

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию

Логачевой Елены Сергеевны

«Проблемы сопряженности слов и подгрупп в свободных конструкциях групп»,

представленную на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Работа принадлежит к одному из основных научных направлений комбинаторной теории групп, которое связано с изучением алгоритмических проблем для конечно определенных групп. К числу наиболее важных алгоритмических проблем относятся проблема равенства элементов, проблема сопряженности элементов, а также проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп. Особый интерес эти проблемы представляют для свободных конструкций групп – свободных произведений и HNN-расширений. Из перечисленных трех проблем для свободных групп и для свободных произведений групп нетривиальной является только проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп. Алгоритмическая разрешимость этой проблемы для свободных групп была доказана Д.И. Молдавским в 1969 году. В дальнейшем ему удалось усилить этот результат следующим образом: свободная группа финитно аппроксимируема относительно сопряженности конечно порожденных подгрупп. Связь финитной аппроксимируемости групп относительно различных предикатов с разрешимостью соответствующих алгоритмических проблем была обнаружена значительно раньше А.И. Мальцевым. Такой подход к изучению алгоритмических проблем весьма перспективен, однако основным инструментом доказательства алгоритмической разрешимости продолжает оставаться приведение групповых слов к той или иной специальной форме.

Перечисленные выше алгоритмические проблемы значительно усложняются при переходе от обычных свободных произведений групп к обобщенным свободным произведениям. Проблемы сопряженности элементов и подгрупп для обобщенных свободных произведений групп исследуются как правило при определенных ограничениях на свободные множители и на объединенные подгруппы. Так, например, в 1966 году С. Липшцем доказана алгоритмическая разрешимость проблемы сопряженности элементов в свободном произведении двух свободных групп с циклическим объединением. В дальнейшем Д. Дайер усилила этот результат следующим образом: свободное произведение двух свободных групп с циклическим объединением финитно аппроксимируемо относительно сопряженности.

В диссертации рассматривается конструкция древесного произведения групп, которая обобщает конструкцию свободного произведения двух групп с объединением. Один из результатов диссертации представляет собой обобщение упомянутого выше результата Липшца на случай древесного произведения конечного числа свободных групп с циклическими объединениями. Переход от свободного произведения двух групп с объединени-

ем к древесному произведению конечного числа групп несомненно потребовал от автора работы определенных усилий и изобретательности.

Основные результаты диссертации связаны с доказательством алгоритмической разрешимости проблемы сопряженности конечно порожденных подгрупп в некоторых древесных произведениях. Алгоритмическая разрешимость этой проблемы для свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением доказана В.Н. Безверхним. Вопрос о возможности обобщения этого результата на древесные произведения конечного числа свободных групп с циклическими объединениями по-видимому остается открытым. В диссертации этот вопрос положительно решен для частного случая, когда свободные множители являются бесконечными циклическими группами. В работе доказана алгоритмическая разрешимость проблемы сопряженности конечно порожденных подгрупп для древесного произведения конечного числа бесконечных циклических групп, а также для некоторых HNN-расширений такого древесного произведения. Частным случаем этого результата, является следующее нетривиальное утверждение, представляющее самостоятельный интерес: для групп Баумслага – Солитэра алгоритмически разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп. Напомним, что группы Баумслага – Солитэра представляют собой HNN-расширения бесконечных циклических групп.

Результаты диссертации являются новыми. Их нетривиальные доказательства основаны на стандартных методах комбинаторной теории групп, а также на некоторых специальных методах разработанных В.Н. Безверхним для изучения свободных конструкций.

Все основные результаты работы опубликованы автором.

Направление исследований, к которому относится данная работа, в последнее время интенсивно разрабатывается, и поэтому тематика диссертации представляется весьма актуальной.

Работа соответствует специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Содержание автореферата полностью соответствует содержанию диссертации.

Имеется ряд замечаний, связанных с оформлением работы, а также с терминологией и обозначениями, используемыми в диссертации. Список замечаний приведен ниже.

1. Следуя общепринятой терминологии, сложившейся в комбинаторной теории групп, вместо сочетания терминов «решена проблема сопряженности», которое часто встречается в работе, правильнее было бы писать, что доказана алгоритмическая разрешимость проблемы сопряженности.

2. На стр. 14 группы Баумслага – Солитэра названы группами Баумслага, что не соответствует общепринятой терминологии. В других местах (см., напр., стр. 8, п. 5) вместо термина «группа Баумслага – Солитэра» используется сочетание слов «HNN-расширение бесконечной циклической группы с ассоциированными циклическими подгруппами». Здесь упоминание о цикличности ассоциированных подгрупп является излишним, так как база HNN-расширения является циклической. В нескольких местах (см., напр., стр. 8, п. 6) говорится о древесном произведении циклических групп с циклическими объединениями. Упоминание о цикличности объединяемых подгрупп в этих местах является излишним.

3. В формуле для склеивающих соотношений древесного произведения (см. стр. 10) допущена опечатка – вместо соотношений $\varphi_{ji}(U_{ij})=U_{ij}$ написаны равенства $\varphi_{ji}(U_{ij})=U_{ji}$, которые ничего не «склеивают». Кроме того, поскольку древесное произведение является одной из основных конструкций диссертации, следовало бы уже во введении (на стр. 10 –

12) формулировать определение этой конструкции более подробно и аккуратно, сопоставляя каждому ребру исходного графа соответствующее ему склеивающее соотношение.

4. Формулировка предложения 2.1 (стр. 35) перегружена избыточной информацией и лишними обозначениями. Это достаточно простое утверждение можно было бы сформулировать, например, следующим образом: если элементы g и h свободной группы сопряжены и являются степенями одного и того же элемента этой группы, то $g = h$.

5. Не достаточно аккуратно сформулировано определение нетрансформы для обобщенного свободного произведения групп в части, касающейся нетрансформы нечетной длины (см. стр. 17, опр. 1.3). Здесь говорится, что слово вида (1.2) (без каких-либо ограничений) есть нетрансформа. Читатель вынужден самостоятельно догадываться, какой смысл вкладывается в данный термин. Аналогичное определение для HNN-расширений (стр. 23, опр. 1.7) сформулировано более аккуратно, однако здесь после фразы «если в слове» читателю хотелось бы понять, о каком слове идет речь, но вместо этого он видит условие, накладываемое на данное слово. То же самое замечание относится и к определению 1.6.

6. В разделе «Научная новизна» (стр. 7, п. 2) утверждается, что в диссертации доказана алгоритмическая разрешимость проблемы сопряженности элементов в HNN-расширении с циклическими ассоциированными подгруппами древесного произведения бесконечных циклических групп. В действительности (см. теор. 2.5 на стр. 12, а также стр. 47) это утверждение доказано в работе при дополнительном предположении, состоящем в том, что ассоциированные подгруппы HNN-расширения содержатся в свободных множителях древесного произведения. Аналогичное замечание относится и к п. 3 и 6 раздела «Научная новизна», в которых формулируются более общие утверждения, по сравнению с доказанными в работе теоремами 2.6 и 3.3.

Все приведенные замечания имеют технический характер и относятся исключительно к оформлению работы.

Считаю, что диссертация Логачевой Елены Сергеевны отвечает всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям и соответствует п.9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», а ее автор Логачева Елена Сергеевна несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
алгебры и математической логики ФГБОУ ВПО
«Ивановский государственный университет»
Азаров Дмитрий Николаевич
11.11.2015



Азаров Д.Н.



Исх. № _____
Д.Н. Азаров заверяю
Д.Н.
11 " 11 " 2015 г.

Контактная информация:

Домашний адрес – 153038, г. Иваново, ул. Ломовская, д. 16, кв. 22.

Телефон – 8-915-840-63-55, адрес электронной почты – azarovdn@mail.ru