Отзыв
на работу Е. А. Тумановой «Аппроксимируемость корневыми классами свободных конструкций групп»,
представленную в качестве диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Группу G называют аппроксимируемой классом групп K (короче, K-аппроксимируемой) если для каждого неединичного элемента $a \in G$ существует гомоморфизм φ группы G в группу из K, при котором $\varphi(a)$ также неединичный элемент. Если в качестве K взять класс более просто устроенных групп по сравнению с группой G, то аппроксимируемость G классом K может оказаться полезной при изучении группы G. Так, в 1940 г. А. И. Мальцев использовал эту идею при решении вопроса о существовании изоморфизма группы на собственную факторгруппу. При этом в качестве K он брал класс матричных групп над полями. В другой своей работе 1958 г. А. И. Мальцев исследует свойство аппроксимируемости групп классом F всех конечных групп, называя его финитной аппроксимируемостью, а также его обобщение – свойство финитной отделимости любого подмножества в группе. В частности, доказано, что свойство финитной аппроксимируемости наследуется при полупрямом произведении групп. Отметим, что из указанной работы 1940 г. следует финитная аппроксимируемость свободных групп. Этот результат в теории групп называют теоремой Мальцева-Ивасавы, поскольку Ивасава доказал его независимо в 1943 г.

В последующие годы вопрос об аппроксимируемости групп исследовался разными авторами. В общем случае этот вопрос является весьма сложным. Поэтому авторы, как правило, ограничивались решением этого вопроса для групп G из некоторых частных множеств при некоторых конкретных классах K. В качестве K чаще всего использовались классы конечных групп, конечных p-групп, конечных π-групп при некотором непустом множестве π простых чисел, конечных разрешимых π-групп и др. Использовались также и более общие классы групп, названные К. Грюнбергом корневыми классами. Как было показано Е. В. Соколовым, корневые классы – это классы групп, замкнутые относительно взятия подгрупп и декартовых сплетений групп.

В качестве кандидатов в аппроксимируемые группы во многих работах рассматривались группы из так называемых свободных конструкций групп, к которым относят свободное и обобщенное (т. е. с объединенной подгруппой) свободное произведения групп, а также HNN-расширение группы H путем добавления к ее заданию одного образующего элемента t и соотношений вида $t^{-1}at = \sigma(a)$, где a пробегает некоторую подгруппу $H_1 < H$, а σ – изоморфизм H_1 на $H_2 < H$.

Из работы К. Грюнберга 1957 г. следовало, что свойство финитной аппроксимируемости наследуется при свободном произведении групп. Однако, в общем случае оно не наследуется при обобщенном свободном произведении и при HNN-расширениях групп.

В связи с последним обстоятельством стала актуальной задача нахождения достаточных условий K-аппроксимируемости групп двух последних конструкций при различных K. Одной из основополагающих работ в этом направлении явилась работа Г. Баумслага 1963 г., в которой было доказано, что свободное произведение конечных групп с объединенной подгруппой – финитно аппроксимируемо. В последующем методика Баумслага использовалась и во многих других ситуациях. В частности, использовалась она и Е. А. Тумановой.

Рассматриваемая работа Е. А. Тумановой посвящена нахождению условий аппроксимируемости групп из свободных конструкций различными корневыми классами групп. Ранее в различных частных случаях эта задача решалась многими авторами. Однако общего критерия аппроксимируемости не найдено, и потому задача нахождения новых достаточных условий аппроксимируемости свободных конструкций групп корневыми классами является актуальной.

В первой главе рассматриваемой работы подробно изложена история исследований в данном направлении. В этой же главе доказан ряд вспомогательных утверждений об аппроксимируемости групп и отделимости в группах.

Основным результатом второй главы является теорема 2.3.1.

Пусть K – любой корневой класс групп, G – свободное произведение групп A,B с объединяемыми нормальными подгруппами $H \triangleleft A, R \triangleleft B$. Если $A, B, A/H, B/R, Aut_G(H) \in K$, то существует гомоморфизм группы G на группу из класса K, инъективный на подгруппах A,B, и, в частности, $G - K$-аппроксимируема. В главе 2 доказан также ряд утверждений об аппроксимируемости групп корневыми классами, замкнутыми относительно факторгрупп. Приведем некоторые из них. В частности, в этом случае доказано, что если $A,B \in K$, то критерием K-аппроксимируемости группы G является только одно условие $Aut_G(H) \in K$ из всех условий, указанных в теореме 2.3.1. Если же A,B K-аппроксимируемы и объединяемые подгруппы $H < A, R < B$ нормальны, то вопрос о K-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения групп A,B удается полностью разрешить, если выполняется хотя бы одно из условий: $|H| < \infty, |Aut_G(H)| < \infty, Aut_G(H) -$ абелева, $Aut_G(H) = Aut_A(H)$.

В главе 3 рассматриваются вопросы K-аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений групп при условии, что объединяемая группа является ретрактом хотя бы в одном из сомножителей.

Пусть $K -$любой корневой класс и $G -$ свободное произведение групп $A,B,$ с объединяемыми подгруппами $H < A, R < B.$ Тогда для K-аппроксимируемости группы G достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий:

1) $B-K$-аппроксимируема, R – ретракт в B и $A\in K$;
2) $A,B-K$-аппроксимируемы, R – ретракт в B, $H-K$-отделима в A и A – квазирегулярна по H;
3) $B-K$-аппроксимируема, R – ретракт в B, $H\lhd A$, $A/H\in K$;
4) $A,B-K$-аппроксимируемы, R – ретракт в B, $H-K$-отделима в A и A – конечно порожденная нильпотентная группа;
5) A,B – аппроксимируемы группами без кручения из K, R – ретракт, H,R имеют конечный ранг Гирша-Зайцева.

В главе 3 рассматривается также вопрос о K-аппроксимируемости свободного произведения G любого семейства групп $G_\lambda,\lambda\in\Lambda$, с одной объединенной подгруппой $H_\lambda<G_\lambda$. Доказано, что если для любого $\lambda\in\Lambda$ группа $G_\lambda-K$-аппроксимируема и H_λ – ретракт в G_λ, то объединенная подгруппа является ретрактом в G и $G-K$-аппроксимируема.

Глава 4 посвящена нахождению условий аппроксимирования HNN-расширения G группы B с использованием подгруппы $H<B$ и автоморфизма $\varphi:H\to H$ корневым классом K. Основным результатом здесь является теорема 4.3.1. Если $H\lhd B$ и B, B/H, $\mathrm{Aut}_G(H)\in K$, то группа G K-аппроксимируема.

Глава 4 содержит также большое число результатов в случае, когда корневой класс K замкнут относительно факторгрупп и $H\lhd B$. В этом случае при различных ограничениях на K,B,H,φ получены либо достаточные условия, либо критерии K-аппроксимируемости группы G. Для примера приведем один из результатов такого типа, содержащийся в следствии 4.4.5.

Пусть K состоит из периодических групп, $H-K$-аппроксимируема, $B/H\in K$ и $Aut_G(H)=<\varphi>$ – конечная группа. Тогда $G-K$-аппроксимируема в том и только том случае, когда $<\varphi>\in K$.

Заметим, что для получения результатов об аппроксимируемости групп корневыми классами, автором доказан ряд вспомогательных утверждений о свойствах свободных конструкций групп, многие из этих результатов представляют и самостоятельный интерес для теории групп.

В целом, полученные в рассматриваемой работе результаты являются существенным вкладом в актуальное и активно развиваемое направление комбинаторной теории групп. Некоторые из результатов работы являются нетривиальными обобщениями известных результатов других авторов.

Полученные результаты и методы их получения могут найти применение в дальнейших исследованиях групп. В частности, можно отметить, что аппроксимационные результаты могут использоваться при решении некоторых алгоритмических проблем в соответствующих классах групп.

Работа хорошо оформлена, приведенные в ней утверждения снабжены подробными доказательствами и достаточно полно отражены в автореферате.

Результаты работы опубликованы в 15 статьях или тезисах докладов на конференциях, основные результаты содержатся в двух статьях, опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК Минобрнауки России.

Работа удовлетворяет требованиям правительственного «Положения о присуждении ученых степеней» и автор работы – Туманова Елена Александровна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент - доктор ф.-м. наук,
Профессор, академик-секретарь Академии
криптографии Российской Федерации
(Глухов М. М.)
Адрес АК РФ: 121552, ул. Ярцевская, 30, Москва,
тел, 8-4991499055, E-mail: akrf@rambler.ru

Личную подпись Глухова М.М заверяю –
Управляющий делами аппарата Президиума
Академии криптографии Российской Федерации -
А.А. Тюкин.
7.12.14