3.60)$$

$$w(\xi, \tau, \tau) = 0, w_t(\xi, \tau, \tau) = J_0^{-1}(l_0 l_1(\tau)) [b + l_1(\tau)(l_0 - \xi)], \quad (3.61)$$

и

$$w_{tt}^* + \Lambda(w_{\xi\xi\xi\xi}^*, w_{\xi\xi\xi}^*, w_{\xi\xi}^*, w_{\xi t}^*, w_{\xi}^*, l_1(t)) = 0, \quad (3.62)$$

$$w_{\xi\xi}^*(0, t) = w_{\xi\xi\xi}^*(0, t) = 0, w_{\xi}^*(l_0, t) = w^*(l_0, t) = 0, \quad (3.63)$$

$$w^*(\xi, \tau, \tau) = 0, w_t^*(\xi, \tau, \tau) = f(\xi, \tau). \quad (3.64)$$

Решение (3.50)-(3.52) может быть записано в виде

$$v(\xi, t) = w^0(\xi, t) + w^1(\xi, t) + \int_0^t w(\xi, t, \tau) M(\tau) d\tau + \int_0^t w^*(\xi, t, \tau) d\tau, \quad (3.65)$$

в чем легко убедиться непосредственной подстановкой (3.65) в (3.50)- (3.52).

Рассмотрим теперь способ построения функций $w(*)$. Начнем с функции $w(\xi, t, \tau)$. Выберем в уравнении (3.59) в качестве "главной части" уравнение, получающееся при $t \rightarrow 0$, и запишем (3.59) в виде

$$w_{tt} + \Lambda(w_{\xi\xi\xi\xi}, w_{\xi\xi\xi}, w_{\xi\xi}, 0, 0, l_1(0)) = \Lambda(w_{\xi\xi\xi\xi}, w_{\xi\xi\xi}, w_{\xi\xi}, 0, 0, l_1(0)) - \\ - \Lambda(w_{\xi\xi\xi\xi}, w_{\xi\xi\xi}, w_{\xi\xi}, w_{\xi t}, w_{\xi}, l_1(t)) = \Phi(w_{\xi\xi\xi\xi}, w_{\xi\xi\xi}, w_{\xi\xi}, w_{\xi t}, w_{\xi}, l_1(t))$$

или

$$w_{tt} + w_{\xi\xi\xi\xi} + J_0^{-1}(b + l_0 - \xi)(bw_{\xi\xi\xi}(l_0, t) + w_{\xi\xi}(l_0, t)) = \\ = \Phi(w_{\xi\xi\xi\xi}, w_{\xi\xi\xi}, w_{\xi\xi}, w_{\xi t}, w_{\xi}, l_1(t)),$$

где

$$\Phi(*) \equiv w_{\xi\xi\xi\xi}(1 - l_1^{-4}(t)) + w_{\xi\xi\xi}(l_0, t)b\{(b + l_0 - \xi)J_0^{-1}(l_0) - \\ - [b + l_1(t)(l_0 - \xi)] J_0^{-1}(l_0 l_1(t))l_1^{-3}(t)\} - w_{\xi\xi}(l_0, t)\{(b + l_0 - \xi)J_0^{-1}(l_0) - \\ - [b + l_1(t)(l_0 - \xi)] J_0^{-1}(l_0 l_1(t))l_1^{-2}(t)\} - w_{\xi\xi}\xi^2 \dot{l}_1^2(t) \cdot l_1^{-2}(t) + 2w_{\xi t}\xi \dot{l}_1(t) \cdot l_1^{-1}(t) - \\ - w_{\xi\xi}(2\dot{l}_1^2(t) - l_1(t)\ddot{l}_1(t))l_1^{-2}(t).$$

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (3.59) с краевыми условиями (3.60) и начальными условиями (3.61). Для построения ее решения рассмотрим итерационный процесс

$$\begin{aligned} w_{tt}^{(k+1)} + w_{\xi\xi\xi\xi}^{(k+1)} + J_0^{-1}(b + l_0 - \xi)(bw_{\xi\xi\xi}^{(k+1)}(l_0, t) + w_{\xi\xi}^{(k+1)}(l_0, t)) = \\ = \Phi \left(w_{\xi\xi\xi\xi}^{(k)}, w_{\xi\xi\xi}^{(k)}, w_{\xi\xi}^{(k)}, w_{\xi t}^{(k)}, w_{\xi}^{(k)}, l(0) \right), \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$w_{\xi\xi}^{(k+1)}(0, t) = w_{\xi\xi\xi}^{(k+1)}(0, t) = 0, w_{\xi}^{(k+1)}(l_0, t) = w^{(k+1)}(l_0, t) = 0, \quad (3.67)$$

$$w^{(k+1)}(\xi, \tau, \tau) = 0, w_t^{(k+1)}(\xi, \tau, \tau) = J_0^{-1}(l_0 l_1(\tau)) [b + l_1(\tau)(l_0 - \xi)], w^0(\xi, t, \tau) \equiv 0 \quad (3.68)$$

в области $Q_{l_0 T \tau}$.

Решения (3.66)- (3.68) будем строить в виде ряда

$$w^{(k)}(\xi, t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(t, \tau) \cdot v_n(\xi, l_0). \quad (3.69)$$

Соответственно имеем

$$\begin{aligned} w^1(\xi, t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^1(t, \tau) v_n(\xi, l_0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\tau) \omega_n^{-1}(l_0) \sin(\omega_n(l_0)(t - \tau)) \cdot v_n(\xi, l_0), \\ b_n(\tau) = \langle J_0^{-1}(l_0 l_1(\tau)) [b + l_1(\tau)(l_0 - \xi)], v_n(\xi, l_0) \rangle. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Для определения $u_n^{(k+1)}(t, \tau)$ получим следующую последовательность дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{u}_n^{(k+1)} + \omega_n^2(l_0) u_n^{(k+1)} = f_n^{(k+1)}(t, \tau), u_n^{(k+1)}(\tau, \tau) = 0, \dot{u}_n^{(k+1)}(\tau, \tau) = b_n(\tau) \quad (0 \leq \tau \leq t \leq T), \quad (3.71)$$

где

$$\begin{aligned} f_n^{(k+1)}(t, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \{ u_m^k(t, \tau) [(1 - l_1^{-4}(t)) \langle v_m^{IV}(\xi, l_0), v_n(\xi, l_0) \rangle + \\ (b J_0^{-1}(l_0 l_1(t)) l_1^{-2}(t) - b J_0^{-1}(l_0)) \langle v_m'''(l_0, l_0) \xi, v_n(\xi, l_0) \rangle + \\ + b ((b + l_0) J_0^{-1}(l_0) - (b + l_0 l_1(t)) J_0^{-1}(l_0 l_1(t)) l_1^{-3}(t)) \langle v_m'''(l_0, l_0), v_n(\xi, l_0) \rangle + \\ + (J_0^{-1}(l_0 l_1(t)) l_1^{-1}(t) - J_0^{-1}(l_0)) \langle v_n''(l_0, l_0), v_m(\xi, l_0) \rangle + \\ + ((b + l_0) J_0^{-1}(l_0) - (b + l_0 l_1(t)) J_1^{-1}(l_0 l_1(t)) \cdot l_1^{-2}(t)) \langle v_m''(l_0, l_0), v_n(\xi, l_0) \rangle - \\ - \dot{l}_1^2(t) \cdot l_1^{-2}(t) \langle v_m(\xi, l_0) \xi^2, v_m(\xi, l_0) \rangle - (2 \dot{l}_1^2(t) - l_1(t) \ddot{l}_1(t)) \cdot l_1^2(t) \cdot \\ \langle v_m'(\xi, l_0) \xi^2, v_n(\xi, l_0) \rangle] + 2 \dot{u}_m^k(t, \tau) \dot{l}_1(t) l_1^{-1}(t) \langle v_m'(\xi, l_0) \xi, v_n(\xi, l_0) \rangle \}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Отметим, что согласно (2.12), (2.13)

$$\langle v_n^{IV}(\xi, l_0), v_n(\xi, l_0) \rangle = \omega_n^2(l_0)(1 + O(n^{-2})), \langle v_m^{IV}(\xi, l_0), v_n(\xi, l_0) \rangle = O(n^{-1}), n \neq m. \quad (3.73)$$

При больших n в (3.72) слагаемое, содержащее первое выражение из (3.73), является доминирующим слагаемым в (3.72). Поэтому при больших n достаточно рассмотреть итерационный процесс

$$\ddot{u}_n^{(k+1)} + \omega_n^2(l_0)u_n^{(k+1)} = (1 - l_1^{-4}(t))u_n^{(k)}(t, \tau)\omega_n^2(l_0) + o(n^{-1}), \quad u_0(t, \tau) \equiv 0. \quad (3.74)$$

с начальными условиями (3.71).

Покажем, что итерационный процесс (3.74) сходится. Из (3.74) имеем

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n^{(k+1)}(t, \tau) &= b_n(\tau)\omega_n^{-1}(l_0) \sin(\omega_n(l_0)(t - \tau)) + \\ &+ \omega_n \int_{\tau}^t \sin(\omega_n(l_0)(t - t_1)) \cdot (1 - l_1^{-4}(t_1)) \cdot u_n^k(t_1, \tau) dt_1. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u_n^{(k+1)}(t, \tau) - u_n^{(k)}(t, \tau) &= \omega_n(l_0) \int_{\tau}^t \sin(\omega_n(l_0)(t - \tau_1))(1 - l_1^{-4}(t_1)) \cdot \\ &\cdot (u_n^k(t_1, \tau) - u_n^{k-1}(t_1, \tau)) d\tau_1, \\ |u_n^1(t, \tau) - u_n^0(t, \tau)| &= |b_n(\tau)\omega_n^{-1}(l_0) \sin(\omega_n(l_0)(t - \tau))| \leq |b_n(\tau)\omega_n^{-1}(l_0)|. \\ |u_n^{(2)}(t, \tau) - u_n^1(t, \tau)| &\leq L(t - \tau) \cdot |b_n(\tau)|, \end{aligned}$$

где $L = \max_{\tau \leq t_1 \leq T} |1 - l_1^{-4}(t_1)|$.

Соответственно

$$|u_n^{(k+1)}(t, \tau) - u_n^{(k)}(t, \tau)| \leq L^k \omega_n^{k-1}(l_0) \cdot \frac{(t - \tau)^k}{k!} \cdot |b_n(T)|.$$

Из этой оценки следует фундаментальность последовательности функций $u_n^k(t, \tau)$ в пространстве $C[\tau, T]$ и следовательно равномерная сходимость в этом функциональном пространстве.

Из (3.75) имеем

$$\begin{aligned} u_n^{(2)}(t, \tau) &= b_n(\tau)[\omega_n^{-1}(l_0) \sin(\omega_n(l_0)(t - \tau)) + \\ &+ \int_{\tau}^t \sin(\omega_n(l_0)(t - \tau_1))(1 - l_1^{-4}(t_1)) \sin(\omega_n(l_0)(t_1 - \tau)) dt_1]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Таким образом решение начально-краевой задачи (3.59)-(3.61) может быть представлено в виде

$$w(\xi, t, \tau; l_1) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, \tau; l_1) \cdot v_n(\xi, l_0). \quad (3.77)$$

Аналогичным образом могут быть построены решения начально-краевых задач (3.53)-(3.55), (3.56)-(3.58) и (3.62)-(3.64), которые запишем в следующем виде

$$w^0(\xi, t; l_1) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^0(t; l_1) \cdot v_n(\xi, l_0), w^1(\xi, t; l_1) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^1(t; l_1) \cdot v_n(\xi, l_0),$$

$$w^*(t, \xi, \tau; l_1) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(t, \tau; l_1) \cdot v_n(\xi, l_0). \quad (3.78)$$

3.4. Алгоритм построения оптимальных управлений

Преобразуем уравнение (3.1) следующим образом. Подставим u_{tt} из (3.2) и подставим в (3.1). В результате имеем

$$J(l)\ddot{\theta} - \int_0^l (b+l-x_1)u_{xxxx}(x_1, t)dx_1 - \int_0^l (b+l-x_1)^2 dx_1 \ddot{\theta} -$$

$$- \int_0^l (b+l-x_1)f(x_1, t)dx_1 = [J(l) - \int_0^l (b+l-x_1)^2 dx_1] \ddot{\theta} +$$

$$+(b+l-x_1)u_{xxx}(x_1, t)|_0^l - u_{xx}(l, t) - \int_0^l (b+l-x_1)f(x_1, t)dx_1 =$$

$$= J_0(l)\ddot{\theta} + bu_{xxx}(l, t) - u_{xx}(l, t) - \int_0^l (b+l-x_1)f(x_1, t)dx_1 = M(t). \quad (3.79)$$

Перейдем теперь в (3.79) к функции $v(\xi, t) = u(l_1(t)\xi, t)$ ($l_1(t) = l(t)/l_0, 0 \leq \xi \leq l_0$). В итоге имеем задачу Коши для уравнения

$$J_0(l)\ddot{\theta} + bv_{\xi\xi\xi}(l_0, t)l_1^{-3}(t) + v_{\xi\xi}(l_0, t)l_1^{-2}(t) - l_1(t) \int_0^{l_0} [b+l_1(t)(l_0-\xi)]f(\xi, t)d\xi = M(t), \quad (3.80)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0,$$

где $f(\xi, t) = f(l_1(t)\xi, t)$, которое совместно с (3.50)- (3.52), (3.8)-(3.10) определяет динамику начально-краевой задачи (3.1)- (3.4). Из (3.80) находим

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t - \int_0^t (t-t_1) \{bv_{\xi\xi\xi}(l_0; t_1)l_1^{-3}(t_1) + v_{\xi\xi}(l_0; t_1)l_1^{-2}(t_1) -$$

$$- l_1(t_1) \int_0^{l_0} [b+l_1(t_1)(l_0-\xi)]f(\xi, t_1)d\xi - M(t_1)\} \cdot J_0^{-1}(l(t_1))dt_1. \quad (3.81)$$

Рассмотрим решение задач 1.1-1.4 оптимального управления поведением решений начально-краевой задачи (3.8)-(3.10) и начальной задачи (3.80). Выражения (3.77), (3.78), (3.81), позволяют свести рассмотрение этой задачи к проблеме моментов. Преобразуем (3.81). Рассмотрим сначала ту часть решения $v(\xi, t)$ в представлении (3.46), входящую в (3.81), которая определяется выражением $\int_0^t w(\xi, t, t_1; l_1)M(t_1)dt_1$. Введя в рассмотрение функцию

$$\Psi_1(T, t) = \int_0^t (T - t_1)J_0^{-1}(l(t_1))l_1^{-3}(t_1)dt_1, \quad \Psi_2(T, t) = \int_0^t (T - t_1)J_0^{-1}(l(t_1))l_1^{-2}(t_1)dt_1,$$

преобразуем интегралы, входящие в (3.81).

$$\begin{aligned} & \int_0^T (T - t_1)J_0^{-1}(l(t_1))l_1^{-3}(t_1) \int_0^{t_1} w_{\xi\xi\xi}(l_0, T, t_2; l_1)M(t_2)dt_2dt_1 = \\ & = \int_0^T \Psi_1'(T, t_1) \int_0^{t_1} w_{\xi\xi\xi}(l_0, T, t_2; l_1)M(t_2)dt_2dt_1 = \\ & = \Psi_1(T, T) \int_0^T w_{\xi\xi\xi}(l_0, T, t_2; l_1)M(t_2)dt_2 - \int_0^T \Psi_1(T, t_2)w_{\xi\xi\xi}(l_0, T, t_2; l_1)M(t_2)dt_2 = \\ & = \int_0^T (\Psi_1(T, T) - \Psi_1(T, t_2)) w_{\xi\xi\xi}(l_0, T, t_2; l_1)M(t_2)dt_2, \\ & \int_0^T (T - t_1)J_0^{-1}(l(t_1))l_1^{-2}(t_1) \int_0^{t_1} w_{\xi\xi}(l_0, T, t_2; l_1)M(t_2)dt_2dt_1 = \\ & = \int_0^T \Psi_2'(T, t_1) \int_0^{t_1} w_{\xi\xi}(l_0, T, t_2; l_1)M(t_2)dt_2dt_1 = \\ & = \Psi_2(T, T) \int_0^T w_{\xi\xi}(l_0, T, t_2; l_1)M(t_2)dt_2 - \int_0^T \Psi_2(T, t_1)w_{\xi\xi}(l_0, T, t_1; l_1)M(t_1)dt_1 = \\ & = \int_0^T (\Psi_2(T, T) - \Psi_2(T, t_1)) w_{\xi\xi}(l_0, T, t_1; l_1)M(t_1)dt_1, \end{aligned}$$

Из (3.81) находим

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 = & \int_0^t (b + v_{\xi\xi\xi}(l_0; t_1)l_1^{-3}(t_1) + v_{\xi\xi}(l_0; t_1)l_1^{-2}(t_1)) - \\ & - l_1(t_1) \int_0^{l_0} [b + l_1(t_1)(l_0 - \xi)]f(\xi, t_1)d\xi - M(t_1) \cdot J_0^{-1}(l(t_1))dt_1. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Psi_3(T, t) = \int_0^t J_0^{-1}(l_1(t_1))l_1^{-3}(t_1)dt_1, \quad \Psi_4(T, t) = \int_0^t J_0^{-1}(l_1(t_1))l_1^{-2}(t_1)dt_1$$

и преобразуем интегралы, входящие в (3.82):

$$\begin{aligned} \int_0^T J_0^{-1}(l(t))l_1^{-3}(t) \int_0^t w_{\xi\xi\xi}(l_0, T, t_1; l_1)M(t_1)dt_1dt &= \int_0^T \Psi_3'(t) \int_0^{t_1} w_{\xi\xi\xi}(l_0, T, t_1; l_1)M(t_1)dt_1dt = \\ &= \Psi_3(T) \int_0^T w_{\xi\xi\xi}(l_0, T, t_1; l_1)M(t_1)dt_1 - \int_0^T \Psi_3(t_1)w_{\xi\xi\xi}(l_0, T, t_1; l_1)M(t_1)dt_1 = \\ &= \int_0^T (\Psi_3(T) - \Psi_3(t_1))w_{\xi\xi\xi}(l_0, T, t_1; l_1)M(t_1)dt_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T J_0^{-1}(l(t_1))l_1^{-2}(t_1) \int_0^t w_{\xi\xi}(l_0, T, t_1; l_1)M(t_1)dt_1dt &= \int_0^T \Psi_4'(T, t_1) \int_0^{t_1} w_{\xi\xi}(l_0, T, t_1; l_1)M(t_1)dt_1dt = \\ &= \Psi_4(T) \int_0^T w_{\xi\xi}(l_0, T, t_1; l_1)M(t_1)dt_1 - \int_0^T \Psi_4(t_1)w_{\xi\xi}(l_0, T, t_1; l_1)M(t_1)dt_1 = \\ &= \int_0^T (\Psi_4(T) - \Psi_4(t_1))w_{\xi\xi}(l_0, T, t_1; l_1)M(t_1)dt_1, \end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразуется часть решения $v(\xi, t)$, входящая в (3.81),(3.82), которая определяется функцией $\int_0^t w^*(\xi, t, \tau; l_1)d\tau$ в представлении (3.46). С учетом этого условия перевода траектории $\theta(t), \dot{\theta}(t)$ из начального состояния $\theta_0, \dot{\theta}_0$ в конечное $\theta_T, \dot{\theta}_T$ в момент времени T может быть записано в следующем виде

$$\int_0^T Q_1(T, t; l_1)M(t)dt = \dot{\theta}_T - \dot{\theta}_0 + b_1(T; l_1) = \alpha_1(T; l_1), \quad (3.83)$$

$$\int_0^T Q_2(T, t; l_1)M(t)dt = \theta_T - \theta_0 - \dot{\theta}_0 + b_2(T; l_1) = \alpha_2(T; l_1), \quad (3.84)$$

где

$$\begin{aligned}
Q_1(T, t; l_1) &= J_0^{-1}(l(t)) + b(\Psi_3(t) - \Psi_3(T)) \cdot w_{\xi\xi\xi}(l_0, T, t; l_1) + \\
&\quad + (\Psi_4(t) - \Psi_4(T)) \cdot w_{\xi\xi}(l_0, T, t; l_1), \\
Q_2(T, t; l_1) &= J_0^{-1}(l(t))(T - t) + b(\Psi_1(T, t) - \Psi_1(T, T)) \cdot w_{\xi\xi\xi}(l_0, T, t; l_1) + \\
&\quad + (\Psi_2(T, t) - \Psi_2(T, T)) \cdot w_{\xi\xi}(l_0, T, t; l_1), \\
b_1(T; l_1) &= \int_0^T \{b(\Psi_3(T) - \Psi_3(t))w_{\xi\xi\xi}^*(l_0, T, t; l_1) + \\
&\quad + (\Psi_4(T) - \Psi_4(t)) \cdot w_{\xi\xi}^*(l_0, T, t; l_1) + [b(w_{\xi\xi\xi}^0(l_0, t; l_1) + w_{\xi\xi\xi}^1(l_0, t; l_1))l_1^{-3}(t) + \\
&\quad + (w_{\xi\xi}^0(l_0, t; l_1) + w_{\xi\xi}^1(l_0, t; l_1))l_1^{-2}(t) + l_1(t) \int_0^{l_0} [b + l_1(t)(l_0 - \xi)]f(\xi, t)d\xi]J_0^{-1}(l(t))\}dt, \\
b_2(T; l_1) &= \int_0^T \{b(\Psi_1(T, T) - \Psi_1(T, t))w_{\xi\xi\xi}(l_0, T, t; l_1) + \\
&\quad + (\Psi_2(T, T) - \Psi_2(T, t)) \cdot w_{\xi\xi}(l_0, T, t; l_1) + (T - t)[b(w_{\xi\xi\xi}^0(l_0, t; l_1) + w_{\xi\xi\xi}^1(l_0, t; l_1))l_1^{-3}(t) + \\
&\quad + (w_{\xi\xi}^0(l_0, t; l_1) + w_{\xi\xi}^1(l_0, t; l_1))l_1^{-2}(t) + l_1(t) \int_0^{l_0} [b + l_1(t)(l_0 - \xi)]f(\xi, t)d\xi]J_0^{-1}(l(t))\}dt.
\end{aligned}$$

Представим

$$\begin{aligned}
u_0(\xi) &= \sum_0^\infty v_{0n}v_n(\xi, l_0), v_{0n} = \langle u_0(\xi), v_n(\xi, l_0) \rangle, \dot{u}_0(\xi) = \sum_0^\infty \dot{v}_{0n}v_n(\xi, l_0), \dot{v}_{0n} = \langle \dot{u}_0(\xi), v_n(\xi, l_0) \rangle, \\
v_T(\xi) &= \sum_0^\infty v_{Tn}v_n(\xi, l_0), v_{Tn} = \langle v_T(\xi), v_n(\xi, l_0) \rangle, \dot{v}_T(\xi) = \sum_0^\infty \dot{v}_{Tn}v_n(\xi, l_0), \dot{v}_{Tn} = \langle \dot{v}_T(\xi), v_n(\xi, l_0) \rangle
\end{aligned}$$

и дополним условия (3.83), (3.84) условиями перевода решений начально-краевой задачи (3.8)-(3.10) из начального состояния $u_0(\xi), \dot{u}_0(\xi)$ в конечное $v_T(\xi)$ и $\dot{v}_T(\xi)$ в момент времени T , выраженное согласно (3.45) и (3.78) в выполнении следующих соотношений

$$\begin{aligned}
&\int_0^T Q_{2n+1}(T, t; l_1)M(t)dt = \int_0^T u_n(T, t; l_1)M(t)dt = \\
&= \int_0^T u_n^*(T, t; l_1)dt - u_n^0(T; l_1) - u_n^1(T; l_1) + v_{Tn} = \alpha_{2n+1}(T; l_1) \tag{3.85}
\end{aligned}$$

$$\int_0^T Q_{2n+2}(T, t; l_1)M(t)dt = \int_0^T \dot{u}_n(T, t; l_1)M(t)dt =$$

$$= \int_0^T \dot{u}_n^*(T, t; l_1) dt - \dot{u}_n^0(T) - \dot{u}_n^1(T) + \dot{v}_{Tn} = \alpha_{2n+2}(T; l_1), n = 1, 2, \dots \quad (3.86)$$

Отсюда следует, что решение задач оптимального управления поведением решений начально-краевой задачи (3.8) - (3.10) и уравнения (3.80) может быть сведено к решению следующих проблем моментов в пространствах $L_2(0, T)$ и $L_1(0, T)$.

В дальнейшем $F_2(u)$ и $F_1(u)$ линейные непрерывные функционалы в пространствах $L_2(0, T)$ и $L_1(0, T)$ соответственно. Вид функционалов определен в (2.43) и (2.48).

Решение задачи 1.1 для начально-краевой задачи (3.8)-(3.10) и уравнения (3.80) сводится к решению следующей проблемы моментов $L_2(0, T)$.

Определить функционал вида (2.43), удовлетворяющий условиям

$$F_2(Q_j(T, t)) = \alpha_j(T; l_1), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.87)$$

и имеющий минимальную норму $\|F\|_{min} = m_2(T)$.

Решение задачи 1.3 для начально-краевой задачи (3.8)-(3.10) и уравнения (3.80) сводится к решению следующей проблемы моментов в пространстве $L_1(0, T)$.

Определить функционал вида (2.48), удовлетворяющий условиям

$$F_1(Q_j(T, t)) = \alpha_j(T, l), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.88)$$

и имеющий минимальную норму $\|F_1\|_{min} = m_1(T)$.

Для решения задач 1.2 и 1.4 нужно выбрать минимальные T^* , при которых соответственно $m_2(T)$ и $m_1(T)$ достигают заданного значения L и построить для этого T^* оптимальные управления $M^*(t)$. Отметим, что при этом $M^*(t)$ являются функционалами $M^*(t) = M^*(t; l_1)$, позволяющими однозначно определять искомые $v(\xi, t)$ и $\theta(t)$ согласно (3.46), (3.81). Положив в (3.46) $\xi = x/l_1(t)$, $u(x, t, l_1) = u(x, t, l/l_0) = v(x_1/l_1(t); l_1)$, получим решение (3.1)-(3.4) в виде

$$\begin{aligned} \theta(t) = & \theta_0 + \dot{\theta}_0 t - \int_0^t (t - t_1)(bu_{xxx}(l(t_1), t_1; l_1) + u_{xx}(l(t_1), t_1; k_1)) + \\ & + \int_0^{l(t)} (b + l(t_1) - x)f(x, t_1)dx - M(t_1)) \cdot J_0^{-1}(l(t_1))dt_1, \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$u(x, t; l_1) = u_0(x, t; l_1) + u_1(x, t; l_1) + \int_0^t w^*(x, t, t_1; l_1)dt_1 + \int_0^t w(x, t, t_1; l_1)M(t_1)dt_1, \quad (3.90)$$

где $u_0(x, 0, l_0) = u_0(x)$, $u_1(x, 0, l_0) = 0$, $u_{0t}(x, 0, l_0) = 0$, $u_{1t}(x, 0, l_0) = \dot{u}_0(x)$, w^* , w - непрерывные функции своих переменных.

4. Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи (1.17)-(1.21)

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим решение задач (1.1)-(1.4) для начально-краевой задачи (1.17)-(1.21). Рассмотрим сначала уравнения (1.18), записав его в виде

$$\ddot{l} - \dot{\theta}^2(t)l = \dot{\theta}^2(t)(b - 1/2) + F(t), \quad (4.1)$$

считая функцию $\dot{\theta}(t)$ известной, принадлежащей $W_2^1(0, T)$ непрерывной функцией. Рассмотрим решение следующих задач оптимального управления для уравнения (4.1).

Задача 4.1. а. Для заданной абсолютно непрерывной на $[0, T]$ функции $\dot{\theta}(t)$ найти функцию $F_2(t) \in L_2(0, T)$, переводящую решения уравнения (4.1) из начального состояния в конечное

$$l(0) = l_0, \dot{l}(0) = \dot{l}_0, \quad l(T) = l_T, \dot{l}(T) = \dot{l}_T \quad (4.2)$$

в заданный момент времени T и имеющую минимальную норму $\|F_\theta(t)\|_{L_2(0, T)}$.

б. Для заданной непрерывной на $[0, T]$ функции $\dot{\theta}(t)$ найти функцию $F_\theta(t) \in L_\infty(0, T)$, переводящую решения (4.1) из начального состояния в конечное (4.2) в заданный момент времени T и имеющую минимальную норму $\|F_\theta(t)\|_{L_\infty(0, T)}$.

Задача 4.2. а. Для заданной абсолютно непрерывной на $[0, T]$ функции $\dot{\theta}(t)$ найти функцию $F_\theta(t) \in L_\infty(0, T)$, удовлетворяющую условию $\|F_\theta(t)\|_{L_2(0, T)} < L$ и переводящую решения (4.1) из начального состояния в конечное за минимальное время T .

б. Для заданной непрерывной на $[0, T]$ функции $\dot{\theta}(t)$ найти функцию $F_\theta(t) \in L_2(0, T)$, удовлетворяющую условию $\|F_\theta(t)\|_{L_\infty(0, T)} < L$ и переводящую решения (4.1) из начального состояния в конечное за минимальное время T .

Результаты главы 2 дают следующее решение сформулированных задач.

Обозначим $l_1(t; \dot{\theta})$ и $l_2(t; \dot{\theta})$ - решения уравнения

$$\ddot{l} - \dot{\theta}^2(t)l = 0, \quad (4.3)$$

являющиеся функционалами от $\dot{\theta}(t)$ и удовлетворяющие условиям $l_1(0; \dot{\theta}) = 1, \dot{l}_1(0; \dot{\theta}) = 0, l_2(0; \dot{\theta}) = 0, \dot{l}_2(0; \dot{\theta}) = 1$. Введем в рассмотрение функцию Коши: $K(t, \tau; \dot{\theta})$, $(0 \leq \tau \leq t \leq T)$, являющуюся по t решением однородной части уравнения (4.3) и удовлетворяющую начальным условиям $K(\tau, \tau; \dot{\theta}) = 0, \dot{K}(\tau, \tau; \dot{\theta}) = 1$.

С необходимостью имеем

$$K(t, \tau; \dot{\theta}) = (-l_1(\tau; \dot{\theta})l_2(\tau; \dot{\theta}) + l_2(t; \dot{\theta})l_1(\tau; \dot{\theta}))/w(\tau; \dot{\theta}),$$

$$w(\tau; \dot{\theta}) = l_1(\tau; \dot{\theta})\dot{l}_2(\tau; \dot{\theta}) - l_2(\tau; \dot{\theta})\dot{l}_1(\tau; \dot{\theta}) = w(0, l) = 1. \quad (4.4)$$

Согласно [77, с.200] имеем

$$l_1(t; \dot{\theta}) = 1 - \int_0^t (t - t_1)\dot{\theta}^2(t_1)dt_1 + \int_0^t (t - t_1)\dot{\theta}^2(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} (t_1 - t_2)\dot{\theta}^2(t_2)dt_2 - \dots, \quad (4.5)$$

$$l_2(t; \dot{\theta}) = t - \int_0^t (t - t_1)t_1\dot{\theta}^2(t_1)dt_1 + \int_0^t (t - t_1)\dot{\theta}^2(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} t_2(t_1 - t_2)\dot{\theta}^2(t_2)dt_2 - \dots, \quad (4.6)$$

$$K(t, \tau; \dot{\theta}) = t - \tau - \int_0^t (t - t_1)(t_1 - \tau)\dot{\theta}^2(t_1)dt_1 +$$

$$+ \int_0^t (t - t_1)\dot{\theta}^2(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} (t_1 - t_2)(t_2 - \tau)\dot{\theta}^2(t_2)dt_2 - \dots, \quad (4.7)$$

$$\dot{K}(t, \tau; \dot{\theta}) = 1 - \int_0^t (t_1 - \tau)\dot{\theta}^2(t_1)dt_1 +$$

$$+ \int_0^t \dot{\theta}^2(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} (t_2 - \tau)(t_1 - t_2)\dot{\theta}^2(t_2)dt_2 - \dots \quad (4.8)$$

Для решения (4.1) с начальными условиями (4.2) и его производной имеем выражения

$$l(t; \dot{\theta}) = l_1(t; \dot{\theta})l_0 + l_2(t; \dot{\theta})\dot{l}_0 + \int_0^t K(t, \tau; \dot{\theta}) \left[\dot{\theta}^2(\tau)(b - 1/2) + F(\tau) \right] d\tau, \quad (4.9)$$

$$\dot{l}(t; \dot{\theta}) = \dot{l}_1(t; \dot{\theta})l_0 + \dot{l}_2(t; \dot{\theta})\dot{l}_0 + \int_0^t \dot{K}(t, \tau; \dot{\theta}) \left[\dot{\theta}^2(\tau)(b - 1/2) + F(\tau) \right] d\tau, \quad (4.10)$$

Условия перевода решения уравнения (4.1) из начального состояния в конечное запишем на основании (4.9)-(4.10)

$$\alpha_1(T; \dot{\theta}) \equiv l_T - l_1(T; \dot{\theta}) \cdot l_0 - l_2(T; \dot{\theta})\dot{l}_0 - (b - 1/2) \int_0^T K(T, \tau; \dot{\theta})\dot{\theta}^2(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^T K(T, \tau; \dot{\theta})F(\tau)d\tau, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}\alpha_2(T; \dot{\theta}) &\equiv \dot{l}_T - \dot{l}_1(T; \dot{\theta}) \cdot l_0 - \ddot{l}_2(T; \dot{\theta}) \dot{l}_0 - (b - 1/2) \int_0^T \dot{K}(T, \tau; \dot{\theta}) \dot{\theta}^2(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^T \dot{K}(T, \tau; \dot{\theta}) F(\tau) d\tau.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Функции $\varphi_1(\tau; \dot{\theta}) = K(T, \tau; \dot{\theta})$ и $\varphi_2(\tau; \dot{\theta}) = \dot{K}(T, \tau; \dot{\theta})$ согласно (4.7), (4.8) являются линейно независимыми.

Задача 4.1 эквивалентна решению следующей задачи а. Найти минимальный по норме функционал $F(u)$ в пространстве $L_2(0, T)$ вида (2.43), удовлетворяющий условиям $F(\varphi_j(\tau; \dot{\theta})) = \alpha_j(T; \dot{\theta})$ ($j = 1, 2$).

б. Найти минимальный по норме функционал $F(u)$ в пространстве $L_1(0, T)$ вида (2.43), удовлетворяющий условиям $F(\varphi_j(\tau; \dot{\theta})) = \alpha_j(T; \dot{\theta})$ ($j = 1, 2$).

Решения сформулированных проблем моментов существуют и находятся в соответствии с общей схемой решения проблемы моментов в пространствах $L_2(0, T)$ и $L_1(0, T)$. Отметим, что при этом управления $F_\theta(t)$ определяются однозначно и являются нелинейными непрерывными функционалами от $\dot{\theta}^2(t)$, т.е. $F_\theta(t) = F(t; \dot{\theta}^2)$. Подставив эти выражения в (4.1), найдем решения

$$l(t) = l(t; \dot{\theta}^2), \dot{l}(t) = l_t(t; \dot{\theta}^2), \quad (4.13)$$

удовлетворяющие условиям (4.2) для задач 4.1а и 4.1б соответственно. При этом функционал $\dot{l}(t) = l_t(t; \dot{\theta}^2)$ является согласно (4.10) абсолютно непрерывной по t функцией для любой абсолютно непрерывной функции $\dot{\theta}$.

Решение задачи 4.2 также определяется однозначно.

При этом $T_\theta = T(\dot{\theta}^2)$ и $F_\theta = F(t, \dot{\theta}^2)$ являются гладкими нелинейными непрерывными функционалами от $\dot{\theta}^2(t)$. Искомое решение $l(t) = l(t, \dot{\theta}^2)$ также является гладким нелинейным функционалом $\dot{\theta}^2(t)$ и $\dot{l}(t) = l_t(t, \dot{\theta}^2)$ является абсолютно непрерывной функцией t для новой абсолютно непрерывной функции $\dot{\theta}(t)$.

Рассмотрим теперь случай абсолютно жесткого стержня, т.е. обладающего бесконечно большой жесткостью - $EI \rightarrow \infty$. В этом случае из (1.19) следует, что $u(x, t) \equiv 0$. В результате имеем следующую систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$J(l)\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta}(b + l - 1/2) = M(t), \quad (4.14)$$

$$\ddot{l} - \dot{\theta}^2(b + l - 1/2) = F(t) \quad (4.15)$$

с начальными и конечными условиями

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, l(0) = l_0, \dot{l}(0) = \dot{l}_0,$$

$$\theta(T) = \theta_T, \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T, l(T) = l_T, \dot{l}(T) = \dot{l}_T. \quad (4.16)$$

Для (4.14)-(4.15) рассмотрим решения задач 1.1 и 1.2 оптимального управления поведением решений. Приведем решение задач 1.1 отдельно для уравнения (4.14) и (4.15). Согласно изложенному выше решению задач 1.1 для уравнения (4.15) любой абсолютно непрерывной на $[0, T]$, функции $\dot{\theta}(t)$ дается функционалами $F(t, \dot{\theta}^2)$ и (4.13). Подставив эти выражения в (4.14), получим уравнение

$$\ddot{\theta} + 2J^{-1}(l_t(t; \dot{\theta}^2))[l_t(t; \dot{\theta}^2)\dot{\theta}(b + l(t, \dot{\theta}^2) - 1/2) - M(t)] = 0, \quad (4.17)$$

с начальными и конечными условиями (4.16) для определения $M(t)$ и $\theta(t), \dot{\theta}(t)$. Условия перевода решений (4.14) из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени T запишем в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1(T) &\equiv \dot{\theta}_T - \dot{\theta}_0 + 2 \int_0^T J^{-1}(l(\tau, \dot{\theta}^2))l_t(\tau, \dot{\theta}^2)\dot{\theta}(\tau)(b + l(\tau, \dot{\theta}^2) - 1/2)d\tau = \\ &= \int_0^T J^{-1}(l(\tau, \dot{\theta}^2))M(\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(T) &\equiv \theta_T - \dot{\theta}_0 T - \theta_0 + 2 \int_0^T (T - \tau)J^{-1}(l(\tau, \dot{\theta}^2))l_t(\tau, \dot{\theta}^2)\dot{\theta}(\tau)(b + l(\tau, \dot{\theta}^2) - 1/2)d\tau = \\ &= \int_0^T (T - \tau)J^{-1}(l(\tau, \dot{\theta}^2))M(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Рассматривая теперь $\dot{\theta}(t)$ как заданную абсолютно непрерывную на $[0, T]$ функцию, находим решения проблемы моментов в пространствах $L_2[0, T]$ и $L_1[0, T]$ для функционалов (2.43) и (2.48) соответственно при ограничениях (4.18)-(4.19). В результате получим оптимальные управления $M_{\dot{\theta}}(t) = M(t; \dot{\theta})$. При этом $M(t; \dot{\theta})$ являются нелинейными непрерывными в метриках $L_2[0, T]$ и $L_\infty[0, T]$ соответственно функционалами $\dot{\theta}(t)$. Подставив $M(t; \dot{\theta})$ в (4.17), получим дифференциальное уравнение для определения $\theta(t)$. Интегрируя это уравнение с начальными условиями (4.16), получим оптимальную траекторию $\theta^*(t), \dot{\theta}^*(t)$, удовлетворяющую условиям (4.16). Эта траектория однозначно определяет $M^*(t) = M(t; \dot{\theta}^*)$, а также $l^*(t) = l(t; \dot{\theta}^*), \dot{l}^*(t), F^*(t) = F(t; \dot{\theta}^*)$.

Для практического вычисления $M^*(t), \theta^*(t), \dot{\theta}^*(t), F^*(t), l^*(t), \dot{l}^*(t)$ удобно воспользоваться следующим итерационным процессом

$$\dot{l}_n(t) = \dot{l}_0 + \int_0^t \left[\dot{\theta}_{n-1}^2(\tau)(b + l_{n-1}(\tau) - 1/2) + F_n(\tau) \right] d\tau, \quad (4.20)$$

$$l_n(t) = l_0 + \dot{l}_0 t + \int_0^t (t - \tau) \left[\dot{\theta}_{n-1}^2(\tau)(b + l_n(\tau) - 1/2) + F_n(\tau) \right] d\tau, \quad (4.21)$$

$$\dot{\theta}_n(t) = \dot{\theta}_0 + \int_0^t J^{-1}(l_n(\tau)) \left[-2\dot{l}_{n-1}(\tau)\dot{\theta}_{n-1}(\tau)(b + l_{n-1}(\tau) - 1/2) + M_n(\tau) \right] d\tau, \quad (4.22)$$

$$\theta_n(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \int_0^t (t - \tau) J^{-1}(l_n(\tau)) \left[-2\dot{l}_{n-1}(\tau)\dot{\theta}_{n-1}(\tau)(b + l_{n-1}(\tau) - 1/2) + M_n(\tau) \right] d\tau, \quad (4.23)$$

$$l_0(t) \equiv 0, \theta_0(t) \equiv 0, J(l_n(\tau)) = J + 1/3 + [b + l_n(\tau)](b + l_n(\tau) - 1).$$

При этом $F_n(t)$ и $M_n(t)$ находятся как решения проблемы моментов в пространствах $L_2[0, T]$ и $L_1[0, T]$ при ограничениях

$$\alpha_1^{(n)}(T) \equiv \dot{l}_T - \dot{l}_0 - \int_0^T \dot{\theta}_{n-1}(\tau)(b + l_{n-1}(\tau) - 1/2)d\tau = \int_0^T F_n(\tau)d\tau, \quad (4.24)$$

$$\alpha_2^{(n)}(T) \equiv l_T - l_0 - \dot{l}_0 T - \int_0^T (T - \tau)\dot{\theta}_{n-1}^2(\tau)(b + l_{n-1}(\tau) - 1/2)d\tau = \int_0^T (T - \tau)F_n(\tau)d\tau, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3^{(n)}(T) &\equiv \dot{\theta}_T - \dot{\theta}_0 + 2 \int_0^T J^{-1}(l(\tau))\dot{l}_{n-1}(\tau)\dot{\theta}_{n-1}(\tau)(b + l(\tau) - 1/2)d\tau = \\ &= \int_0^T J^{-1}(l_n(\tau))M_n(\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \alpha_4^{(n)}(T) &\equiv \theta_T - \theta_0 T - \dot{\theta}_0 \theta_0 + 2 \int_0^T (T - \tau)J^{-1}(l_{n-1}(\tau))\dot{l}_t(\tau)\dot{\theta}_{n-1}(\tau)(b + l(\tau) - 1/2)d\tau = \\ &= \int_0^T (T - \tau)J^{-1}(l_n(\tau))M_n(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Сходимость итерационного процесса (4.20)-(4.26) следует из сходимости (4.20)-(4.21), (4.24)-(4.25) для любой ограниченной на $[0, T]$ функции $\dot{\theta}(t)$. В свою очередь, ограниченность $\dot{\theta}(t)$ следует из (4.22)-(4.23), (4.25)-(4.26) с учетом вида $J(l_n(\tau))$, приведенного в (4.23).

Решение задачи 1.2 для (4.14)-(4.16) находится по следующей схеме. Для заданного $T > 0$ определяется $F^*(t)$ и $M^*(t)$. Вычисляются значения $\Phi_1(F^*(t), M^*(t)), \Phi_2(F^*(t), M^*(t))$. Из свойств проблемы моментов следует, что $\lim_{T \rightarrow 0} \Phi_j(F^*(t), M^*(t)) \rightarrow \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_j(F^*(t), M^*(t)) \rightarrow$

0, ($j = 1, 2$). Находим минимальное T^* , для которого $\Phi_1(F^*(t), M^*(t)) = L(\Phi_2(F^*(t), M^*(t)) = L)$. Такое T^* и определяет решение задачи быстродействия.

Пример 4.1.

В качестве примера рассмотрим механическую систему, приведенную в примере 2.1, считая руку манипулятора абсолютно жесткой. На рис. (4.1)-(4.12) для различных значений времени T приведены графики оптимальных управлений $M^*(t)$, $F^*(t)$ (в безразмерных переменных), обеспечивающих поворот системы на угол $\pi/2$ и переводящих руку манипулятора из положения $l_0 = 0.5$ в положение $l_T = 1$ и наоборот при нулевых остальных начальных и конечных условиях. На рисунках также приведены графики функций $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ и $l(t)$, $\dot{l}(t)$.

Туда T1 L2

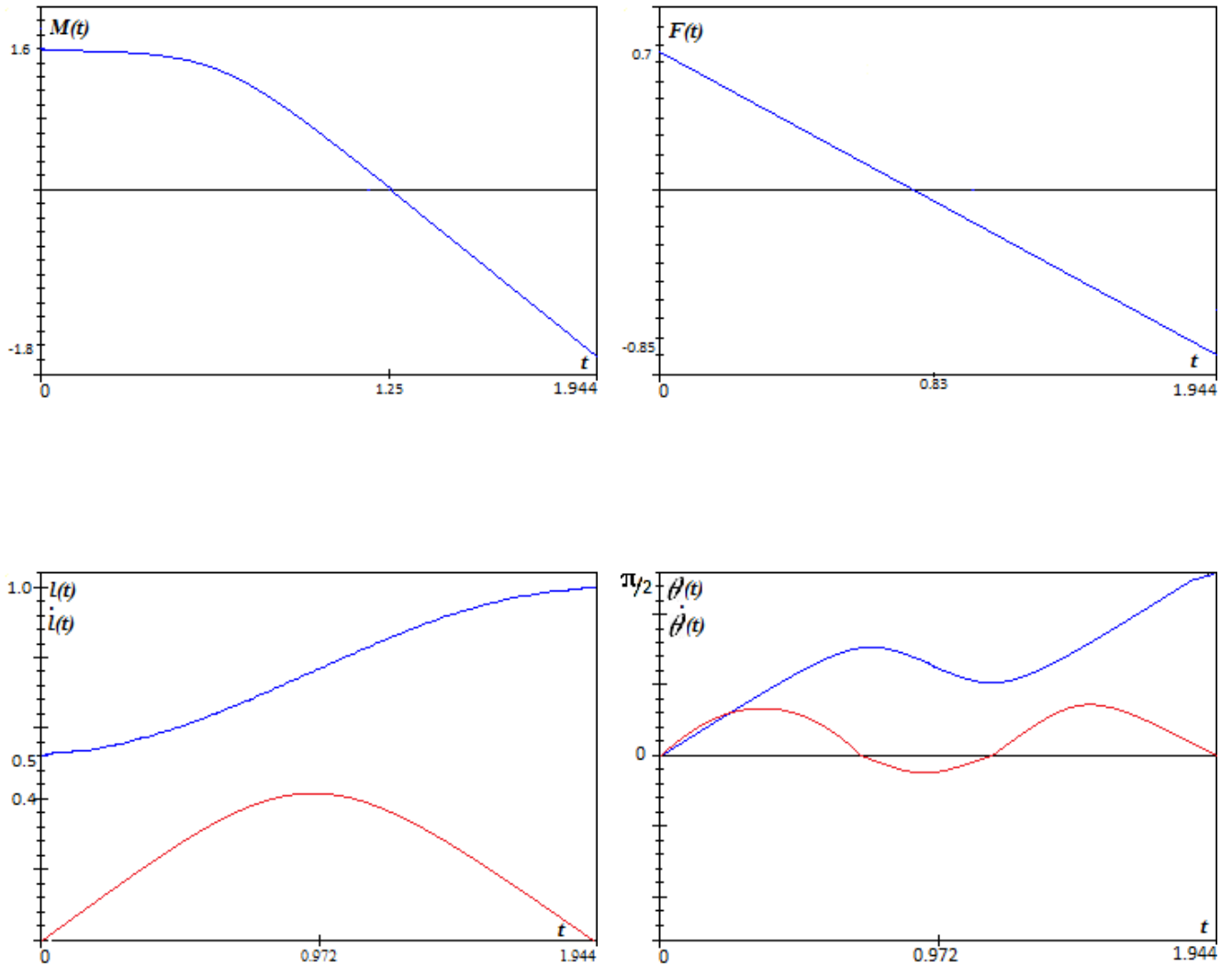
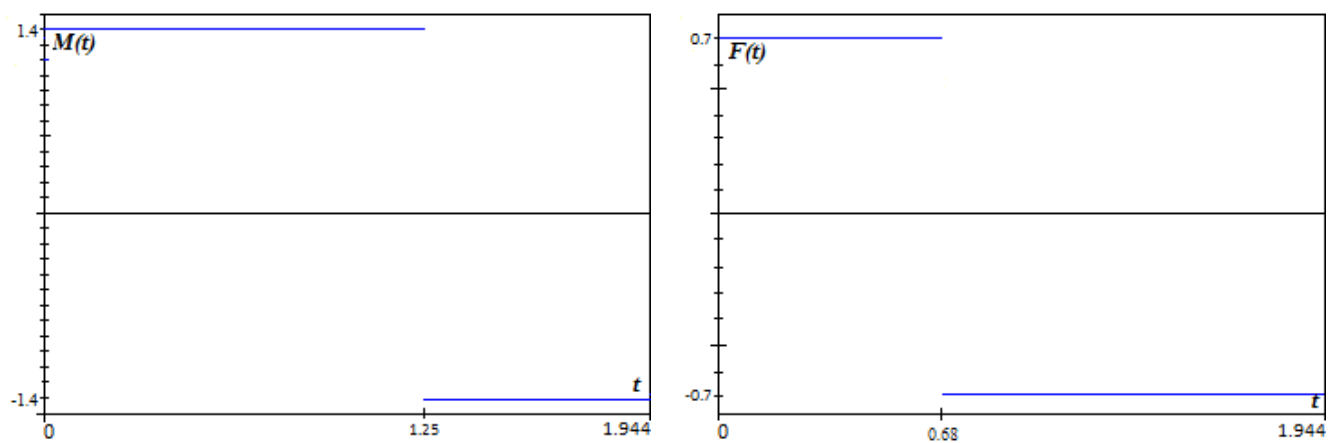


Рис. 4.1. Оптимальные управления в пространстве L_2 и графики функций $l(t)$, $\dot{l}(t)$ и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.05$ с



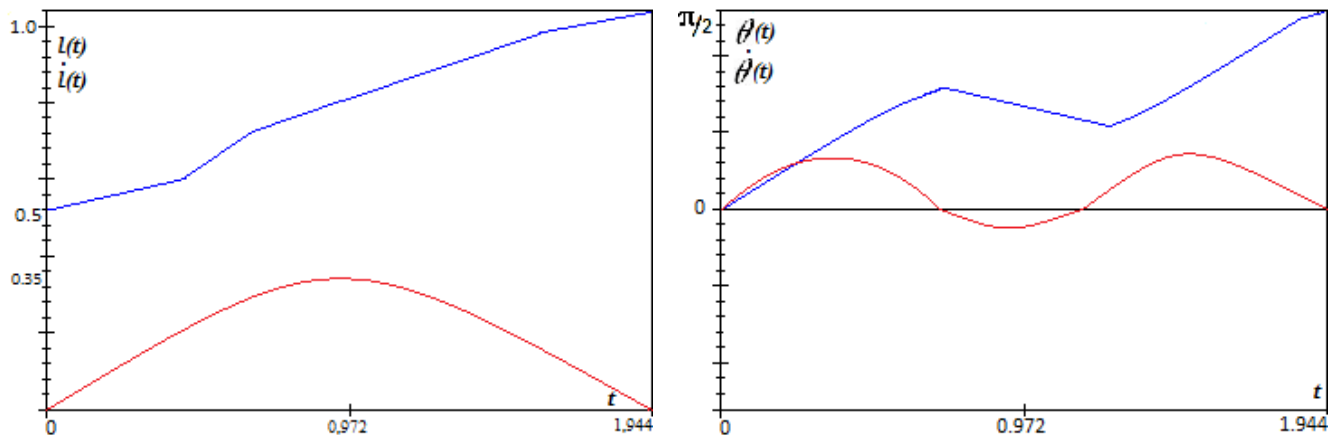


Рис. 4.2. Оптимальные управления в пространстве L_∞ и графики функций $l(t)$, $i(t)$ и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.05$ с.

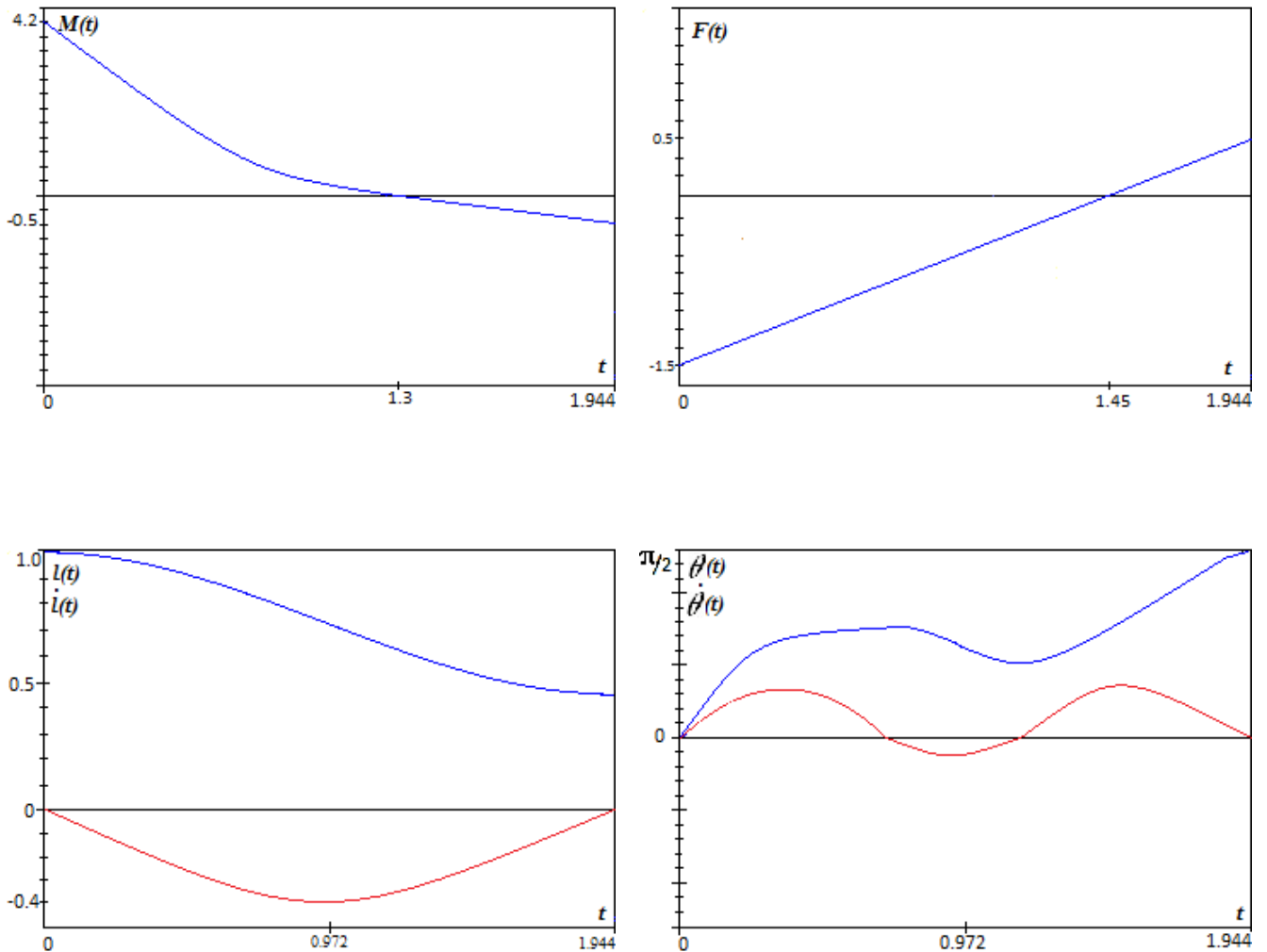


Рис. 4.3. Оптимальные управления в пространстве L_2 и графики функций $l(t)$, $i(t)$ и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.05$ с.

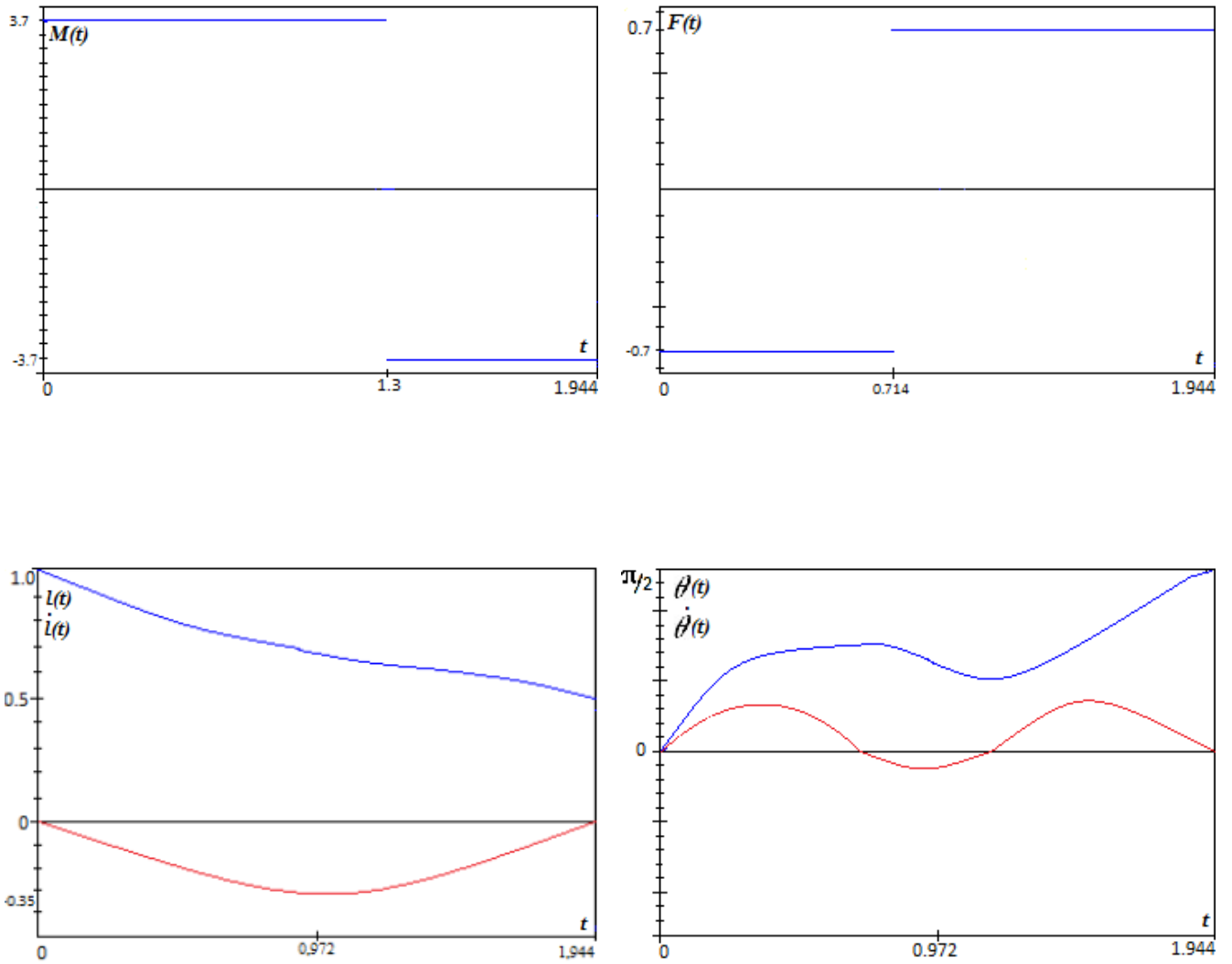
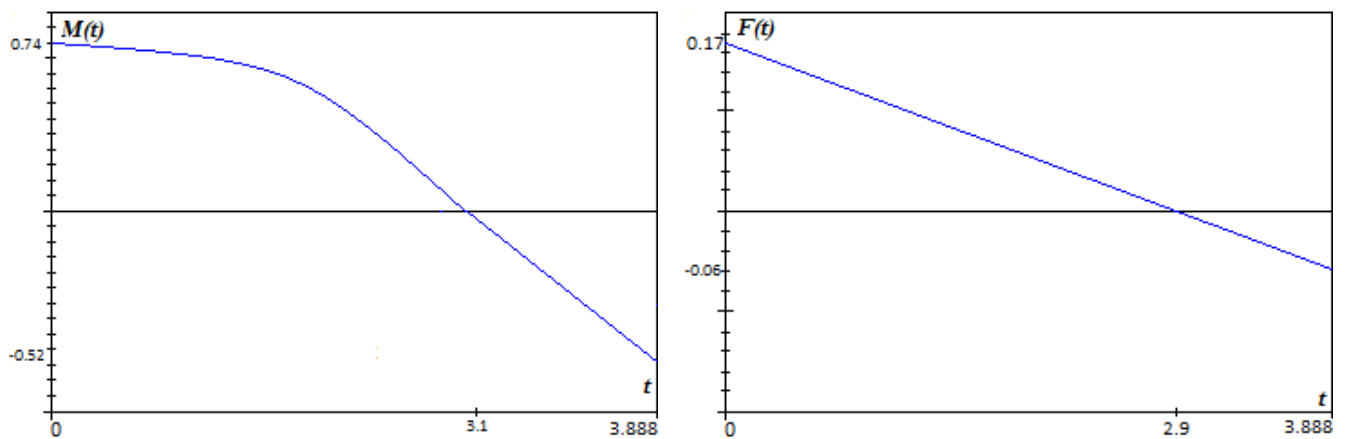


Рис. 4.4. Оптимальные управления в пространстве L_∞ и графики функций $l(t)$, $\dot{l}(t)$ и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.05$ с при обратном изменении длины.



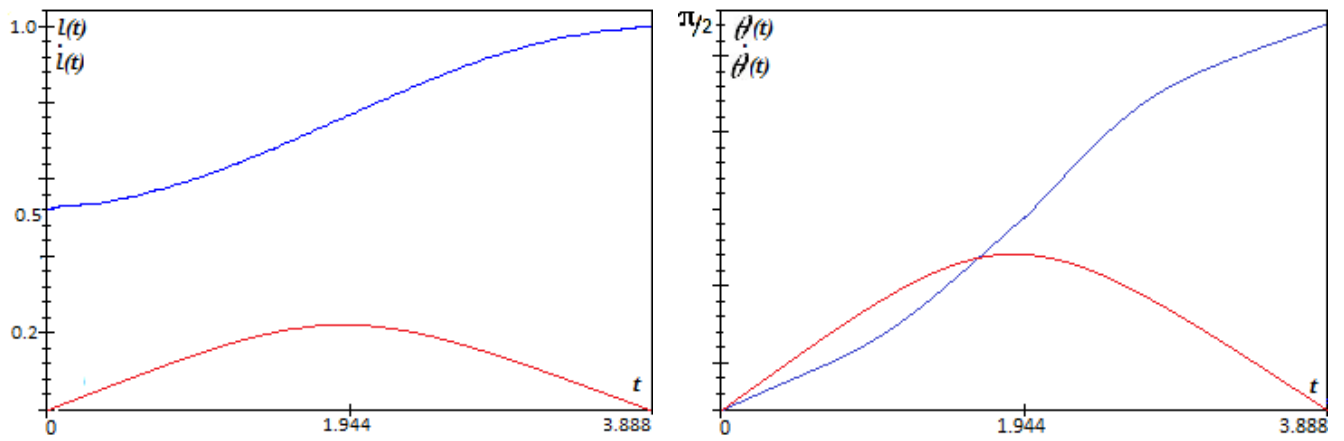


Рис. 4.5. Оптимальные управления в пространстве L_2 и графики функций $l(t)$, $\dot{l}(t)$ и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.1$ с.

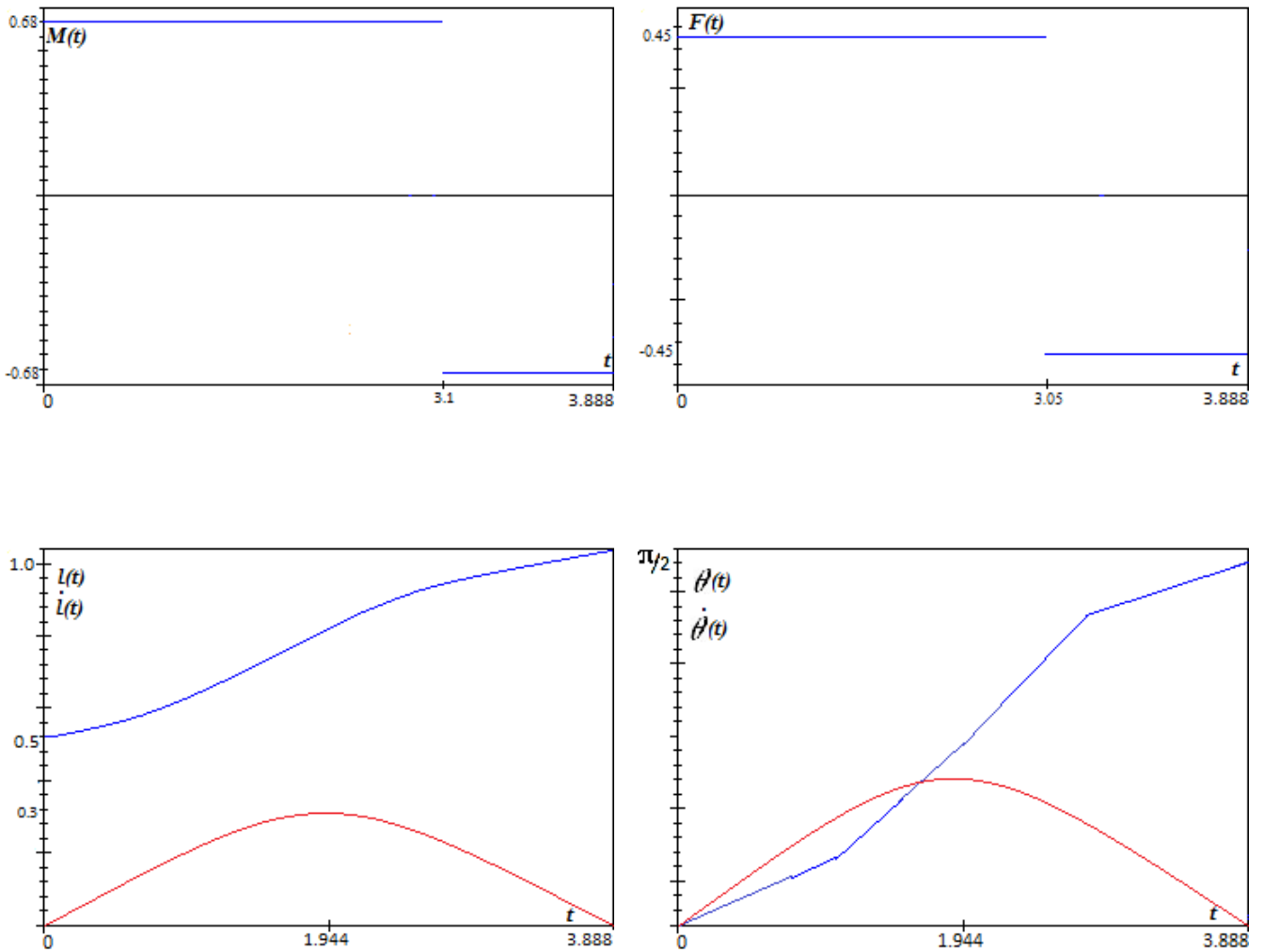


Рис. 4.6. Оптимальные управления в пространстве L_∞ и графики функций $l(t)$, $\dot{l}(t)$ и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.1$ с.

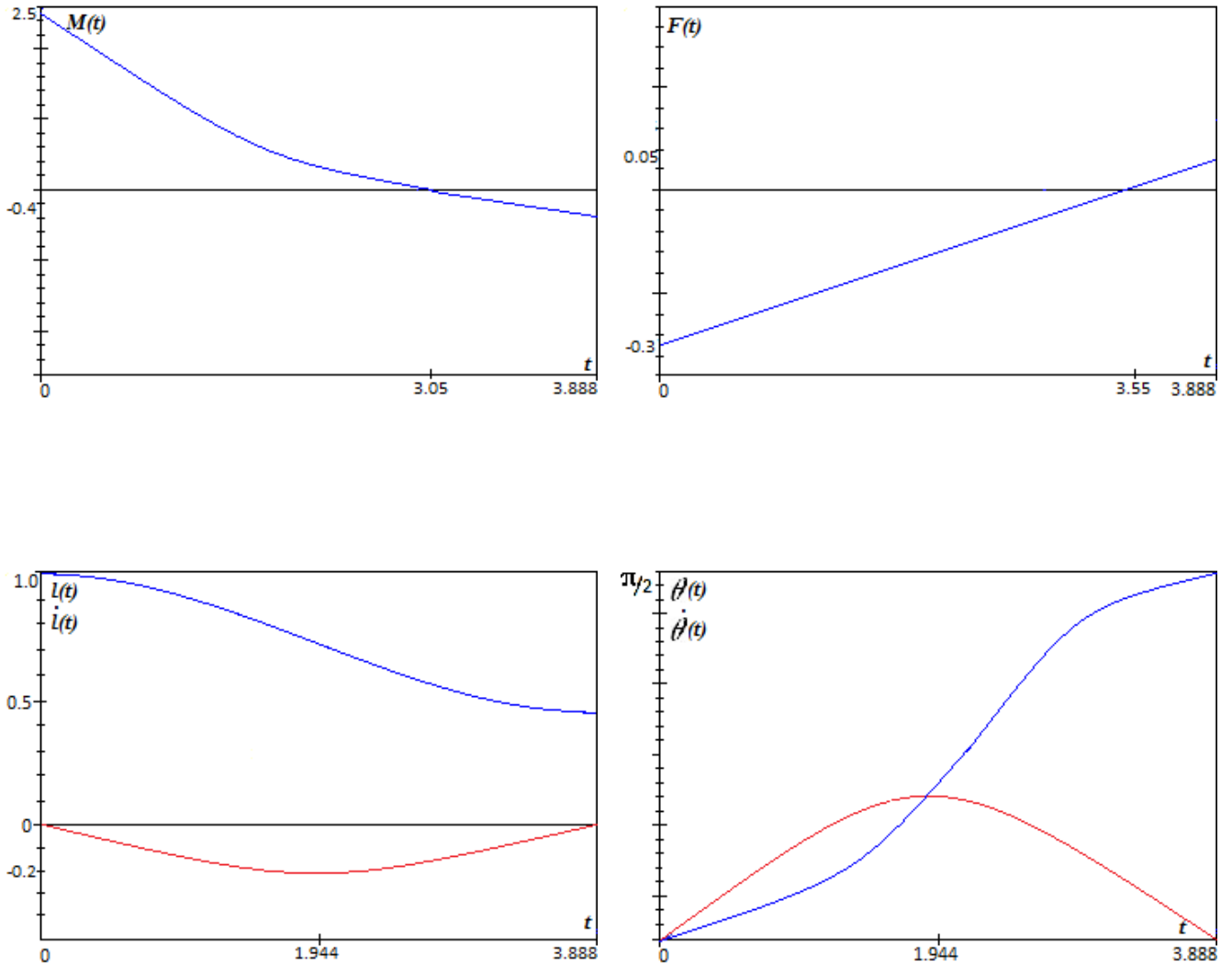
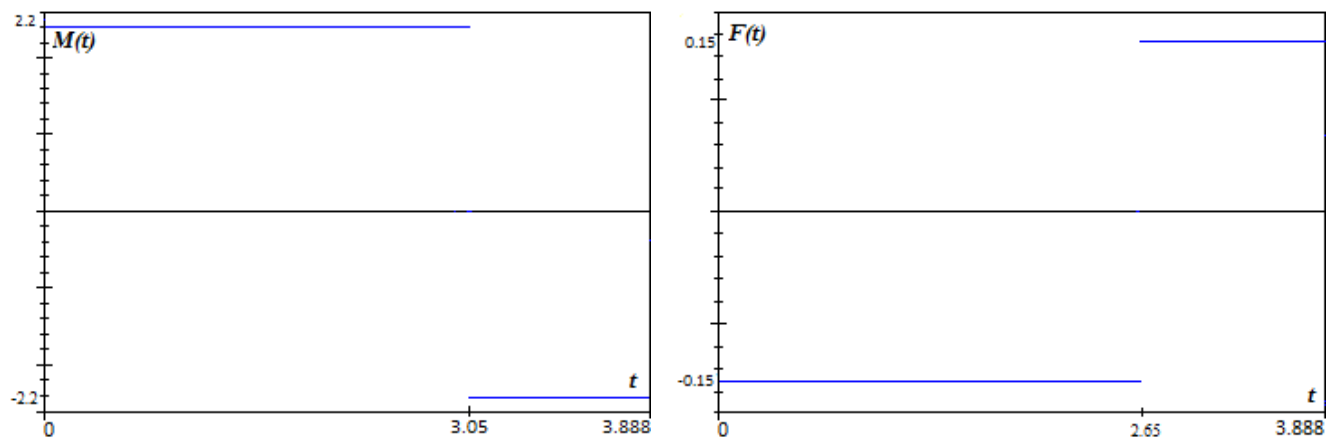


Рис. 4.7. Оптимальные управления в пространстве L_2 и графики функций $l(t), i(t)$ и $\theta(t), \dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.1$ с.



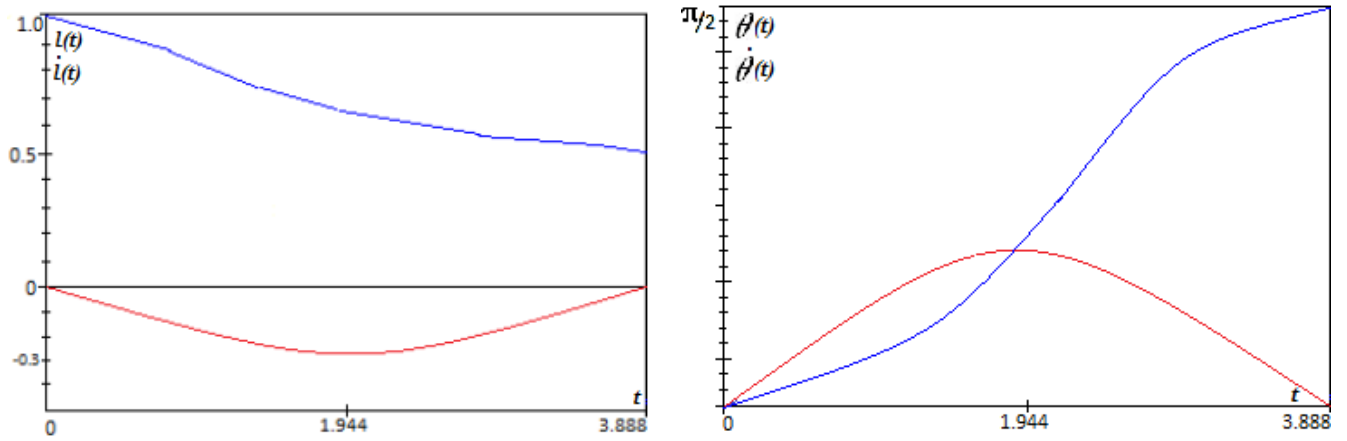


Рис. 4.8. Оптимальные управления в пространстве L_∞ и графики функций $l(t)$, $\dot{l}(t)$ и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.1$ с.

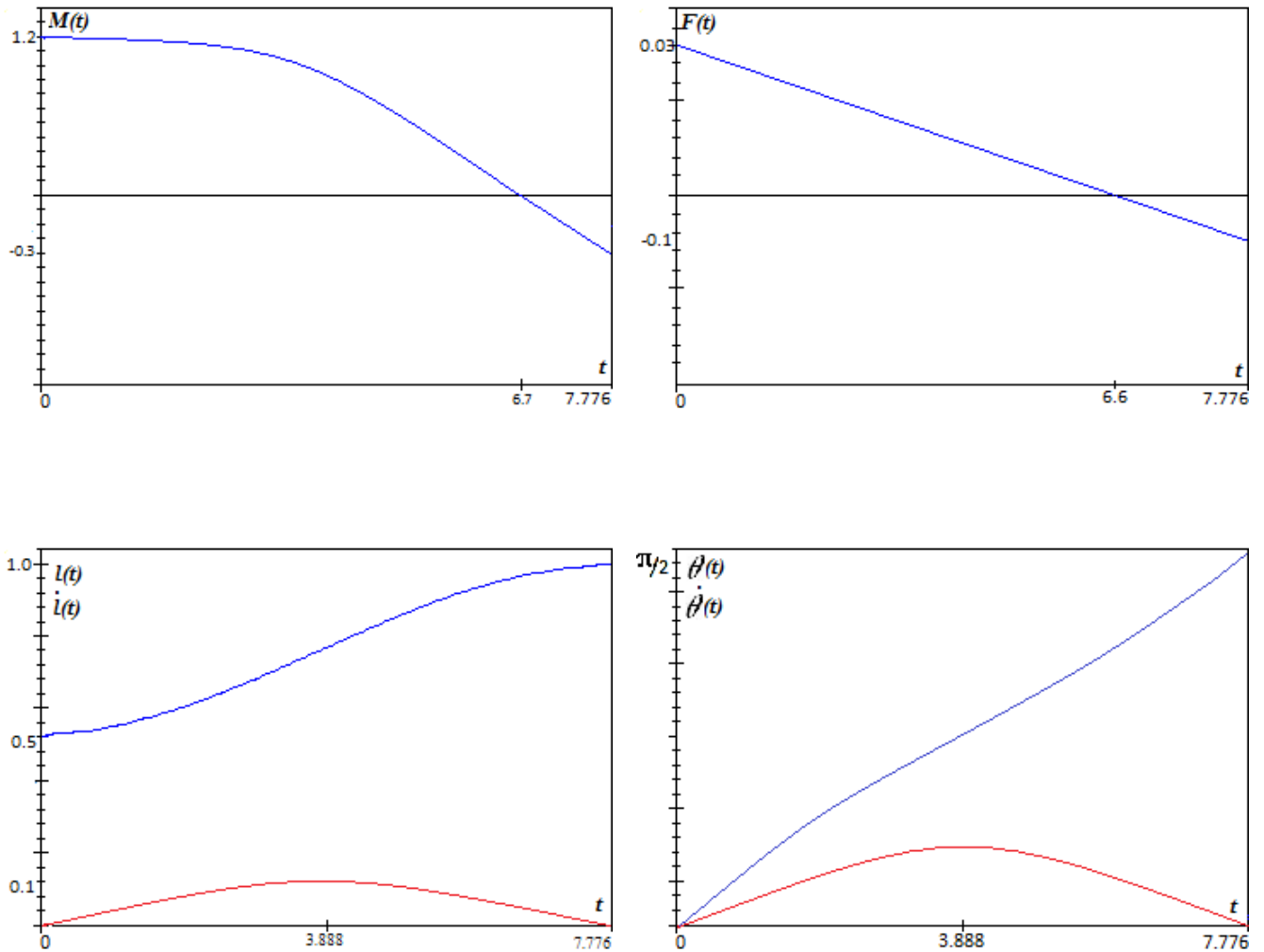


Рис. 4.9. Оптимальные управления в пространстве L_2 и графики функций $l(t)$, $\dot{l}(t)$ и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.2$ с.

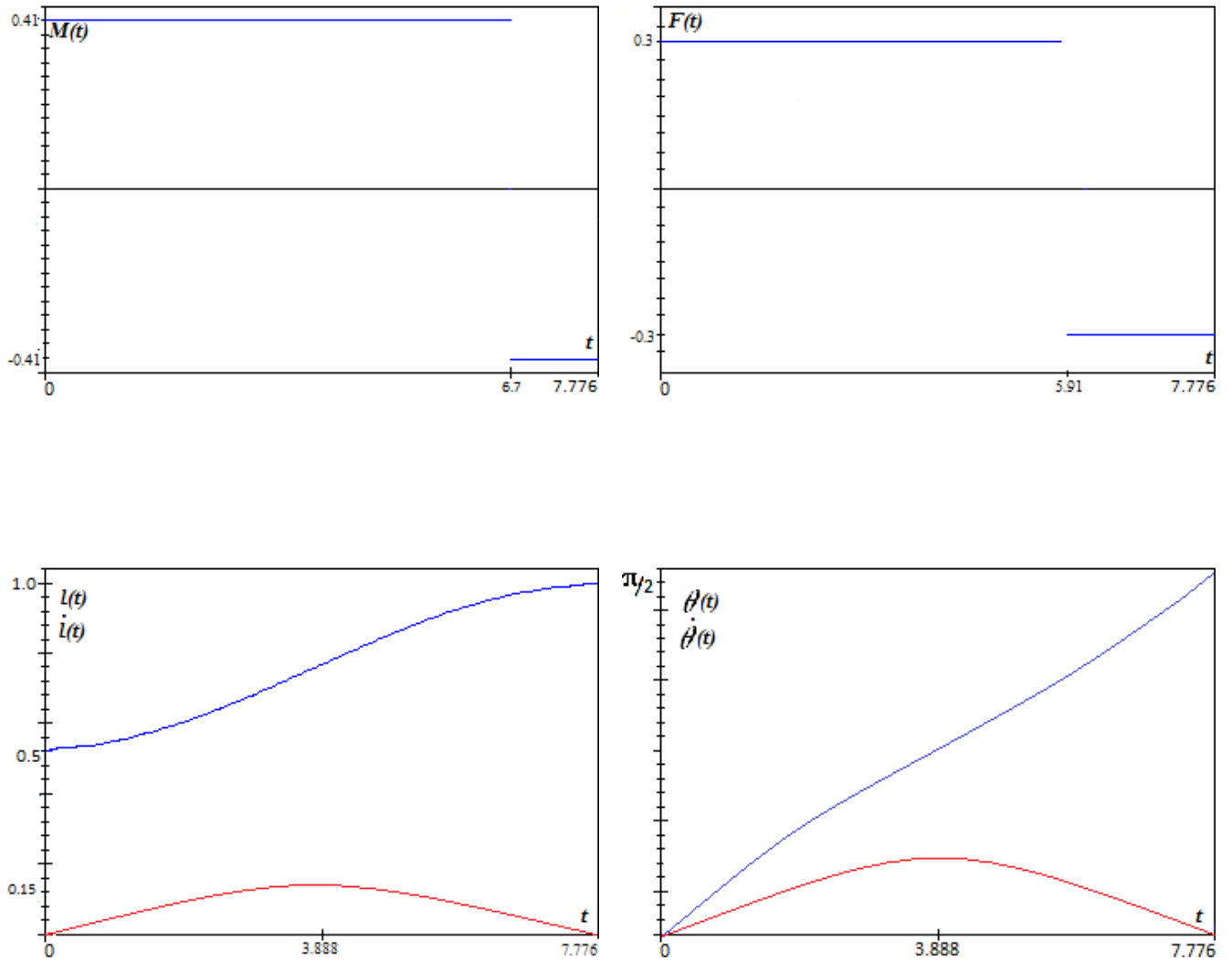
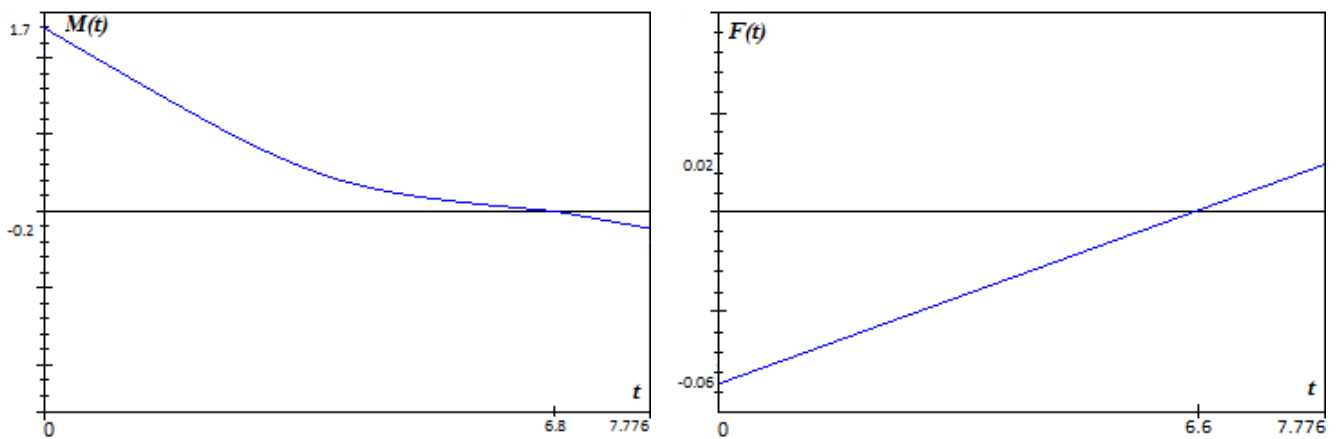


Рис. 4.10. Оптимальные управления в пространстве L_∞ и графики функций $l(t), \dot{l}(t)$ и $\theta(t), \dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.2$ с.



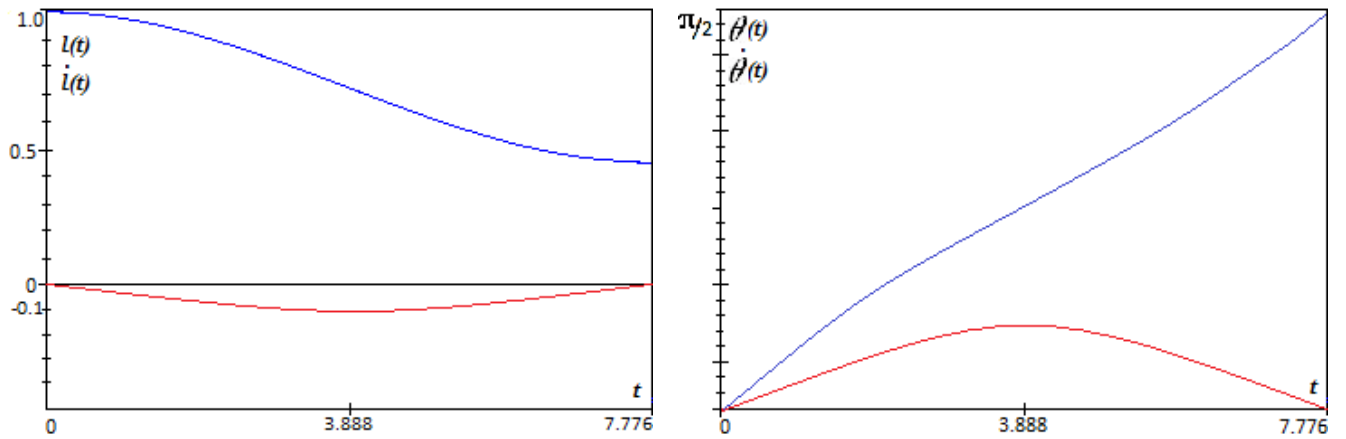


Рис. 4.11. Оптимальные управления в пространстве L_2 и графики функций $l(t)$, $\dot{l}(t)$ и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.2$ с.

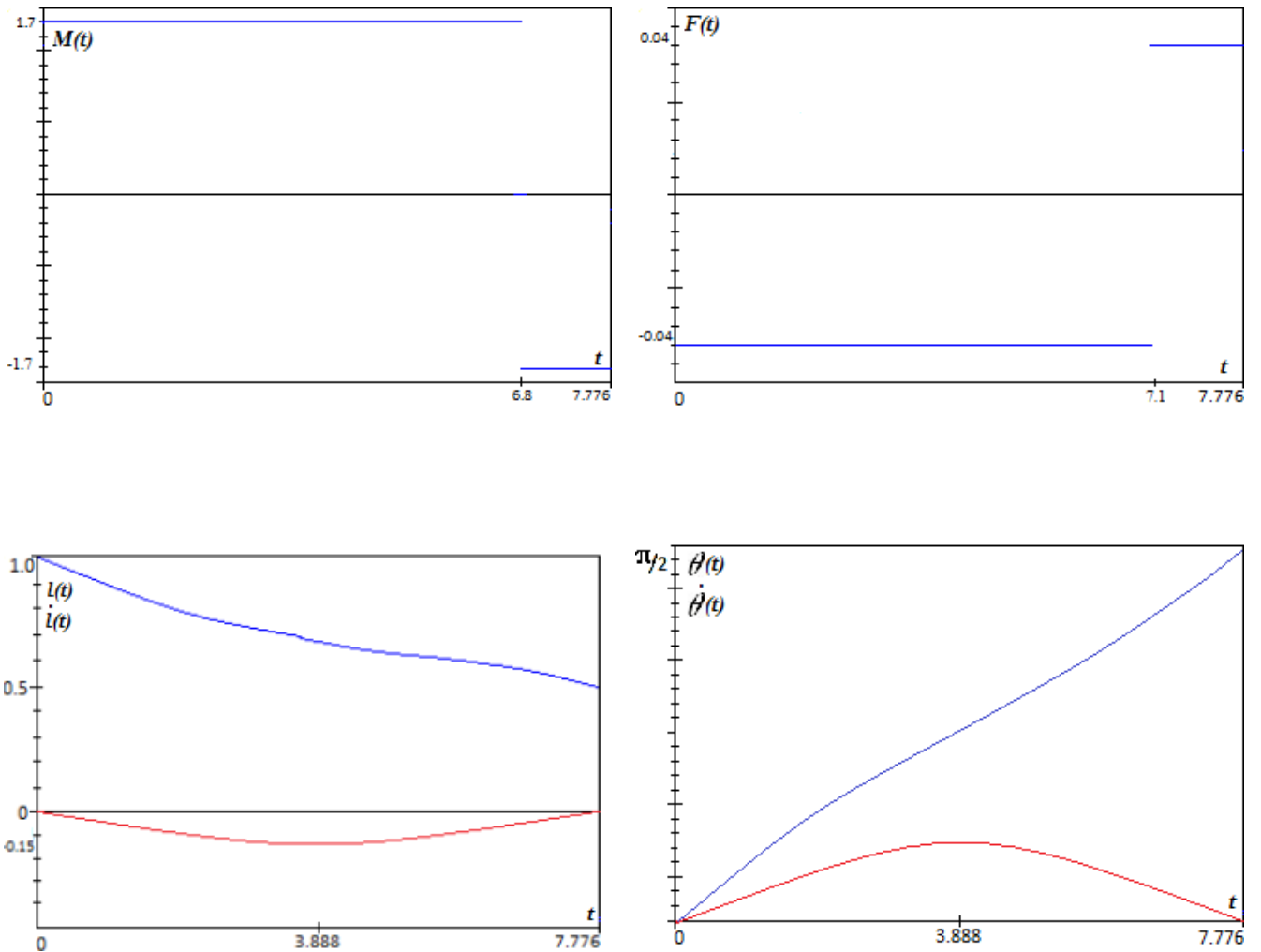


Рис. 4.12. Оптимальные управления в пространстве L_∞ и графики функций $l(t)$, $\dot{l}(t)$ и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.2$ с.

4.2. Алгоритм построения оптимальных управлений поведением решений начально-краевой задачи (1.17)-(1.21)

Рассмотрим случай конечной жесткой руки манипулятора, т.е. $EI \neq \infty$. В этом случае поведение механической системы определяется начально-краевой задачей (1.17)-(1.21). Рассмотрим решение задач 1.1 и 1.3. Рассмотрев отдельно уравнения (1.18), согласно п. 4.1 найдем для любой абсолютно непрерывной функции $\dot{\theta}(t)$ для каждой задачи найдем оптимальные управления, определенные функционалами вида $F_{\theta}(t) = F(t, \dot{\theta}^2)$ и оптимальные решения, выражаемые функционалами (4.13). Подставив теперь (4.13) в уравнения (1.17) начально-краевую задачу (1.19)-(1.21) получим начально-краевую задачу вида (3.1)-(3.4), которая подробно изучена в главе 3. Решение задач 1.1 и 1.2 для (3.1)-(3.4) дается функционалами вида

$$M^*(t; l_1) = M^*(t; l(t, \dot{\theta}^2)/l_0),$$

оптимальные решения определяются выражениями (3.46), (3.81). В нашем случае из (3.81), (3.89) имеем

$$\begin{aligned} \theta(t) = & \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \int_0^t (t - t_1) \{ b u_{xxx}(l(t_1), t_1; l/l_0) + u_{xx}(l(t_1), t_1; l/l_0) + \\ & + [l^2(t_1; \dot{\theta}^2) + (2b + 1)l(t_1; \dot{\theta}^2) - 1/2] l_t(t_1; \dot{\theta}^2) \dot{\theta}(t_1) - M^*(t_1; l/l_0) \} J_0^{-1}(l(t_1; \dot{\theta}^2)) dt_1, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) = & \dot{\theta}_0 - \int_0^t (t - t_1) \{ b u_{xxx}(l(t_1), t_1; l/l_0) + u_{xx}(l(t_1), t_1; l/l_0) + \\ & + [l^2(t_1; \dot{\theta}^2) + (2b + 1)l(t_1; \dot{\theta}^2) - 1/2] l_t(t_1; \dot{\theta}^2) \dot{\theta}(t_1) - M^*(t_1; l/l_0) \} J_0^{-1}(l(t_1; \dot{\theta}^2)) dt_1, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где

$$u(x, t; l/l_0) = u_0(x, t; l/l_0) + u_1(x, t; l/l_0) + \int_0^t w^*(x, t, t_1, l/l_0) dt_1 + \int_0^t w(x, t, t_1, l/l_0) dt_1, \quad (4.30)$$

В (4.30) функционал $w^*(\cdot)$ определяется согласно начально-краевой задаче (3.42)-(3.44) по функции

$$f(x, t) = 2[J(l(t; \dot{\theta}^2))(b + l(t; \dot{\theta}^2) - x)(b + l(t; \dot{\theta}^2) - 1/2)] + 2\dot{\theta}(t) \cdot l_t(t; \dot{\theta}^2).$$

Рассматривая теперь (4.28), (4.29) как систему интегральных уравнений типа Вольтера относительно $\theta(t), \dot{\theta}(t)$, находим ее решения $\theta^*(t), \dot{\theta}^*(t)$ на отрезке $[0, T]$, обращающиеся в θ_0 и $\dot{\theta}_0$ при $t = 0$. В качестве метода можно использовать метод шагов по t . Указанное решение будет оптимальным. По этому решению определяются $l^*(t), \dot{l}^*(t), F^*(t), u^*(x, t)$.

Решения задачи 1.2 и 1.4 находится по стандартной схеме. По заданному T_* определяются $F^*(t)$ и $M^*(t)$. Вычисляется значение функционала $\Phi_1(M^*, F^*)$ ($\Phi_2(M^*, F^*)$). Так как $\lim_{T \rightarrow 0} \Phi_j(\cdot) = \infty$, $\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_j(\cdot) = 0$, то выбирается минимальное T^* , удовлетворяющее условию $\Phi_j(M^*, F^*) = L$ ($j = 1, 2, \dots$).

Для практического построения решения удобно воспользоваться следующим итерационным процессом.

$$J(l^{(k+1)})\ddot{\theta}^{(k+1)} - \int_0^{l^{(k+1)}} (b+l-x_1)u_{tt}^{(k+1)}(x_1, t)dx_1 + 2l^{(k+1)}\dot{\theta}^{(k)}(b+l^{(k+1)}-1/2) = M^{(k+1)}(t), \quad (4.31)$$

$$u_{tt}^{(k+1)} + u_{xxxx}^{(k+1)} = (b+l^{(k+1)}-x)\ddot{\theta}^{(k)} + 2\dot{\theta}^{(k)}\dot{l}^{(k+1)}, \quad (4.32)$$

$$u_{xx}^{(k+1)}(0, t) = u_{xxx}^{(k+1)}(0, t) = 0, u_x^{(k+1)}(l^{(k+1)}, t) = u^{(k+1)}(l^{(k+1)}, t) = 0, \quad (4.33)$$

$$\theta^{(k+1)}(0) = \theta_0^{(k+1)}, \theta^{(k+1)}(0) = \dot{\theta}_0^{(k+1)}, u^{(k+1)}(x, 0) = u_0(x), u_t^{(k+1)}(x, 0) = \dot{u}_0(x), \quad (4.34)$$

$$l^{(k+1)}(t) = l \left(t, \left(\dot{\theta}^{(k)}(t) \right)^2 \right), \quad \theta^{(0)}(t) \equiv 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.35)$$

При каждом фиксированном k начально-краевая задача (4.32)-(4.35) имеет вид (3.1)-(3.4), которая подробно исследована в главе 3 и для которой решены задачи 1.1-1.4. Оптимальные управления $M^{k*}(t)$ и оптимальные решения $\theta^{k*}(t), u^{k*}(x, t)$ строятся в явном виде. Их сходимость доказывается аналогично сходимости итерационного процесса (4.20)-(4.26).

Пример 4.2

Рассмотрим пример 4.1, считая руку обладающей упругой податливостью ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м²). На рис. (4.13)-(4.18) приведены для различных значений времени T приведены графики оптимальных управлений $M^*(t)$, $F^*(t)$ (в безразмерных переменных) поворота системы на угол $\pi/2$ при нулевых начальных скоростях из нулевого положения равновесия с полным гашением колебаний и переводящих руку манипулятора из положения $l_0 = 0.5$ в положение $l_T = 1$ при нулевых начальных и конечных скоростях. На рисунках также приведены графики функций $\theta(t), \dot{\theta}(t)$ и $l(t), \dot{l}(t)$.

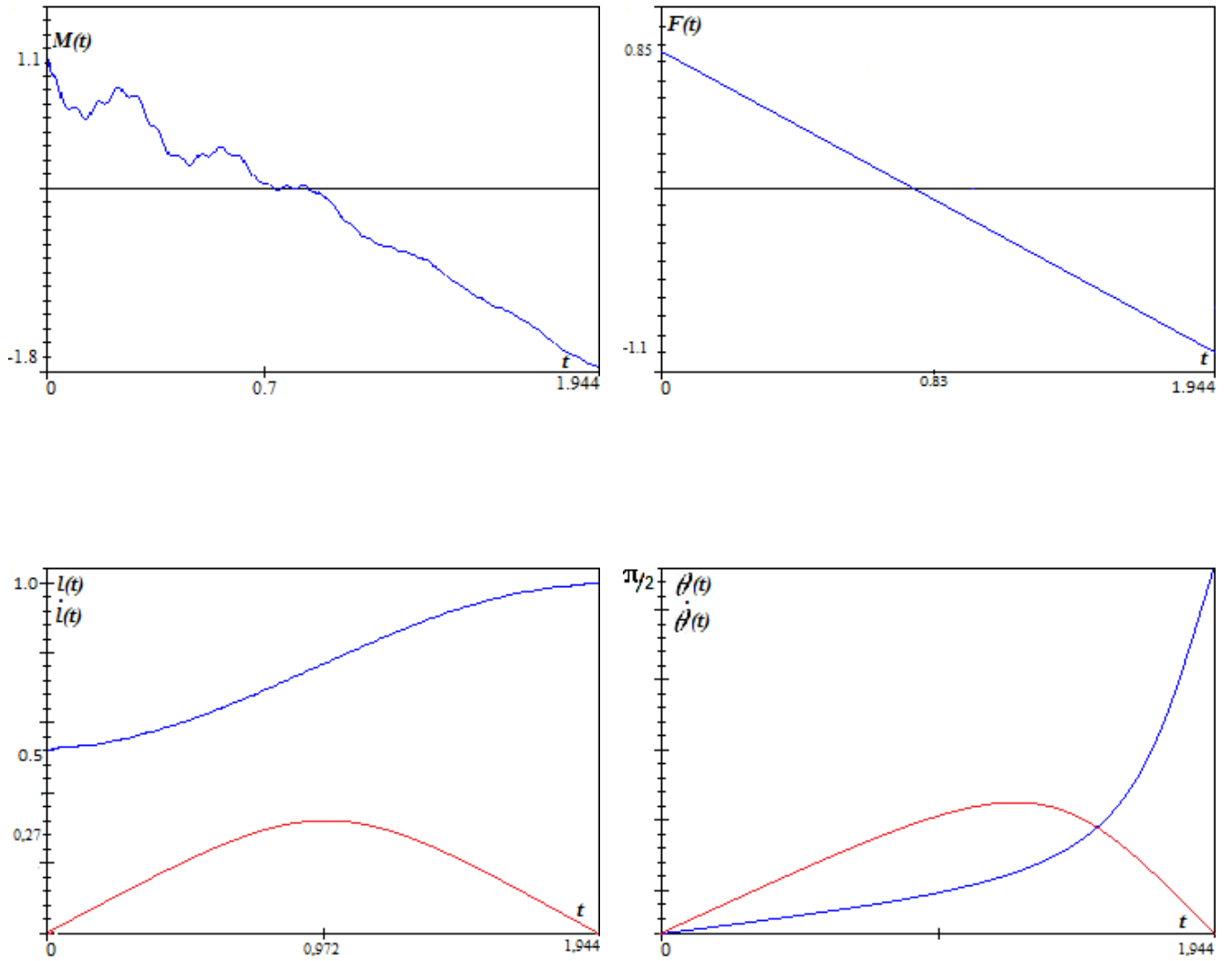
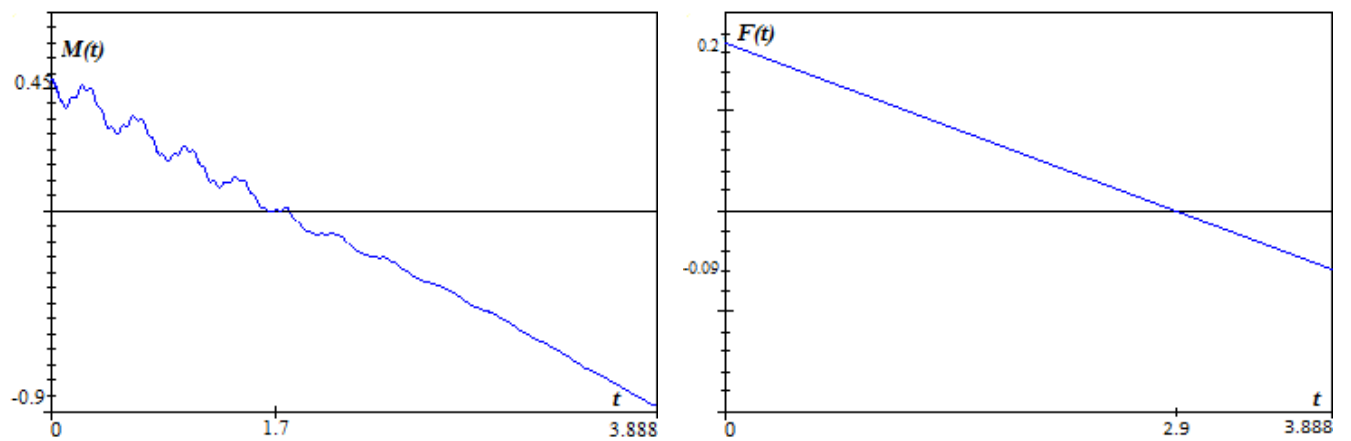


Рис. 4.13. Оптимальные управления в пространстве L_2 и графики функций $l(t)$, $\dot{l}(t)$ и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.05$ с.



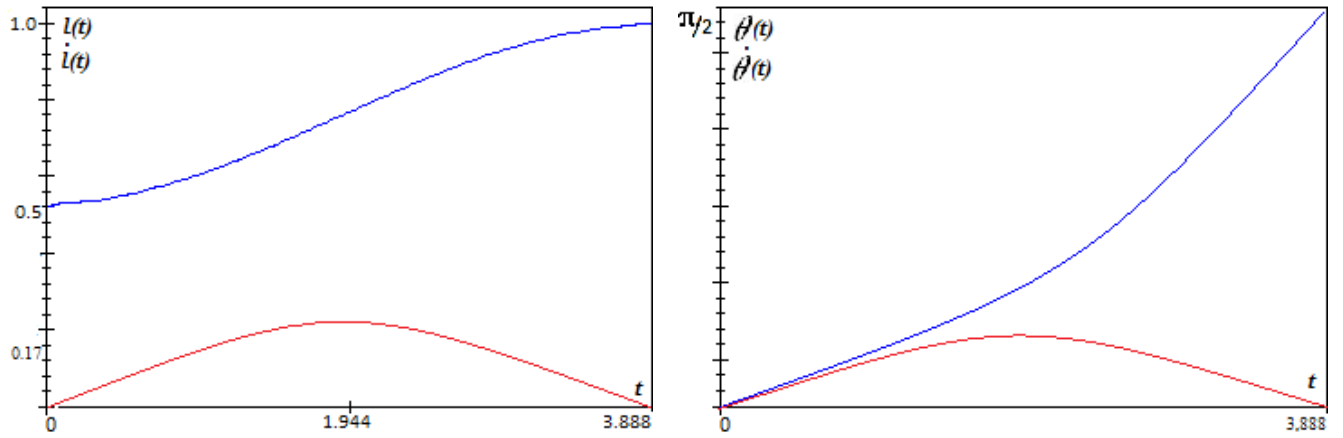


Рис. 4.14. Оптимальные управления в пространстве L_2 и графики функций $l(t)$, $\dot{l}(t)$ и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.1$ с.

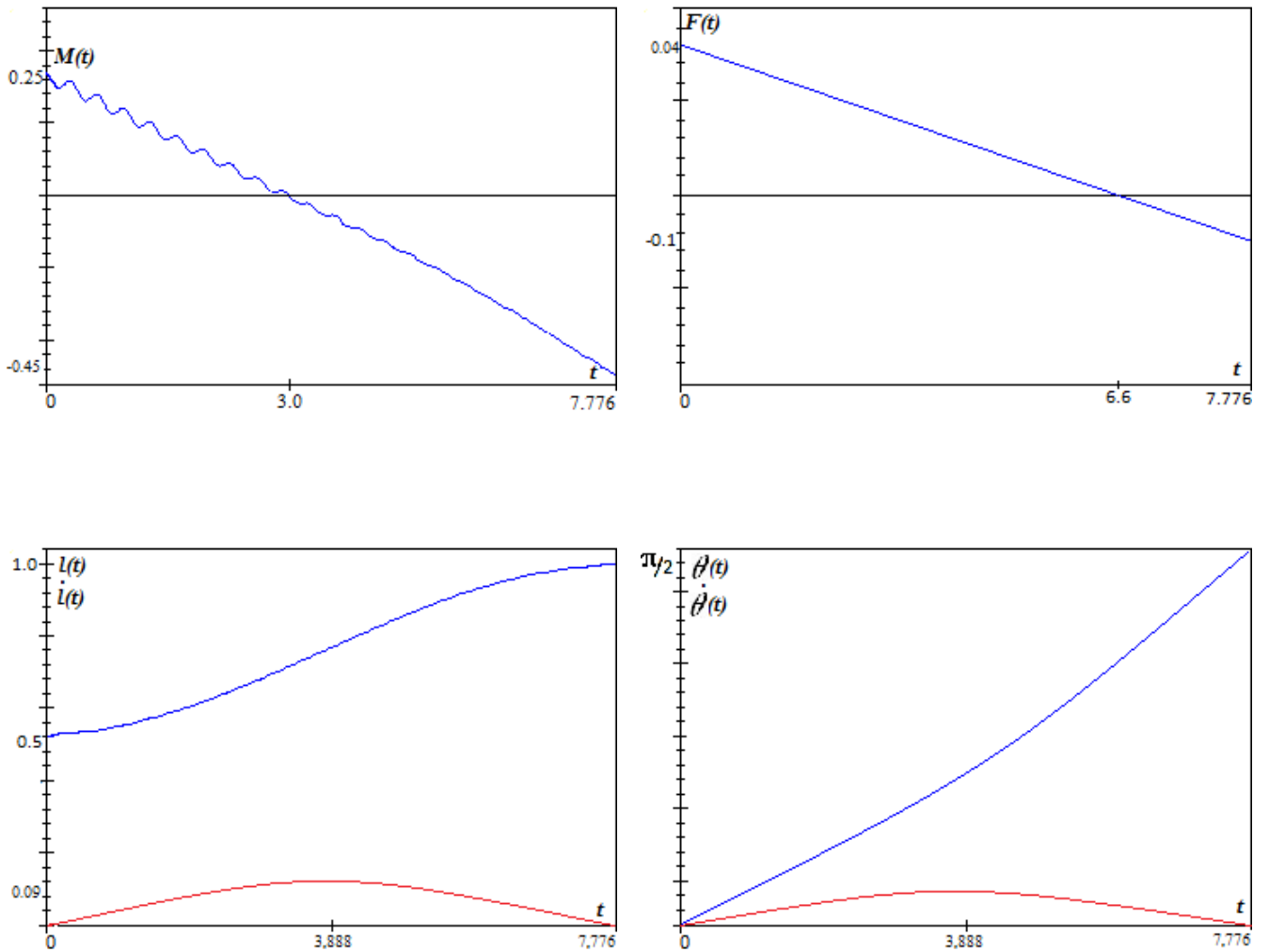


Рис. 4.15. Оптимальные управления в пространстве L_2 и графики функций $l(t)$, $\dot{l}(t)$ и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.2$ с.

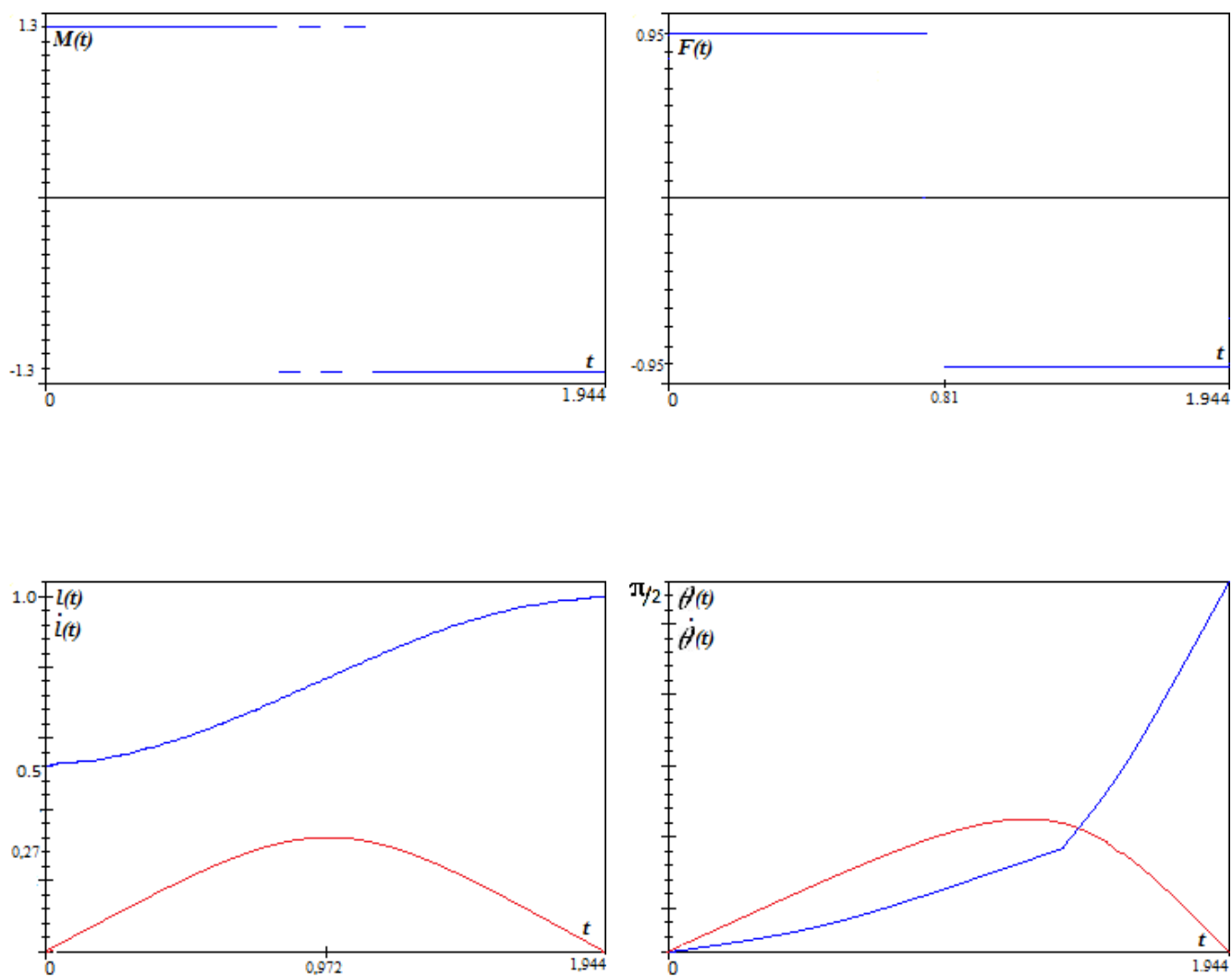
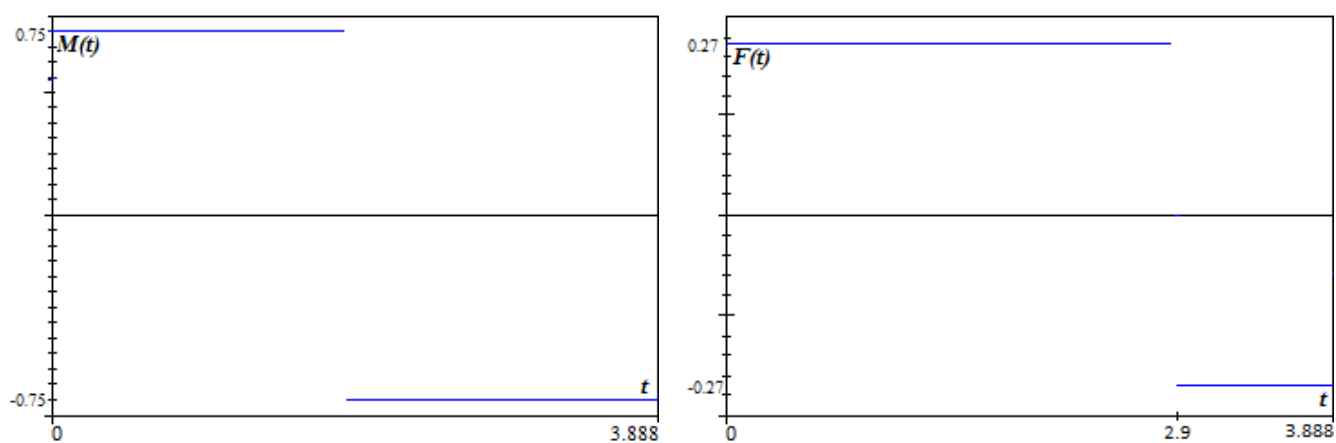


Рис. 4.16. Оптимальные управления в пространстве L_∞ и графики функций $l(t), \dot{l}(t)$ и $\theta(t), \dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.05$ с.



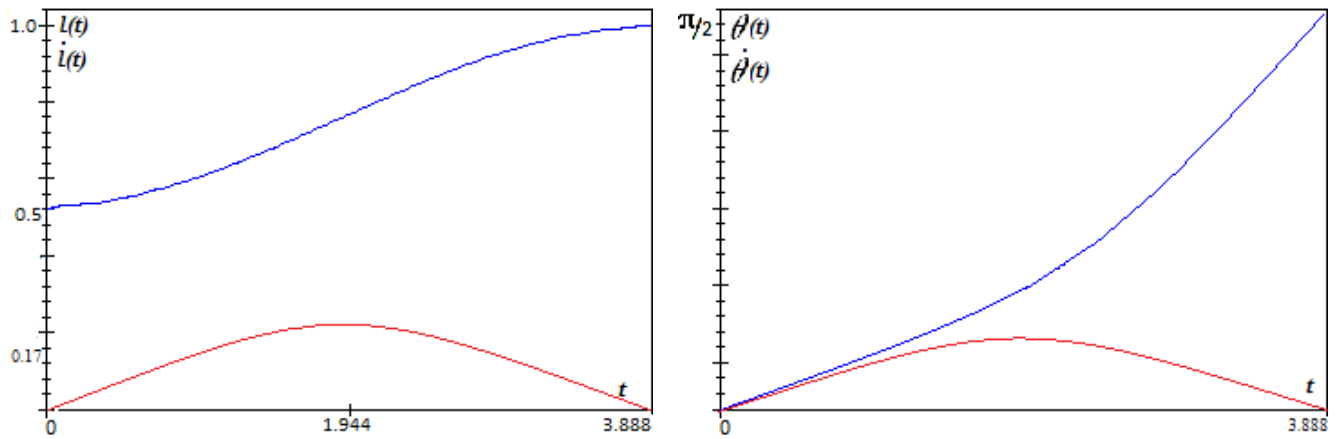


Рис. 4.17. Оптимальные управления в пространстве L_∞ и графики функций $l(t), \dot{l}(t)$ и $\theta(t), \dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.1$ с.

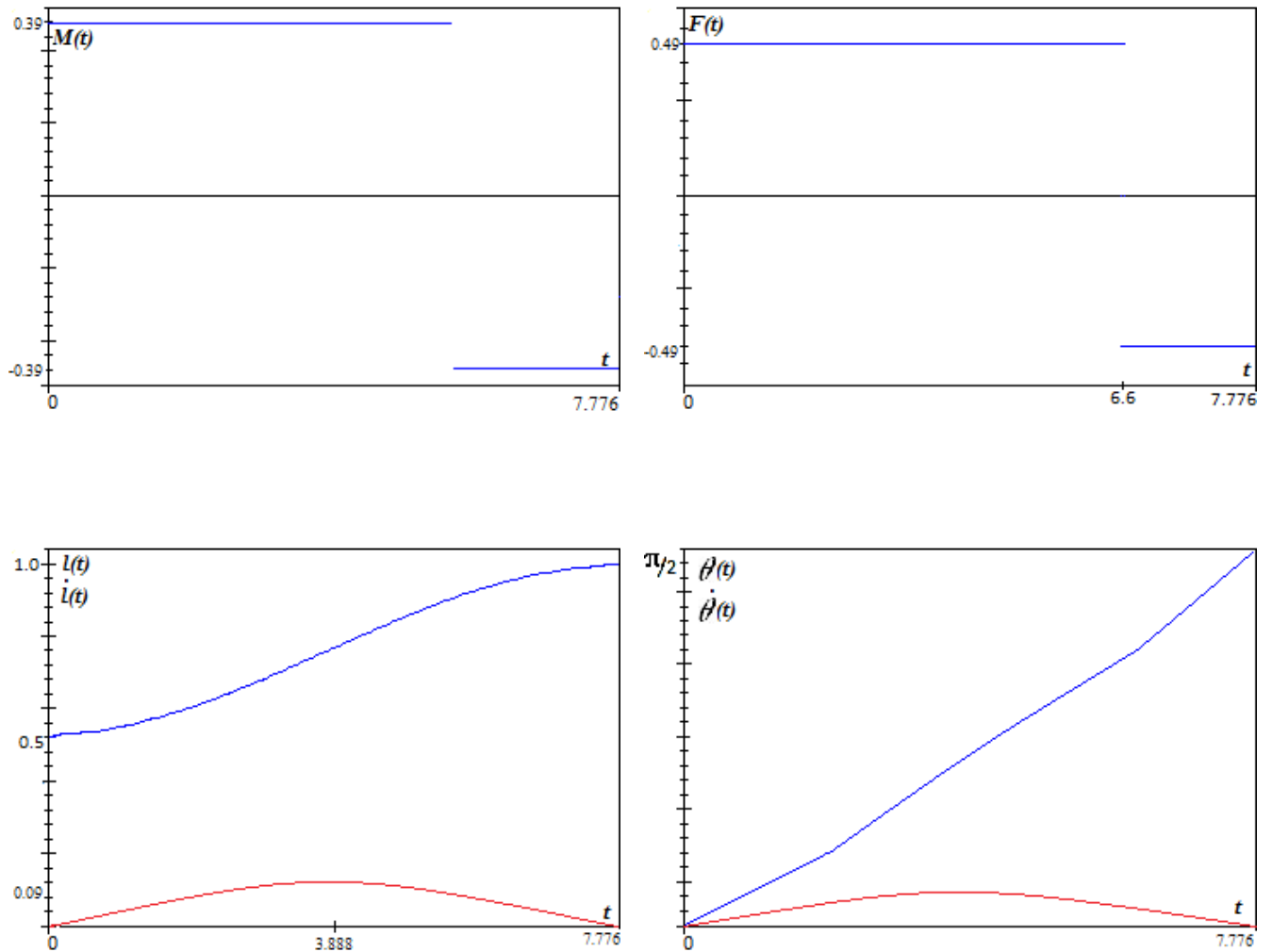


Рис. 4.18. Оптимальные управления в пространстве L_∞ и графики функций $l(t), \dot{l}(t)$ и $\theta(t), \dot{\theta}(t)$ для времени $T = 0.2$ с.

Заключение

В диссертации рассмотрены задачи оптимального управления поведением решений математической модели телескопического манипулятора, которая является начально-краевой задачей для гибридной системы дифференциальных уравнений, т.е. системы уравнений, содержащей как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и уравнения в частных производных. Связь между уравнениями осуществляется через функционалы и интегральные операторы. Рука манипулятора обладает упругой податливостью и имеет две степени свободы - может осуществлять поворот вокруг фиксированной оси, проходящей через центр масс направляющей и перемещаться вдоль ее оси. В соответствии с этим в математическую модель входит две управляющие функции. Для начально-краевой задачи решены задачи оптимального управления, связанные с переводом решений из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени T при минимальном значении нормы управляющих функций в пространствах $L_2(0, T)$ и $L_\infty(0, T)$, а также задачи быстрогодействия при условии ограниченности этих норм, разработаны алгоритмы построения соответствующих оптимальных управлений. В качестве метода исследований используется методика, позволяющая свести рассмотрение задач оптимальных управлений к нелинейной проблеме моментов в функциональных пространствах. Решения нелинейной проблемы моментов осуществляется итерационным методом. Показана его сходимости. Для конкретных примеров продемонстрирована эффективность предложенных в диссертации подходов построения оптимальных управлений. Разработан программный комплекс построения оптимальных управлений, который прошел государственную регистрацию.

Литература

1. *Федосеев, В. Н.* Сопротивление материалов / В. Н. Федосеев. — М.: Из-во МГТУ им. Баумана, 1989.
2. *Черноуцько, Ф. Л.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация: монография / Ф. Л. Черноуцько, Н. Н. Болотник, В. Г. Градецкий. — М.: Наука, 1989. — 368 с.
3. *Бербюк, В. Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем / В. Е. Бербюк. — Киев: Наукова думка, 1989. — 192 с.
4. *Бербюк, В. Е.* Финитное управление колебаниями упругой стрелы манипулятора / В. Е. Бербюк // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1984. — Вып. 19. — С. 95–99.
5. *Бербюк, В. Е.* Математическая модель упругого манипулятора с распределенными параметрами / В. Е. Бербюк // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1984. — Вып. 20. — С. 88–93.
6. *Бербюк, В. Е.* Использование первых интегралов в задачах синтеза оптимальных систем управления / В. Е. Бербюк // ПММ. — 1986. — Т. 50, Вып. 1. — С. 17–23.
7. *Бербюк, В. Е.* Оптимизация управляемых вращений твердого тела с упругим стержнем с помощью первых интегралов свободной системы / В. Е. Бербюк // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1987. — № 3. — С. 8–16.
8. *Бербюк, В. Е.* Об управляемом вращении системы двух твердых тел с упругими элементами / В. Е. Бербюк // ПММ. — 1984. — Т. 48, Вып. 2. — С. 238–246.
9. *Sakawa, Y.* Optimal control of rotation of a flexible arm / Y. Sakawa, R. Ito, N. Fujii // Control Theory for Distributed Parameter Systems and Applications. Lecture Notes in Control and Information Sciences. — 1983. — V. 54 — С. 175–187.
10. *Krabs, W.* On the controllability of a slowly rotating Timoshenko beam / W. Krabs, G.M. Sklyar // Z. Anal. Anwend. — 1999. — V.18, № 2. — P. 437–448.
11. *Бербюк, В. Е.* Об управляемом движении упругого манипулятора с распределенными параметрами / В. Е. Бербюк, М. В. Демидюк // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1984. — № 2. — С. 59–67.

12. *Бербюк, В. Е.* Параметрическая оптимизация в задачах динамики и управления движением упругого манипулятора с распределенными параметрами / В. Е. Бербюк, М. В. Демидюк // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1986. — № 2. — С. 81–89.
13. *Акуленко, Л. Д.* Об управляемом вращении упругого стержня / Л. Д. Акуленко, Н. Н. Болотник // ПММ. — 1982. — Т. 46, Вып. 4. — С. 587–595.
14. *Акуленко, Л. Д.* Об управляемом повороте упругого звена манипулятора / Л. Д. Акуленко, Н. Н. Болотник // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1984. — № 1. — С. 167–173.
15. *Акуленко, Л. Д.* Кинематическое управление движением упругой системы / Л. Д. Акуленко, Н. Н. Болотник // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1984. — № 2. — С. 168–176.
16. *Акуленко, Л. Д.* Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов / Л. Д. Акуленко, Н. Н. Болотник // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1986. — № 4. — С. 21–29.
17. *Акуленко, Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления / Л. Д. Акуленко. — М.: Наука, 1987. — 368 с.
18. *Зеликин М. Н.* Оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задаче управления балкой Тимошенко / М. Н. Зеликин // Прикл. мат. тех., — 2006. — 70, № 2— 295-304 с.
19. *Gugat, M.* Controllability of a slowly rotating Timoshenko beam / M. Gugat // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. — 2001. — № 6. — P. 333–360.
20. *Krabs, W.* On the stabilizability of a slowly rotating Timoshenko beam / W. Krabs, G.M. Sklyar // Z. Anal. Anwends. — 2000. — V.19, № 1. — P. 131–145.
21. *Krabs, W.* On the set of reachable states in the problem of controllability of rotating Timoshenko beams / W. Krabs, G.M. Sklyar, J. Wozniak // J. Anal. Appl. — 2003. — V.22, № 1. — P. 215–228.
22. *Leugering, G.* Control and stabilization of a flexible robot arm / G. Leugering // Dynamics and Stability of Systems —1990. V.5 — P. 37-46

23. *Leugering, G.* On control and stabilization of a rotating beam by applying moments at the base only / G. Leugering // Optimal Control of Partial Differential Equations. (K.H. Hoffmann and W. Krabs ed.), Lecture Notes in Control and Information Sciences —1991. V.149 — P. 182-191
24. *Бутковский, А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами: монография / А.Г. Бутковский. — М.: Наука, 1965. — 474 с.
25. *Бутковский, А. Г.* Что такое оптимальное управление: монография / А. Г. Бутковский. — М.: Знание, 1966. — 48 с.
26. *Бутковский, А. Г.* К единой геометрической теории управления: монография / А. Г. Бутковский, С. А. Малый, Ю. Н. Андреев. — М.: Metallurgiya, 1972. — 439 с.
27. *Бутковский, А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. — М.: Наука, 1975. — 568 с.
28. *Бутковский, А. Г.* Структурная теория распределенных систем / А. Г. Бутковский. — М.: Наука, 1977. — 320 с.
29. *Бутковский, А. Г.* Фазовые портреты управляемых динамических систем / А. Г. Бутковский. — М.: Наука, 1977. — 136 с.
30. *Бутковский, А. Г.* Подвижное управление в системах с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский, Л. М. Пустыльников. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
31. *Бутковский, А. Г.* К единой геометрической теории управления / А. Г. Бутковский, А. В. Бабичев, С. Похьолайнен. — М.: Наука, 2001. — 352 с.
32. *Лурье, К. А.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики / К. А. Лурье. — М.: ГИТТЛ, 1951. — 432 с.
33. *Лурье, К. А.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования / К. А. Лурье. — М.: Гостехиздат, 1951. — 216 с.
34. *Лурье, К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики / К. А. Лурье. — М.: Наука, 1975. — 480 с.
35. *Лионс, Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 416 с.

36. *Лионс, Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионс. — М.: Наука, 1987. — 368 с.
37. *Егоров, А. И.* Основы теории управления / А. И. Егоров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 504 с.
38. *Егоров, А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А. И. Егоров. — М.: Наука, 1978. — 464 с.
39. *Красовский, Н. Н.* Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
40. *Красовский, Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений / Н. Н. Красовский. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
41. *Красовский, Н. Н.* Позиционные дифференциальные игры / Н. Н. Красовский, А.И. Субботин. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
42. *Красовский, Н. Н.* Управление динамической системой / Н. Н. Красовский. — М.: Наука, 1985. — 520 с.
43. *Krasovskii, N. N.* Control under Lack of Information / N. N. Krasovskii, A. N. Krasovskii. — Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 1995. — 322 p.
44. *Кубышкин, Е. П.* Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем / Е. П. Кубышкин // Прикладная математика и механика. — 1992. — Т.56, Вып. 1. — С. 240–249.
45. *Гарнихина, М. Ю.* Оптимальное управление поворотом твердого тела с наследственно вязкоупругим стержнем / М. Ю. Гарнихина, Е. П. Кубышкин // Механика твердого тела (Известия АН). — 2006. — № 05. — С. 29–41.
46. *Кубышкин, Е. П.* Оптимальное управление движением механической системы, моделирующей динамику манипуляционного робота / Е. П. Кубышкин, М. Ю. Злобина // Международная конференция "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовниченко / Москва: Университетская книга, 2009. — С. 285–286.

47. Злобина, М. Ю. Оптимальное управление поворотом двух твердых тел, соединенных упругим стержнем / М. Ю. Злобина, Е. П. Кубышкин // Механика и процессы управления. Итоги диссертационных исследований / Екатеринбург: УрО РАН, 2009. — С. 108–117.
48. Войтицкий, В. И. О спектральной задаче, возникающей в механике манипуляционных роботов / В. И. Войтицкий, М. Ю. Злобина, Е. П. Кубышкин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2009. — Т.16. № 3. — С. 22–28.
49. Кубышкин, Е. П. Уравнения движения одной механической системы, моделирующей динамику манипуляционного робота / Е. П. Кубышкин // Математика, кибернетика, информатика: труды международной научной конференции памяти А. Ю. Левина / Под редакцией С. А. Кащенко, В. А. Соколова / Яросл. Гос. Ун-т. Ярославль, 2008. — С. 100–103.
50. Кубышкин, Е. П. Некоторые вопросы теории колебаний балки Тимошенко./ Е. П. Кубышкин, О. А. Хребтюгова // МАИС — 2011. — №4, ч.5. — С. 152-153.
51. Кубышкин, Е. П. Обобщенное решение одной начально-краевой задачи, возникающей в механике дискретно-континуальных систем. / Е. П. Кубышкин, О. А. Хребтюгова // МАИС — 2012. — Т.19, вып. 1. — С. 84-96.
52. Кубышкин, Е. П. Оптимальное управление поведением решений одной начально-краевой задачи для гибридной системы дифференциальных уравнений / Е. П. Кубышкин // МАИС — 2012. — Т.19, вып. 5. — С. 106-107.
53. Kubyshkin E. P. A generalized solution of an initial-boundary value problem arising in the discrete-continuous systems / E. P. Kubyshkin, O. A. Khrebtuyugova // Automatic Control and Computer Sciences — 2013. — V.47, № 7. — Pp. 556-565.
54. Кубышкин, Е. П. Оптимальное управление поведением решений одной начально-краевой задачи, возникающей в механике дискретно-континуальных систем / Е.П. Кубышкин // Труды Всероссийского совещания по проблемам управления. Москва, 16-19 июня 2014. — ИПУ РАН, 2014. — С. 1779-1789.
55. Кубышкин, Е. П. Оптимальное управление поворотом системы двух тел, соединенных упругим стержнем / Е. П. Кубышкин // ПММ —2014 —Т.78, вып. 5. — С. 656-670.

56. *Тряхов, М. С.* Построение обобщенного решения одной начально-краевой задачи с переменной границей / М.С. Тряхов // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского — 2012. — № 5(2). — С. 219-221.
57. *Тряхов, М. С.* Оптимальное управление поведением решений одной начально-краевой задачи с переменной границей / М. С. Тряхов // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского — 2013. — № 1(3). — С. 161-165.
58. *Кубышкин, Е. П.* Алгоритм построения оптимального управления поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей динамику телескопического манипулятора. / Е. П. Кубышкин, М. С. Тряхов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2014. — Т. 21 № 1. — С. 125-127.
59. *Кубышкин, Е. П.* Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей вращение твердого тела с упругим стержнем /Е. П. Кубышкин, М. С. Тряхов // Моделирование и анализ информационных систем — 2014. — Т.21, вып. 5. — С. 72-92.
60. *Tryakhov, M. S.* Optimal equation of initial-boundary task solutions behavior, modelling solid with flexible rod rotation / M. S. Tryakhov // International Conference. Nonlinear Methods in Physics and Mechanics. Munich, Germany. 2013, pp. 276-278.
61. *Кубышкин, Е. П.* Оптимальное управление поведением решений одной начально-краевой задачи, моделирующей динамику руки телескопического манипулятора / Е. П. Кубышкин, М. С. Тряхов // Воронежская зимняя математическая школа "Современные методы теории функций и смежные проблемы", —ВГУ, Воронеж — 2013. — С. 125-127.
62. *Кубышкин, Е. П.* Алгоритм построения оптимального управления поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей динамику телескопического манипулятора / Е. П. Кубышкин, М. С. Тряхов // МАИС —Ярославль — 2014. — С. 130-132.
63. *Кубышкин, Е. П.* Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей динамику руки телескопического манипулятора / Е. П. Кубышкин, М. С. Тряхов // Международная конференция "Нелинейная динамика и ее приложения, посвященная столетию со дня рождения Поля Пенлеве (1863-1933)" — ЯрГУ, Ярославль — 2013. — С. 25-27.
64. *Тряхов, М. С.* Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей динамику руки телескопического манипулятора./ М. С. Тряхов // Путь

- в науку. Математика: Материалы II Международной молодежной научно-практической конференции — Ярославль — 2014. — С. 37-39.
65. *Tryakhov, M. S.* Optimal control of initial-boundary task behavior, modelling solid with flexible rod rotation / M. S. Tryakhov // International Conference. Nonlinear Methods in Physics and Mechanics. — Yaroslavl. October 3-6, 2015. pp. 87-90.
66. *Кубышкин, Е. П.* Программный комплекс расчета оптимальных управлений движениями руки телескопического манипулятора / Е. П. Кубышкин, М. С. Тряхов // Свидетельство государственной регистрации программы для ЭВМ. — № 2015617666. — Дата регистрации в реестре программ для ЭВМ 17 июля 2015.
67. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики / В.Ф. Журавлев // М.: Издательство Физико-математической литературы. — 2001. — С. 32-44.
68. *Ландау, Л.Д.* Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: Наука, 1987. — 248 с.
69. *Рисс, Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. — М.: Мир, 1979. — 587 с.
70. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т.// Издательство Машиностроение. — 1978. Т.1 под ред. Болотина В.В.— 352 с.
71. *Михлин, С.Г.* Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. — М.: Наука, 1970. — 512 с.
72. *Михайлов, В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных: Учеб. пособие для вузов / В.П. Михайлов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Наука. Физматлит, 1983. — 424 с.
73. *Ладыженская, О.А.* Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
74. *Ахиезер, Н.И.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве./ Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман — М.: Наука, 1966. 2 изд.— 544 с.
75. *Крейн, М.Г.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. (Идеи и проблемы П.Л. Чебышева и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие) / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман — М.: Наука, 1973. — 552 с.

76. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. —Изд. 4-е, испр. — СПб.: Нев. диалект, 2004. — 814 с.
77. *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович — М.: Наука, 1967.— 472 с.

Приложение 1

В данном приложении приводится копия сертификата государственной регистрации программного комплекса для ЭВМ для построения оптимальных управлений.

Программа предназначена для построения оптимальных управлений движением руки телескопического манипулятора, обладающей упругой податливостью. Рука манипулятора может совершать поступательное и вращательное движения. Оптимальные управления строятся либо с минимумом энергии программных управлений, либо с минимумом величины управляющего воздействия. Возможно также решение задачи быстродействия при ограничении величины энергии управляющего воздействия или его величины. Представляет собой стандартный исполняемый файл операционной системы MS Windows. Основные функциональные возможности программы: удобный ввод параметров системы через графический интерфейс пользователя, вывод результатов работы алгоритма в графическом и численном виде. Области использования: проектирование манипуляционных роботов, исследование динамики дискретно-континуальных механических систем.

В приложении 2 приведены фрагменты кода расчетной задачи.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015617666

**Программный комплекс расчета оптимальных управлений
движениями руки телескопического манипулятора**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова» (RU)*

Авторы: *Кубышкин Евгений Павлович (RU),
Трахов Михаил Сергеевич (RU)*

Заявка № 2015614827

Дата поступления 02 июня 2015 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 17 июля 2015 г.

Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности



А.Л. Курлов

Приложение 2

Прилагается код программного комплекса, использованный для построения графиков оптимальных управлений, а также функций $l(t), \dot{l}(t), \theta(t), \dot{\theta}(t)$ в пространствах L_2 и L_∞ для времени T .

```
void CalculateVn()
{
    InitManager.InitConstants(0, 1);
    var betaList = new List<Result>();
    for (var i = 0; i < InitManager.BetaCount; i++)
    {
        betaList.Add(new Result { Y = InitManager.BetaList[0, i] });
    }
    VnList = new List<List<ResultXY>>();
    var linesToDisplay = new List<Dictionary<double, double>>();
    for (var beta = 0; beta < InitManager.BetaCount; beta++)
    {
        var vnList = new List<ResultXY>();
        var vnValuesDict = new Dictionary<double, double>();
    }
    for (var i = 0; i < InitManager.VnFunctions[0][beta].Count; i++)
    {
        var x = i * (InitManager.LengthEnd) / InitManager.TimeStepsCount;
        vnValuesDict[x] = InitManager.VnFunctions[0][beta][i];
        vnList.Add(new ResultXY { X = x, Y = vnValuesDict[x] });
    }
    VnList.Add(vnList);
    linesToDisplay.Add(vnValuesDict);
    BetaList = betaList;
    LinesToDisplay = linesToDisplay;
}

public static void BuildOrtogonalization(int tauCount)
{
    for (var step = 0; step < BetaCount * 2 + 2; step++)
```



```

{
    FiList.Add(new Dictionary<int, double>());
    FiWaveList.Add(new Dictionary<double, double>());
for (var i = 0; i < step; i++)
{
    var alpha = new AlphaModel
    {
        I = step,
        J = i,
        Value = (-1) * Integrals.FuncVnVm(QList[step].Values.ToList(),
        fiList[i].Values.ToList(), LengthEnd, LengthEnd / tauCount, B)
    };
    AlphaList.Add(alpha);
}
var qKeys = QList[step].Keys.ToList();
for (var tauIdx = 0; tauIdx < tauCount; tauIdx++)
{
    FiWaveList[step][tauIdx] = QList[step][qKeys[tauIdx]];
    for (var i = 0; i < step; i++)
    {
        var alpha = AlphaList.FirstOrDefault
(a => a.I == step && a.J == i).Value;
        FiWaveList[step][tauIdx] += alpha * FiList[i][tauIdx];
    }
}
MyuList.Add(Math.Sqrt(Integrals.FuncVnVm
(FiWaveList[step].Values,
    FiWaveList[step].Values.ToList(), LengthEnd,
    LengthEnd / tauCount, B)));
for (var tauIdx = 0; tauIdx < tauCount; tauIdx++)
{
    FiList[step][tauIdx] = FiWaveList[step][tauIdx] / MyuList[step];
}
BetaSlnList.Add(AlphaList.FirstOrDefault

```

```

(a => a.I == step && a.J == null).Value
/ MyuList[step]);
for (var i = 0; i < step; i++)
{
    BetaSlnList[step] += AlphaList.FirstOrDefault
(a => a.I == step
    && a.J == i).Value * BetaSlnList[i]
    / MyuList[step];
}
}
for (var tauIdx = 0; tauIdx < tauCount; tauIdx++)
{
    MOptSln[tauIdx * TimeEnd / tauCount] = 0;
    for (var i = 0; i < FiList.Count; i++)
    {
        MOptSln[tauIdx * TimeEnd / tauCount] +=
BetaSlnList[i] * FiList[i][tauIdx] * 10;
    }
}
var idx = Form1.mSlnList.Count(item=>item.Count>1);
form1.mSlnList[idx] = MOptSln;
}
public static double FuncVnVm(List<double> vn,
List<double> vm, double l,
    double step, double J1, double b)
{
    double norma = 0, x = 0;
    try
    {
        for (var c = 0; x + step < l; c++, x = step * c)
        {
            norma += (step / 2) * ((vn[c] * vm[c]
+ vn[c + 1] * vm[c + 1]) +
            (1 / J1) * ((b + l - x) * vn[c] + ((b + l - (x + step))

```

```

* vn[c + 1]))
    * ((b + 1 - x) * vm[c] + ((b + 1 - (x + step))
* vm[c + 1])));
}
}
catch {}
return norma;
}
public static double FunctionJ1(double l, double b, double J)
{
    return J - ((Pow((b + 1 - 1), 3) - Pow(b, 3)) / 3);
}
public static double AnCalculation(double beta, double l,
double b, double J1)
{
    return (Sh(beta * l)) + ((1 - ((2 * b) / (J1
* Pow(beta, 2)))) * Sin(beta * l)) -
    (((2 * Pow(b, 2)) / (J1 * beta)) * Cos(beta * l));
}
public static double BnCalculation(double beta, double l,
double b, double J1)
{
    return ((-1) * (Ch(beta * l))) - ((1 + ((2 * b)
/ (J1 * Pow(beta, 2)))) * Cos(beta * l)) -
    ((2 / (J1 * Pow(beta, 3))) * Sin(beta * l));
}
public static double CnCalculation(double beta, double l,
double b, double J1)
{
    return ((-1) * (1 + ((2 * b) / (J1 * Pow(beta, 2))))
* (Sh(beta * l))) - (Sin(beta * l)) -
    (((2 * Pow(b, 2)) / (J1 * beta)) * Ch(beta * l));
}
public static double DnCalculation(double beta, double l, double b, double J1)

```

```

{
    return ((1 - ((2 * b) / (J1 * Pow(beta, 2))))
* Ch(beta * l)) + (Cos(beta * l)) -
    ((2 / (J1 * Pow(beta, 3))) * Sh(beta * l));
}

public static double DetCalculation(double beta,
double l, double b, double J1)
{
    return (Cos(beta * l) * Ch(beta * l)) + 1 +
    ((1 / (J1)) * (((1 / Pow(beta, 3)) + (Pow(b, 2)
/ beta)) * Sin(beta * l) * Ch(beta * l)
    ) + (((Pow(b, 2) / beta) - (1 / Pow(beta, 3)))
* Cos(beta * l) * Sh(beta * l)) + (
    ((2 * b) / Pow(beta, 2)) * Sin(beta * l) * Sh(beta * l)))));
}

public static double[] FunctionBeta(double l,
double b, double J1, int betaCount)
{
    var beta = new double[100];
    var flag = 0;
    for (var i = 0; i < betaCount; i++)
    {
        double p;
        double z;
        double aa;
        if (i == 0)
        {
            p = 0.00001;
            z = DetCalculation(p, l, b, J1);
            if (z > 0)
            {
                flag = 1;
            }
        }
    }
}

```

```

        if (z < 0)
    {
flag = -1;
        }
        aa = p; p = 0.0001;
    }
else
    {
flag *= -1;
        p = beta[i - 1] + 0.0001;
        aa = p;
        p = aa + 0.0001;
    }
double bb = 0;
while (bb == 0)
    {
        z = DetCalculation(p, l, b, J1);
        if (flag == 1 && z < 0) { bb = p; }
        if (flag == -1 && z > 0) { bb = p; }
        p += 0.0001;
    }
double s = 0;
while (aa <= bb && s < 1000)
    {
        p = (aa + bb) / 2;
        z = DetCalculation(p, l, b, J1);
        if (flag == 1 && z < 0) { bb = p; }
        if (flag == 1 && z > 0) { aa = p; }
        if (flag == -1 && z < 0) { aa = p; }
        if (flag == -1 && z > 0) { bb = p; }
        s++;
    }
beta[i] = (aa + bb) / 2;
    }

```

```

        return beta;
    }
}

    public static double[] GetIntegral(double beta,
double length, double b, double J1)
    {
        var func = new List<double>();
        while (Math.Abs(result - oldResult) > Precision || counter < 1)
        {
            oldResult = result;
            result = 0;
            double step = length / points;
            func = GetVn(beta, length, b, J1, step, points, out counter)
                .ToList();
            for (var i = 0; i < points; i++)
            {
                double x = step*i;
                result += (step / 2) * (func[i] * func[i]
+ func[i + 1] * func[i + 1])
+ (step / 2) * (1/J1)*((b + length - x)*func[i]
+ ((b + length - (x + step))*func[i + 1]))
* ((b + length - x)*func[i] + ((b + length
- (x + step))*func[i + 1]));
            }
            counter++;
            if (points > Math.Pow(10, 7))
            {
                break;
            }
            points *= 2;
            if (points > 500000)
            {
                break;
            }

```

```

    }
    Norma[beta] = result;
    return GetVn(beta, length, b, J1, length
/ (TimeStepsCount - 2), TimeStepsCount - 2,
    out counter).Select(p => p
/ Math.Sqrt(Math.Abs(Norma[beta]))).ToArray();
}

    public static void InitQ(int tauCount)
    {
    TimeStart = 0;
    LengthStart = LengthStartFromForm;
    CalculateWnSum(tauCount);
    for (var tauIdx = 0; tauIdx <= tauCount; tauIdx++)
    {
    var lengthByIdx = ltauFunc[tauIdx];
    var tau = TauList[tauIdx];
    QList[0][tau] = 1 / FunctionJ1(lengthByIdx, B, J)
        + B * (PsiTauList[0][2] - PsiTauList[1][2])
* WnList[3][tauIdx]
        + (PsiTauList[0][3] - PsiTauList[1][3])
* WnList[2][tauIdx];
    QList[1][tau] = ((TimeEnd - tau) / FunctionJ1(lengthByIdx, B, J))
        + B * (PsiTauList[0][0] - PsiTauList[1][0])
* WnList[3][tauIdx]
        + (PsiTauList[0][1] - PsiTauList[1][1])
* WnList[2][tauIdx];

    }
    for (var beta = 0; beta < BetaCount; beta++)
    {
    QList.Add(UnTauList[beta]);
    QList.Add(dUnTauList[beta]);
    }
}

```

```

    public static void CalculateWnSum(int tauCount)
    {
    for (var derivative = 0; derivative < 4; derivative++)
    {
    for (var tauIdx = 0; tauIdx <= tauCount; tauIdx++)
    {
    for (var beta = 0; beta < BetaCount; beta++)
    {
        if (beta == 0)
        {
        WnList[derivative][tauIdx] = 0;
        }
        WnList[derivative][tauIdx] += UnTauList[beta][UnTauList[beta]
.Keys.ToList()[tauIdx]] * VnFunctions[derivative][beta][tauIdx];
        }
        }
    }
    }

public static double[] GetVn(double beta, double l,
double b, double J1, double step,
int points, out int count)
{
var vn = new double[points + 2];
    double x = 0;
    count = 0;
var an = AnCalculation(beta, l, b, J1);
var bn = BnCalculation(beta, l, b, J1);
var cn = CnCalculation(beta, l, b, J1);
var dn = DnCalculation(beta, l, b, J1);
for (var c = 0; x <= 1; c++, count++)
{
x = c * step;
var arg = beta * (1 - x);
vn[c] = an * Ch(arg) + bn * Sh(arg) + cn * Cos(arg)

```



```

+ dn * Sin(arg) -
((1 / (J1 * Pow(beta, 2))) * (b + 1 - x) *
((beta * b * (bn - dn)) - an + cn));
    }
    return vn;
}
public static double[] OneVnCalculation(double beta,
    double l, double b, double J1, double step)
{
var vn = new double[TimeStepsCount+2];
    double x = 0;
var count = 0;
var an = AnCalculation(beta, l, b, J1);
var bn = BnCalculation(beta, l, b, J1);
var cn = CnCalculation(beta, l, b, J1);
var dn = DnCalculation(beta, l, b, J1);
for (var c = 0; x <= l; c++, count++)
{
x = c * step;
var arg = beta * (1 - x);
vn[c] = -an * beta * Sh(arg) - bn * beta * Ch(arg)
+ cn * beta * Sin(arg) -
dn * beta * Cos(arg) + ((1 / (J1 * Pow(beta, 2)))
* ((beta * b * (bn - dn)) - an + cn));
vn[c] = vn[c] / Math.Sqrt(Math.Abs(Norma[beta]));
    }
    return vn;
}
public static double[] TwoVnCalculation(double
beta, double l, double b, double J1, double step)
{
var vn = new double[TimeStepsCount + 2];
    double x = 0;
var count = 0;

```

```

var an = AnCalculation(beta, l, b, J1);
var bn = BnCalculation(beta, l, b, J1);
var cn = CnCalculation(beta, l, b, J1);
var dn = DnCalculation(beta, l, b, J1);
for (var c = 0; x <= l; c++, count++)
{
x = c * step;
var arg = beta * (1 - x);
vn[c] = an * Math.Pow(beta, 2) * Ch(arg) + bn
* Math.Pow(beta, 2) * Sh(arg)
- cn * Math.Pow(beta, 2) * Cos(arg) - dn
* Math.Pow(beta, 2) * Sin(arg);
vn[c] = vn[c] / Math.Sqrt(Math.Abs(Norma[beta]));
}
return vn;
}
public static double[] ThreeVnCalculation(double beta,
double l, double b, double J1, double step)
{
var vn = new double[TimeStepsCount + 2];
double x = 0;
var count = 0;
var an = AnCalculation(beta, l, b, J1);
var bn = BnCalculation(beta, l, b, J1);
var cn = CnCalculation(beta, l, b, J1);
var dn = DnCalculation(beta, l, b, J1);
for (var c = 0; x <= l; c++, count++)
{
x = c * step;
var arg = beta * (1 - x);
vn[c] = - an * Math.Pow(beta, 3) * Sh(arg) -
bn * Math.Pow(beta, 3) * Ch(arg)
- cn * Math.Pow(beta, 3) * Sin(arg)+ dn *
Math.Pow(beta, 3) * Cos(arg);
}
}

```

```

vn[c] = vn[c] / Math.Sqrt(Math.Abs(Norma[beta]));
    }
    return vn;
}
public static double ThreeVnPoint(double beta,
double l, double b, double J1)
{
var arg = 0;
var an = AnCalculation(beta, l, b, J1);
var bn = BnCalculation(beta, l, b, J1);
var cn = CnCalculation(beta, l, b, J1);
var dn = DnCalculation(beta, l, b, J1);
    return (-an * Math.Pow(beta, 3) * Sh(arg)
- bn * Math.Pow(beta, 3) * Ch(arg)
- cn * Math.Pow(beta, 3) * Sin(arg) + dn
* Math.Pow(beta, 3) * Cos(arg))
/ Math.Sqrt(Math.Abs(Norma[beta]));
}
public static double[] FourVnCalculation(double beta,
double l, double b, double J1, double step)
{
var vn = new double[TimeStepsCount + 2];
    double x = 0;
var count = 0;
var an = AnCalculation(beta, l, b, J1);
var bn = BnCalculation(beta, l, b, J1);
var cn = CnCalculation(beta, l, b, J1);
var dn = DnCalculation(beta, l, b, J1);
for (var c = 0; x <= l; c++, count++)
{
x = c * step;
var arg = beta * (l - x);
vn[c] = an * Math.Pow(beta, 4) * Sh(arg) + bn
* Math.Pow(beta, 4) * Ch(arg)

```

```

        + cn * Math.Pow(beta, 4) * Cos(arg)+ dn
* Math.Pow(beta, 4) * Sin(arg);
vn[c] = vn[c] / Math.Sqrt(Math.Abs(Norma[beta]));
    }
    return vn;
}
}

public static void InitParams(double tau, int tauCount)
{
    TimeStart = tau;
    if (tau > 0)
    {
TimeStepsCount = (int)((TimeEnd - TimeStart) / TimeStep);
        }
        else
    {
TimeStep = (TimeEnd - TimeStart) / TimeStepsCount;
        }

        TimesList = new List<double>{TimeStart};
        PsiTauList = new List<List<double>>{
new List<double>(), new List<double>()};

for (var i = 1; i <= TimeStepsCount; i++)
{
TimesList.Add(TimesList[i - 1] + TimeStep);
        }
        LengthStart = (12*(LengthEnd - LengthStart)
/Math.Pow(TimeEnd, 3))*((TimeEnd*TimeStart*TimeStart/4
- Math.Pow(TimeStart, 3)/6)) + LengthStart;

for (var i = 0; i < TimeStepsCount; i++)
{
ltFunc.Add((12 * (LengthEnd - LengthStart) /

```

```

Math.Pow(TimeEnd, 3)) *
((TimeEnd * TimesList[i] * TimesList[i] / 4
- Math.Pow(TimesList[i], 3) / 6)) + LengthStart);
lwaveFunc.Add(ltFunc[i] / LengthStart);
dLtFunc.Add((12 * (LengthEnd - LengthStart) /
Math.Pow(TimeEnd, 3)) * (TimeEnd * TimesList[i] / 2 -
TimesList[i] * TimesList[i] / 2));

J1L0Lt.Add(Calculator.FunctionJ1(LengthStart *
lwaveFunc[i], B, J));
J1Lt.Add(Calculator.FunctionJ1(ltFunc[i], B, J));
ddlTFunc.Add((12 * (LengthEnd - LengthStart)
/ Math.Pow(TimeEnd, 3))
* (TimeEnd / 2 - TimesList[i]));
}
J1 = Calculator.FunctionJ1(LengthEnd, B, J);

InitPsiTauList(tauCount);
WnList.Add(new Dictionary<int, double>());
var betaList = Calculator.FunctionBeta(LengthStart, B, J1, BetaCount);
BetaList = new double[2, BetaCount];
for (int i = 0; i < BetaCount; i++)
{
BetaList[0, i] = betaList[i];
WnList.Add(new Dictionary<int, double>());
}
}
static void InitPsiTauList(int tauCount)
{
ltau = new List<double>();
var J1Ltau = new List<double>();
var tTauList = new List<double>();
var bottomFunc1 = new List<double>();
var bottomFunc2 = new List<double>();

```

```

        double tau = 0;
for (int i = 0; i < tauCount; i++)
{
tau = (TimeEnd - TimeStart)*i/tauCount;
ltau.Add((12 * (LengthEnd - LengthStart) /
Math.Pow(TimeEnd, 3)) * ((TimeEnd * tau * tau / 4 -
    Math.Pow(tau, 3) / 6)) + LengthStart);
ltau[i] /= LengthStart;
J1Ltau.Add(Calculator.FunctionJ1(ltau[i], B, J));
tTauList.Add(TimeEnd - (TimeEnd / tauCount) * i);
bottomFunc1.Add(J1Ltau[i] * Math.Pow(ltau[i], 3));
bottomFunc2.Add(J1Ltau[i] * Math.Pow(ltau[i], 2));
    }
}
static void InitIntegrals()
{
for (var n = 0; n < BetaCount; n++)
{
for (var m = 0; m < BetaCount; m++)
{
firstIntegral[n, m] = Integrals.GetFirstIntegral(n, m);
    SecondIntegral[n, m] = Integrals.GetSecondIntegral(n, m);
    ThirdIntegral[n, m] = Integrals.GetThirdIntegral(n, m);
fourthIntegral[n, m] = Integrals.GetFourthIntegral(n, m);
fifthIntegral[n, m] = Integrals.GetFifthIntegral(n, m);
    SixthIntegral[n, m] = Integrals.GetSixthIntegral(n, m);
    SeventhIntegral[n, m] = Integrals.GetSeventhIntegral(n, m);
    EighthIntegral[n, m] = Integrals.GetEighth(n, m);
}
}
}
static void InitPsiConsts()
{
for (var i = 0; i < BetaCount; i++)

```

```

{
PsiKsiList.Add(new List<double>());
for (var t = 0; t < TimeStepsCount; t++)
{
    double x = LengthStart * t / TimeStepsCount;
    PsiKsiList[i].Add((1 / J1) * (B + LengthStart - x));
}
double psi = Calculator.FuncVnVm(PsiKsiList[i],
VnFunctions[0][i].Values.ToList(),
LengthStart, LengthStart/TimeStepsCount, J1, B);
PsiConstList.Add(psi);
    }
}
// <dVn*Ksi, Vm>
public static double GetFirstIntegral(int n, int m)
{
    return FuncVnVm(VnFunctions[1][n].Values.ToList(),
VnFunctions[0][m].Values.ToList(),
    LengthStart, LengthStart/TimeStepsCount, B);
}
public static double GetSecondIntegral(int n, int m)
{
var vnFuncList = new List<double>();
    List<double> ksiSquaredList = GetKsi(2);
for (var i=0; i<TimeStepsCount; i++)
{
vnFuncList.Add(ksiSquaredList[i]*VnFunctions[2][n][i]);
    }
    return FuncVnVm(vnFuncList, VnFunctions[0][m].Values.ToList(),
LengthStart,
    LengthStart / TimeStepsCount, B);
}
public static double GetThirdIntegral(int n, int m)
{

```

```

var vnFuncList = new List<double>();
    List<double> ksiList = GetKsi(1);
for (var i = 0; i < TimeStepsCount; i++)
{
vnFuncList.Add(ksiList[i] * VnFunctions[1][n][i]);
    }
    return FuncVnVm(vnFuncList, VnFunctions[0][m].Values.ToList(),
LengthStart,
    LengthStart / TimeStepsCount, B);
}
public static double GetFourthIntegral(int n, int m)
{
    return FuncVnVm(VnFunctions[4][n].Values.ToList(),
VnFunctions[0][m].Values.ToList(),
    LengthStart, LengthStart/TimeStepsCount, B);
}
public static double GetFifthIntegral(int n, int m)
{
var vnFunc = new List<double>();
    List<double> oneConst = GetOneConst();
for (var i = 0; i < TimeStepsCount; i++)
{
vnFunc.Add(oneConst[i] * VnFunctions[3][n][i]);
    }
    return FuncVnVm(vnFunc, VnFunctions[0][m].Values.ToList(),
LengthStart, LengthStart / TimeStepsCount, B);
}
public static double FuncVnVm(List<double> vn, List<double> vm,
double l, double step, double b)
{
    double norma = 0, x = 0;
for (var c = 0; x + step < l; c++, x = step*c)
{
    norma += (step/2)*((vn[c]*vm[c] + vn[c + 1]*vm[c + 1]) +

```



```

        (1/ J1)*((b + 1 - x)*vn[c] + ((b + 1 - (x + step))*vn[c + 1]))
            *((b + 1 - x)*vm[c] + ((b + 1 - (x + step))*vm[c + 1]));
    }

    return norma;
}

static List<double> GetKsi(int pow)
{
    var ksiList = new List<double>();
    for (int i = 0; i < TimeStepsCount; i++)
    {
        ksiList.Add(Math.Pow(i*LengthStart/TimeStepsCount, pow));
    }
    return ksiList;
}

public static List<double> GetOneConst()
{
    var ksiList = new List<double>();
    for (int i = 0; i < TimeStepsCount; i++)
    {
        ksiList.Add(1);
    }
    return ksiList;
}
}

```