

## ОТЗЫВ

на автореферат диссертации Никольской Ольги Владимировны  
«*Об алгебраических циклах на расслоенном произведении  
семейств КЗ поверхностей*»,  
представленной на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук.  
по специальности 01.01.06 –  
математическая логика, алгебра и теория чисел.

Тема диссертации актуальна, так как гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика (типа Лефшеца), находятся в центре внимания современной алгебраической геометрии.

Гипотеза Ходжа утверждает, что рациональные классы когомологий, представленные гармоническими формами типа  $(p, p)$  на гладком проективном комплексном многообразии, являются алгебраическими (другими словами, они являются линейными комбинациями с коэффициентами в поле рациональных чисел классов когомологий замкнутых алгебраических подмногообразий коразмерности  $p$ ). Стандартная гипотеза Гротендика (типа Лефшеца) утверждает, что изоморфизм, обратный к изоморфизму сильной теоремы Лефшеца, определяется алгебраическим соответствием (эта гипотеза влечет такие важные для геометрии следствия, как совпадение численной эквивалентности алгебраических циклов с гомологической, а также алгебраичность компонент Кюннета класса диагонали).

К настоящему времени стандартная гипотеза известна для всех кривых, поверхностей и абелевых многообразий, для всех трехмерных многообразий неосновного типа, для некоторых 4-мерных эллиптических многообразий и компактификации минимальной модели Нерона трехмерного абелева многообразия над 1-мерным функциональным полем, обладающего плохими редукциями мультипликативного типа, а также для точечной схемы Гильберта КЗ-поверхности, классифицирующей конечные замкнутые подсхемы фиксированной длины.

Автором предложен новый подход к доказательству гипотез об алгебраических циклах на 5-мерном многообразии, которое является бирациональной гладкой моделью расслоенного произведения двух неизотривиальных семейств КЗ-поверхностей над гладкой проективной кривой. Слои семейств могут вырождаться, так что расслоенное произведение не обязательно является гладким. Неизотривиальность семейств означает, что их гладкие части не являются потенциально постоянными семействами КЗ-поверхностей. В этом случае из результатов Ю.Г. Зархина следует, что после выбора из базы некоторого счетного множества точек ранг группы Нерона–Севери слоя семейства становится постоянным.

Далее автор предполагает, что ранг группы Нерона–Севери (равный рангу группы Пикара) общего геометрического слоя первого

семейства является нечетным числом, отличным от соответствующего ранга для второго семейства. Если локусы вырождений семейств на базе не пересекаются, то расслоенное произведение не имеет особенностей и для него верна гипотеза Ходжа. Если вырождения отсутствуют, причем ранг решетки трансцендентных циклов общего геометрического слоя каждого семейства является простым нечетным числом и эти два простых числа не совпадают, то для расслоенного произведения верна стандартная гипотеза Гротендика. Доказательства этих результатов составляют содержание второй главы диссертации (в первой главе сформулированы предварительные сведения, необходимые для понимания основного текста).

В третьей главе диссертации рассматриваются различные обобщения результатов второй главы, в основном относящиеся к гипотезе Ходжа.

Методы доказательств базируются на исследовании представлений полупростых алгебр Ли в рациональных когомологиях слоя гладкого семейства, с использованием фундаментальных результатов Ю.Г. Зархина о структуре так называемой группы Ходжа КЗ-поверхности. Известно, что группа Ходжа действует тривиально на алгебраической части 2-мерных рациональных когомологий КЗ-поверхности (т.е. на классах алгебраических кривых, лежащих на данной КЗ-поверхности) и действует неприводимо на трансцендентной части. Предположения автора о рангах групп Нерона–Севери позволяют в рассматриваемых случаях явно вычислить группу Ходжа общего геометрического слоя, что в конечном итоге сводит задачу о доказательстве гипотез к вычислениям в теории алгебр Ли и их представлений.

Полученные в диссертации результаты являются новыми, а методы являются весьма перспективными в изучении многомерных многообразий, особенно если рассматриваемые многообразия расслоены на КЗ-поверхности. Важной задачей остается распространение техники доказательства стандартной гипотезы на случай, когда оба семейства КЗ-поверхностей вырождаются над одной и той же точкой кривой. Но эта трудная задача выходит за рамки данной диссертации.

В качестве замечания необходимо отметить следующее: в автореферате и диссертации следовало бы привести список известных примеров, когда доказана гипотеза Ходжа (хотя это увело бы в сторону абелевых многообразий, которые фактически не используются в диссертации). Насколько я понимаю, для других типов алгебраических многообразий гипотеза Ходжа остается труднейшей задачей. Это замечание не умаляет достоинств автореферата.

Данная работа является законченной и выполнена автором самостоятельно на высоком научном уровне. Все основные результаты

опубликованы в центральных математических журналах: Известия РАН. Серия математическая, Математический сборник и Математические заметки, а также докладывались на международных конференциях.

Автореферат адекватно отражает содержание диссертации.

Полученные автором результаты достоверны, выводы и заключения обоснованы.

Исходя из представленных в автореферате сведений можно заключить, что диссертация О.В. Никольской написана на высоком научном уровне, соответствует требованиям ВАК Минобрнауки России, и соискатель Никольская Ольга Владимировна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

27 ноября 2014 г.



Прохоров Юрий Геннадьевич,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, ведущий научный сотрудник  
отдела алгебраической геометрии  
Математического института имени  
В.А. Стеклова РАН;  
шифр специальности 01.01.06



Подпись Прохорова Ю.Г. заверяю  
начальник отдела кадров  
МИРАН им. В.А.Стеклова  
Высоцкая В.И.

119991, Москва, ул. Губкина, 8  
<http://www.mi.ras.ru/~prokhorov/>