

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. П. Г. ДЕМИДОВА

На правах рукописи

Кащенко Александра Андреевна

**УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО КЛАССА АВТОМОДЕЛЬНЫХ
РЕШЕНИЙ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ**

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор
Глызин Сергей Дмитриевич

Ярославль 2015

Оглавление

Введение	4
1 Существование и устойчивость автомоделных циклов в сингулярно возмущенных уравнениях Гинзбурга-Ландау и Стюарта-Ландау	12
1.1 Существование и устойчивость бегущих волн в уравнении Гинзбурга-Ландау с малой диффузией	13
1.1.1 Постановка задачи	13
1.1.2 Устойчивость бегущих волн	13
1.1.3 Сводка основных результатов параграфа 1.1	18
1.2 Существование и устойчивость простейших периодических решений в уравнении Стюарта-Ландау с большим запаздыванием	18
1.2.1 Постановка задачи	18
1.2.2 Существование простейших периодических решений	19
1.2.3 Устойчивость простейших периодических решений	24
1.2.4 Расположение областей устойчивости на эллипсе $L(c, \gamma, \varphi)$	34
1.2.5 Сводка основных результатов параграфа 1.2	40
Выводы	41
2 Существование и устойчивость непрерывных волн в моделях лазерной динамики	42
2.1 Существование и устойчивость непрерывных волн в модели FDML лазера с большим запаздыванием	42
2.1.1 Постановка задачи	42
2.1.2 Существование решений вида непрерывных волн	43
2.1.3 Устойчивость непрерывных волн	44
2.1.4 Расположение областей устойчивости на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$	53
2.1.5 Сводка основных результатов параграфа 2.1	63
2.2 Существование и устойчивость непрерывных волн в модели полупроводникового лазера с большим запаздыванием	64

2.2.1	Постановка задачи	64
2.2.2	Существование решений вида непрерывных волн	64
2.2.3	Устойчивость непрерывных волн	68
2.2.4	Расположение областей устойчивости на кривой $I(v, 0, q, \gamma)$.	77
2.2.5	Сводка основных результатов параграфа 2.2	81
	Выводы	82
	Заключение	83
	Литература	85

Введение

Актуальность

Во многих физических явлениях и процессах естественным образом может быть выделен малый или большой параметр, в связи с чем математические модели этих явлений и процессов могут оказаться сингулярно возмущенными динамическими системами. Исследование динамики уравнений такого типа очевидным образом представляет большой интерес. Автомодельные циклы являются важным классом решений, поскольку с одной стороны они имеют достаточно простой вид, что позволяет получить содержательные результаты об их существовании и устойчивости, с другой стороны они являются решениями общего вида, что позволяет ответить на ряд вопросов о динамике уравнений. Более того, решения в виде автомодельных циклов вполне адекватно описывают некоторые волновые процессы. Модели, рассмотренные в данной работе, применяются в задачах оптоэлектроники [60, 64, 74, 79], популяционной динамики [30, 46], при описании групповых свойств волновых пакетов различной природы [32, 36, 41], турбулентных процессов, а также в теории сверхпроводимости и теории сверхтекучести [36, 38, 39, 56, 59, 65, 68]. Более того, уравнения Гинзбурга-Ландау и Стюарта-Ландау являются базовыми моделями для широкого класса моделей с распределенными параметрами и уравнений с запаздыванием [1, 4, 10, 12, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 31, 33, 41], поэтому при выполнении ряда условий их устойчивым решениям могут быть сопоставлены устойчивые решения исходных достаточно сложных задач.

Объект исследования

В данной работе изучаются существование, асимптотика и устойчивость определенного вида решений сингулярно возмущенных уравнений с распределенными параметрами. Эти уравнения разбиты на два класса: параболические уравнения с малой диффузией (представителем является уравнение Гинзбурга-Ландау) и уравнения с большим запаздыванием (представителями являются уравнение Стюарта-Ландау, модель FDML лазера и система уравнений Лэнга-Кобаяши). Все рассматриваемые модели являются сингулярно возмущенными. В уравнении Гинзбурга-Ландау сингулярность связана с тем, что коэффициент диффузии является достаточно малым. Тем самым в вырожденном случае — при нулевом ко-

эффиценте диффузии — меняется тип уравнения: от параболического уравнения приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению. В моделях с последствием сингулярность обусловлена наличием большого запаздывания. При нормировке времени запаздывание можно сделать равным единице, но возникает малый множитель при производных. И здесь при рассмотрении вырожденной задачи меняется тип уравнения: от уравнения с запаздыванием приходим к разностному уравнению. Можно еще привести важный аргумент, объединяющий все рассмотренные в диссертации задачи. Пространственную переменную в уравнении Гинзбурга–Ландау можно пронормировать так, чтобы вещественная часть коэффициента диффузии стала равна единице. Тогда 2π -периодические краевые условия переписутся в периодические краевые условия с асимптотически большим значением периода, то есть в этом смысле имеем задачу с большой областью определения. Уравнения с большим запаздыванием тоже можно характеризовать как задачу с асимптотически большой областью определения (равной значению запаздывания). Общим объектом изучения для всех этих моделей являются *автономные циклы*, то есть решения вида

$$R(x) \exp(i\Lambda t),$$

где $R(x) = R \exp(ikx)$ для уравнения в частных производных, $R(x) \equiv R$ для уравнений с запаздыванием, R — положительная константа, Λ — действительное число, k — целое число.

Остановимся подробнее на моделях, изучаемых в данной работе.

Уравнение Гинзбурга–Ландау

Уравнение Гинзбурга–Ландау возникает при описании большого класса нелинейных волновых явлений в пространственно распределенных системах [1, 5, 32, 36, 38, 39, 56–59, 65, 66, 68] и является модельным для широкого класса уравнений реакция-диффузия [77]. Оно имеет вид [5, 66]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1 - (1 + ib)|u|^2)u + (1 + id) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Здесь $u(t, x)$ — комплексная функция, обычно понимаемая как амплитуда или огибающая, действительные параметры b и d характеризуют линейную и нелинейную дисперсию.

Следует отметить, что уравнение Гинзбурга–Ландау возникает при исследовании локальной динамики широкого класса уравнений с запаздыванием [4, 10, 12, 24, 25, 29, 31] и появляется из краевой задачи реакция-диффузия при значениях параметров, близких к критическим, в задаче устойчивости пространственно однородного режима. Численное и частично аналитическое исследование таких задач дано в статьях [7–9, 11, 13]. Динамика уравнения Гинзбурга–Ландау изучалась

в работах [7, 8, 27, 28]. В статье [10] численными методами найдено большое число сосуществующих устойчивых пространственно неоднородных режимов в модели, близкой к уравнению Гинзбурга-Ландау.

В параграфе 1.1 изучено уравнение Гинзбурга-Ландау с малой диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1 - (1 + ib)|u|^2)u + \varepsilon^2(1 + id)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(положительный параметр ε является достаточно малой величиной $\varepsilon \ll 1$) и периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x).$$

Для данной краевой задачи показано сосуществование асимптотически большого числа устойчивых *бегущих волн*, то есть решений вида $u = R_k \exp(i(\omega_k t + kx))$, где R_k, ω_k , — действительные константы, $R_k > 0$, k — номер бегущей волны.

Уравнение Стюарта-Ландау

Уравнение Стюарта-Ландау с запаздыванием имеет вид

$$\dot{u} = (1 - (1 - ic)|u|^2)u + \gamma e^{i\varphi}(u(t - T) - u). \quad (2)$$

Здесь все параметры действительные, величины γ и T принимают положительные значения.

Это уравнение моделирует простейший осциллятор с запаздывающей обратной связью [3, 37, 43, 44]. В частности, в этих статьях на примере данной модели изучалось управление устойчивостью периодических орбит уравнения

$$\dot{u} = (1 - (1 - ic)|u|^2)u$$

с помощью добавления в уравнение линейной обратной связи $\gamma e^{i\varphi}(u(t - T) - u)$ с величиной запаздывания T , пропорциональной величине периода решения. В статье [22] показано, что уравнение Стюарта-Ландау может возникать при анализе локальной динамики дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями. Динамика уравнения (2) в случае большого значения γ и $\varphi = 0$ изучалась в работе [21]. Локальная динамика в окрестности автомодельного цикла исследовалась в работе [6]. Влияние величины запаздывания на поведение решений изучалось в работах [69, 70]. Также ряд численных результатов о динамике уравнения Стюарта-Ландау был получен в статьях [67, 81, 83].

В параграфе 1.2 изучено уравнение (2) в предположении, что величина запаздывания является достаточно большой ($T \gg 1$). Для данной модели найдены условия существования семейства простейших периодических решений, то есть

решений вида $u = R \exp(i\Lambda t)$, где R и Λ — действительные константы и $R > 0$. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости данных решений. В плоскости параметров выделены области устойчивости и неустойчивости.

Модель FDML лазера

В работе [74] Владимиром А. Г. с соавторами для описания лазера с „синхронизацией мод в частотном диапазоне“ (в англоязычной литературе принята аббревиатура FDML, что означает Fourier Domain Mode Locking [50, 52, 53]) предложена система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{A} + A - i\Delta(t)A &= \sqrt{\kappa}e^{(1-i\alpha)G(t-T)/2}A(t-T), \\ \dot{G} &= \gamma(g_0 - G - (e^G - 1)|A|^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $A(t)$ — амплитуда электрического поля на входе в полупроводниковый оптический усилитель, а концентрация носителей заряда моделируется с помощью насыщающегося усиления $G(t)$. Отстройку центральной частоты спектрального фильтра от центра линии усиления активной среды определяет $\Delta(t)$, κ — коэффициент ослабления, описывающий линейные нерезонансные потери за обход резонатора, α — фактор уширения спектральной линии лазера, g_0 — параметр линейного ненасыщенного поглощения, γ — безразмерная скорость релаксации усиления в полупроводниковом оптическом усилителе. Безразмерное время запаздывания предполагается достаточно большим $T \gg 1$. Другие лазерные модели с захватом мод описаны в работах [52, 53, 78–80]. В работе [74] описана экспериментальная установка FDML лазера, предложена математическая модель данной установки в виде системы (3), показана хорошая согласованность экспериментальных и теоретических результатов.

В параграфе 2.1 настоящей работы рассмотрена предложенная А. Г. Владимиром более простая модель лазера с „синхронизацией мод в частотном диапазоне“ в случае независимой от времени отстройки центральной частоты спектрального фильтра. Данная модель получена из (3) заменой $e^G - 1$ на G :

$$\begin{aligned} \dot{A} + A - i\Delta A &= \sqrt{\kappa}e^{(1-i\alpha)G(t-T)/2}A(t-T), \\ \dot{G} &= \gamma(g_0 - G - G|A|^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Ключевым предположением данного параграфа является то, что время обхода резонатора T достаточно большое ($T \gg 1$). Для модели (4) найдены условия существования семейства *непрерывных волн*, то есть решений вида $A = R \exp(i\Lambda t)$, $G = G_0$, где R и G_0 — положительные константы, а Λ — действительное число. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости автомодельных циклов для уравнения, получаемого из модели (4). В плоскости параметров выделены области устойчивости и неустойчивости.

Модель Лэнга-Кобаяши

В работе [60] Лэнгом и Кобаяши предложена следующая модель лазера

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{1}{2}v(1 + i\alpha)(y - 1)E + \gamma \exp(i\varphi)E(t - T), \\ \dot{y} &= q - y - y|E|^2.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь $E(t)$ — комплексная амплитуда поля, $y(t)$ — инверсия носителей, v — скорость затухания фотонов в резонаторе, q — скорость накачки, α — коэффициент уширения линии, ответственный за нелинейное взаимодействие между амплитудой и фазой поля, T — время прохода по внешнему резонатору, $\varphi = T\omega_0$, ω_0 — частота генерации уединенного лазера (без внешней обратной связи), γ_0 — коэффициент обратной связи, пропорциональный коэффициенту отражения излучения от внешнего зеркала.

Эта система давно уже стала классической и является одной из основных при описании динамики полупроводниковых лазеров [14, 42, 45, 47–49, 51, 61–64, 71–73, 75, 76, 84]. Во многих работах исследовалась динамика решений модели Лэнга-Кобаяши для фиксированных значений параметра запаздывания. В частности, были обнаружены различные сценарии перехода к хаосу [45, 64, 71–73, 76, 84], аналитически описан тип решений, соответствующий режиму биений двух мод внешнего резонатора [42, 75], доказано, что по крайней мере одна мода (с максимальной интенсивностью) всегда остается устойчивой [61], построены континуальные семейства уравнений, играющих роль нормальных форм, в окрестности бифуркационных значений параметров [14], найден численный пример сосуществования более десяти аттракторов (циклов и торов) [63].

В параграфе 2.2 рассмотрена модель (5) в предположении, что время запаздывания T является достаточно большим ($T \gg 1$). Получены условия существования семейства *непрерывных волн*, то есть решений вида $E = R \exp(i\Lambda t)$, $y = Y$, где R и Y — положительные константы, а Λ — действительное число. Найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости автомодельных циклов уравнения, получающегося из данной модели. В плоскости параметров выделены области устойчивости и неустойчивости.

Цели и задачи

Целью диссертационной работы является изучение вопросов существования, построение асимптотики и исследование устойчивости автомодельных циклов для ряда актуальных математических моделей, описывающих большой класс нелинейных волновых явлений в пространственно распределенных системах. Рассматривались такие модели, как уравнение Гинзбурга-Ландау, уравнение Стюарта-Ландау, модель FDML лазера, система уравнений Лэнга-Кобаяши.

Для каждой из этих моделей были выделены следующие задачи:

1. Нахождение условий существования семейств автомодельных циклов. Построение асимптотики решений.

2. Получение достаточных условий устойчивости и неустойчивости отдельных решений для произвольных значений параметров.

3. Выделение областей устойчивости на множествах, задающих условие существования решений.

Научная новизна проявляется в следующем.

1. Описаны однопараметрические семейства бегущих волн и найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости решений данного вида в уравнении Гинзбурга-Ландау с малой диффузией и периодическими краевыми условиями. Показано, что может сосуществовать асимптотически большое число устойчивых бегущих волн.

2. При исследовании задачи существования автомодельных решений для уравнений с запаздыванием выяснилось, что изучаемые решения разрывно зависят от бифуркационного параметра. В асимптотику по малому параметру входят коэффициенты, зависящие от фазового сдвига, который при уменьшении параметра бесконечно много раз изменяется на промежутке $[0, 2\pi]$. Данный вид решений позволяет описать семейство из асимптотически большого числа сосуществующих автомодельных решений. На двумерной плоскости построены специальные кривые, определяющие условие существования решений искомого вида.

3. Изучена устойчивость автомодельных циклов для уравнений с большим запаздыванием. Найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости данных решений. На построенных кривых выделены области устойчивости. Показано, что характерным является свойство гипермультистабильности (то есть сосуществования сколь угодно большого конечного числа устойчивых решений при стремлении малого параметра к нулю).

На защиту диссертационной работы выносятся следующие **основные положения и результаты**:

1. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости специальных семейств бегущих волн в уравнении Гинзбурга-Ландау с малой диффузией и периодическими краевыми условиями.

2. Для уравнения Стюарта-Ландау с большим запаздыванием в области параметров построены специальные кривые, задающие условия существования семейства простейших периодических решений. На этих кривых выделены области устойчивости и неустойчивости. Найдено асимптотическое приближение данных решений. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости простейших периодических решений.

3. Сформулирована и доказана теорема существования семейства непрерывных

волн для модели лазера с „синхронизацией мод в частотном диапазоне“ с большим временем обхода резонатора. Найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости автомодельных циклов уравнения, получающегося из данной модели.

4. Найдены условия существования семейства непрерывных волн для модели полупроводникового лазера с большим временем обхода резонатора. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости автомодельных циклов уравнения, получающегося из данной модели.

5. Показано, что во всех изучаемых моделях может встречаться явление гипермультистабильности.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация в своей основе носит теоретический характер, но для ряда предложенных в ней моделей, например, уравнения Гинзбурга-Ландау, модели FDM-лазера, системы Лэнга-Кобаяши, результаты имеют важное прикладное значение. Построенные в работе семейства решений позволяют использовать их свойства при анализе широкого класса динамических систем из различных приложений. Изложенная в диссертации схема исследования расположения корней характеристических квазиполиномов может быть использована для решения других прикладных задач. Результаты, относящиеся к моделям лазерной динамики, могут применяться для исследования различных режимов работы оптоэлектронных систем.

Методы исследования

В представленной работе используются в основном аналитические методы. В некоторых случаях применяются численно-аналитические методы. Среди аналитических методов ключевое значение имеют методы малого параметра, метод асимптотических разложений.

Апробация результатов

Результаты, изложенные в тексте диссертации, докладывались на следующих конференциях и семинарах: всероссийская конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Самара, 2011 г.), XVI международная конференция-школа «Foundations and Advances in Nonlinear Science» (Минск, 2012 г.), международная студенческая конференция «Science and Progress» (Санкт-Петербург, 2012 г.), международная конференция «Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors», посвященная памяти Л.П. Шильникова (Нижний Новгород, 2013 г.), международная молодежная научно-практическая конференция «Путь в науку» (Ярославль, 2013 г.), международная студенческая конференция «Science and Progress» (Санкт-Петербург, 2013 г.), международная конференция «Нелинейная динамика и ее приложения», посвященная 150-летию со дня рождения Поля Пенлеве (Ярославль,

2013 г.), X международная школа-конференция «Хаотические автоколебания и образование структур» (Саратов, 2013 г.), международная конференция «Нелинейные явления в задачах современной математики и физики», посвященная 210-летию Демидовского университета (Ярославль, 2013 г.), международный научный семинар «Актуальные проблемы математической физики» (Москва, 2014 г.), научная сессия НИЯУ МИФИ-2015 (Москва, 2015 г.), международный семинар «Nonlinear Photonics: Theory, Materials, Applications» (Санкт-Петербург, 2015 г.).

По теме диссертации опубликовано 20 работ, в том числе 6 статей в журналах из списка ВАК [16–19, 54, 55].

Глава 1

Существование и устойчивость автомодельных циклов в сингулярно возмущенных уравнениях Гинзбурга-Ландау и Стюарта-Ландау

В этой главе будут рассмотрены вопросы существования и устойчивости автомодельных циклов для двух распределенных моделей, получающихся из одного и того же дифференциального уравнения

$$\dot{u} = (1 - (1 + ib)|u|^2)u.$$

В первом случае u зависит еще и от пространственной переменной x , по ней выполнены условия периодичности

$$u(t, x) \equiv u(t, x + 2\pi).$$

К правой части уравнения добавляется слагаемое $\varepsilon^2(1 + id)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, в результате чего получается распределенное по пространству уравнение. Ключевым предположением является то, что параметр $\varepsilon > 0$ достаточно малый ($\varepsilon \ll 1$), поэтому полученное уравнение сингулярно возмущенное. Во втором случае рассматривается распределение по времени, которое представлено в виде слагаемого $\gamma e^{i\varphi}(u(t-T) - u)$. Здесь предполагается, что величина запаздывания $T > 0$ является достаточно большой ($T \gg 1$). В параграфе 1.1 будут изучены вопросы существования и устойчивости бегущих волн в уравнении с частными производными с малым множителем при старшей производной, а в параграфе 1.2 будут рассмотрены вопросы существования и устойчивости простейших периодических решений в уравнении с большим запаздыванием.

1.1 Существование и устойчивость бегущих волн в уравнении Гинзбурга-Ландау с малой диффузией

1.1.1 Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Гинзбурга-Ландау с малой диффузией

$$\dot{u} = (1 - (1 + ib)|u|^2)u + \varepsilon^2(1 + id)u'' \quad (1)$$

и периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (2)$$

Здесь u — комплекснозначная функция, ε — малый положительный параметр, точкой обозначена производная по t , а штрихом — по x . Непосредственной проверкой легко убедиться, что краевая задача (1), (2) при $\varepsilon^2 k^2 < 1$ имеет набор решений вида бегущих волн: $u_k = \rho_k e^{i\omega_k t + ikx}$, где

$$\rho_k = \sqrt{1 - \varepsilon^2 k^2}, \quad \omega_k = -b(1 - \varepsilon^2 k^2) - \varepsilon^2 dk^2,$$

k — целое. Поставим задачу исследования устойчивости бегущих волн при достаточно малых значениях параметра ε в фазовом пространстве $W_2^2(0, 2\pi)$ [15, 40].

1.1.2 Устойчивость бегущих волн

Построение семейства характеристических многочленов

Хорошо известно, что для параболических уравнений работает теорема Ляпунова об устойчивости решений по первому приближению [15, 34], поэтому будем исследовать линеаризованную на бегущей волне краевую задачу.

Для удобства изучения устойчивости найденных решений, в уравнении (1) сделаем замену $u = u_k(1 + v)$, где $v = v_1 + iv_2$. После сокращения на u_k получим краевую задачу на v_1 и v_2 :

$$\begin{aligned} i\omega_k(1 + v_1 + iv_2) + \dot{v}_1 + i\dot{v}_2 &= (1 + v_1 + iv_2)[1 - (1 + ib)\rho_k^2(1 + 2v_1 + \\ &+ v_1^2 + v_2^2)] + \varepsilon^2(1 + id)[-k^2(1 + v_1 + iv_2) + 2ik(v_1' + iv_2') + v_1'' + iv_2''], \quad (3) \\ v_1(t, x + 2\pi) &\equiv v_1(t, x), \quad v_2(t, x + 2\pi) \equiv v_2(t, x). \end{aligned}$$

Устойчивость u_k в системе (1), (2) эквивалентна устойчивости нулевого решения в задаче (3). Для изучения устойчивости нулевого решения краевой задачи (3), линеаризуем ее в окрестности нуля. Выделив действительную и мнимую части, получим задачу

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -2(1 - \varepsilon^2 k^2)v_1 - 2\varepsilon^2 dkv_1' + \varepsilon^2 v_1'' - 2\varepsilon^2 kv_2' - \varepsilon^2 dv_2'', \\ \dot{v}_2 &= -2b(1 - \varepsilon^2 k^2)v_1 + 2\varepsilon^2 kv_1' + \varepsilon^2 dv_1'' - 2\varepsilon^2 dkv_2' + \varepsilon^2 v_2'', \quad (4) \\ v_1(t, x + 2\pi) &\equiv v_1(t, x), \quad v_2(t, x + 2\pi) \equiv v_2(t, x). \end{aligned}$$

Благодаря выполненной замене получившаяся система (4) автономна. Поэтому будем искать решения системы (4) в виде решений Эйлера $v_1(t, x) = e^{\lambda t} v_{10}(x)$, $v_2(t, x) = e^{\lambda t} v_{20}(x)$. Так как v_{10} и v_{20} являются 2π -периодическими и дважды дифференцируемыми функциями, то они представимы в виде сходящихся к ним рядов Фурье: $v_{10} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{inx}$, $v_{20} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n e^{inx}$.

Таким образом, для каждого целого n получим характеристическое уравнение на собственное значение $\lambda = \lambda(n)$ и на собственный вектор с компонентами $(p_n, q_n)^T$:

$$A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -2\varepsilon^2 dkin - \varepsilon^2 n^2 - 2(1 - \varepsilon^2 k^2) & -2\varepsilon^2 kin + \varepsilon^2 dn^2 \\ +2\varepsilon^2 kin - \varepsilon^2 dn^2 - 2b(1 - \varepsilon^2 k^2) & -2\varepsilon^2 dkin - \varepsilon^2 n^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем счетное семейство характеристических полиномов (при каждом целом n имеем характеристический полином):

$$\lambda^2 + 2\lambda(2\varepsilon^2 dkin + \varepsilon^2 n^2 + 1 - \varepsilon^2 k^2) + (d^2 + 1)\varepsilon^2 n^2(\varepsilon^2 n^2 - 4\varepsilon^2 k^2) + 2(1 - \varepsilon^2 k^2)((bd + 1)\varepsilon^2 n^2 + 2(d - b)\varepsilon^2 kni) = 0. \quad (5)$$

В силу того, что мы изучаем устойчивость периодических решений системы (1), (2), уравнение (5) имеет корень $\lambda = 0$ при $n = 0$. Поэтому речь пойдет об экспоненциальной орбитальной устойчивости.

Для каждого номера волны k будем исследовать расположение корней уравнения (5) при всех целых ненулевых значениях n . Если окажется, что при всех ненулевых n все корни характеристического уравнения (5) лежат в левой полуплоскости, то это будет означать устойчивость k -ой волны, если же при каком-нибудь целом n найдется корень уравнения (5) в правой полуплоскости, то k -ая волна неустойчива.

Изучение расположения корней семейства характеристических уравнений

Получение достаточных условий неустойчивости

Рассмотрим случай асимптотически больших номеров волн. Сделаем замену $z = \varepsilon k$, тогда в силу действительности ρ_k имеем $z \in (-1, 1)$. Пусть z — произвольное фиксированное число из интервала $(-1, 1)$, тогда уравнение (5) принимает вид

$$\lambda^2 + 2\lambda[2\varepsilon dinz + 1 - z^2 + \varepsilon^2 n^2] + 2(1 - z^2)[(bd + 1)\varepsilon^2 n^2 + 2(d - b)\varepsilon niz] + (d^2 + 1)\varepsilon^2 n^2(\varepsilon^2 n^2 - 4z^2) = 0. \quad (6)$$

Корни уравнения (6) зависят от ε регулярно. Исследуем их расположение. При $\varepsilon = 0$ и любом n есть корень $\lambda = 0$, поэтому при ненулевых ε разложим корень $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ ($\lambda(0) = 0$) по степеням ε : $\lambda = \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + O(\varepsilon^3)$, где λ_1 и λ_2 — комплексные числа.

Приравняем коэффициенты уравнения (6) при одинаковых степенях ε . Из выражения при ε^1 найдем значение λ_1 :

$$\lambda_1 = 2(b-d)niz. \quad (7)$$

Пользуясь (7), из выражения при ε^2 найдем действительную часть λ_2 :

$$\operatorname{Re} \lambda_2 = -(bd+1)n^2 + \frac{2z^2(b^2+1)n^2}{1-z^2}.$$

При условии $bd+1 < 0$ при любом z из интервала $(-1, 1)$ величина $\operatorname{Re} \lambda_2$ будет положительной. Если же $bd+1 > 0$, то действительная часть λ_2 будет положительной при

$$\sqrt{\frac{bd+1}{2b^2+bd+3}} = z_2 < |z| < 1.$$

Ниже через δ будем обозначать некоторую достаточно малую положительную величину, которая не зависит от параметра ε .

Из приведенных выше построений следует справедливость следующих утверждений.

Теорема 1. Пусть выполнено неравенство $bd+1 < 0$. Фиксируем произвольное значение δ . Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ все бегущие волны u_k с номерами из диапазона $k \in (-\varepsilon^{-1} + \delta, \varepsilon^{-1} - \delta)$ неустойчивы.

Теорема 2. Пусть выполнено неравенство $bd+1 > 0$. Фиксируем произвольное значение δ . Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ все бегущие волны u_k с номерами из диапазона $k \in (-\varepsilon^{-1} + \delta, -z_2\varepsilon^{-1} - \delta) \cup (z_2\varepsilon^{-1} + \delta, \varepsilon^{-1} - \delta)$ неустойчивы.

Получение достаточных условий устойчивости

Везде далее считаем, что $bd+1 > 0$.

В уравнении (5) введем обозначения. Пусть $\varepsilon k = z$, $\varepsilon n = m$. Тогда получим уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda(2dizm + m^2 + 1 - z^2) + (d^2 + 1)m^2(m^2 - 4z^2) + 2(1 - z^2)((bd+1)m^2 + 2(d-b)izm) = 0. \quad (8)$$

В новых терминах нас интересует расположение корней (8) в зависимости от z при каждом ненулевом m . Выше было доказано, что при $|z| > z_2$ наблюдается

неустойчивость, поэтому нас будут интересовать только значения $|z| < z_2$. Будем искать корни уравнения (8) в виде $\lambda = a + ic$, где a и c — действительные величины. Подставляя это соотношение в уравнение (8), получаем:

$$2a + a^2 + 2ic + 2iac - c^2 + 2m^2 + 2am^2 + 2icm^2 + 2bdm^2 + m^4 + d^2m^4 - 4ibmz + 4idmz + 4iadmz - 4cdmz - 2az^2 - 2icz^2 - 6m^2z^2 - 2bdm^2z^2 - 4d^2m^2z^2 + 4ibmz^3 - 4idmz^3 = 0.$$

Выделим действительную и мнимую части уравнения. Действительная часть:

$$2a + a^2 - c^2 + 2m^2 + 2am^2 + 2bdm^2 + m^4 + d^2m^4 - 4cdmz - 2az^2 - 6m^2z^2 - 2bdm^2z^2 - 4d^2m^2z^2 = 0,$$

мнимая:

$$2c + 2ac + 2cm^2 - 4bmz + 4dmz + 4admz - 2cz^2 + 4bmz^3 - 4dmz^3 = 0.$$

Из мнимой части уравнения выразим c через a :

$$-2mz(-b + d + ad + bz^2 - dz^2) = c(1 + a + m^2 - z^2).$$

Заметим, что случай равенства нулю выражения $1 + a + m^2 - z^2$ не интересен, так как $a = -1 + z^2 - m^2 < 0$ при любом m и любом $|z| < 1$. Поэтому считаем, что $1 + a + m^2 - z^2 \neq 0$. Тогда подставив выражение для c в действительную часть уравнения (8), получим:

$$(1 + a + m^2 - z^2)^{-2}[a^4 + A_3a^3 + A_2a^2 + A_1a + A_0] = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= (1 + d^2)m^8 + (1 - z^2)(5 + 4bd + d^2 - (13 + 12bd + d^2)z^2)m^4 + \\ &+ 2(2 + bd + d^2 - (4 + bd + 3d^2)z^2)m^6 + 2(1 - z^2)^2(1 + bd - (3 + 2b^2 + bd)z^2)m^2, \\ A_1 &= 2(m^2 + 1 - z^2)(1 + 2(2 + bd)m^2 + (2 + d^2)m^4 - 2(1 + 4m^2 + bdm^2)z^2 + z^4), \\ A_2 &= 4(m^2 + 1 - z^2)^2 + 1 + 2(2 + bd)m^2 + (2 + d^2)m^4 - 2(1 + 4m^2 + bdm^2)z^2 + z^4, \\ A_3 &= 4(m^2 + 1 - z^2). \end{aligned}$$

В получившемся уравнении нас интересуют только действительные корни, так как a — действительная часть λ , корня уравнения (8). Заметим, что если при фиксированном z и всех ненулевых значениях m коэффициенты A_i ($i = \overline{0, 3}$) будут положительны, то уравнение (9) не будет иметь неотрицательных корней.

Лемма 1. Пусть $|z| < z_2 = \sqrt{\frac{bd + 1}{2b^2 + bd + 3}}$. Тогда коэффициенты A_1 и A_2 уравнения (9) положительны.

Доказательство. Докажем, что при $|z| < z_2$ выражение

$$1 + 2(2 + bd)m^2 + (2 + d^2)m^4 - 2(1 + 4m^2 + bdm^2)z^2 + z^4 \quad (10)$$

положительно. В результате замены $z^2 = w$ получим квадратный трехчлен относительно w :

$$f(w) = 1 + 2(2 + bd)m^2 + (2 + d^2)m^4 - 2(1 + 4m^2 + bdm^2)w + w^2.$$

Докажем, что при $w < z_2^2$ значения $f(w)$ положительны. Заметим, что значение выражения $f(w)$ в точке $z_2^2 = (bd + 1)/(2b^2 + bd + 3)$ равно Δ , где

$$\Delta = (3 + 2b^2 + bd)^{-2} [2(1 + bd)m^2(2 + 10b^2 + 4b^4 + m^2(3 + 2b^2)(d^2 + 2)) + 4(1 + b^2)^2 + 4m^2(2 + 3b^2 + 2b^4 + b^4d^2) + m^4(2 + d^2)(3 + 8b^2 + 4b^4 + b^2d^2)].$$

В силу предположения $bd + 1 > 0$ значение величины Δ положительно. Графиком функции $f(w)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса вершины данной параболы равна $1 + 4m^2 + bdm^2$, что больше единицы, следовательно, больше z_2^2 . Мы доказали, что у параболы $f(w)$, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины правее z_2^2 , а в точке z_2^2 ордината положительна. Исходя из этого, получаем, что при всех z из интервала $(-z_2, z_2)$ выражение (10) положительно, следовательно, коэффициенты A_1 и A_2 в уравнении (9) положительны. \square

Коэффициент A_3 в уравнении (9) положителен при $|z| < 1$ и любом ненулевом m . Если $|z| < z_{min} = \min\{z_2, z_4, z_6\}$, где z_2 было введено ранее, а

$$z_4 = \sqrt{\frac{5 + 4bd + d^2}{13 + 12bd + d^2}}, \quad z_6 = \sqrt{\frac{2 + bd + d^2}{4 + bd + 3d^2}},$$

то коэффициент A_0 уравнения (9) положителен при любом ненулевом значении m .

Из приведенных выше построений вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнено неравенство $bd + 1 > 0$. Фиксируем произвольное значение δ . Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ все бегущие волны u_k с номерами из диапазона $k \in (-z_{min}\varepsilon^{-1} + \delta, z_{min}\varepsilon^{-1} - \delta)$ устойчивы.

Рассмотрим разности $z_4^2 - z_2^2$ и $z_6^2 - z_2^2$.

$$z_4^2 - z_2^2 = \frac{5 + 4bd + d^2}{13 + 12bd + d^2} - \frac{1 + bd}{3 + 2b^2 + bd} = \frac{2((1 + d^2)(1 + b^2) + 4(1 + bd)b(b - d))}{(3 + 2b^2 + bd)(13 + 12bd + d^2)}$$

$$z_6^2 - z_2^2 = \frac{2 + bd + d^2}{4 + bd + 3d^2} - \frac{1 + bd}{3 + 2b^2 + bd} = \frac{2((1 + d^2)(1 + b^2) + (1 + bd)(b^2 - d^2))}{(3 + 2b^2 + bd)(4 + bd + 3d^2)}$$

Заметим, что при дополнительном условии $|b| \geq |d|$ наименьшим из чисел z_2, z_4, z_6 является z_2 . Как следствие, имеем следующую теорему.

Теорема 4. Пусть выполнены неравенства $bd + 1 > 0$ и $|b| \geq |d|$. Фиксируем произвольное значение δ . Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ бегущая волна u_k устойчива, если $|k| < z_2\varepsilon^{-1} - \delta$, и неустойчива, если $z_2\varepsilon^{-1} + \delta < |k| < \varepsilon^{-1} - \delta$.

1.1.3 Сводка основных результатов параграфа 1.1

Суммируем полученные результаты.

1. При выполнении неравенства $bd + 1 < 0$ неустойчивы все бегущие волны (см. теорему 1).

2. При выполнении системы неравенств $bd + 1 > 0$, $|b| < |d|$ бегущие волны u_k при $|k| < z_{min}\varepsilon^{-1}$ устойчивы, а при $\varepsilon^{-1} > |k| > z_2\varepsilon^{-1}$ неустойчивы (см. теоремы 2 и 3).

3. При выполнении системы неравенств $bd + 1 > 0$, $|b| \geq |d|$ выражение $z_2\varepsilon^{-1}$ является критическим значением, в том смысле, что при $|k| < z_2\varepsilon^{-1}$ наблюдается устойчивость, а при $z_2\varepsilon^{-1} < |k| < \varepsilon^{-1}$ — неустойчивость (см. теорему 4).

4. При условии $bd + 1 > 0$ сосуществуют несколько устойчивых волн. Более того, с уменьшением положительного параметра ε количество сосуществующих устойчивых волн растет. Количество устойчивых бегущих волн имеет порядок $O(\varepsilon^{-1})$ (см. теоремы 3 и 4).

1.2 Существование и устойчивость простейших периодических решений в уравнении Стюарта-Ландау с большим запаздыванием

1.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Стюарта-Ландау:

$$\dot{u} = (1 + (-1 + ic)|u|^2)u + \gamma e^{i\varphi}(u(t - T) - u).$$

Здесь все параметры действительные, причем γ и T — положительные, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Запаздывание считаем достаточно большим. Пусть $\varepsilon = 1/T$, тогда величина ε положительна и достаточно мала: $0 < \varepsilon \ll 1$. Сделаем замену времени $t \rightarrow Tt$. Тогда уравнение примет вид

$$\varepsilon \dot{u} = (1 + (-1 + ic)|u|^2)u + \gamma e^{i\varphi}(u(t - 1) - u). \quad (11)$$

Поставим задачу изучить существование и устойчивость простейших периодических решений в фазовом пространстве $C[-1, 0]$ [15, 82]. Под простейшими пери-

одическими решениями будем понимать решения уравнения (11) вида

$$u_{R,\Lambda} = R \exp(i\Lambda t), \quad (12)$$

где R, Λ — действительные константы, $R > 0$.

1.2.2 Существование простейших периодических решений

Для формулировки и доказательства результатов о существовании решений (11) вида (12) введем следующие обозначения.

Пусть $L(c, \gamma, \varphi)$ — множество точек (ω, ρ^2) , принадлежащих эллипсу

$$(\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi)^2 + (\omega - c\rho^2 + \gamma \sin \varphi)^2 = \gamma^2 \quad (13)$$

и лежащих в полуплоскости $\rho^2 > 0$. На рисунке 1.1 представлены два типичных вида множества $L(c, \gamma, \varphi)$.

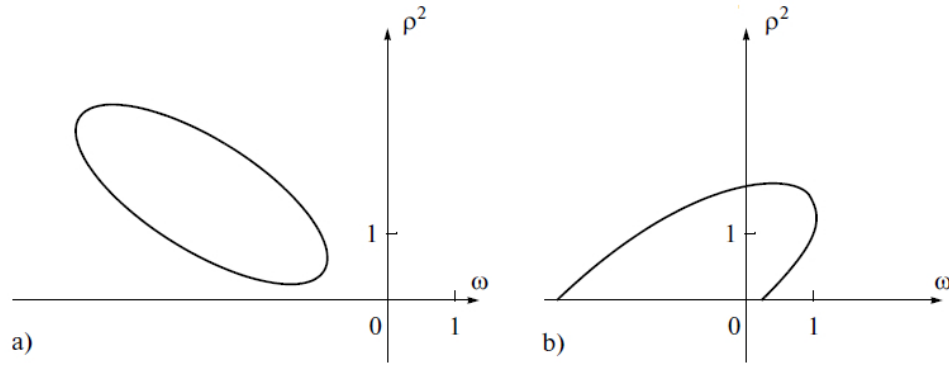


Рис. 1.1: Примеры множеств $L(c, \gamma, \varphi)$. Значения параметров: а) $c = -1, \gamma = 1.3, \varphi = 2$; б) $c = 1, \gamma = 1.5, \varphi = 1$.

Через $\theta = \theta(\omega, \varepsilon)$ обозначим такое значение из полуинтервала $[0, 2\pi)$, для которого величина $\omega/\varepsilon + \theta$ нацело делится на 2π .

Теорема 5. Для каждой точки (ω_0, ρ_0^2) , принадлежащей $L(c, \gamma, \varphi)$, кроме, возможно, двух и для любого целого числа n при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (11) имеет решение в виде цикла (12). Вещественные величины $R = R_n(\varepsilon)$ и $\Lambda = \Lambda_n(\varepsilon)$ таковы, что $R_n(\varepsilon) = \rho_0 + \varepsilon v(\varepsilon)$, $\Lambda_n(\varepsilon) = \omega_0/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d(\varepsilon)$, где значение Ω принадлежит полуинтервалу $[0, 2\pi)$, а функции $v(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$ являются ограниченными при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. Будем искать константы из (12) в виде $R = \rho_0 + \varepsilon v$, $\Lambda = \omega_0/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d$, где $v = v(\varepsilon)$, $d = d(\varepsilon)$ — некоторые действительные функции,

ограниченные при $\varepsilon \rightarrow 0$. Подставляя решение (12) в исходное уравнение (11), получаем равенство

$$i(\omega_0 + \varepsilon\theta + \varepsilon\Omega + \varepsilon 2\pi n + \varepsilon^2 d) = 1 + (-1 + ic)(\rho_0^2 + 2\varepsilon\rho_0 v + \varepsilon^2 v^2) + \gamma e^{i\varphi}(e^{-i(\Omega + \varepsilon d)} - 1). \quad (14)$$

Устремляя в (14) $\varepsilon \rightarrow 0$, находим уравнение для определения параметра Ω :

$$\frac{i\omega_0 - 1 + (1 - ic)\rho_0^2 + \gamma e^{i\varphi}}{\gamma e^{i\varphi}} = e^{-i\Omega}. \quad (15)$$

Приравнявая модули левой и правой части (15), получаем эквивалентное (13) равенство. Таким образом, модуль левой части (15) равен 1, поэтому вещественный параметр $\Omega \in [0, 2\pi)$ однозначно определяется. Найдя значение Ω , из равенства (14) получим уравнение для определения величин $v(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$:

$$\varepsilon i(\theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d) = \varepsilon(-1 + ic)(2\rho_0 v + \varepsilon v^2) + \gamma e^{i\varphi}(e^{-i(\Omega + \varepsilon d)} - e^{-i\Omega}). \quad (16)$$

Представим выражение $e^{-i(\Omega + \varepsilon d)} - e^{-i\Omega}$ в следующем виде:

$$e^{-i(\Omega + \varepsilon d)} - e^{-i\Omega} = e^{-i\Omega} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i\varepsilon d)^k}{k!} - 1 \right) = \varepsilon e^{-i\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-id)^k \varepsilon^{k-1}}{k!}.$$

После сокращения на ε в левой и правой части равенства (16) получим уравнение $F(v, d, \varepsilon, \theta) = 0$, где

$$F(v, d, \varepsilon, \theta) = i(\theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d) + (1 - ic)(2\rho_0 v + \varepsilon v^2) - \gamma e^{i\varphi} e^{-i\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-id)^k \varepsilon^{k-1}}{k!}.$$

Временно будем считать, что величина θ является некоторой постоянной, то есть не зависит от ε . Пусть величина θ равна θ_0 . Рассмотрим уравнение $F(v, d, 0, \theta_0) = 0$. Оно равносильно системе

$$A \begin{pmatrix} v \\ d \end{pmatrix} = g, \quad (17)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -2\rho & \gamma \sin(\varphi - \Omega) \\ 2c\rho & -\gamma \cos(\varphi - \Omega) \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_0 + \Omega + 2\pi n \end{pmatrix}.$$

Пусть $\det A \neq 0$, тогда существует корень (v^*, d^*) уравнения $F(v, d, 0, \theta_0) = 0$. Обозначим за $F'(v^*, d^*, 0, \theta_0)$ величину

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial v} & \frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial d} \\ \frac{\partial \operatorname{Im} F}{\partial v} & \frac{\partial \operatorname{Im} F}{\partial d} \end{array} \right) \Big|_{v=v^*, d=d^*}.$$

Величина $F'(v^*, d^*, 0, \theta_0) = A$ для любого значения θ_0 из $[0, 2\pi]$. Выражение $\det A \neq 0$ равномерно по θ из $[0, 2\pi]$. Отсюда и из теоремы о неявной функции получаем, что из условия $\det A \neq 0$ следует, что $v(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$ представимы в виде сходящихся рядов по степеням ε . Теперь вместо параметра θ_0 , фигурирующего в выражениях для $v(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$, остается выписать определенную выше функцию $\theta = \theta(\omega, \varepsilon)$.

Пусть определитель матрицы A равен нулю:

$$\det A = 2\rho\gamma(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)) = 0. \quad (18)$$

Найдем из (15) значения выражений $\gamma \cos(\varphi - \Omega)$ и $\gamma \sin(\varphi - \Omega)$:

$$\begin{aligned} \gamma \cos(\varphi - \Omega) &= \rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi, \\ \gamma \sin(\varphi - \Omega) &= \omega - c\rho^2 + \gamma \sin \varphi. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что

$$\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi - c(\omega - c\rho^2 + \gamma \sin \varphi) = 0. \quad (20)$$

В координатах (ω, ρ^2) уравнение (20) задает прямую. Так как прямая и эллипс могут иметь не более двух общих точек, то на эллипсе $L(c, \gamma, \varphi)$ есть не более, чем две точки, в которых определитель матрицы A равен нулю.

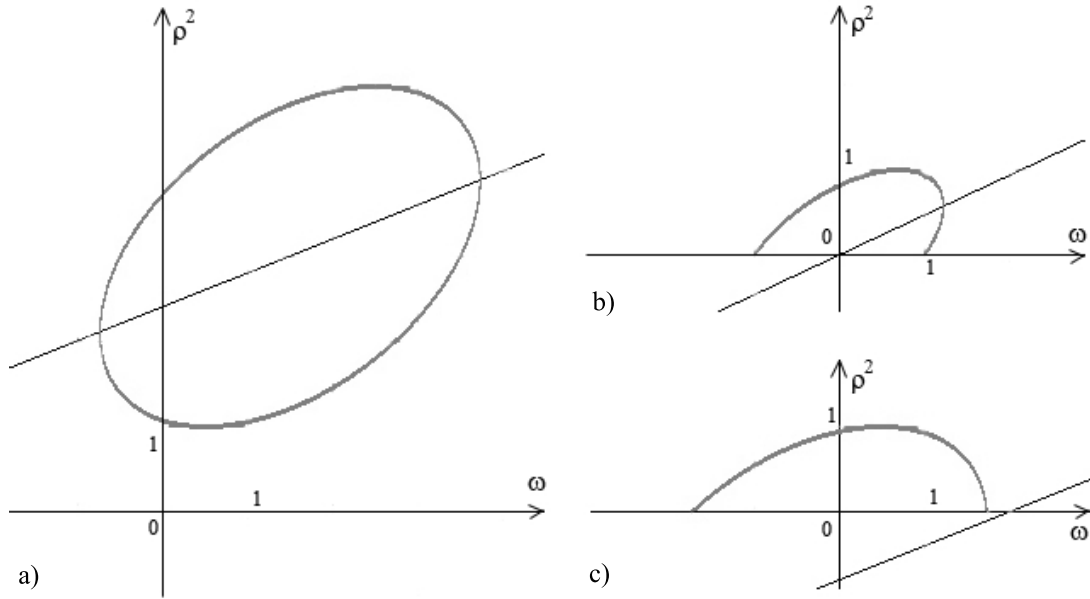


Рис. 1.2: Количество точек множества $L(c, \gamma, \varphi)$, для которых $\det A = 0$. Значения параметров: а) $c = 0.5, \gamma = 2, \varphi = 3.14$; б) $c = 0.7, \gamma = 1, \varphi = 0$; в) $c = 0.5, \gamma = 2, \varphi = 0$.

На рисунке 1.2.а) таких точек на множестве $L(c, \gamma, \varphi)$ две, на рисунке 1.2.б) — одна, на рисунке 1.2.в) таких точек нет. Таким образом, теорема доказана. \square

Теперь рассмотрим точки, в которых $\det A = 0$. Введем дополнительное предположение о том, что

$$2\rho + \gamma \cos(\varphi - \Omega) \neq 0. \quad (21)$$

Это условие означает, что у матрицы A есть ровно одно нулевое собственное значение. Второе собственное значение матрицы A равно $2\rho + \gamma \cos(\varphi - \Omega)$.

Временно считаем, что выражение θ является фиксированным параметром, то есть не зависит от ε . Будем искать периодическое решение уравнения (11) в виде рядов не по целым степеням ε , а по степеням $\varepsilon^{1/2}$:

$$u_{R,\Lambda} = \left(\rho + \sum_{k=1}^{\infty} v_{k/2} \varepsilon^{k/2} \right) \exp \left(i \left(\omega/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \sum_{k=1}^{\infty} d_{k/2} \varepsilon^{k/2} \right) t \right). \quad (22)$$

Здесь $v_{k/2}$ и $d_{k/2}$ — действительные числа. При подстановке решения (22) в уравнение (11) получаем равенство

$$i(\omega + \varepsilon\theta + \varepsilon\Omega + \varepsilon 2\pi n + O(\varepsilon^{3/2})) = 1 + (-1 + ic)(\rho^2 + 2\varepsilon^{1/2}\rho v_{1/2} + 2\varepsilon\rho v_1 + \varepsilon v_{1/2}^2 + O(\varepsilon^{3/2})) + \gamma e^{i\varphi} \left(e^{-i\Omega} - 1 + e^{-i\Omega} \left(-i(\varepsilon^{1/2}d_{1/2} + \varepsilon d_1) - \frac{1}{2}\varepsilon d_{1/2}^2 + O(\varepsilon^{3/2}) \right) \right).$$

Значение Ω из данного соотношения находится так же, как и в невырожденном случае. Величины $v_{1/2}$ и $d_{1/2}$ получаем из следующего уравнения:

$$0 = (-1 + ic)2\rho v_{1/2} - i\gamma e^{i(\varphi - \Omega)} d_{1/2}.$$

В силу (18) имеем, что

$$v_{1/2} = \frac{\gamma \sin(\varphi - \Omega)}{2\rho} d_{1/2}. \quad (23)$$

Получаем систему уравнений для нахождения v_1 и d_1 :

$$\begin{cases} -2\rho v_1 + \gamma \sin(\varphi - \Omega) d_1 = v_{1/2}^2 + \frac{1}{2}\gamma \cos(\varphi - \Omega) d_{1/2}^2, \\ 2c\rho v_1 - \gamma \cos(\varphi - \Omega) d_1 = \theta + \Omega + 2\pi n - c v_{1/2}^2 + \frac{1}{2}\gamma \sin(\varphi - \Omega) d_{1/2}^2. \end{cases} \quad (24)$$

Матрица A имеет одно нулевое собственное значение. Ему соответствует собственный вектор $a = \text{const} \cdot (\gamma \sin(\varphi - \Omega), 2\rho)^T$. Собственный вектор b матрицы A^* , отвечающий нулевому собственному значению, равен $\text{const} \cdot (c, 1)^T$. Поэтому, учитывая (18), условие разрешимости системы (24) имеет вид

$$\begin{aligned} \theta + \Omega + 2\pi n + \left(-\frac{c\gamma^2 \sin^2(\varphi - \Omega)}{4\rho^2} + \frac{\gamma \sin(\varphi - \Omega)}{2} \right) d_{1/2}^2 = \\ = -c \left(\frac{\gamma^2 \sin^2(\varphi - \Omega)}{4\rho^2} + \frac{c\gamma \sin(\varphi - \Omega)}{2} \right) d_{1/2}^2. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к выводу, что

$$\theta + \Omega + 2\pi n + \frac{1}{2}\gamma \sin(\varphi - \Omega)(1 + c^2)d_{1/2}^2 = 0. \quad (25)$$

В силу (18) получаем, что $\sin(\varphi - \Omega) \neq 0$, поэтому коэффициент перед $d_{1/2}^2$ не равен нулю. Следовательно, за счет подбора n мы можем добиться того, что

$$\frac{2(\theta + \Omega + 2\pi n)}{\gamma \sin(\varphi - \Omega)(1 + c^2)} < 0. \quad (26)$$

При выполнении (26) существует два корня $d_{1/2}^\pm$ уравнения (25). Подставляя значения $d_{1/2}^+$ в (23), находим $v_{1/2}^+$, по корню $d_{1/2}^-$ аналогично находим величину $v_{1/2}^-$. Так как матрица A вырождена, то по вектору $(v_{1/2}, d_{1/2})^T$ вектор $(v_1, d_1)^T$ находится из (24) с точностью до вектора a .

Задача на нахождение следующих членов асимптотики при натуральном $p \geq 3$ будет иметь вид:

$$\begin{cases} -2\rho v_{p/2} + \gamma \sin(\varphi - \Omega)d_{p/2} = F_1(v_{1/2}, d_{1/2}, \dots, v_{(p-1)/2}, d_{(p-1)/2}), \\ 2c\rho v_{p/2} - \gamma \cos(\varphi - \Omega)d_{p/2} = F_2(v_{1/2}, d_{1/2}, \dots, v_{(p-1)/2}, d_{(p-1)/2}), \end{cases}$$

где явный вид F_1 и F_2 находим, приравнивая коэффициенты при $\varepsilon^{p/2}$, вектор $(v_{(p-1)/2}, d_{(p-1)/2})^T$ определен с точностью до вектора a , а величины $v_{1/2}, d_{1/2}, \dots, v_{(p-2)/2}, d_{(p-2)/2}$ определены однозначно. В силу условий (18), (21) скалярное произведение (a, b) отлично от нуля. Поэтому можно выбрать $(v_{(p-1)/2}, d_{(p-1)/2})^T$ так, что вектор $(F_1, F_2)^T$ будет ортогональным вектору $(c, 1)^T$, то есть задача на нахождение $(v_{p/2}, d_{p/2})^T$ станет разрешимой. Вектор $(v_{p/2}, d_{p/2})^T$ полностью определим на следующем шаге. Таким образом все коэффициенты $v_{p/2}$ и $d_{p/2}$ ($p > 1$) находятся однозначно. После нахождения $v_{p/2}$ и $d_{p/2}$ остается вместо параметра θ , фигурирующего в выражениях для $v_{p/2}$ и $d_{p/2}$, выписать определенную выше функцию $\theta = \theta(\omega, \varepsilon)$.

Итак, доказаны следующие теоремы.

Теорема 6. Пусть для точки (ω_0, ρ_0^2) из $L(c, \gamma, \varphi)$ выполнены условия (18), (21) и $\sin(\varphi - \Omega) > 0$. Тогда существует такое целое n_0 , что для каждого натурального N существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех целых n из $[n_0 - N, n_0]$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ уравнение (11) имеет два решения в виде цикла (12). Вещественные величины $R = R_n^\pm(\varepsilon)$ и $\Lambda = \Lambda_n^\pm(\varepsilon)$ таковы, что $R_n^\pm(\varepsilon) = \rho_0 + \varepsilon^{1/2}v_{1/2}^\pm + O(\varepsilon)$, $\Lambda_n^\pm(\varepsilon) = \omega_0/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon^{1/2}d_{1/2}^\pm + O(\varepsilon)$.

Теорема 7. Пусть для точки (ω_0, ρ_0^2) из $L(c, \gamma, \varphi)$ выполнены условия (18), (21) и $\sin(\varphi - \Omega) < 0$. Тогда существует такое целое n_0 , что для каждого натурального

N существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех целых n из $[n_0, n_0 + N]$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ уравнение (11) имеет два решения в виде цикла (12). Вещественные величины $R = R_n^\pm(\varepsilon)$ и $\Lambda = \Lambda_n^\pm(\varepsilon)$ таковы, что $R_n^\pm(\varepsilon) = \rho_0 + \varepsilon^{1/2}v_{1/2}^\pm + O(\varepsilon)$, $\Lambda_n^\pm(\varepsilon) = \omega_0/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon^{1/2}d_{1/2}^\pm + O(\varepsilon)$.

Возможна ситуация, когда $\det A = 0$ и неравенство (21) не выполнено. В этом случае будет иметь место вырождение более высокого порядка. Этот случай рассматривать не будем.

1.2.3 Устойчивость простейших периодических решений

Построение характеристического квазиполинома

Перейдем к исследованию устойчивости простейших периодических решений. Линеаризуем уравнение (11) на решении (12). Для этого сделаем замену $u = u_{R,\Lambda}(1 + y)$, где $y = y_1 + iy_2$ и y_1, y_2 — действительные функции. Предполагая $|y|$ достаточно малым, отбросим в полученной системе все слагаемые порядка малости (по y) выше первого. Получим уравнение:

$$\varepsilon \dot{y} = 2(-1 + ic)R^2 y_1 + \gamma e^{i(\varphi - \Lambda)}(y(t-1) - y).$$

Ограничимся рассмотрением невырожденного случая, то есть случая $\det A \neq 0$. Выделим действительную и мнимую части уравнения:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{y}_1 = -2(\rho + \varepsilon v)^2 y_1 + \gamma \cos(\varphi - \Omega - \varepsilon d)(y_1(t-1) - y_1) - \\ \quad - \gamma \sin(\varphi - \Omega - \varepsilon d)(y_2(t-1) - y_2), \\ \varepsilon \dot{y}_2 = 2c(\rho + \varepsilon v)^2 y_1 + \gamma \sin(\varphi - \Omega - \varepsilon d)(y_1(t-1) - y_1) + \\ \quad + \gamma \cos(\varphi - \Omega - \varepsilon d)(y_2(t-1) - y_2). \end{cases} \quad (27)$$

Тогда приходим к следующему характеристическому уравнению (относительно значений $y_1 = P, y_2 = Q$)

$$\varepsilon \lambda \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -2(\rho + \varepsilon v)^2 + \gamma \cos(\varphi - \Omega - \varepsilon d)(e^{-\lambda} - 1) & -\gamma \sin(\varphi - \Omega - \varepsilon d)(e^{-\lambda} - 1) \\ 2c(\rho + \varepsilon v)^2 + \gamma \sin(\varphi - \Omega - \varepsilon d)(e^{-\lambda} - 1) & \gamma \cos(\varphi - \Omega - \varepsilon d)(e^{-\lambda} - 1) \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы данное уравнение имело нетривиальное решение $(P_0, Q_0)^T$, необходимо и достаточно, чтобы $\det(B - \varepsilon \lambda I) = 0$, где I — единичная матрица.

Равенство нулю определителя матрицы $B - \varepsilon\lambda I$ означает, что показатель λ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \varepsilon^2\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda((\rho + \varepsilon v)^2 - \gamma \cos(\varphi - \Omega - \varepsilon d)(e^{-\lambda} - 1)) + \gamma^2(e^{-\lambda} - 1)^2 - \\ - 2(\rho + \varepsilon v)^2(e^{-\lambda} - 1)\gamma(\cos(\varphi - \Omega - \varepsilon d) - c \sin(\varphi - \Omega - \varepsilon d)) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Если при всех достаточно малых значениях ε все корни уравнения (28), кроме одного — нулевого, имеют отрицательные вещественные части, то рассматриваемое периодическое решение экспоненциально орбитально устойчиво. Если же при всех достаточно малых ε уравнение (28) имеет корень с положительной вещественной частью, то периодическое решение неустойчиво.

Исследуем расположение корней полученного характеристического квазиполинома (28).

Изучение расположения корней характеристического квазиполинома

Зафиксируем некоторое значение $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим уравнение (28) при этом значении параметра ε . Среди его корней обязательно есть корень $\lambda = 0$, поскольку мы линеаризовывали уравнение (11) на периодическом решении. Данный корень имеет кратность, равную единице, и на устойчивость не влияет. Исследуем остальные корни характеристического квазиполинома (28). Включим в множество $K_0(\varepsilon_0)$ те из них, действительная часть которых максимальна среди всех корней этого уравнения. Максимум здесь достигается, поскольку для каждой вертикальной прямой в комплексной плоскости есть лишь конечное число корней уравнения (28) справа от нее [2, 35]. Обозначим действительную часть корней из $K_0(\varepsilon)$ как $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$.

Для устойчивости при всех достаточно малых ε необходимо исключить следующие возможности:

Случай 1. Существует последовательность $\{\varepsilon_m\}$, на которой $\lambda_0 \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon_m \rightarrow 0$;

Случай 2. Существует последовательность $\{\varepsilon_m\}$, на которой λ_0 стремится к некоторой положительной константе или к нулю справа при $\varepsilon_m \rightarrow 0$.

Случай 1. Пусть $\lambda_0 \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon_m \rightarrow 0$. Пусть $\lambda_*(\varepsilon_m)$ — некоторый корень из $K_0(\varepsilon_m)$. Тогда возможны две ситуации:

а) существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, такая, что $\varepsilon_{m_l}\lambda_*(\varepsilon_{m_l})$ стремится к константе, не равной нулю, при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$;

б) существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, такая, что $\varepsilon_{m_l}\lambda_*(\varepsilon_{m_l})$ стремится к нулю при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$.

Из уравнения (28) легко видеть, что ситуация, когда существует подпоследова-

тельность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, такая, что $|\varepsilon_{m_l}\lambda_*(\varepsilon_{m_l})| \rightarrow \infty$ при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$ невозможна.

Рассмотрим случай 1.а). Обозначим $s = \lim_{m_l \rightarrow \infty} \varepsilon_{m_l}\lambda_*(\varepsilon_{m_l}) \neq 0$. Тогда в пределе при $m_l \rightarrow +\infty$ характеристический квазиполином (28) примет вид

$$s^2 + 2s(\rho^2 + \gamma \cos(\varphi - \Omega)) + \gamma^2 + 2\rho^2\gamma(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)) = 0. \quad (29)$$

Для устойчивости нам необходимо, чтобы корни данного уравнения находились в левой комплексной полуплоскости. Отсюда, учитывая, что $s \neq 0$, получаем следующее необходимое условие устойчивости периодического решения (12) уравнения (11):

$$\begin{cases} \rho^2 + \gamma \cos(\varphi - \Omega) \geq 0, \\ \gamma + 2\rho^2(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)) > 0. \end{cases} \quad (30)$$

Пусть теперь имеет место ситуация 1.б). Для данной ситуации необходимо, чтобы выполнялось равенство $\gamma + 2\rho^2(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)) = 0$. Ниже будет показано, что это равенство противоречит необходимому условию устойчивости.

Случай 2. Пусть λ_0 стремится к неотрицательной константе на некоторой последовательности $\varepsilon_m \rightarrow 0$. Тогда для корней $\lambda_*(\varepsilon_m)$ из $K_0(\varepsilon_m)$ возможны две ситуации:

- а) существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, такая, что $\text{Im } \lambda_*(\varepsilon_{m_l})$ стремится к константе при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$;
- б) существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, такая, что $\text{Im } \lambda_*(\varepsilon_{m_l})$ стремится к бесконечности при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$.

Рассмотрим случай 2.а). Посмотрим, к каким константам могут стремиться корни λ_* уравнения (28). Обозначим $\lim_{m_l \rightarrow \infty} \lambda_*(\varepsilon_{m_l}) = \alpha$. Тогда уравнение для определения α будет иметь вид:

$$(e^{-\alpha} - 1)(\gamma(e^{-\alpha} - 1) - 2\rho^2(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))) = 0. \quad (31)$$

Из равенства нулю первого сомножителя (31) легко видеть, что уравнение (28) имеет асимптотически большое число корней $\lambda_*(\varepsilon)$, стремящихся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$: $\lambda_*(\varepsilon) = 2\pi k i + o(1)$ (k — целое число). Положим

$$\lambda_*(\varepsilon) = 2\pi k i + \varepsilon \lambda_{k,1} + \varepsilon^2 \lambda_{k,2} + o(\varepsilon^2), \quad (32)$$

где $\lambda_{k,1}$ и $\lambda_{k,2}$ некоторые комплексные числа. Подставляя (32) в (28), приходим к

уравнению

$$\begin{aligned} & -4\pi^2 k^2 \varepsilon^2 + 2\varepsilon(2\pi ki + \varepsilon \lambda_{k,1})(\rho^2 + 2\rho v \varepsilon + \gamma \cos(\varphi - \Omega) \varepsilon \lambda_{k,1}) + \gamma^2 \varepsilon^2 \lambda_{k,1}^2 + \\ & + 2(\rho^2 + 2\rho v \varepsilon) \gamma (\varepsilon \lambda_{k,1} + \varepsilon^2 \lambda_{k,2} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \lambda_{k,1}^2) \left(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega) + \right. \\ & \left. + \varepsilon d (\sin(\varphi - \Omega) + c \cos(\varphi - \Omega)) \right) + O(\varepsilon^3) = 0. \end{aligned}$$

Приведя подобные слагаемые при ε^1 , найдем $\lambda_{k,1}$:

$$\lambda_{k,1} = -2\pi ki \gamma^{-1} (\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))^{-1}.$$

Из выражения при ε^2 получаем значение $\lambda_{k,2}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_{k,2} &= \frac{2\pi^2 k^2}{\rho^2 \gamma^2 (\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))^2} \left(\frac{\gamma(1 + c^2) \sin^2(\varphi - \Omega)}{\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)} - \rho^2 \right), \\ \operatorname{Im} \lambda_{k,2} &= \frac{2\pi ki \left(1 + d (\sin(\varphi - \Omega) + c \cos(\varphi - \Omega)) \right)}{\gamma^2 (\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))^2}. \end{aligned}$$

Тогда при условии общности положения, то есть при $\operatorname{Re} \lambda_{k,2} \neq 0$, необходимым условием устойчивости периодического решения (12) уравнения (11) является выполнение неравенства

$$\rho^2 - \frac{\gamma(1 + c^2) \sin^2(\varphi - \Omega)}{\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)} > 0. \quad (33)$$

Посмотрим, к каким еще константам могут стремиться корни уравнения (28) при $\varepsilon_{m_i} \rightarrow 0$. Из равенства нулю второго сомножителя в (31) выразим $e^{-\alpha}$:

$$e^{-\alpha} = 1 + \frac{2\rho^2 (\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))}{\gamma}. \quad (34)$$

Из (34) получаем следующее необходимое условие устойчивости решения (12) уравнения (11):

$$\left| 1 + \frac{2\rho^2 (\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))}{\gamma} \right| \geq 1.$$

В силу предположения $\det A \neq 0$, приведенное выше неравенство эквивалентно совокупности двух неравенств

$$\begin{cases} \cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega) > 0, \\ \rho^2 (\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)) + \gamma \leq 0. \end{cases} \quad (35)$$

Легко видеть, что необходимое для ситуации 1.б) равенство противоречит необходимому условию устойчивости (35).

Везде далее будем считать, что полученные ранее необходимые условия устойчивости выполняются. Легко видеть, что выполнение необходимых условий устойчивости (30), (33), (35) эквивалентно выполнению системы неравенств:

$$\begin{cases} \rho^2 - \frac{\gamma(1+c^2)\sin^2(\varphi-\Omega)}{\cos(\varphi-\Omega)-c\sin(\varphi-\Omega)} > 0, \\ \cos(\varphi-\Omega)-c\sin(\varphi-\Omega) > 0, \\ \rho^2 + \gamma\cos(\varphi-\Omega) \geq 0. \end{cases} \quad (36)$$

Рассмотрим случай 2.б). В данном случае существует последовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ такая, что $\operatorname{Re} \lambda_*(\varepsilon_{m_l})$ стремится к неотрицательной константе, а $\operatorname{Im} \lambda_*(\varepsilon_{m_l})$ стремится к бесконечности при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$. Тогда для выражения $\varepsilon_{m_l} \lambda_*(\varepsilon_{m_l})$ возможны две ситуации:

А) существует подпоследовательность $\{\varepsilon_j\}$ последовательности $\{\varepsilon_{m_l}\}$, такая, что $\varepsilon_j \lambda_*(\varepsilon_j)$ стремится к нулю при $\varepsilon_j \rightarrow 0$;

Б) существует подпоследовательность $\{\varepsilon_j\}$ последовательности $\{\varepsilon_{m_l}\}$, такая, что $\varepsilon_j \lambda_*(\varepsilon_j)$ стремится к константе, не равной нулю, при $\varepsilon_j \rightarrow 0$.

Из уравнения (28) легко видеть, что ситуация, когда существует подпоследовательность ε_j последовательности $\{\varepsilon_{m_l}\}$, такая, что $|\varepsilon_j \lambda_*(\varepsilon_j)|$ стремится к бесконечности при $\varepsilon_j \rightarrow 0$, невозможна.

Пусть при каждом фиксированном значении ε_j значение λ_0 достигается на корнях, асимптотически (при $\varepsilon_j \rightarrow 0$) близких к $2\pi k i$, где k — некоторое целое число. Обозначим множество всех таких k как $M(\varepsilon_j)$. Обозначим через $k^+(\varepsilon_j)$ максимальный среди номеров $k \in M(\varepsilon_j)$, а через $k^-(\varepsilon_j)$ — минимальный среди номеров $k \in M(\varepsilon_j)$. Пусть хотя бы одна из последовательностей $\{k^-(\varepsilon_j)\}$ и $\{k^+(\varepsilon_j)\}$ ($j = 1, 2, \dots$) не ограничена. Обозначим неограниченную последовательность как $\{k(\varepsilon_j)\}$, а через $\lambda_*(\varepsilon_j)$ — корень из $K_0(\varepsilon_j)$ с мнимой частью, близкой к $2\pi k(\varepsilon_j)$. Поскольку мы рассматриваем корни, близкие к $2\pi k i$, то $\operatorname{Re} \lambda_* \rightarrow 0$ и из (28) получаем, что $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j \lambda_*(\varepsilon_j) = 0$ при $\varepsilon_j \rightarrow 0$. Таким образом, данные корни подходят под ситуацию 2.б.А).

Отсюда приходим к выводу, что при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$ корень $\lambda_*(\varepsilon_{m_l})$ представим в виде

$$\lambda_*(\varepsilon_{m_l}) = 2\pi k(\varepsilon_{m_l})i + \lambda_{k,1} + i\lambda_{k,2}.$$

Здесь $\lambda_{k,1}$, $\lambda_{k,2}$ — действительные величины, $\lambda_{k,1} \rightarrow 0$, $\lambda_{k,2} \rightarrow 0$, $k(\varepsilon_{m_l}) \rightarrow \infty$, $\mu = \varepsilon_{m_l} k(\varepsilon_{m_l}) \rightarrow 0$ при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$. Величина $k(\varepsilon_{m_l})$ принимает только целые значения. Из того, что $k(\varepsilon_{m_l}) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$, следует, что $\varepsilon_{m_l} = o(\mu)$ при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$. Подставим

представление корня $\lambda_*(\varepsilon_{m_l})$ в характеристический квазиполином (28):

$$\begin{aligned}
& 2(2\pi\mu i + \varepsilon\lambda_{k,1} + i\varepsilon\lambda_{k,2})(\rho^2 + \gamma \cos(\varphi - \Omega)(\lambda_{k,1} + i\lambda_{k,2} - \frac{1}{2}\lambda_{k,1}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{k,2}^2 - \\
& - i\lambda_{k,1}\lambda_{k,2}) + O(\varepsilon)) - 4\pi^2\mu^2 + o(\mu^2) + \gamma^2(-\lambda_{k,2}^2 + \lambda_{k,1}^2 + 2i\lambda_{k,1}\lambda_{k,2}) + \\
& + o(\lambda_{k,2}^2, \lambda_{k,1}^2) + 2(\rho^2 + 2\rho v\varepsilon + O(\varepsilon^2))\gamma(\lambda_{k,1} + i\lambda_{k,2} - \frac{1}{2}\lambda_{k,1}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{k,2}^2 - \\
& - i\lambda_{k,1}\lambda_{k,2}) \left(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega) + \varepsilon d(\sin(\varphi - \Omega) + c \cos(\varphi - \Omega)) + \right. \\
& \left. + O(\varepsilon^2) \right) = 0. \tag{37}
\end{aligned}$$

Выпишем „главные“ слагаемые в уравнении (37):

$$4\pi\mu i\rho^2 + 2\rho^2\gamma(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))(\lambda_{k,1} + i\lambda_{k,2}) = 0. \tag{38}$$

Из (38) видно, что $\lambda_{k,1} = o(\mu)$, а $\lambda_{k,2}$ выражается следующим образом:

$$\lambda_{k,2} = -\frac{2\pi\mu}{\gamma(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))} + \lambda_{k,3},$$

где $\lambda_{k,3} = o(\lambda_{k,2})$. Таким образом, $\lambda_{k,2} = O(\mu)$. Учтем это равенство и выпишем следующие по порядку слагаемые:

$$\begin{aligned}
& 2\rho^2\gamma(\lambda_{k,1} + i\lambda_{k,3})(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)) + \frac{4\pi^2\mu^2\rho^2}{\gamma(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))} + \\
& + \frac{8\pi^2\mu^2 \cos(\varphi - \Omega)}{(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))} - \frac{4\pi^2\mu^2}{(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))^2} - 4\pi^2\mu^2 = 0. \tag{39}
\end{aligned}$$

Из условия (33) и уравнения (39) видим, что $\lambda_{k,1}$ и μ^2 имеют одинаковый порядок малости, а $\lambda_{k,3} = o(\mu^2)$. Таким образом, при малых μ корень λ_* будет иметь вид

$$\begin{aligned}
& \lambda_* = 2\pi k(\varepsilon)i - \frac{2\pi i}{\gamma(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))}\mu + \\
& + \frac{2\pi^2}{\rho^2\gamma^2(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))^2} \left(\frac{\gamma(1 + c^2) \sin^2(\varphi - \Omega)}{\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)} - \rho^2 \right) \mu^2 + o(\mu^2).
\end{aligned}$$

Заметим, что внутри $o(\mu^2)$ не содержится номеров корней, поэтому действительная часть асимптотики λ_* является равномерной по номеру k . В силу (33) корень λ_* будет находиться в левой комплексной полуплоскости.

Посмотрим, могут ли быть в данном случае другие корни. Заметим, что в уравнении (28) корень λ встречается либо в выражении $\varepsilon\lambda$, либо в выражении $e^{-\lambda}$. Выражение $e^{-\lambda}$ можно представить в виде $e^{-\lambda} = e^{-\operatorname{Re}\lambda}e^{-i\operatorname{Im}\lambda}$. Из последовательности $\operatorname{Im} \lambda_*(\varepsilon_j)$ можно выделить несколько (возможно, счетное число) подпоследовательностей ε_{j_r} таких, что значение $\exp(-i \operatorname{Im} \lambda_*(\varepsilon_{j_r}))$ будет одинаковым на всей

последовательности. Таким образом, на каждой подпоследовательности ε_{j_r} имеем, что $\varepsilon_{j_r} \lambda_*(\varepsilon_{j_r})$ стремится к нулю, $\exp(-\operatorname{Re} \lambda_*(\varepsilon_{j_r}))$ стремится к некоторой константе, а выражение $\exp(-i \operatorname{Im} \lambda_*(\varepsilon_{j_r}))$ постоянно. Следовательно, на каждой такой последовательности существует предел $e^{-\alpha}$ выражения $e^{-\lambda}$, при этом данный предел удовлетворяет уравнению (31). Случай равенства нулю первого сомножителя уравнения (31) был рассмотрен выше, а в случае равенства нулю второго сомножителя (31) имеем, что при выполнении полученных ранее условий устойчивости корень уравнения заведомо находится в левой комплексной полуплоскости.

Рассмотрим случай 2.б.Б). Введем обозначения. Пусть на некоторой последовательности $\varepsilon_j \rightarrow 0$ имеем $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j \operatorname{Im} \lambda_*(\varepsilon_j) = \delta \neq 0$. Обозначим за g значение выражения $\lim_{j \rightarrow \infty} \exp(-\operatorname{Re} \lambda_*(\varepsilon_j))$. Этот предел существует, поскольку ε_j — подпоследовательность последовательности ε_m , а на последовательности ε_m существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \lambda_*(\varepsilon_m)$. Считаем, что g — число из полуинтервала $(0, 1]$, так как если g из $(1, \infty)$, то корень λ_* уравнения (28) находится в левой полуплоскости. Поскольку $\operatorname{Im} \lambda_*(\varepsilon_j) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon_j \rightarrow 0$, то найдутся такие значения χ из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что дробная часть выражения $\operatorname{Im} \lambda_*(\varepsilon_j)/(2\pi)$ принимает их бесконечное число раз. Тогда в пределе при $\varepsilon_j \rightarrow 0$ получаем семейство уравнений относительно δ (при каждом значении пары (g, χ) свое уравнение):

$$-\delta^2 + 2i\delta(\rho^2 - \gamma \cos(\varphi - \Omega)(ge^{-i\chi} - 1)) + \gamma^2(ge^{-i\chi} - 1)^2 - 2\gamma\rho^2(ge^{-i\chi} - 1)(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)) = 0. \quad (40)$$

Таким образом, если ни для какой точки (g, χ) из $(0, 1] \times [0, 2\pi)$ не существует действительного корня δ уравнения (40), отличного от нулевого, то у уравнения (28) не будет корней в правой полуплоскости и на мнимой оси из ситуации 2.б.Б).

Выделим в (40) действительную и мнимую части. Действительная часть:

$$-\delta^2 - 2\delta\gamma \cos(\varphi - \Omega)g \sin \chi + \gamma^2((g \cos \chi - 1)^2 - g^2 \sin^2 \chi) - 2\gamma\rho^2(g \cos \chi - 1)(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)) = 0, \quad (41)$$

мнимая:

$$\delta(\rho^2 - \gamma \cos(\varphi - \Omega)(g \cos \chi - 1)) + \gamma g \sin \chi(\gamma(1 - g \cos \chi) + \rho^2(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))) = 0. \quad (42)$$

Пусть

$$\rho^2 - \gamma \cos(\varphi - \Omega)(g \cos \chi - 1) = 0. \quad (43)$$

Тогда в силу условия $\rho^2 > 0$ получаем, что $\cos(\varphi - \Omega) \neq 0$. Отсюда приходим к равенству

$$g \cos \chi = \frac{\rho^2}{\gamma \cos(\varphi - \Omega)} + 1. \quad (44)$$

Если выполнено неравенство

$$\left| \frac{\rho^2}{\gamma \cos(\varphi - \Omega)} + 1 \right| < 1, \quad (45)$$

то найдется такая точка (g, χ) из $(0, 1) \times [0, 2\pi)$, что равенство (44) выполнится. Если равенство (43) выполнено, то для того, чтобы система (41), (42) имела решение, необходимо выполнение равенства

$$\sin \chi (\gamma(1 - g \cos \chi) + \rho^2(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))) = 0.$$

Из (36) следует, что второй множитель этого равенства положителен. Тогда $\sin \chi = 0$. Уравнение (41) примет вид:

$$\delta^2 = \gamma(g \cos \chi - 1)(\gamma(g \cos \chi - 1) - 2\rho^2(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))). \quad (46)$$

Из условий (36), (45) следует, что выражение в правой части (46) будет положительным. Поэтому система (41), (42) будет иметь действительные ненулевые корни δ_{\pm} в случае равенства нулю выражения (43) и выполнения условия (45).

Случай равенства

$$\left| \frac{\rho^2}{\gamma \cos(\varphi - \Omega)} + 1 \right| = 1$$

возможен не более, чем в двух точках эллипса. Поэтому изучение этого случая здесь опустим.

Из проведенных выше построений получаем достаточное условие для нахождения корней уравнения (28) из случая 2.б.Б) в левой полуплоскости при условии вырожденности коэффициента при δ в (42):

$$\left| \frac{\rho^2}{\gamma \cos(\varphi - \Omega)} + 1 \right| > 1. \quad (47)$$

Легко видеть, что в случае $\cos(\varphi - \Omega) \neq 0$ условие (47) эквивалентно выполнению неравенства

$$\rho^2 + 2\gamma \cos(\varphi - \Omega) > 0. \quad (48)$$

Очевидно, что система (36), (48) эквивалентна следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \rho^2 - \frac{\gamma(1 + c^2) \sin^2(\varphi - \Omega)}{\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)} > 0, \\ \cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega) > 0, \\ \rho^2 + 2\gamma \cos(\varphi - \Omega) > 0. \end{cases} \quad (49)$$

Далее считаем, что условие (48) выполнено, то есть коэффициент при δ в уравнении (42) отличен от нуля в любой точке (g, χ) из $(0, 1] \times [0, 2\pi)$.

При любых значениях параметров c, γ, φ на $L(c, \gamma, \varphi)$ есть точка с координатами $(\omega_{up}, \rho_{up}^2)$, где

$$\rho_{up}^2 = \gamma - \gamma \cos \varphi + 1, \quad \omega_{up} = c\rho_{up}^2 - \gamma \sin \varphi.$$

В этой точке выполнено равенство $\cos(\varphi - \Omega) = 1$, поэтому уравнение (40) в точке $(\omega_{up}, \rho_{up}^2)$ приводит к равенству

$$-\delta^2 + 2i\delta(\rho^2 - \gamma(ge^{-i\chi} - 1)) + \gamma^2(ge^{-i\chi} - 1)^2 - 2\gamma\rho^2(ge^{-i\chi} - 1) = 0. \quad (50)$$

Выделим в (50) действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \text{Re} : & -\delta^2 - 2\gamma g \sin \chi \delta + \gamma^2((1 - g \cos \chi)^2 - g^2 \sin^2 \chi) - 2\gamma\rho^2(g \cos \chi - 1) = 0, \\ \text{Im} : & 2\delta(\rho^2 - \gamma(g \cos \chi - 1)) - 2\gamma^2(g \cos \chi - 1)g \sin \chi + 2\gamma\rho^2g \sin \chi = 0. \end{aligned}$$

Поскольку g из $(0, 1]$ и $\gamma > 0$, выражение $\rho^2 - \gamma(g \cos \chi - 1)$ положительно. Поэтому из мнимой части (50) имеем $\delta = -\gamma g \sin \chi$. Подставляя выражение для δ в действительную часть (50), получаем:

$$\gamma(g \cos \chi - 1)(\gamma(g \cos \chi - 1) - 2\rho^2) = 0.$$

Выражение $\gamma(g \cos \chi - 1) - 2\rho^2$ отрицательно для любой точки (g, χ) из $(0, 1] \times [0, 2\pi)$. Если же $g \cos \chi - 1$ равно нулю, то $\cos \chi = 1$, следовательно, $\delta = 0$. Но, в силу предположения ситуации 2.б.Б), выполнено неравенство $\delta \neq 0$. Таким образом, в точке $(\omega_{up}, \rho_{up}^2)$ уравнение (40) не имеет корней при любых допустимых значениях параметров g и χ . То есть все корни уравнения (28), относящиеся к случаю 2.б.Б), находятся в левой комплексной полуплоскости.

При любых значениях параметров c, γ, φ на эллипсе $L(c, \gamma, \varphi)$ найдется точка с координатами $(\omega_{up}, \rho_{up}^2)$. В этой точке уравнение (40) не имеет корней при всех $g \in (0, 1]$, то есть уравнение (28) не имеет корней в правой полуплоскости и на мнимой оси, относящихся к ситуации 2.б.Б). Корни уравнения (40) непрерывно зависят от коэффициентов g, ρ^2 и Ω . Следовательно, для того, чтобы уравнение (28) имело корни из ситуации 2.б.Б) в правой полуплоскости в некоторой точке (ω_*, ρ_*^2) эллипса $L(c, \gamma, \varphi)$, необходимо, чтобы в некоторой точке эллипса $L(c, \gamma, \varphi)$ на кратчайшей дуге, соединяющей точки (ω_*, ρ_*^2) и $(\omega_{up}, \rho_{up}^2)$, нашлись корни на мнимой оси, относящиеся к случаю 2.б.Б). Поэтому в дальнейшем для уравнения (40) достаточно рассматривать случай $g = 1$. При $g = 1$ уравнение (40) имеет вид

$$\begin{aligned} -\delta^2 + 2i\delta(\rho^2 - \gamma \cos(\varphi - \Omega)(e^{-i\chi} - 1)) + \gamma^2(e^{-i\chi} - 1)^2 - \\ - 2\gamma\rho^2(e^{-i\chi} - 1)(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)) = 0. \quad (51) \end{aligned}$$

В уравнении (51) выделим действительную и мнимую части. Действительная часть:

$$-\delta^2 - 2\gamma \cos(\varphi - \Omega) \sin \chi \delta + 2\gamma^2(\cos^2 \chi - \cos \chi) - 2\gamma\rho^2(\cos \chi - 1)(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)) = 0, \quad (52)$$

мнимая:

$$\delta(\rho^2 - \gamma \cos(\varphi - \Omega)(\cos \chi - 1)) + \gamma \sin \chi(\gamma(1 - \cos \chi) + \rho^2(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))) = 0. \quad (53)$$

Из (53) выразим δ :

$$\delta = \frac{\gamma \sin \chi(\gamma(1 - \cos \chi) + \rho^2(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)))}{-\rho^2 + \gamma \cos(\varphi - \Omega)(\cos \chi - 1)},$$

подставим полученное выражение в (52). Учитывая, что $\sin^2 \chi = 1 - \cos^2 \chi$, после переобозначения $z = \cos \chi$ получим следующее уравнение относительно z :

$$\gamma(1 - z)H(z)(-\rho^2 - \gamma \cos(\varphi - \Omega)(1 - z))^{-2} = 0, \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} H(z) = & \gamma^3 z^3 - \gamma^2 \left(\gamma + 4\rho^2 \cos(\varphi - \Omega) + 2\gamma \cos^2(\varphi - \Omega) - 2c\rho^2 \sin(\varphi - \Omega) \right) z^2 + \\ & + \gamma \left(-\gamma^2 + 2\rho^4 + 4\gamma\rho^2 \cos(\varphi - \Omega) + 4\gamma^2 \cos^2(\varphi - \Omega) + 3\rho^4 \cos^2(\varphi - \Omega) + 4\gamma\rho^2 \cos^3(\varphi - \Omega) - \right. \\ & \left. - 4c\rho^4 \cos(\varphi - \Omega) \sin(\varphi - \Omega) - 4c\gamma\rho^2 \cos^2(\varphi - \Omega) \sin(\varphi - \Omega) + c^2\rho^4 \sin^2(\varphi - \Omega) \right) z + \\ & + \gamma^3 - 2\rho^6 \cos(\varphi - \Omega) - 2\gamma^3 \cos^2(\varphi - \Omega) - 5\gamma\rho^4 \cos^2(\varphi - \Omega) - 4\gamma^2\rho^2 \cos^3(\varphi - \Omega) - \\ & - 2c\gamma^2\rho^2 \sin(\varphi - \Omega) + 2c\rho^6 \sin(\varphi - \Omega) + 4c\gamma\rho^4 \cos(\varphi - \Omega) \sin(\varphi - \Omega) + \\ & + 4c\gamma^2\rho^2 \cos^2(\varphi - \Omega) \sin(\varphi - \Omega) + c^2\gamma\rho^4 \sin^2(\varphi - \Omega). \end{aligned}$$

Заметим, что, в силу (48), знаменатель (54) не равен нулю. А при $z = 1$ получаем корень системы (52), (53), равный нулю. Этот корень не подходит в силу предположения $\delta \neq 0$. Поскольку $z = \cos \chi$, то переменная z меняется на отрезке $[-1, 1]$. Найдем значения $H(z)$ в концах отрезка изменения переменной z . При $z = -1$ имеем

$$H(-1) = -2(\rho^2 + 2\gamma \cos(\varphi - \Omega))^2(\gamma + \rho^2(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega))),$$

а при $z = 1$ получаем, что

$$H(1) = -2\rho^4(\rho^2(\cos(\varphi - \Omega) - c \sin(\varphi - \Omega)) - \gamma(1 + c^2) \sin^2(\varphi - \Omega)).$$

Из (49) следует, что выражения $H(-1)$ и $H(1)$ отрицательны. Для того, чтобы и на всем интервале $(-1, 1)$ выражение $H(z)$ было отрицательно, необходимо и достаточно, чтобы на отрезке $[-1, 1]$ у функции $H(z)$ не было положительного максимума. Учитывая, что $H(z)$ — кубическая по z функция, то для любых значений параметров и для каждой конкретной точки эллипса $L(c, \gamma, \varphi)$ это условие легко проверяется численно.

Из проведенных выше построений вытекают следующие утверждения.

Теорема 8 (Достаточное условие устойчивости). *Пусть для некоторой точки (ω_*, ρ_*^2) множества $L(c, \gamma, \varphi)$ выполнена система неравенств (49), а уравнение $H(z) = 0$ не имеет корней ни при каком $z \in [-1, 1]$ для всех точек кратчайшей дуги $L(c, \gamma, \varphi)$, соединяющей точки $(\omega_{up}, \rho_{up}^2)$ и (ω_*, ρ_*^2) . Тогда для каждого целого n существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение (12) уравнения (11), соответствующее точке (ω_*, ρ_*^2) , устойчиво.*

Для формулировки теоремы о неустойчивости введем в рассмотрение следующую совокупность неравенств:

$$\begin{cases} \rho^2 - \frac{\gamma(1+c^2)\sin^2(\varphi-\Omega)}{\cos(\varphi-\Omega)-c\sin(\varphi-\Omega)} < 0, \\ \cos(\varphi-\Omega)-c\sin(\varphi-\Omega) < 0, \\ \rho^2 + \gamma\cos(\varphi-\Omega) < 0. \end{cases} \quad (55)$$

Теорема 9 (Достаточное условие неустойчивости). *Пусть для некоторой точки (ω_*, ρ_*^2) множества $L(c, \gamma, \varphi)$ выполнена совокупность неравенств (55). Тогда для каждого целого n существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение (12) уравнения (11), соответствующее точке (ω_*, ρ_*^2) , неустойчиво.*

1.2.4 Расположение областей устойчивости на эллипсе $L(c, \gamma, \varphi)$

Будем говорить, что точка (ω_0, ρ_0^2) множества $L(c, \gamma, \varphi)$ принадлежит области устойчивости, если все решения (12) уравнения (11) с $\rho^2 = \rho_0^2$ и $\omega = \omega_0$ устойчивы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

1. При любых значениях параметров c, γ, φ на эллипсе $L(c, \gamma, \varphi)$ есть точка, в которой выполнено достаточное условие устойчивости. Это точка $(\omega_{up}, \rho_{up}^2)$. Для этой точки $\cos(\varphi - \Omega) = 1$, $\sin(\varphi - \Omega) = 0$. Легко видеть, что из этих двух равенств следует выполнение системы (49). А тот факт, что в данной точке уравнение (40) не имеет действительных ненулевых корней, был доказан выше.

2. При любых значениях параметров c, γ, φ на эллипсе $L(c, \gamma, \varphi)$ есть хотя бы одна точка, в которой выполнены достаточные условия неустойчивости.

Пусть эллипс целиком находится в полуплоскости $\rho^2 > 0$. Тогда рассмотрим его нижнюю точку. Для нее $\cos(\varphi - \Omega) = -1$, $\sin(\varphi - \Omega) = 0$. Очевидно, в данной точке выполнено второе условие системы (55). Если же эллипс касается оси $\rho^2 = 0$, то для точек с малыми ρ^2 выполнено хотя бы одно из условий (55). Покажем это.

Пусть для всех достаточно малых значений ρ^2 выполнены второе условие системы (49) и неравенство

$$\rho^2 + \gamma \cos(\varphi - \Omega) > 0.$$

Последнее неравенство в координатах (ω, ρ^2) имеет вид:

$$2\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi > 0.$$

Поскольку мы считаем, что данное неравенство выполнено при всех достаточно малых ρ^2 , то величина $-1 + \gamma \cos \varphi$ должна быть неотрицательной. Первое условие системы (49) в координатах (ω, ρ^2) имеет вид

$$\rho^2 > \frac{(1 + c^2)(\gamma^2 - (\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi)^2)}{(1 + c^2)\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi - c(\omega + \gamma \sin \varphi)}.$$

Умножая это неравенство на знаменатель правой части (он положителен в силу второго условия системы (49)), получаем

$$\rho^2((1 + c^2)\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi - c(\omega + \gamma \sin \varphi)) > (1 + c^2)(\gamma^2 - (-1 + \gamma \cos \varphi)^2 - 2\rho^2(-1 + \gamma \cos \varphi) - \rho^4).$$

В левой части полученного неравенства величина порядка ρ^2 , справа — положительная (так как выполнено неравенство $-1 + \gamma \cos \varphi \geq 0$) величина порядка единицы. Следовательно, при достаточно малых ρ^2 первое неравенство (49) не выполняется. Таким образом, найдется такое малое значение ρ^2 , что выполнено хотя бы одно из неравенств (55).

3. Посмотрим, на сколько областей устойчивости и неустойчивости может быть поделен эллипс $L(c, \gamma, \varphi)$. Выпишем все неравенства (49) в терминах ω и ρ^2 :

$$\begin{cases} \rho^2 > \frac{(1 + c^2)(\gamma^2 - (\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi)^2)}{(1 + c^2)\rho^2 - c\omega - 1 + \gamma \cos \varphi - c\gamma \sin \varphi}, \\ (1 + c^2)\rho^2 - c\omega - 1 + \gamma \cos \varphi - c\gamma \sin \varphi > 0, \\ 3\rho^2 - 2 + 2\gamma \cos \varphi > 0. \end{cases} \quad (56)$$

Рассмотрим уравнения

$$(1 + c^2)\rho^2 - c\omega - 1 + \gamma \cos \varphi - c\gamma \sin \varphi = 0$$

и

$$3\rho^2 - 2 + 2\gamma \cos \varphi = 0.$$

Каждое из них в координатах (ω, ρ^2) задает неvertикальную прямую. Точки, для которых будут верны соответствующие этим уравнениям неравенства системы (56), находятся в верхней полуплоскости относительно своей прямой. Поскольку есть точка на эллипсе, для которой оба неравенства выполнены, то система этих неравенств задает односвязную область на эллипсе. Посмотрим, на сколько частей эту односвязную область могут разделить остальные условия устойчивости.

Далее будем рассматривать отдельно два случая: $c = 0$ и $c \neq 0$.

Рассмотрим случай $c = 0$.

Лемма 2. *Точки множества $L(0, \gamma, \varphi)$, для которых система (49) верна, образуют непустую связную область.*

Доказательство. Выше было доказано, что точки множества $L(0, \gamma, \varphi)$, для которых второе и третье неравенства системы (56) (эта система эквивалентна системе (49)) верны, образуют непустую связную область, содержащую точку $(\omega_{up}, \rho_{up}^2)$. Также заметим, что из выполнения второго неравенства системы (49) при $c = 0$ следует выполнение третьего неравенства данной системы, поэтому если не выполняется система (49), то обязательно хотя бы одно из первых двух неравенств системы является неверным.

Рассмотрим уравнение, соответствующее первому неравенству системы (56) при $c = 0$. Это уравнение имеет вид

$$\rho^2(\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi) = \gamma^2 - (\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi)^2. \quad (57)$$

Найдем количество точек пересечения линии (57) с эллипсом $L(0, \gamma, \varphi)$. Уравнение (57) является квадратичной функцией относительно ρ^2 :

$$2\rho^4 + 3\rho^2(-1 + \gamma \cos \varphi) + (-1 + \gamma \cos \varphi)^2 - \gamma^2 = 0.$$

Дискриминант (57) положителен, корни находятся по формуле:

$$\rho_{\pm}^2 = \frac{3(1 - \gamma \cos \varphi) \pm \sqrt{(-1 + \gamma \cos \varphi)^2 + 8\gamma^2}}{4}.$$

Значения ρ^2 для точек эллипса меняется на отрезке $[\max\{0, -\gamma - \gamma \cos \varphi + 1\}, \gamma - \gamma \cos \varphi + 1]$. Поэтому корни ρ_{\pm}^2 системы (13), (57) тоже должны принадлежать этому отрезку. Легко видеть, что

$$\rho_-^2 < \max\{0, -\gamma - \gamma \cos \varphi + 1\} < \rho_+^2 < \gamma - \gamma \cos \varphi + 1.$$

Следовательно, система (13), (57) имеет два корня (ω_-, ρ_+^2) , (ω_+, ρ_+^2) . Поэтому линия, которую задает это уравнение, пересекает эллипс в двух точках (неравенство выполняется на дуге эллипса, соединяющей эти две точки и содержащей точку $(\omega_{up}, \rho_{up}^2)$).

Таким образом получаем, что точки множества $L(0, \gamma, \varphi)$, в которых выполнены все три неравенства системы (56), образуют непустую связную область, содержащую точку $(\omega_{up}, \rho_{up}^2)$. \square

Лемма 3. Пусть $c = 0$ и выполняется система (49). Тогда уравнение $H(z) = 0$ не имеет корней на отрезке $[-1, 1]$.

Доказательство. Докажем, что $H'(z)$ сохраняет знак на отрезке $[-1, 1]$. Найдем $H'(z)$:

$$H'(z) = 3\gamma^3 z^2 - 2\gamma^2 z(\gamma + 4\rho^2 \cos(\varphi - \Omega) + 2\gamma \cos^2(\varphi - \Omega)) + \gamma(-\gamma^2 + 2\rho^4 + 4\gamma\rho^2 \cos(\varphi - \Omega) + (4\gamma^2 + 3\rho^4) \cos^2(\varphi - \Omega) + 4\gamma\rho^2 \cos^3(\varphi - \Omega)).$$

$H'(z)$ — квадратичная по z функция. Вычислим абсциссу вершины параболы z_x :

$$z_x = \frac{\gamma + 4\rho^2 \cos(\varphi - \Omega) + 2\gamma \cos^2(\varphi - \Omega)}{3\gamma}.$$

Так как

$$3\gamma(z_x - 1) = 2 \cos(\varphi - \Omega) \left(\rho^2 + \rho^2 - \frac{\gamma \sin^2(\varphi - \Omega)}{\cos(\varphi - \Omega)} \right),$$

то в силу (49) имеем, что $z_x > 1$. Найдем значение $H'(1)$:

$$H'(1) = \gamma\rho^2 \left(\rho^2 + \rho^2 \sin^2(\varphi - \Omega) + 4 \cos^2(\varphi - \Omega) \left(\rho^2 - \frac{\gamma \sin^2(\varphi - \Omega)}{\cos(\varphi - \Omega)} \right) \right).$$

В силу (49) получаем, что $H'(1) > 0$. Из того, что коэффициент перед z^2 в $H'(z)$ положителен, $z_x > 1$ и $H'(1) > 0$ делаем вывод, что $H'(z)$ положительна при всех $z < 1$. Поэтому функция $H(z)$ на отрезке $[-1, 1]$ монотонна. А поскольку $H(-1)H(1) > 0$ и $H(z)$ — монотонна на $[-1, 1]$, то $H(z)$ сохраняет знак на отрезке $[-1, 1]$. Следовательно, у уравнения $H(z) = 0$ при $c = 0$ и выполнении системы (49) нет корней на отрезке $[-1, 1]$. \square

Из теорем 8 и 9 и лемм 2 и 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 10. На множестве $L(0, \gamma, \varphi)$ расположена односвязная область устойчивости и одна или две области неустойчивости.

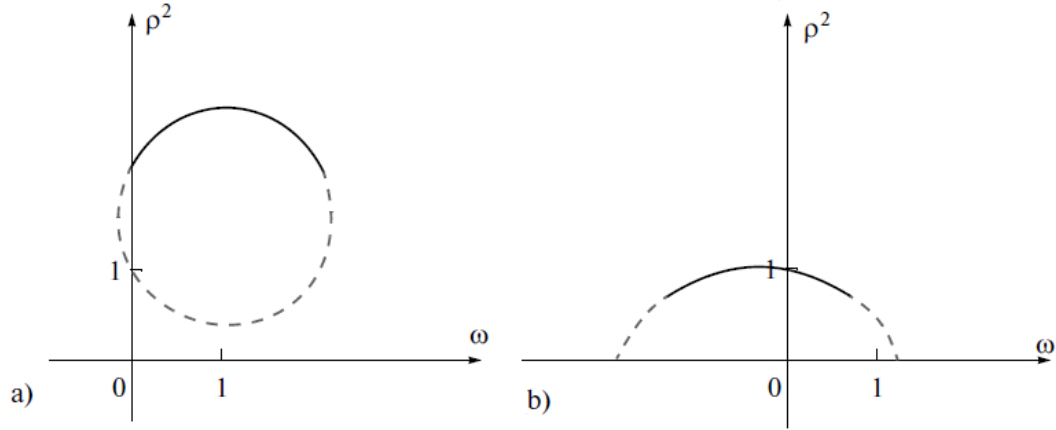


Рис. 1.3: Количество областей устойчивости и неустойчивости при $c = 0$. Значения параметров: а) $c = 0, \gamma = 1.2, \varphi = 4.2$; б) $c = 0, \gamma = 1.7, \varphi = 0.2$.

Иллюстрацией к теореме 10 служит рисунок 1.3. На рисунке 1.3 черной сплошной линией обозначены точки, соответствующие устойчивым решениям, а серой пунктирной линией — неустойчивым решениям.

Рассмотрим случай $c \neq 0$.

Лемма 4. Пусть $c \neq 0$. Тогда точки множества $L(c, \gamma, \varphi)$, для которых выполняется система (49), образуют одну или две непустых связных области.

Доказательство. Напомним, что точки множества $L(c, \gamma, \varphi)$, для которых выполняются второе и третье неравенства системы (49), образуют непустую связную область, содержащую точку $(\omega_{up}, \rho_{up}^2)$. Докажем, что точки, для которых дополнительно выполняется первое неравенство системы (49) зададут на этой области одну или две подобласти. Для этого найдем количество точек пересечения эллипса $L(c, \gamma, \varphi)$ и линии, получающейся путем замены знака „ $>$ “ на знак „ $=$ “ в первом неравенстве системы (56) (это неравенство эквивалентно первому неравенству системы (49)).

Рассмотрим систему из полученного уравнения

$$\rho^2(\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi - c(\omega - c\rho^2 + \gamma \sin \varphi)) = (1 + c^2)(\gamma^2 - (\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi)^2) \quad (58)$$

и уравнения (13). Легко увидеть, что уравнение (58) эквивалентно уравнению

$$\rho^2(\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi) + (1 + c^2)((\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi)^2 - \gamma^2) = \rho^2 c(\omega - c\rho^2 + \gamma \sin \varphi). \quad (59)$$

Возведем обе части уравнения (59) в квадрат, выразим величину $(\omega - c\rho^2 + \gamma \sin \varphi)^2$ из уравнения (13) :

$$\begin{aligned} (\rho^2(\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi) + (1 + c^2)((\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi)^2 - \gamma^2))^2 = \\ = \rho^4 c^2 (\gamma^2 - (\rho^2 - 1 + \gamma \cos \varphi)^2). \end{aligned} \quad (60)$$

Соберем коэффициенты при одинаковых степенях ρ в уравнении (60):

$$(1 + c^2)(4 + c^2)\rho^8 + 4(1 + c^2)(3 + c^2)(-1 + \gamma \cos \varphi)\rho^6 + ((3 + 2c^2)^2\gamma^2 + (1 + c^2)(13 + 6c^2)((-1 + \gamma \cos \varphi)^2 - \gamma^2))\rho^4 + (1 + c^2)^2((-1 + \gamma \cos \varphi)^2 - \gamma^2)^2 + 2(1 + c^2)(3 + 2c^2)(-1 + \gamma \cos \varphi)((-1 + \gamma \cos \varphi)^2 - \gamma^2)\rho^2 = 0. \quad (61)$$

Заметим, что в системе (13), (58) для каждого корня ρ_*^2 уравнения (60) есть не более одного соответствующего значения ω_* такого, что пара (ω_*, ρ_*^2) является корнем системы (13), (58). Поскольку относительно ρ^2 уравнение (61) является полиномом четвертого порядка и каждому корню (61) соответствует не более одного корня системы (13), (58), то третье неравенство (56) задает не более двух односвязных областей на эллипсе $L(c, \gamma, \varphi)$. Так как в точке $(\omega_{up}, \rho_{up}^2)$ выполняются все три неравенства системы (49), то пересечение областей множества $L(c, \gamma, \varphi)$, для которых выполняется первое неравенство системы (56), с областью, в которой выполняются второе и третье неравенства системы (56), непустое. А поскольку система (13), (58) задает одну или две области на множестве $L(c, \gamma, \varphi)$, то система (56) задает не менее одной и не более двух областей на множестве $L(c, \gamma, \varphi)$. Численно было выяснено, что на множестве $L(-9.5, 0.12, 3.5)$ расположены две области, для каждой точки которых выполнена система (56) выполнена. Таким образом, лемма доказана. \square

На рисунке 1.4 представлены примеры одной и двух областей устойчивости на эллипсе $L(c, \gamma, \varphi)$. Здесь, как и ранее, черной сплошной линией обозначены области устойчивости, а серой пунктирной линией — области неустойчивости.

Отдельно отметим, что для нижней области устойчивости, изображенной на рисунке 1.4.с), не выполнены достаточные условия устойчивости. Этот факт следует из того, что уравнение $H(z) = 0$ имеет корни на отрезке $[-1, 1]$ в точках кратчайшей дуги, соединяющей эти две области устойчивости. Поэтому для данных точек проводился численный эксперимент, который состоял в следующем. Система (27) с начальными условиями общего вида решалась на большом промежутке изменения временной переменной. Результаты эксперимента показали, что для точек из области (49) и выбранных начальных условий решения системы (27) устойчивы. Отметим также, что осталось неизвестным, может ли эллипс быть поделен на пять областей: две области устойчивости и три области неустойчивости, и может ли быть на эллипсе более двух областей устойчивости (поскольку полученные из условий (56) области теоретически могут разделиться на большее количество частей за счет наличия в правой комплексной полуплоскости корней (28) со стремящейся к бесконечности мнимой частью при $\varepsilon_m \rightarrow 0$). Численный анализ выражения $H(z)$ на отрезке $z \in [-1, 1]$ показал, что при условии выполнения системы неравенств (49) для всех рассматриваемых значений параметров

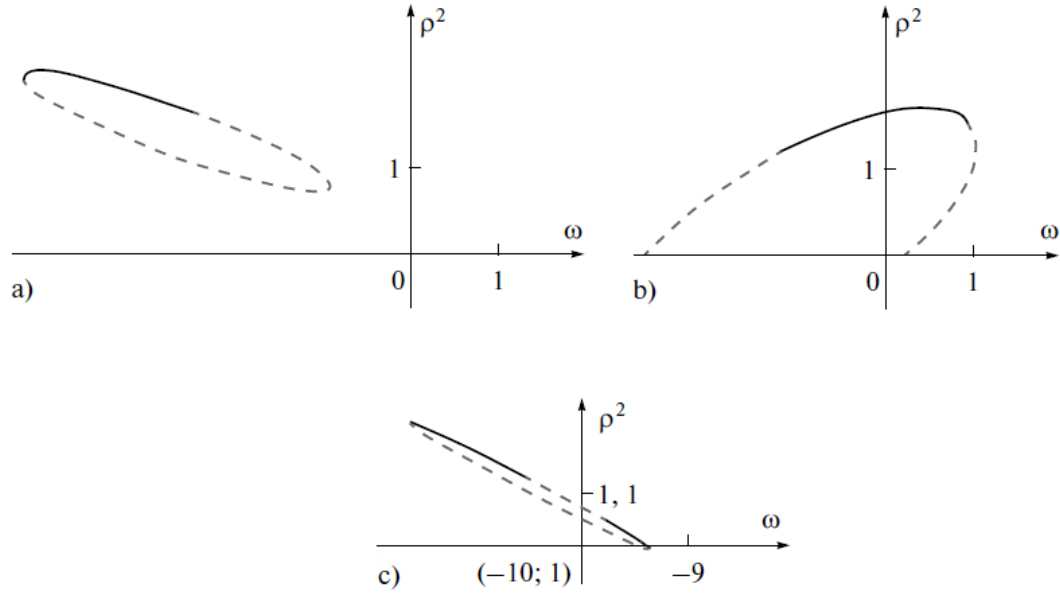


Рис. 1.4: Количество областей устойчивости и неустойчивости при $c \neq 0$. Значения параметров: а) $c = -2.3, \gamma = 0.7, \varphi = 4.1$; б) $c = 1, \gamma = 1.5, \varphi = 1$; в) $c = -9.5, \gamma = 0.12, \varphi = 3.5$.

выполнено неравенство $H(z) < -10^{-7}$ при всех z из отрезка $[-1, 1]$. В результате было выдвинуто предположение, что условие отсутствия корней у уравнения $H(z) = 0$ при выполнении условий (49) является избыточным.

1.2.5 Сводка основных результатов параграфа 1.2

Суммируем полученные выводы.

1. Доказано, что на плоскости (ω, ρ^2) существует однопараметрическое семейство, зависящее от параметров c, γ, φ , каждой точке которого соответствует счетное число простейших периодических решений (см. теоремы 5, 6, 7). При малых значениях параметра ε найдено асимптотическое приближение этих решений, зависящее от разрывной функции $\theta(\omega, \varepsilon)$.

2. Найдены достаточные условия устойчивости (см. теорему 8) и неустойчивости (см. теорему 9) простейших периодических решений. Причем в случае $c = 0$ найдены необходимые и достаточные условия устойчивости.

3. Доказано, что на любом эллипсе $L(c, \gamma, \varphi)$ обязательно есть хотя бы одна точка с устойчивыми решениями и хотя бы одна с неустойчивыми.

4. В случае $c = 0$ аналитически показано, что область устойчивости односвязна (см. теорему 10).

Выводы

В данной главе проведен анализ существования и устойчивости автомодельных циклов для двух распределенных моделей — с распределением по пространству и по времени. Найдены условия существования автомодельных циклов, получены асимптотические приближения данных решений. Сформулированы достаточные условия устойчивости и неустойчивости отдельных решений и описана геометрия множеств устойчивых решений в зависимости от значений параметров. Модель Гизбурга-Ландау с малой диффузией и уравнение Стюарта-Ландау с большим запаздыванием роднит несколько обстоятельств.

Во-первых, у обеих систем есть решения в виде автомодельных циклов.

Во-вторых, эти решения образуют однопараметрическое семейство.

В-третьих, в обеих моделях может наблюдаться гипермультистабильность (то есть можно добиться сосуществования сколь угодно большого конечного числа устойчивых решений).

Глава 2

Существование и устойчивость непрерывных волн в моделях лазерной динамики

В данной главе рассмотрены вопросы существования и устойчивости решений вида непрерывных волн для двух моделей лазерной динамики. В обеих моделях ключевым предположением является то, что время обхода резонатора (время запаздывания) является достаточно большим. Для каждой модели построено специальное множество на двумерной плоскости, каждая точка которого определяет „главную часть“ решения вида непрерывной волны. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости непрерывных волн при достаточно больших значениях запаздывания и изучено расположение областей устойчивости на данных множествах.

2.1 Существование и устойчивость непрерывных волн в модели FDML лазера с большим запаздыванием

2.1.1 Постановка задачи

Рассмотрим модель лазера с синхронизацией мод в частотном диапазоне (в англоязычной литературе принята аббревиатура FDML [50, 52, 53]), предложенную А. Г. Владимировым [74],

$$\begin{aligned}\dot{A} + A - i\Delta A &= \sqrt{\kappa} e^{(1-i\alpha)G(t-T)/2} A(t-T), \\ \dot{G} &= \gamma(g_0 - G - G|A|^2).\end{aligned}$$

Здесь все параметры Δ , α , κ , T , γ , g_0 принимают действительные значения, причем параметры γ и g_0 положительные, $0 < \kappa < 1$, а время запаздывания является достаточно большим $T \gg 1$.

Обозначим $\varepsilon = 1/T$, тогда $0 < \varepsilon \ll 1$, и произведем перенормировку времени $t \rightarrow Tt$. После замены $A(t) = e^{i\Delta t/\varepsilon} a(t)$, система примет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{a} + a &= \sqrt{\kappa} e^{(1-i\alpha)G(t-1)/2} a(t-1) e^{-i\Delta/\varepsilon}, \\ \varepsilon \dot{G} &= \gamma(g_0 - G - G|a|^2).\end{aligned}\quad (1)$$

Задача состоит в поиске решений типа непрерывной волны и исследования их на устойчивость.

2.1.2 Существование решений вида непрерывных волн

Будем искать решение в виде непрерывной волны:

$$a = R e^{i\Phi t}, \quad G = G_0, \quad (2)$$

где R , Φ и G_0 действительные, не зависят от времени, $R > 0$ и $G_0 > 0$. Величину R будем искать в виде $R = \rho + \varepsilon v$, а Φ в виде $\Phi = \delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d$. Здесь δ константа, Ω — постоянная из полуинтервала $[0, 2\pi)$, ρ — положительная постоянная, n — целое число, $v = v(\varepsilon)$ и $d = d(\varepsilon)$ некоторые ограниченные при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции. Величина $\theta = \theta(\Delta, \delta, \varepsilon)$ — функция со значениями из полуинтервала $[0, 2\pi)$, такая, что $(\Delta + \delta)/\varepsilon + \theta$ нацело делится на 2π . Подставляя (2) в систему (1), получаем систему уравнений для определения R , Φ и G_0

$$\begin{aligned}i(\delta + \varepsilon(\theta + \Omega + 2\pi n) + \varepsilon^2 d) + 1 &= \sqrt{\kappa} \exp\left(\frac{g_0(1-i\alpha)}{2(1+(\rho+\varepsilon v)^2)} - i(\Omega + \varepsilon d)\right), \\ G_0 &= g_0(1+(\rho+\varepsilon v)^2)^{-1}.\end{aligned}\quad (3)$$

Поскольку ε — малый параметр, то должно выполняться равенство

$$i\delta + 1 = \sqrt{\kappa} \exp\left(g_0/2(1-i\alpha)(1+\rho^2)^{-1} - i\Omega\right). \quad (4)$$

Пусть

$$\delta^2 = \kappa \exp(g_0(1+\rho^2)^{-1}) - 1. \quad (5)$$

Из (5) следует, что для каждой пары δ , ρ^2 существует единственное значение Ω из полуинтервала $[0, 2\pi)$ такое, что выполняется равенство (4). Очевидно, что для существования решений необходимо выполнение неравенства

$$\kappa e^{g_0} - 1 > 0. \quad (6)$$

Обозначим $\rho_{max}^2 = g_0 \ln^{-1}(\kappa^{-1}) - 1$. Если условие (6) выполнено, то для каждого $\rho^2 \in [0, \rho_{max}^2]$ существует действительное δ такое, что (5) выполняется. Будем называть множество точек (δ, ρ^2) , для которых выполнено равенство (5), множеством $\Gamma(\kappa, g_0)$ (см. рисунок 2.1).

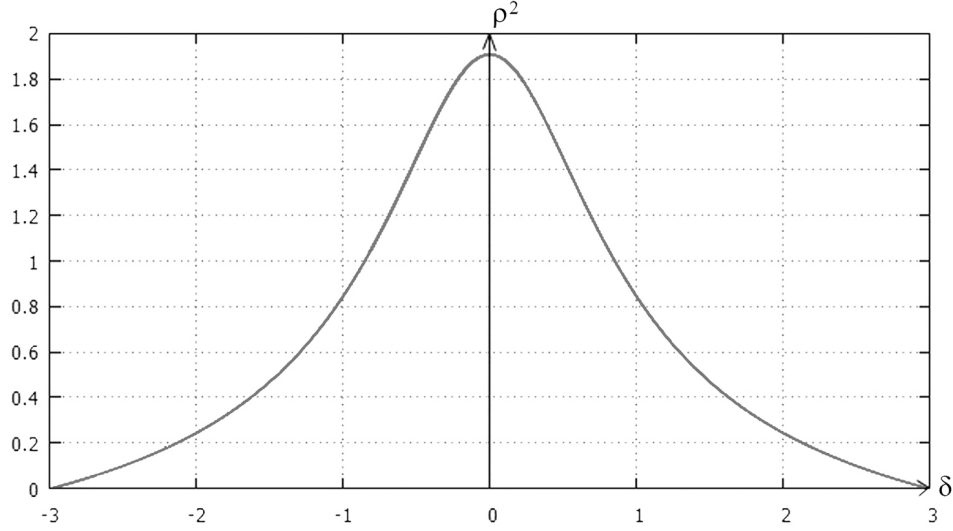


Рис. 2.1: Вид кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$.

Временно будем считать θ фиксированным значением. Пусть выполняются условия (4)-(6). Тогда получаем следующую систему для определения нулевого приближения (v_0, d_0) функций $v(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} 0 &= -\delta d_0 + g_0 \rho (1 + \alpha \delta) (1 + \rho^2)^{-2} v_0, \\ \Omega + 2\pi n + \theta &= -d_0 + g_0 \rho (\alpha - \delta) (1 + \rho^2)^{-2} v_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку определитель системы (7) равномерно по θ из $[0, 2\pi]$ отличен от нуля, то нулевое приближение функций $v(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$ найдется единственным образом и будут выполняться условия теоремы о неявной функции. Следовательно, при любом фиксированном θ из полуинтервала $[0, 2\pi)$ существуют такие ограниченные при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $v(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$, что равенство (3) будет верным. После этого остается лишь подставить вместо фиксированного θ значение функции $\theta(\Delta, \delta, \varepsilon)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 11. Пусть выполнено неравенство (6). Тогда для каждой точки (δ_0, ρ_0^2) множества $\Gamma(\kappa, g_0)$ и для каждого целого n при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение (2) уравнения (1), где $R = \rho_0 + \varepsilon v$, $\Phi = \delta_0/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d$, $G_0 = g_0(1 + (\rho_0 + \varepsilon v)^2)^{-1}$.

2.1.3 Устойчивость непрерывных волн

Постановка задачи об устойчивости

Представим решение $G = G_0$ второго уравнения системы (1) как функцию от $|a|^2$:

$$G = g_0(1 + |a|^2)^{-1}.$$

Подставляя данное выражение в первое уравнение системы (1), получим следующее уравнение на функцию a :

$$\varepsilon \dot{a} + a = \sqrt{\kappa} \exp\left(\frac{g_0(1 - i\alpha)}{2(1 + |a(t-1)|^2)}\right) a(t-1)e^{-i\Delta/\varepsilon}. \quad (8)$$

Для каждого фиксированного целого n при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ у этого уравнения есть решение

$$a = (\rho + \varepsilon v) \exp[i(\delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d)t]. \quad (9)$$

Мы будем искать такие условия устойчивости (неустойчивости), что для каждого целого n при всех достаточно малых значениях параметра $\varepsilon > 0$ решения вида (9) уравнения (8) будут устойчивыми (неустойчивыми) в фазовом пространстве $C[-1, 0]$ [15, 82].

Построение характеристического квазиполинома

Линеаризуем уравнение (8) на решении (9). Для этого рассмотрим возмущение данного решения $a = (\rho + \varepsilon v) \exp[i(\delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d)t](1 + z)$, где $z = z_1 + iz_2$, z_1 и z_2 действительные функции. Линеаризованная система будет иметь вид

$$\varepsilon \dot{z} = \sqrt{\kappa} \exp\left(\frac{g_0(1 - i\alpha)}{2(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)} - i(\Omega + \varepsilon d)\right) \left(z(t-1) - z - \frac{g_0(1 - i\alpha)(\rho + \varepsilon v)^2}{(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)^2} z_1(t-1) \right).$$

Пользуясь первым уравнением системы (3), получаем, что

$$\begin{aligned} \sqrt{\kappa} \exp(W) \cos(\xi) &= 1, \\ -\sqrt{\kappa} \exp(W) \sin(\xi) &= \delta + \varepsilon(\Omega + \theta + 2\pi n) + \varepsilon^2 d, \end{aligned} \quad (10)$$

где $W = g_0/2(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)^{-1}$, а $\xi = \Omega + \varepsilon d + g_0\alpha/2(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)^{-1}$. Используя равенства (10), получаем характеристический квазиполином

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \lambda^2 - 2\varepsilon \lambda \left(e^{-\lambda} - 1 - e^{-\lambda} \frac{g_0(\rho + \varepsilon v)^2}{2(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)^2} (1 + \alpha(\delta + \varepsilon(\Omega + \theta + 2\pi n) + \varepsilon^2 d)) \right) + \\ + \kappa \exp\left(\frac{g_0}{1 + (\rho + \varepsilon v)^2}\right) (e^{-\lambda} - 1) \left(e^{-\lambda} - 1 - e^{-\lambda} \frac{g_0(\rho + \varepsilon v)^2}{(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Изучение расположения корней характеристического квазиполинома

Для того, чтобы сделать вывод об устойчивости решения, необходимо изучить расположение корней квазиполинома (11). Так как мы линеаризовывали уравнение (8) на периодическом решении, то у характеристического уравнения при всех значениях параметров есть корень $\lambda = 0$. Поэтому речь пойдет об орбитальной устойчивости решения (9). Далее будем изучать расположение остальных корней данного квазиполинома. Если все они будут находиться в левой комплексной полуплоскости при всех достаточно малых значениях положительного параметра ε , то это будет означать устойчивость. Если же при всех достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ найдется хотя бы один корень в правой комплексной полуплоскости, то это будет означать неустойчивость периодического решения (9) уравнения (8).

Пусть $\lambda_* = \lambda_*(\varepsilon)$ — некоторый корень (11). Тогда потенциально возможны три варианта.

Случай 1. $\varepsilon_m \lambda_* \rightarrow 0$ на некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}$ такой, что $\varepsilon_m \rightarrow 0$.

Случай 2. $\varepsilon_m \lambda_* \rightarrow \text{const} \neq 0$ на некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}$ такой, что $\varepsilon_m \rightarrow 0$.

Случай 3. $|\varepsilon_m \lambda_*| \rightarrow \infty$ на некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}$ такой, что $\varepsilon_m \rightarrow 0$.

Из уравнения (11) видно, что в третьем случае $\text{Re} \lambda_* \rightarrow -\infty$ при $\varepsilon_m \rightarrow 0$. Поэтому данный случай интереса не представляет.

Далее последовательно рассмотрим первые два варианта.

Случай 1. Потенциально возможны 3 варианта поведения λ_* .

а) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_i}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\lambda_* \rightarrow 0$ при $\varepsilon_{m_i} \rightarrow 0$.

б) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_i}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\lambda_* \rightarrow \text{const} \neq 0$ при $\varepsilon_{m_i} \rightarrow 0$.

в) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_i}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $|\lambda_*| \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_{m_i} \lambda_* \rightarrow 0$ при $\varepsilon_{m_i} \rightarrow 0$.

Рассмотрим случай 1.а). Поскольку мы линеаризовывали задачу на периодическом решении, то при любых значениях параметров есть корень $\lambda = 0$ кратности один, который на устойчивость не влияет.

Посмотрим, к каким ненулевым константам может стремиться λ_* при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ (случай 1.б)). Предельное уравнение имеет вид

$$\kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) (e^{-\lambda} - 1) (e^{-\lambda} - 1 - e^{-\lambda} g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2}) = 0. \quad (12)$$

Отсюда получаем, что либо $\lambda_* = 2\pi k i + o(1)$, либо $e^{-\lambda_*} = (1 - g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2})^{-1} + o(1)$ при $\varepsilon_{m_i} \rightarrow 0$.

Подставив в (11) представление $\lambda_* = 2\pi ki + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2$, где λ_1 и λ_2 — неизвестные комплексные величины, получим, что

$$\lambda_* = 2\pi ki - (1 + \alpha\delta)2\pi ki\kappa^{-1} \exp(-g_0(1 + \rho^2)^{-1}) \varepsilon + i \operatorname{Im} \lambda_2 \varepsilon^2 + 2\pi^2 k^2 \left(2(1 + \rho^2)^2 \delta^2 (1 + \alpha^2) - g_0 \rho^2 (1 + \alpha\delta)^2 \right) (g_0 \kappa^2 \rho^2)^{-1} \exp(-2g_0(1 + \rho^2)^{-1}) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (13)$$

Тогда при условии общности положения (то есть при $\operatorname{Re} \lambda_2 \neq 0$) из формулы (13) получаем необходимое условие устойчивости

$$2(1 + \rho^2)^2 \delta^2 (1 + \alpha^2) - g_0 \rho^2 (1 + \alpha\delta)^2 < 0. \quad (14)$$

Пусть в (12) зануляется последний множитель. Тогда для того, чтобы корень λ_* находился в левой полуплоскости, необходимо выполнение условия

$$g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2} < 2. \quad (15)$$

Если $0 < g_0 < 8$, то условие (15) выполняется, а если $g_0 > 8$, то условие (15) эквивалентно совокупности

$$\begin{cases} \rho^2 < \frac{g_0 - 4 - \sqrt{g_0(g_0 - 8)}}{4}, \\ \rho^2 > \frac{g_0 - 4 + \sqrt{g_0(g_0 - 8)}}{4}. \end{cases} \quad (16)$$

Рассмотрим случай 1.в). Из уравнения (11) легко видеть, что условия $\varepsilon_{m_l} \lambda_* \rightarrow 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_* \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$ не могут выполняться одновременно ни на какой последовательности $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$. Случай стремления $\operatorname{Re} \lambda_* \rightarrow -\infty$ интереса не представляет. Поэтому на некоторой последовательности ε_{m_l} величина $\operatorname{Re} \lambda_*$ стремится к некоторой константе, а $\operatorname{Im} \lambda_*$ стремится к бесконечности при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$. Выделим в этой последовательности несколько (возможно, счетное число) подпоследовательностей $\{\varepsilon_j\}$ таких, что дробная часть выражения $\operatorname{Im} \lambda_*/(2\pi)$ принимает одинаковое (для каждой последовательности свое) значение для всех $j = 1, 2, \dots$. Тогда на каждой последовательности ε_j существует предел выражения $e^{-\lambda}$, равный $e^{-\alpha}$, причем α удовлетворяет уравнению (12). Поскольку α удовлетворяет уравнению (12), то либо корень λ_* находится в левой полуплоскости при всех достаточно малых значениях параметра $\varepsilon_j > 0$ (при выполнении условия (16)), либо $\lambda_* = 2\pi k(\varepsilon_j)i + o(1)$, где $k(\varepsilon_j) \rightarrow \infty$, $\varepsilon_j k(\varepsilon_j) \rightarrow 0$ при $\varepsilon_j \rightarrow 0$ и $k(\varepsilon_j)$ принимает только целые значения. Таким образом в последней ситуации корень λ_* можно представить в виде

$$\lambda_* = 2\pi k(\varepsilon_j)i + \lambda_{k,1} + i\lambda_{k,2}, \quad (17)$$

где действительные величины $\lambda_{k,1}$ и $\lambda_{k,2}$ стремятся к нулю при $\varepsilon_j \rightarrow 0$. Пусть $\mu = \varepsilon k(\varepsilon)$, тогда $\mu \rightarrow 0$ и $\varepsilon = o(\mu)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Подставляя (17) в уравнение (11), получаем следующее уравнение

$$\begin{aligned}
& -4\pi^2\mu^2 + o(\mu^2) - 2(2\pi\mu i + \varepsilon\lambda_{k,1} + \varepsilon\lambda_{k,2}i) \left(-\frac{g_0\rho^2(1+\alpha\delta)}{2(1+\rho^2)^2} + O(\varepsilon) + \left(-\lambda_{k,1} - i\lambda_{k,2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\lambda_{k,1}^2}{2} + i\lambda_{k,1}\lambda_{k,2} - \frac{\lambda_{k,2}^2}{2} \right) \left(1 - \frac{g_0\rho^2(1+\alpha\delta)}{2(1+\rho^2)^2} \right) + O(\lambda_{k,1}^3 + \lambda_{k,2}^3) \right) + \kappa \exp \left(\frac{g_0}{1+\rho^2} - \right. \\
& \left. - \frac{2g_0\rho}{(1+\rho^2)^2} \varepsilon v + O(\varepsilon^2) \right) \left(-\lambda_{k,1} - i\lambda_{k,2} + \frac{\lambda_{k,1}^2}{2} + i\lambda_{k,1}\lambda_{k,2} - \frac{\lambda_{k,2}^2}{2} + O(\lambda_{k,1}^3 + \lambda_{k,2}^3) \right) \cdot \\
& \cdot \left(-\frac{g_0\rho^2}{(1+\rho^2)^2} - \frac{2g_0\rho(1-\rho^2)}{(1+\rho^2)^3} \varepsilon v + \left(-\lambda_{k,1} - i\lambda_{k,2} + \frac{\lambda_{k,1}^2}{2} + i\lambda_{k,1}\lambda_{k,2} - \frac{\lambda_{k,2}^2}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + O(\lambda_{k,1}^3 + \lambda_{k,2}^3) \right) \left(1 - \frac{g_0\rho^2}{(1+\rho^2)^2} - \frac{2g_0\rho(1-\rho^2)}{(1+\rho^2)^3} \varepsilon v \right) + O(\varepsilon^2) \right) = 0. \quad (18)
\end{aligned}$$

Выпишем „главные“ члены асимптотики:

$$2\pi\mu i g_0\rho^2(1+\alpha\delta)(1+\rho^2)^{-2} + \kappa \exp(g_0(1+\rho^2)^{-1})(\lambda_{k,1} + i\lambda_{k,2})g_0\rho^2(1+\rho^2)^{-2} = 0.$$

Отсюда получаем, что $\lambda_{k,2} = O(\mu)$, $\lambda_{k,1} = o(\mu)$, $\lambda_{k,2} = \lambda_{k,20} + \lambda_{k,21}$, где $\lambda_{k,21} = o(\mu)$ и

$$\lambda_{k,2} = -2\pi\mu(1+\alpha\delta)\kappa^{-1} \exp(-g_0(1+\rho^2)^{-1}).$$

Подставив эти равенства в уравнение (18), с учетом равенства (5) найдем уравнение для следующего приближения λ_* :

$$\begin{aligned}
& \frac{2\pi^2\mu^2}{\kappa \exp(g_0(1+\rho^2)^{-1})} \left(-2\delta^2(1+\alpha^2) + (1+\alpha\delta)^2 \frac{g_0\rho^2}{(1+\rho^2)^2} \right) + \\
& + \kappa \exp(g_0(1+\rho^2)^{-1}) \frac{g_0\rho^2}{(1+\rho^2)^2} (\lambda_{k,1} + i\lambda_{k,21}) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, при малых μ корень λ_* будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\lambda_* = 2\pi k(\varepsilon_j)i - \frac{2\pi(1+\alpha\delta)i}{\kappa \exp(g_0(1+\rho^2)^{-1})} \mu + \\
+ \frac{2\pi^2(2(1+\rho^2)^2\delta^2(1+\alpha^2) - g_0\rho^2(1+\alpha\delta)^2)}{g_0\kappa^2\rho^2 \exp(2g_0(1+\rho^2)^{-1})} \mu^2 + o(\mu^2).
\end{aligned}$$

Заметим, что внутри $o(\mu^2)$ не содержится номеров корней, поэтому действительная часть асимптотики λ_* является равномерной по номеру k . В силу (14) корень λ_* будет находиться в левой комплексной полуплоскости.

Случай 2. $\varepsilon_m \lambda_* \rightarrow \text{const} \neq 0$ при $\varepsilon_m \rightarrow 0$.

Потенциально возможны 2 варианта поведения λ_* :

- а) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\text{Re } \lambda_* \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$;
- б) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\text{Re } \lambda_* \rightarrow \text{const} \geq 0$, а $\text{Im } \lambda_* \rightarrow \infty$ при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$.

Пусть $\text{Re } \lambda_* \rightarrow +\infty$ и $\lim_{\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0} \varepsilon_{m_l} \lambda_* = s$. Тогда предельное уравнение примет вид

$$s^2 + 2s + \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) = 0. \quad (19)$$

Поскольку у уравнения (19) корни в левой полуплоскости, то случай 2.а) невозможен.

Рассмотрим случай 2.б). Введем обозначения. Пусть $\lim_{\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0} |e^{-\lambda_*}| = b$, а на некоторой подпоследовательности $\varepsilon_{m_{l_r}} \rightarrow 0$ имеем $\lim_{\varepsilon_{m_{l_r}} \rightarrow 0} \varepsilon_{m_{l_r}} \text{Im } \lambda_* = \beta$. Очевидно, что $\beta \neq 0$ и $0 < b \leq 1$. Будем обозначать через φ некоторое число из полуинтервала $[0, 2\pi)$. Тогда семейство предельных уравнений будет иметь вид

$$-\beta^2 - 2i\beta [be^{-i\varphi} (1 - 1/2(1 + \alpha\delta)g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}) - 1] + \\ + \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) (be^{-i\varphi} - 1) (be^{-i\varphi} (1 - g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}) - 1) = 0. \quad (20)$$

Здесь φ может принимать любое значение из $[0, 2\pi)$, поскольку $\text{Im } \lambda_* \rightarrow \infty$. Если при любом значении (b, φ) из $(0, 1] \times [0, 2\pi)$ у уравнения (20) не будет действительных корней β , отличных от нуля, то у уравнения (11) не будет корней в правой полуплоскости и на мнимой оси из случая 2.б).

Выделим действительную и мнимую части в уравнении (20):

$$\beta^2 + 2\beta b \sin \varphi (1 - 1/2g_0\rho^2(1 + \alpha\delta)(1 + \rho^2)^{-2}) = \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) ((b \cos \varphi - \\ - 1) (-1 + b \cos \varphi (1 - g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2})) - b^2 \sin^2 \varphi (1 - g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2})), \quad (21)$$

$$\beta (1 - b \cos \varphi (1 - 1/2g_0\rho^2(1 + \alpha\delta)(1 + \rho^2)^{-2})) = \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) b \sin \varphi \times \\ \times (b \cos \varphi (1 - g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}) - 1 + 1/2g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}). \quad (22)$$

Рассмотрим уравнение (22). Пусть коэффициент при β равен нулю, то есть выполнено равенство

$$b \cos \varphi = (1 - 1/2g_0\rho^2(1 + \alpha\delta)(1 + \rho^2)^{-2})^{-1}. \quad (23)$$

Для того, чтобы уравнение (22) имело решения, необходимо, чтобы правая часть уравнения (22) тоже равнялась нулю.

Пусть $\sin \varphi \neq 0$. Тогда выполняется система уравнений (23) и

$$b \cos \varphi (1 - g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2}) - 1 + 1/2 g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2} = 0. \quad (24)$$

Выражая $b \cos \varphi$ из первого уравнения и обозначая $1/2 g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2}$ за x , получаем уравнение

$$(1 - 2x) - (1 - x)(1 - x(1 + \alpha\delta)) = 0.$$

В силу положительности x получаем единственный возможный корень $x = \alpha\delta(1 + \alpha\delta)^{-1}$. Отсюда $b \cos \varphi = 1/(1 - \alpha\delta)$. Из условий $x > 0$ и $|b \cos \varphi| < 1$ получаем, что

$$\begin{cases} \alpha\delta < -1, \\ \alpha\delta > 2. \end{cases} \quad (25)$$

Тогда уравнение (21) принимает вид

$$-\beta^2 - 2\beta b \sin \varphi (1 - \alpha\delta) + \kappa \exp\left(\frac{g_0}{1 + \rho^2}\right) \left(\frac{\alpha^2 \delta^2}{\alpha^2 \delta^2 - 1} + b^2 \sin^2 \varphi \frac{\alpha\delta - 1}{\alpha\delta + 1}\right) = 0. \quad (26)$$

В силу условия (25) уравнение (26) имеет два действительных корня β разных знаков. Таким образом, при условиях (25) и

$$1/2 g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2} = \alpha\delta / (1 + \alpha\delta) \quad (27)$$

система (21), (22) имеет действительные ненулевые корни β .

Пусть теперь $\sin \varphi = 0$. Тогда $\cos \varphi = \pm 1$. Уравнение (21) принимает вид

$$\beta^2 = \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) (\pm b - 1) (-1 \pm b(1 - g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2})).$$

Произведение первых трех сомножителей отрицательно (т.к. $|b| < 1$), а за счет выбора знака перед b в четвертом сомножителе, мы можем добиться того, что и он будет отрицательным. Поэтому единственным условием, которое надо проверить, является условие, что правая часть уравнения (23) по модулю меньше единицы. Это условие выполнено, если

$$\begin{cases} \alpha\delta < -1, \\ \alpha\delta > 4(1 + \rho^2)^2 (g_0 \rho^2)^{-1} - 1. \end{cases} \quad (28)$$

Следовательно, при условии (28) у системы (21), (22) есть ненулевые корни β .

Посмотрим, возможна ли ситуация, когда в точке (δ, ρ^2) выполняются условия (27) и

$$2 < \alpha\delta < 4(1 + \rho^2)^2 (g_0 \rho^2)^{-1} - 1. \quad (29)$$

Из условия (29) следует, что

$$g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2} < 4/3.$$

Подставляя равенство (27) в последнее неравенство получаем, что должно выполняться условие $\alpha \delta < 2$. Поэтому система (27), (29) несовместна.

Таким образом, для устойчивости потребуем выполнение неравенства

$$-1 < \alpha \delta < 4(1 + \rho^2)^2 (g_0 \rho^2)^{-1} - 1. \quad (30)$$

Еще раз обратим внимание, что в случае нарушения условия (30) не удастся сформулировать выводов об устойчивости.

Пусть теперь коэффициент при β в уравнении (22) отличен от нуля. Тогда β находится единственным образом. Подставляя найденное из уравнения (22) значение β в уравнение (21), получаем уравнение четвертой степени относительно $\cos \varphi$. Подставим в это уравнение вместо (δ, ρ^2) верхнюю точку кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$. Значение выражения в данной точке равно

$$\begin{aligned} & g_0^{-1} (1 - b \cos \varphi) (g_0 + b \cos \varphi (-g_0 + g_0 \ln(\kappa^{-1}) - \ln^2(\kappa^{-1}))) \left(4g_0^2 + b^2 g_0^2 \ln^2(\kappa^{-1}) - \right. \\ & \quad \left. - 2b^2 g_0 \ln^3(\kappa^{-1}) + b^2 \ln^4(\kappa^{-1}) + 4bg_0 \cos \varphi (-2g_0 + g_0 \ln(\kappa^{-1}) - \ln^2(\kappa^{-1})) - \right. \\ & \quad \left. - 4b^2 g_0 \cos^2 \varphi (-g_0 + g_0 \ln(\kappa^{-1}) - \ln^2(\kappa^{-1})) \right) \left(2g_0 + b \cos \varphi (-2g_0 + g_0 \ln(\kappa^{-1}) - \right. \\ & \quad \left. - \ln^2(\kappa^{-1})) \right)^{-2}. \quad (31) \end{aligned}$$

Лемма 5. Пусть в точке $(0, g_0 / \ln(\kappa^{-1}) - 1)$ кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ выполнено условие (15). Тогда выражение (31) не равно нулю при всех значениях пары $(b, \cos \varphi)$ из $(0, 1] \times [-1, 1]$ и $\beta \neq 0$.

Доказательство. Первый множитель (31), очевидно, не равен нулю. Равенство нулю второго множителя соответствует тому, что корень $\beta = 0$, чего не может быть в силу определения β . Так как в точке $(0, g_0 / \ln(\kappa^{-1}) - 1)$ выполнено условие (15), то верно двойное неравенство

$$0 < g_0 \ln(\kappa^{-1}) - \ln^2(\kappa^{-1}) < 2g_0. \quad (32)$$

Поэтому третий множитель числителя и знаменатель (31) не равны 0. Рассмотрим четвертый множитель. Сделаем замену $z = \cos \varphi$, тогда получим квадратный трехчлен $f(z)$, где новая переменная z изменяется на отрезке $[-1, 1]$. Докажем, что у уравнения $f(z) = 0$ нет корней на отрезке $[-1, 1]$. Если коэффициент перед z^2 в квадратном трехчлене равен 0, то у уравнения $f(z) = 0$ есть единственный

корень $z = \frac{1}{b} + \frac{b}{4}$. Очевидно, он больше единицы. Если же коэффициент перед z^2 не равен нулю, тогда

$$f(1) = (-2g_0 + b(2g_0 - g_0 \ln(\kappa^{-1}) + \ln^2(\kappa^{-1})))^2,$$

$$f(-1) = (2g_0 + b(2g_0 - g_0 \ln(\kappa^{-1}) + \ln^2(\kappa^{-1})))^2.$$

Учитывая условие (32) получаем, что $f(1) > 0$ и $f(-1) > 0$. Таким образом, если коэффициент при z^2 отрицательный, то, очевидно, корней у $f(z)$ на отрезке $[-1, 1]$ нет. Пусть коэффициент при z^2 положительный. Абсцисса вершины параболы $f(z)$ равна

$$b^{-1}(2g_0 - g_0 \ln(\kappa^{-1}) + \ln^2(\kappa^{-1}))(2g_0 - 2g_0 \ln(\kappa^{-1}) + 2\ln^2(\kappa^{-1}))^{-1}.$$

В силу условия (32) и положительности коэффициента перед z^2 , абсцисса вершины параболы находится правее единицы. Так как парабола расположена ветвями вверх, $f(1) > 0$ и абсцисса вершины параболы правее единицы, то на всем отрезке $[-1, 1]$ функция $f(z)$ положительна. Лемма доказана. \square

Таким образом, выполнение условий (14), (15) и (30) в верхней точке кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ гарантирует, что у квазиполинома (11) не будет корней на мнимой оси и в правой полуплоскости в этой точке кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$. Следовательно, для того, чтобы корни оказались в правой полуплоскости или на мнимой оси в другой точке кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$, сначала они должны пересечь мнимую ось в некоторой точке кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$. Поэтому рассмотрим систему уравнений (21) и (22) при $b = 1$ (это соответствует тому, что корень квазиполинома λ из случая 2.б) будет в пределе находиться на мнимой оси). Подставив выражение для β из уравнения (22) в уравнение (21), домножив все уравнение на ненулевой знаменатель и заменив $\cos \varphi$ на z , приходим к следующему уравнению четвертой степени относительно z :

$$w \left((16 - 8(2 + \alpha\delta)y + 2(2 + 3\alpha\delta + \alpha^2\delta^2)y^2 - (1 + \alpha\delta)^2y^3 + w(-4 + 8y - 3y^2))z + 4(1 - y)(-2 - w + (1 + \alpha\delta)y)z^2 + w(-2 + y)^2 - 2(4 - 2(1 + \alpha\delta)y + (1 + \alpha\delta)y^2) + 4w(-1 + y)^2z^3 \right) (1 - z) = 0. \quad (33)$$

Здесь $w = \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1})$, а $y = g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}$. Первый множитель (33), очевидно, не равен нулю, равенство третьего множителя соответствует нулевому β , поэтому нас не интересует. Рассмотрим второй сомножитель. Обозначим его за $q(z)$. Будем далее считать, что все условия (14), (15) и (30) выполнены. Найдем $q(-1)$ и $q(1)$:

$$q(-1) = (-2 + y)(-4 + (1 + \alpha\delta)y)^2,$$

$$q(1) = -y^2(2(1 - w - \alpha^2\delta^2) + (1 + \alpha\delta)^2y).$$

В силу условий (5), (14), (15) и (30) получаем, что $q(-1) < 0$ и $q(1) < 0$. Следовательно, для того, чтобы полином $q(z)$ не имел корней на отрезке $[-1, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы у данной функции не было неотрицательного локального максимума на отрезке $[-1, 1]$. Выполнение этого условия — легко проверяемая задача для каждой конкретной точки кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$.

Таким образом, верны следующие теоремы.

Теорема 12 (Достаточное условие устойчивости). *Пусть в точке $(0, \rho_{max}^2)$ кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ выполнено условие (15). Пусть в точке (δ_0, ρ_0^2) кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ выполнены условия (14), (15), (30), а уравнение $q(z) = 0$ не имеет корней на отрезке $[-1, 1]$ для всех точек дуги кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$, соединяющей точки $(0, \rho_{max}^2)$ и (δ_0, ρ_0^2) . Тогда для каждого целого n существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение (9) уравнения (8) с $\delta = \delta_0$ и $\rho^2 = \rho_0^2$ устойчиво.*

Для формулировки теоремы о неустойчивости введем следующую совокупность неравенств

$$\begin{cases} 2(1 + \rho^2)^2\delta^2(1 + \alpha^2) - g_0\rho^2(1 + \alpha\delta)^2 > 0, \\ g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2} > 2. \end{cases} \quad (34)$$

Теорема 13 (Достаточное условие неустойчивости). *Пусть в точке (δ_0, ρ_0^2) кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ выполнено условие (34). Тогда для каждого целого n существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение (9) уравнения (8) с $\delta = \delta_0$ и $\rho^2 = \rho_0^2$ неустойчиво.*

2.1.4 Расположение областей устойчивости на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$

Будем говорить, что точка (δ_0, ρ_0^2) множества $\Gamma(\kappa, g_0)$ принадлежит области устойчивости, если все решения (9) уравнения (8) с $\rho^2 = \rho_0^2$ и $\delta = \delta_0$ устойчивы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим сначала случай $\alpha = 0$. В этом случае задачу расположения областей устойчивости на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ удастся полностью решить аналитически.

Лемма 6. *Пусть $\alpha = 0$. Тогда условия (14), (15), (30) в зависимости от κ и g_0 задают от нуля до трех областей на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$.*

Доказательство. Посмотрим, сколько областей на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ может задавать условие (14). При $\alpha = 0$ с учетом (5) условие (14) будет эквивалентно условию

$$\kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) - 1 - 1/2g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2} < 0. \quad (35)$$

Заметим, что при $\rho^2 = 0$ условие (35) не выполняется, а при $\rho^2 = \rho_{max}^2$ данное условие верно. Обозначим за ρ_*^2 такое значение ρ^2 , при котором левая часть (35) равна нулю. Тогда найдем производную по ρ^2 в точке ρ_*^2 :

$$\left(\kappa \exp\left(\frac{g_0}{1+\rho^2}\right) - 1 - \frac{g_0\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} \right)' \Big|_{\rho^2=\rho_*^2} = -\frac{g_0(3+(4+g_0)\rho_*^2+\rho_*^4)}{2(1+\rho_*^2)^4}.$$

Поскольку данная производная отрицательна во всех точках, в которых левая часть (35) равна нулю, то на самом деле точка ρ_*^2 единственна и лежит строго внутри отрезка $[0, \rho_{max}^2]$. Таким образом условие (14) при $\alpha = 0$ задает односвязную область на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$, определяемую условием

$$\rho_*^2 < \rho^2 < \rho_{max}^2. \quad (36)$$

Пусть $0 < g_0 < 8$, тогда условие (15), и, следовательно, условие (30) выполняются. Поэтому при $\alpha = 0$ и $0 < g_0 < 8$ условия (14), (15), (30) задают односвязную область на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$, определяемую условием (36).

Пусть $g_0 > 8$. Обозначим как ρ_L^2 и ρ_R^2 такие значения ρ^2 , что

$$\rho_L^2 = (g_0 - 4 - \sqrt{g_0(g_0 - 8)})/4, \quad \rho_R^2 = (g_0 - 4 + \sqrt{g_0(g_0 - 8)})/4.$$

Очевидно, что

$$0 < \rho_L^2 < \rho_R^2. \quad (37)$$

При выполнении условий (15) и $\alpha = 0$ условие (30) верно.

Рассмотрим взаимное расположение значений ρ_L^2 , ρ_R^2 , ρ_*^2 и ρ_{max}^2 . Учитывая условия (36) и (37), получаем, что возможны 6 различных ситуаций:

$$\begin{aligned} I & : \rho_L^2 < \rho_R^2 < \rho_*^2 < \rho_{max}^2, \\ II & : \rho_L^2 < \rho_*^2 < \rho_R^2 < \rho_{max}^2, \\ III & : \rho_L^2 < \rho_*^2 < \rho_{max}^2 < \rho_R^2, \\ IV & : \rho_*^2 < \rho_L^2 < \rho_R^2 < \rho_{max}^2, \\ V & : \rho_*^2 < \rho_L^2 < \rho_{max}^2 < \rho_R^2, \\ VI & : \rho_*^2 < \rho_{max}^2 < \rho_L^2 < \rho_R^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Области, которые задают при $\alpha = 0$ и $g_0 > 8$ условия (14), (15) и (30):

$$\begin{aligned} I & : \rho_*^2 < \rho^2 < \rho_{max}^2, \\ II & : \rho_R^2 < \rho^2 < \rho_{max}^2, \\ III & : \rho^2 \in \emptyset, \\ IV & : \rho_*^2 < \rho^2 < \rho_L^2 \quad \text{или} \quad \rho_R^2 < \rho^2 < \rho_{max}^2, \\ V & : \rho_*^2 < \rho^2 < \rho_L^2, \\ VI & : \rho_*^2 < \rho^2 < \rho_{max}^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, случай *III* показывает, что на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ условия (14), (15) и (30) одновременно ни для какой точки кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ выполняться не могут, в случаях *I*, *II* и *VI* условия (14), (15), (30) задают односвязные области на кривой, в случае *V* на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ две области, а в случае *IV* — три области на кривой. Заметим, что для случаев *IV* и *V* получаются области, не содержащие верхнюю точку кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$. Для этих областей ордината верхней точки равна ρ_L^2 , а ордината нижней — ρ_*^2 . \square

Лемма 7. Пусть $\rho_*^2 < \rho_L^2 < \rho_{max}^2$. Тогда при $\alpha = 0$ и $\rho^2 = \rho_L^2$ система (21), (22) не имеет корней β , отличных от нуля.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (21), (22). При $\alpha = 0$ и $\rho^2 = \rho_L^2$ коэффициент перед β в (22) не равен нулю. Тогда выразим β из уравнения (22), подставим полученное выражение в (21), заменим $\cos^2 \varphi$ на u . Учитывая, что $\alpha = 0$ и $g_0 \rho_L^2 / (1 + \rho_L^2)^2 = 2$, получаем, что

$$\kappa \exp \left(4(1 - \sqrt{1 - 8/g_0})^{-1} \right) \left(1 + b^2 - 2b^2 u + b^4 \kappa \exp \left(4(1 - \sqrt{1 - 8/g_0})^{-1} \right) (u^2 - u) \right) = 0.$$

Рассмотрим функцию $h(u) = 1 + b^2 - 2b^2 u + b^4 \kappa \exp \left(4(1 - \sqrt{1 - 8/g_0})^{-1} \right) (u^2 - u)$. Найдем $h(1)$: $h(1) = 1 - b^2 \geq 0$. Ситуация $h(1) = 0$ соответствует случаю $\beta = 0$ и возможна только при $b = 1$. Докажем, что вершина параболы $h(u)$ правее единицы. Абсцисса вершины параболы h равна

$$1 + \left(2 \exp \left(-4(1 - \sqrt{1 - 8/g_0})^{-1} \right) - b^2 \kappa \right) / (2b^2 \kappa).$$

Поскольку неравенство $\rho_*^2 < \rho_L^2$ эквивалентно неравенству

$$\kappa < 2 \exp \left(-4(1 - \sqrt{1 - 8/g_0})^{-1} \right),$$

а $b \in (0, 1]$, то абсцисса вершины параболы h находится правее единицы. Поскольку $h(1) \geq 0$, а график функции $h(u)$ — парабола ветвями вверх, то функция $h(u)$ не обращается в нуль на $[0, 1)$. Следовательно, у системы уравнений (21), (22) нет корней β , отличных от нулевого. Поскольку нулевой корень нам не подходит по определению β , то у системы (21), (22) нет корней в условиях леммы 7. \square

Лемма 8. Пусть $\alpha = 0$. Пусть в точке (δ, ρ^2) выполнены условия (14), (15), (30). Тогда уравнение $q(z) = 0$ не имеет корней на отрезке $[-1, 1]$.

Доказательство. Как было доказано ранее, на концах отрезка $[-1, 1]$ функция $q(z)$ принимает отрицательные значения при выполнении условий (14), (15), (30).

Подставим в $q(z)$ значение $\alpha = 0$, тогда выражение $q(z)$ примет вид

$$q(z) = w(-2 + y)^2 - 2(4 - 2y + y^2) + (16 - 16y + 4y^2 - y^3 + w(-4 + 8y - 3y^2))z - 4(-1 + y)(-2 - w + y)z^2 + 4w(-1 + y)^2z^3. \quad (40)$$

Здесь, как и ранее, $w = \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1})$, а $y = g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}$. Перепишем условия устойчивости (14), (15) в терминах w и y :

$$\begin{cases} 1 < w < 1 + y/2, \\ 0 < y < 2. \end{cases} \quad (41)$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ из выполнения условия (15) следует выполнение условия (30).

Докажем, что точка максимума функции $q(z)$ лежит вне интервала $(-1, 1)$ при выполнении условий (14), (15), (30). Имеем

$$q'(z) = -y^3 + 4y^2 - 16y + 16 - w(3y^2 - 8y + 4) - 8(1 - y)(2 - y + w)z + 12w(1 - y)^2z^2.$$

Рассмотрим случай равенства нулю коэффициента перед z^2 . Данный случай в области (41) возможен только при $y = 1$. Подставим $y = 1$ в выражение для $q'(z)$, получим, что $q'(z) = 3 + w > 0$. Поэтому при $z \in [-1, 1)$ верно $q(z) < q(1) < 0$. Следовательно, при $y = 1$ корней у функции $q(z)$ на отрезке $[-1, 1]$ нет.

Пусть коэффициент при z отличен от нуля (то есть $y \neq 1$). Найдем дискриминант D функции $q'(z)$:

$$D = 16(-1 + y)^2(w^2(4 - 3y)^2 + 4(-2 + y)^2 + w(-32 + 40y - 12y^2 + 3y^3)).$$

Произведение первых двух сомножителей D неотрицательно при любом значении $y \in [0, 2]$. Рассмотрим третий сомножитель D как квадратный трехчлен относительно w . Его дискриминант D_1 равен $y^3((1 - y)(-64 + 16y - 8y^2) - 5y^3)$. Так как при $y \in [0, 1]$ коэффициент перед w^2 положительный, то в силу неположительности D_1 имеем неотрицательность дискриминанта D при $y \in [0, 1]$. Пусть $y \in [1, 2]$. Построим график третьего сомножителя D в области $y \in [1, 2]$, $w \in [1, 1 + y/2]$. Как видно из рисунка 2.2, в данной области третий сомножитель выражения D строго положителен. Следовательно, дискриминант D квадратного трехчлена $q'(z)$ во всей области (41) неотрицателен. Поэтому у данного квадратного трехчлена существуют корни. Так как коэффициент при z^2 у функции $q'(z)$ положительный, то точке максимума функции $q(z)$ отвечает меньший корень $q'(z)$.

Снова рассмотрим два случая. Пусть $y \in (0, 1)$, тогда меньший корень x_L функции $q'(z)$ находится по формуле

$$x_L = \frac{2(2 + w - y) - \sqrt{w^2(4 - 3y)^2 + 4(-2 + y)^2 + w(-32 + 40y - 12y^2 + 3y^3)}}{6w(1 - y)}.$$

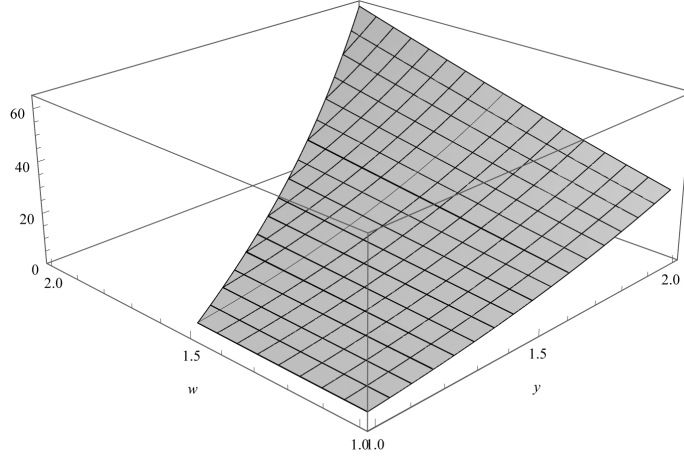


Рис. 2.2: График третьего сомножителя D в области $(y, w) \in [1, 2] \times [1, 1 + y/2]$.

Рассмотрим $y \in (0, 1/2]$. Докажем аналитически, что $x_L > 1$. В силу положительности знаменателя, приходим к неравенству, которое требуется доказать:

$$4 - 2y + w(6y - 4) > \sqrt{w^2(4 - 3y)^2 + 4(-2 + y)^2 + w(-32 + 40y - 12y^2 + 3y^3)}. \quad (42)$$

Левая часть (42) при каждом фиксированном $y \in (0, 1/2]$ является убывающей функцией от w , ее минимум в силу условия (14) положителен и равен $y(2 + 3y)$. Поскольку обе части неравенства (42) положительны, возведем неравенство в квадрат. После приведения подобных слагаемых получаем

$$3wy(8 - 4y - y^2 + w(-8 + 9y)) > 0.$$

Легко видеть, что при $y \in (0, 1/2]$ и $w \in [1, 1 + y/2]$ данное неравенство выполняется. Следовательно, в данной области верно неравенство $x_L > 1$.

Пусть теперь $y \in [1/2, 1)$ и $w \in [1, 1 + y/2]$. Тогда из графика x_L в данной области (см. рисунок 2.3) видно, что $x_L > 1$. Тем самым показано, что при $y \in (0, 1)$ и выполнении условий устойчивости (14), (15) локальный максимум функции $q(z)$ лежит вне отрезка $[-1, 1]$.

Пусть теперь $y \in (1, 2)$. Тогда x_L находится по формуле:

$$x_L = \frac{2(2 + w - y) + \sqrt{w^2(4 - 3y)^2 + 4(-2 + y)^2 + w(-32 + 40y - 12y^2 + 3y^3)}}{6w(1 - y)}.$$

Докажем аналитически, что $x_L < -1$ при $y \in (3/2, 2)$ и $w \in (1, 1 + y/2)$. После несложных преобразований данное неравенство будет иметь вид

$$\sqrt{w^2(4 - 3y)^2 + 4(y - 2)^2 + w(3y^3 - 12y^2 + 40y - 32)} > 2(y - 2 + w(3y - 4)). \quad (43)$$

Очевидно, что при $y \in (3/2, 2)$ и выполнении условия устойчивости (14) правая часть неравенства (43) будет положительной. Поэтому возведем неравенство (43) в

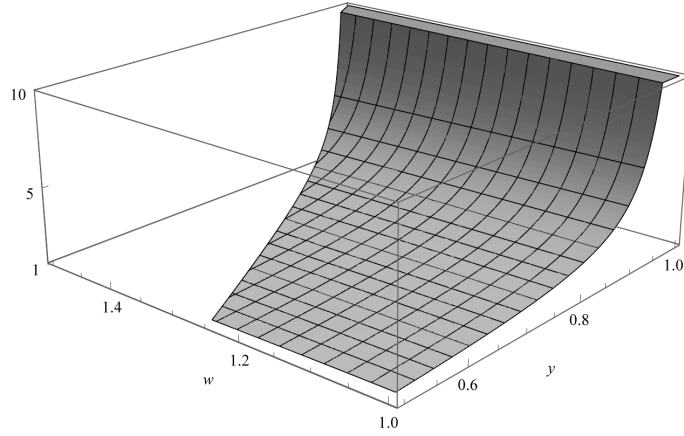


Рис. 2.3: График x_L в области $(y, w) \in [1/2, 1) \times [1, 1 + y/2]$.

квадрат. После приведения подобных слагаемых получим, что требуется доказать неравенство

$$-3w(32 + w(4 - 3y)^2 - 40y + 12y^2 - y^3) > 0.$$

Для этого необходимо доказать, что третий множитель отрицателен при $y \in (3/2, 2)$ и $w \in (1, 1 + y/2)$. При каждом фиксированном y из выбранного интервала данное выражение является возрастающей функцией по w . Максимум данной функции равен $48 - 56y + 9y^2 + (7y^3)/2$. Легко убедиться, что на интервале $(3/2, 2)$ данное выражение отрицательно. Поэтому при $y \in (3/2, 2)$ и $w \in (1, y/2)$ локальный максимум функции $q(z)$ лежит вне отрезка $[-1, 1]$.

Как видно из рисунка 2.4, в области $(y, w) \in (1, 3/2) \times [1, 1 + y/2]$ верно неравенство $x_L < -1$. Поэтому и при $y \in (1, 3/2)$ и $w \in [1, 1 + y/2]$ локальный максимум

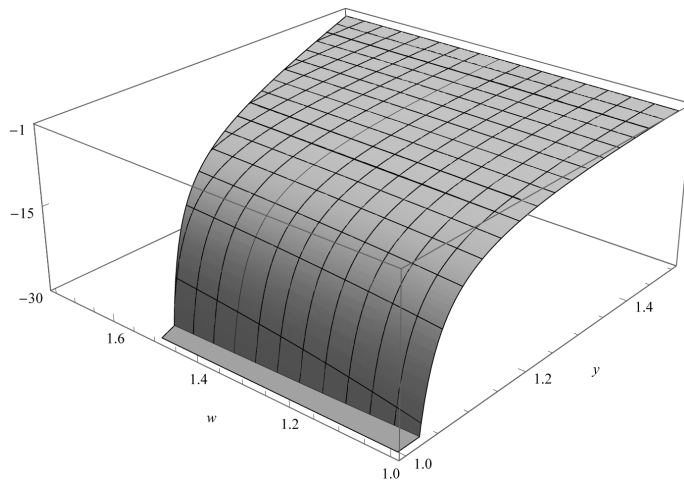


Рис. 2.4: График x_L в области $(y, w) \in (1, 3/2) \times [1, 1 + y/2]$.

функции $q(z)$ расположен вне отрезка $[-1, 1]$.

Поскольку при выполнении условий (14) и (15) верны неравенства $q(-1) < 0$ и $q(1) < 0$, а в области (41) локальный максимум функции $q(z)$ находится вне отрезка $[-1, 1]$, то функция $q(z)$ отрицательна на всем отрезке $[-1, 1]$. Следовательно, уравнение $q(z) = 0$ не имеет корней на отрезке $[-1, 1]$ в области (41) в условиях леммы. \square

Из лемм 6, 7 и 8 следует

Лемма 9. Пусть $\alpha = 0$, $\rho_*^2 < \rho_L^2 < \rho_{max}^2$. Тогда в каждой точке дуг кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ с $\rho^2 \in (\rho_*^2, \rho_L^2)$ система (21), (22) не имеет действительных ненулевых корней β .

Для формулировки следующей леммы введем систему неравенств

$$\begin{aligned}
I & : 2 \exp(g_+) < \kappa < 1, \\
II & : \max \{ \exp(g_+), 2 \exp(g_-) \} < \kappa < 2 \exp(g_+), \\
III & : 2 \exp(g_-) < \kappa < \exp(g_+), \\
IV & : \exp(g_+) < \kappa < 2 \exp(g_-), \\
V & : \exp(g_-) < \kappa < \min \{ 2 \exp(g_-), \exp(g_+) \}, \\
VI & : \exp(-g_0) < \kappa < \exp(g_-).
\end{aligned} \tag{44}$$

Здесь $g_- = -4(1 - \sqrt{1 - 8/g_0})^{-1}$, $g_+ = -4(1 + \sqrt{1 - 8/g_0})^{-1}$.

Лемма 10. Пусть $g_0 > 8$. Тогда выполнение неравенств под номером i ($i = \overline{I, VI}$) в формуле (38) эквивалентно выполнению неравенств под тем же номером в формуле (44).

Доказательство. Заметим, что для существования решения необходимо выполнение неравенства $\kappa > \exp(-g_0)$, а для диссипативности лазерной системы необходимо выполнение неравенства $\kappa < 1$.

Стоит отметить, что при любом $g_0 > 8$ выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
2 \exp(g_+) & < 1, \\
\max \{ \exp(g_+), 2 \exp(g_-) \} & < 2 \exp(g_+), \\
\exp(g_-) & < \min \{ 2 \exp(g_-), \exp(g_+) \}, \\
\exp(-g_0) & < \exp(g_-).
\end{aligned}$$

Уравнение $2 \exp(g_-) = \exp(g_+)$ имеет единственный корень g_0 на $[8, +\infty)$. Поэтому неравенства (44) действительно задают шесть связных областей.

Вспомним, что $\rho_*^2 < \rho_{max}^2$ и $\rho_L^2 < \rho_R^2$. Перепишем неравенства на ρ_*^2 , ρ_{max}^2 , ρ_L^2 и ρ_R^2 в терминах κ и g_0 .

Легко убедиться, что следующие неравенства эквивалентны: $\rho_R^2 < \rho_*^2$;

$$\left(\kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) - 1 - 1/2g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2} \right) \Big|_{\rho^2=\rho_R^2} > 0.$$

Последнее неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $\kappa > 2 \exp(g_+)$.

Аналогично, необходимым и достаточным условием для выполнения неравенства $\rho_L^2 < \rho_*^2$ является выполнение неравенства

$$\left(\kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) - 1 - 1/2g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2} \right) \Big|_{\rho^2=\rho_L^2} > 0.$$

Данное неравенство эквивалентно неравенству $\kappa > 2 \exp(g_-)$.

Несложно доказать, что следующие неравенства эквивалентны: $\rho_R^2 < \rho_{max}^2$;

$$\kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) \Big|_{\rho^2=\rho_R^2} - 1 > 0.$$

Последнее неравенство верно тогда и только тогда, когда $\kappa > \exp(g_+)$.

Аналогично, неравенство $\rho_L^2 < \rho_{max}^2$ эквивалентно неравенству

$$\kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) \Big|_{\rho^2=\rho_L^2} - 1 > 0.$$

Данное неравенство выполняется если и только если $\kappa > \exp(g_-)$.

После того, как для каждого неравенства в терминах ρ^2 найдено соответствующее неравенство в терминах κ и g_0 , нетрудно убедиться, что лемма 10 верна. \square

Из лемм 6–10 и теорем 12, 13 следует теорема 14.

Теорема 14. Пусть $0 < g_0 < 8$ и $\exp(-g_0) < \kappa < 1$. Тогда на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ существует единственная область устойчивости. Точка (δ_0, ρ_0^2) принадлежит этой области устойчивости если и только если $\rho_*^2 < \rho_0^2 < \rho_{max}^2$. Пусть $g_0 > 8$. Тогда решение (9) уравнения (8) с $\delta = \delta_0$ и $\rho^2 = \rho_0^2$, где (δ_0, ρ_0^2) принадлежит $\Gamma(\kappa, g_0)$ и (g_0, κ) принадлежит i -ой области в (44), устойчиво если и только если ρ_0^2 удовлетворяет i -ым условиям в формуле (39).

Иллюстрацией к теореме 14 служат рисунки 2.5, 2.6.

Приведем примеры кривых $\Gamma(\kappa, g_0)$ с различным числом областей устойчивости (см. рисунок 2.7). На рисунке 2.7 черным изображены области устойчивости, а серым — области неустойчивости.

Теперь перейдем к случаю $\alpha \neq 0$.

Что касается неравенства (14), то оно может задавать как одну область, так и большее количество областей. В достаточно небольшой окрестности точек $(\pm\sqrt{\kappa e^{g_0} - 1}, 0)$ (размер окрестности зависит от κ , α и g_0) на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ данное неравенство неверно, а в окрестности точки $(0, \rho_{max}^2)$ оно верно. В „средних“ же точках кривой оно может быть как верным, так и неверным (см. рисунок 2.8).

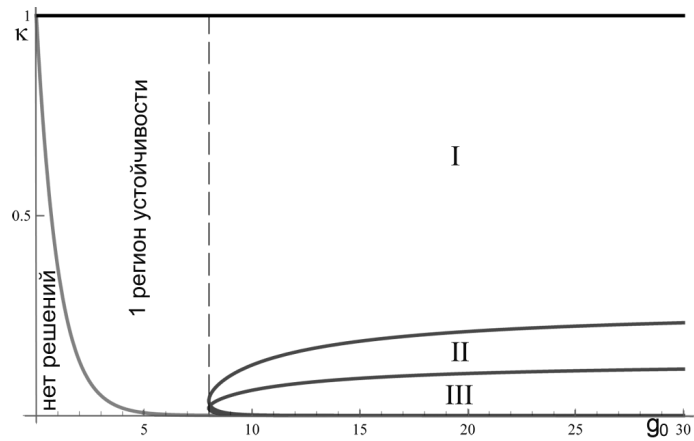


Рис. 2.5: Область устойчивости при $0 < g_0 < 8$ и области $I - VI$ при $g_0 > 8$ в области параметров (g_0, κ) .

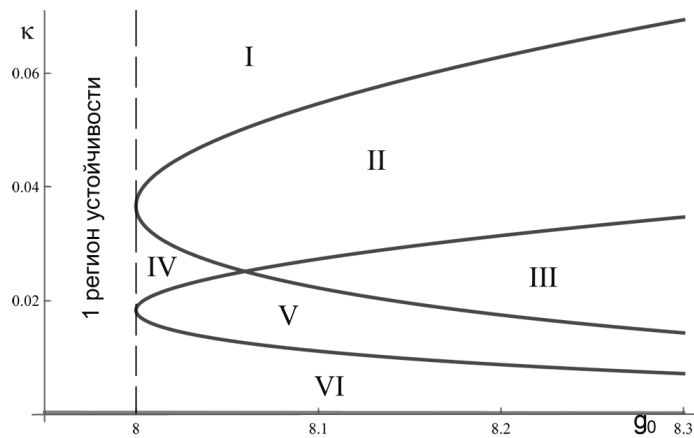


Рис. 2.6: Область устойчивости при $0 < g_0 < 8$ и области $I - VI$ при $g_0 > 8$ в области параметров (g_0, κ) . Увеличенный фрагмент рисунка 2.5.

Неравенство (15) от α не зависит, и, как и прежде, может задавать одну, две или три области на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$.

Неравенство (30) задает одну область на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$.

Что касается расположения корней уравнения $q(z) = 0$, то возможны различные варианты. Типичная ситуация: неравенства (14), (15), (30) выполняются и уравнение $q(z) = 0$ не имеет корней на отрезке $[-1, 1]$. Также возможна ситуация, когда неравенства (14), (15), (30) выполняются, а уравнение $q(z) = 0$ имеет корни на отрезке $[-1, 1]$ (например, $\kappa = 0.056738$, $\alpha = 3$, $g_0 = 5$, $\delta = 0.792275$, $\rho^2 = 0.489656$). Если же какое-то из неравенств из верного становится неверным, или, наоборот, из неверного становится верным, то уравнение $q(z) = 0$ обязательно в этой точке имеет корни на отрезке $[-1, 1]$.

Таким образом, относительно расположения областей устойчивости на кривых

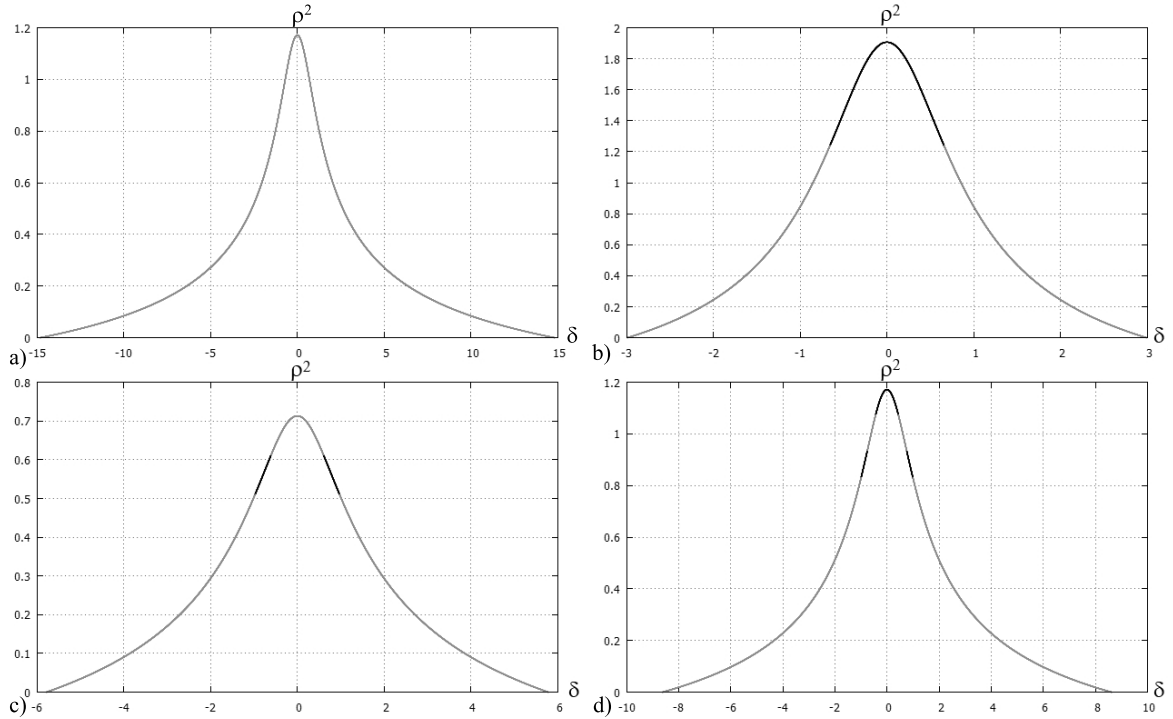


Рис. 2.7: Области устойчивости и неустойчивости на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ при $\alpha = 0$. Значения параметров: а) $\kappa = 0.01, g_0 = 10$; б) $\kappa = 0.3, g_0 = 3.5$; в) $\kappa = 0.007, g_0 = 8.5$; д) $\kappa = 0.025, g_0 = 8.01$.

$\Gamma(\kappa, g_0)$ при $\alpha \neq 0$ можно сделать следующие выводы:

1. Возможна ситуация, когда результат об областях устойчивости для $\alpha = 0$ совпадает с результатом для ненулевого α . Пример: $\kappa = 0.04, g_0 = 8.05, \alpha = 0$ и $\alpha = 0.1$

2. Может возникать ситуация, когда решения с одинаковыми δ и ρ^2 (на одной и той же кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$) при разных α имеют различные свойства устойчивости: устойчивому при $\alpha = 0$ решению соответствует неустойчивое при ненулевом α , а неустойчивому при $\alpha = 0$ решению соответствует устойчивое при ненулевом α . Пример изображен на рисунке 2.9. На приведенном примере устойчивость теряется за счет нарушения условия (14) (которое для данных параметров задает одну область на кривой $\Gamma(0.3, 3.5)$).

3. Полностью устойчивой кривая $\Gamma(\kappa, g_0)$ быть не может, поскольку в окрестности точек $(\pm\sqrt{\kappa e^{g_0}} - 1, 0)$ не выполняется условие (14).

4. Устойчивость решения в точке $(0, \rho_{max}^2)$ не зависит от значения α . Таким образом, если в верхней точке условие (15) выполнено, то при любых значениях параметра α кривая $\Gamma(\kappa, g_0)$ полностью неустойчивой не будет.

5. Кривая $\Gamma(\kappa, g_0)$ при $\alpha \neq 0$ может быть полностью неустойчивой. Например, при $\alpha = 0.1$ в каждой точке кривой $\Gamma(0.01, 10)$ нарушается хотя бы одно из условий (14), (15).

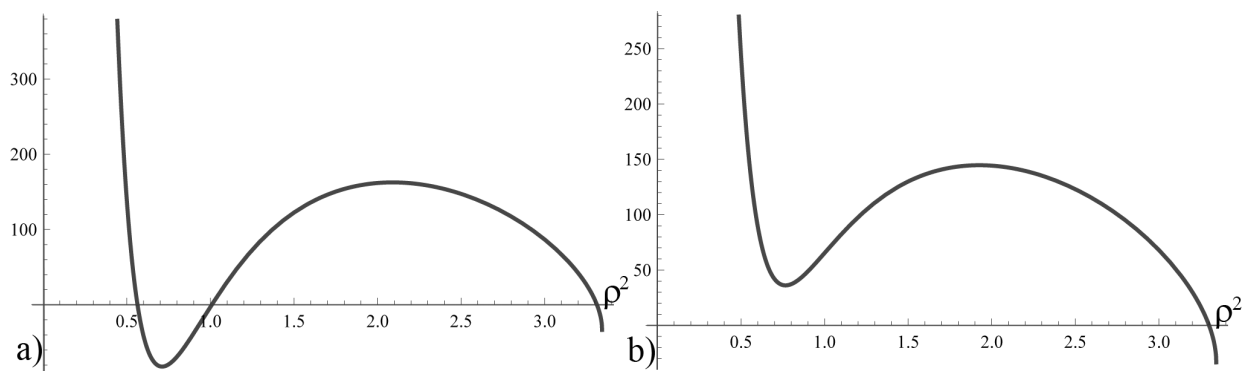


Рис. 2.8: Величина выражения (14). Значения параметров: а) $\alpha = -3.7$, $\kappa = 0.1$, $g_0 = 10$, б) $\alpha = -3.1$, $\kappa = 0.1$, $g_0 = 10$.

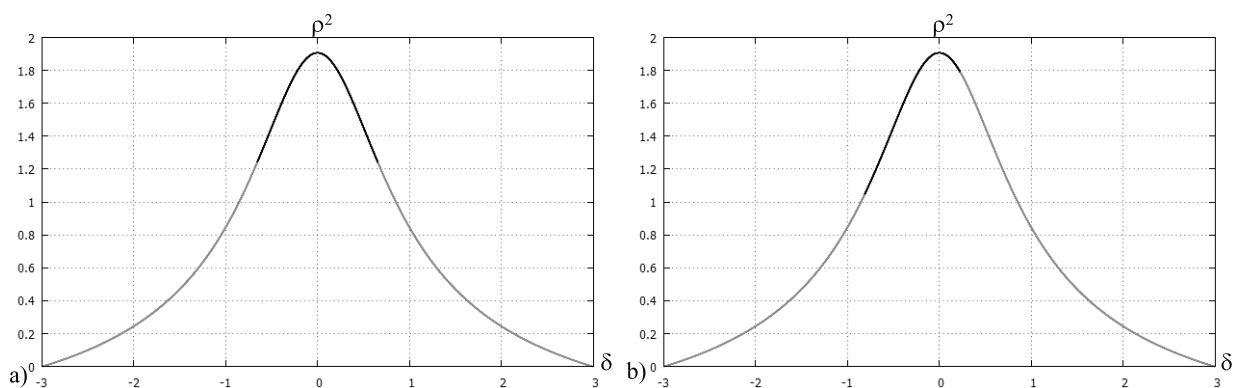


Рис. 2.9: Области устойчивости и неустойчивости на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$. Значения параметров: а) $\kappa = 0.3$, $g_0 = 3.5$, $\alpha = 0$ б) $\kappa = 0.3$, $g_0 = 3.5$, $\alpha = -1.5$.

2.1.5 Сводка основных результатов параграфа 2.1

1. Доказано, что на плоскости (δ, ρ^2) существует однопараметрическое семейство, зависящее только от параметров κ и g_0 (и не зависящее от значения параметра α) в виде „колокола“, каждой точке которого соответствует счетное число непрерывных волн (см. теорему 11). При малых значениях параметра ε найдено асимптотическое приближение этих решений, зависящее от разрывной функции $\theta(\Delta, \delta, \varepsilon)$.

2. Найдены достаточные условия устойчивости (см. теорему 12) и неустойчивости (см. теорему 13) автомодельных циклов. Причем в случае $\alpha = 0$ найдены необходимые и достаточные условия устойчивости.

3. Доказано, что при любых значениях параметров вся кривая $\Gamma(\kappa, g_0)$ полностью устойчивой быть не может, найдены примеры полностью неустойчивых кривых $\Gamma(\kappa, g_0)$.

4. В случае $\alpha = 0$ показано, что областей устойчивости на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ может

быть от нуля до трех включительно. Аналитически найдены границы подобластей в области параметров (g_0, κ) , в каждой из которых свое число областей устойчивости. Более того, в каждой из данных подобластей найдены координаты (δ, ρ^2) границ областей устойчивости (см. теорему 14).

2.2 Существование и устойчивость непрерывных волн в модели полупроводникового лазера с большим запаздыванием

2.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений, предложенную Лэнгом и Кобаяши в работе [60]

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{1}{2}v(1 + i\alpha)(y - 1)E + \gamma \exp(i\varphi)E(t - T), \\ \dot{y} &= q - y - y|E|^2.\end{aligned}$$

Здесь параметры v , γ , q положительны, величина α действительная, параметр φ принадлежит полуинтервалу $[0, 2\pi)$. Будем считать, что параметр T является достаточно большим: $T \gg 1$. Сделаем перенормировку времени $t \rightarrow Tt$ и замену $\varepsilon = 1/T$, тогда система уравнений Лэнга-Кобаяши примет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{E} &= \frac{1}{2}v(1 + i\alpha)(y - 1)E + \gamma \exp(i\varphi)E(t - 1), \\ \varepsilon \dot{y} &= q - y - y|E|^2.\end{aligned}\tag{45}$$

Заметим, что положительный параметр ε является достаточно малым: $\varepsilon \ll 1$. В данном параграфе мы будем исследовать вопросы существования и устойчивости решений вида непрерывной волны у модели Лэнга-Кобаяши при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon > 0$.

2.2.2 Существование решений вида непрерывных волн

Будем искать решения системы (45) в виде непрерывной волны:

$$E = R \exp(i\Delta t), \quad y = Y.\tag{46}$$

Здесь параметры R , Δ , Y не зависят от времени. Как и ранее, будем искать величины R и Δ в виде: $R = (\rho + \varepsilon w)$, $\Delta = \delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d$. Величина δ действительная, $\rho > 0$, n — целое число, Ω принадлежит полуинтервалу $[0, 2\pi)$, $w = w(\varepsilon)$ и $d = d(\varepsilon)$ действительные, ограниченные при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции. Функция $\theta = \theta(\varepsilon, \delta)$ определяется таким образом: она принимает значения из полуинтервала $[0, 2\pi)$ и $\delta/\varepsilon + \theta$ делится нацело на 2π .

Подставляя выражения для R и Δ в (46) и (45), получаем уравнение для определения всех фигурирующих в (46) параметров:

$$\begin{aligned} i(\delta + \varepsilon(\theta + \Omega + 2\pi n) + \varepsilon^2 d) &= \frac{v}{2}(1 + i\alpha) \left(\frac{q}{1 + (\rho + \varepsilon w)^2} - 1 \right) + \gamma e^{i(\varphi - \Omega - \varepsilon d)}, \\ Y &= q(1 + (\rho + \varepsilon w)^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (47)$$

Так как ε — малый параметр, то должно выполняться равенство

$$i(\delta - 1/2v\alpha(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1)) - 1/2v(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1) = \gamma \exp(i(\varphi - \Omega)). \quad (48)$$

Приравнявая квадраты модулей левой и правой части уравнения (48), получаем условие разрешимости данного уравнения:

$$(\delta - 1/2v\alpha(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1))^2 + 1/4v^2(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1)^2 = \gamma^2. \quad (49)$$

Пусть значения δ и ρ^2 таковы, что выполняется равенство (49). Тогда для каждого набора параметров исходного уравнения (45) найдется единственное значение Ω из $[0, 2\pi)$, для которого равенство (48) будет выполняться.

Временно зафиксируем значение $\theta(\varepsilon) = \theta$. Рассмотрим уравнение относительно неизвестных значений w_0 и d_0 функций $w(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$:

$$i(\theta + \Omega + 2\pi n) = -v(1 + i\alpha)q\rho w_0(1 + \rho^2)^{-2} - \gamma i d_0 \exp(i(\varphi - \Omega)).$$

Выделяя действительную и мнимую части этого выражения, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= -vq\rho(1 + \rho^2)^{-2}w_0 + \gamma \sin(\varphi - \Omega)d_0, \\ \theta + \Omega + 2\pi n &= -v\alpha q\rho(1 + \rho^2)^{-2}w_0 - \gamma \cos(\varphi - \Omega)d_0. \end{aligned} \quad (50)$$

Определитель данной системы равен нулю тогда и только тогда, когда

$$\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega) = 0. \quad (51)$$

Если определитель системы (50) отличен от нуля, то в силу теоремы о неявной функции существует локально единственное решение системы (47) для каждого фиксированного θ . Поскольку определитель системы (50) отличен от нуля равномерно по θ из отрезка $[0, 2\pi]$, то можно вместо фиксированного значения θ в формулу решения системы (47) подставить функцию $\theta(\varepsilon)$.

Пусть теперь выполнено условие (51). Используя равенство (48), получаем, что

$$\begin{aligned} \gamma \cos(\varphi - \Omega) &= -1/2v(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1), \\ \gamma \sin(\varphi - \Omega) &= \delta - 1/2v\alpha(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1). \end{aligned} \quad (52)$$

Таким образом, соотношение (51) эквивалентно равенству

$$\alpha\delta = 1/2v(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1)(1 + \alpha^2). \quad (53)$$

Заметим, что это равенство задает прямую на плоскости $(\delta, (1 + \rho^2)^{-1})$. Поэтому точек пересечения линии (53) с эллипсом (49) может быть не более двух. Подставив условие (53) в (49), получим, что в данных точках $\delta_{1,2}^2 = \gamma^2(1 + \alpha^2)$. Отсюда определяем условие на $\rho_{1,2}^2$

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (v\sqrt{1 + \alpha^2}(q - 1) - 2\alpha\gamma)/(v\sqrt{1 + \alpha^2} + 2\alpha\gamma), \\ \rho_2^2 &= (v\sqrt{1 + \alpha^2}(q - 1) + 2\alpha\gamma)/(v\sqrt{1 + \alpha^2} - 2\alpha\gamma). \end{aligned} \quad (54)$$

Остается проверить положительность ρ_1^2 и ρ_2^2 . Несложно увидеть, что количество положительных значений среди правых частей (54) может изменяться от нуля до двух. Таким образом число точек пересечения дуг эллипса (49) с прямой (53) может быть равно нулю (см. рисунок 2.10.a)), одному (см. рисунок 2.10.b)) или двум (см. рисунок 2.10.c)).

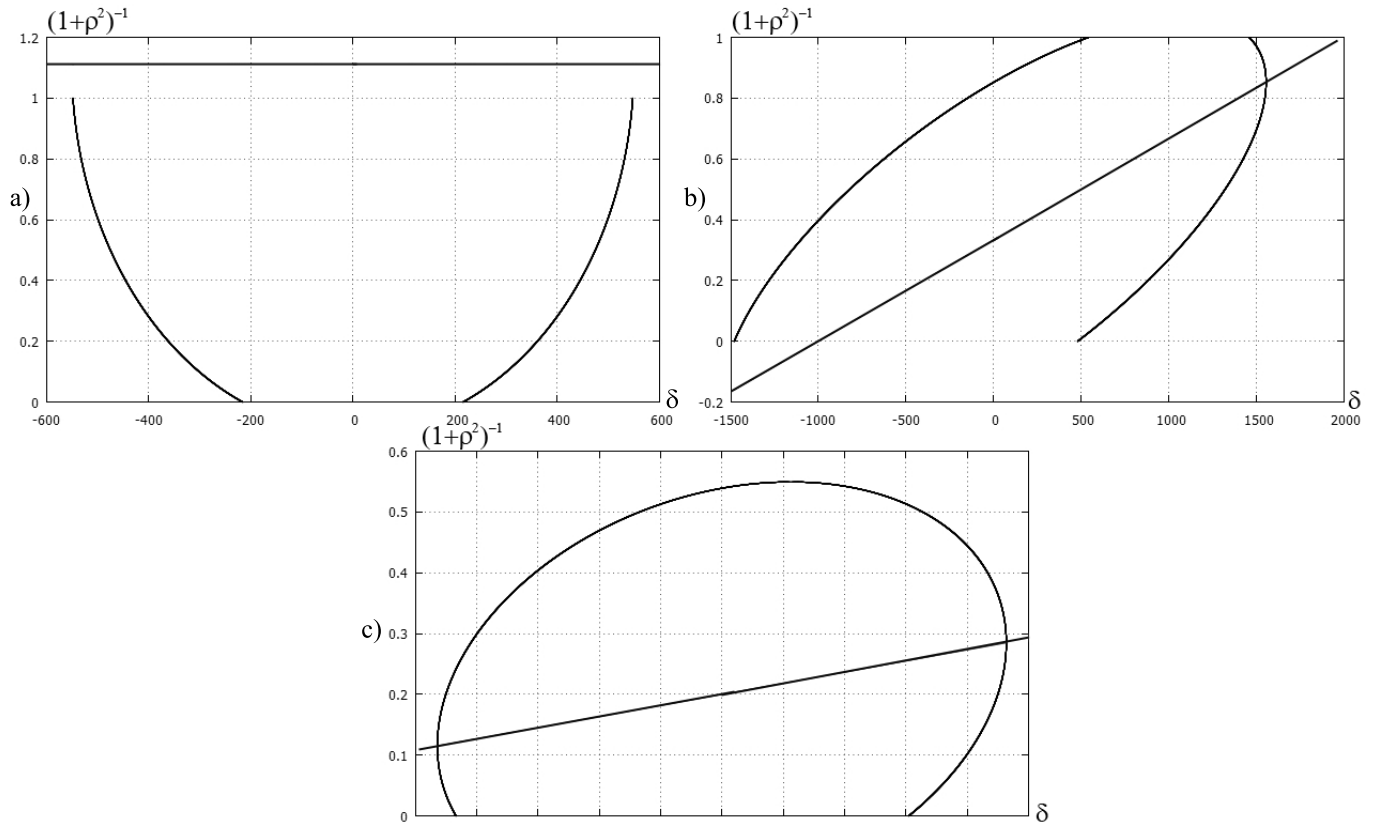


Рис. 2.10: Количество точек пересечения прямой (53) с дугами эллипсов (49). Значения параметров а) $v = 1012$, $\alpha = 0$, $q = 0.9$, $\gamma = 550$; б) $v = 1000$, $\alpha = 1$, $q = 3$, $\gamma = 1100$; в) $v = 1030$, $\alpha = 0.25$, $q = 5$, $\gamma = 900$.

Сделаем замену переменной

$$r = (1 + \rho^2)^{-1}.$$

Тогда переменная r должна принимать значения из полуинтервала $(0, 1]$. Уравнение кривой (49) примет вид

$$(\delta - 1/2v\alpha(qr - 1))^2 + 1/4v^2(qr - 1)^2 = \gamma^2. \quad (55)$$

Несложно убедиться, что уравнение (55) задает эллипс на плоскости (δ, r) . Учитывая условие

$$0 < r \leq 1 \quad (56)$$

и то, что δ должно быть действительным, получаем условие на координату r точки (δ, r) эллипса (55):

$$\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} \leq r \leq \min\{1, (v + 2\gamma)(vq)^{-1}\}. \quad (57)$$

Из условия положительности v , γ , q следует, что могут реализовываться пять ситуаций (не считая случаев нестрогих неравенств):

$$\begin{aligned} I & : 1 < (v - 2\gamma)(vq)^{-1}, \\ II & : 0 < (v - 2\gamma)(vq)^{-1} < 1 < (v + 2\gamma)(vq)^{-1}, \\ III & : (v - 2\gamma)(vq)^{-1} < 0 < 1 < (v + 2\gamma)(vq)^{-1}, \\ IV & : (v - 2\gamma)(vq)^{-1} < 0 < (v + 2\gamma)(vq)^{-1} < 1, \\ V & : 0 < (v - 2\gamma)(vq)^{-1} < (v + 2\gamma)(vq)^{-1} < 1. \end{aligned}$$

Обозначим через $I(v, \alpha, q, \gamma)$ множество точек (δ, r) , получаемое перечислением эллипса (55) и полосы (56). Тогда, в первом случае множество $I(v, \alpha, q, \gamma)$ пустое, во втором и четвертом случаях получается одна дуга эллипса, в третьем — две дуги эллипса, а в пятом случае весь эллипс находится внутри полосы (56) (см. рисунок 2.11). Отметим, что для существования решений вида (46) уравнения (45) необходимо выполнение неравенства

$$(v - 2\gamma)(vq)^{-1} < 1. \quad (58)$$

Далее будем везде считать, что это неравенство выполнено.

Из приведенных выше построений вытекает следующее утверждение.

Теорема 15. Пусть выполнено неравенство (58). Тогда для каждого целого значения n и каждой точки $(\delta_0, (1 + \rho_0^2)^{-1})$ на кривой (49), кроме, возможно, двух, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение (46) уравнения (45), где $R = (\rho_0 + \varepsilon w)$, $\Delta = \delta_0/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d$, $Y = q(1 + (\rho_0 + \varepsilon w)^2)^{-1}$, а $d = d(\varepsilon)$ и $w = w(\varepsilon)$ — некоторые ограниченные при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции.

Ниже предполагаем, что выполнено условие невырожденности, то есть будем рассматривать те точки эллипсов, для которых $\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega) \neq 0$.

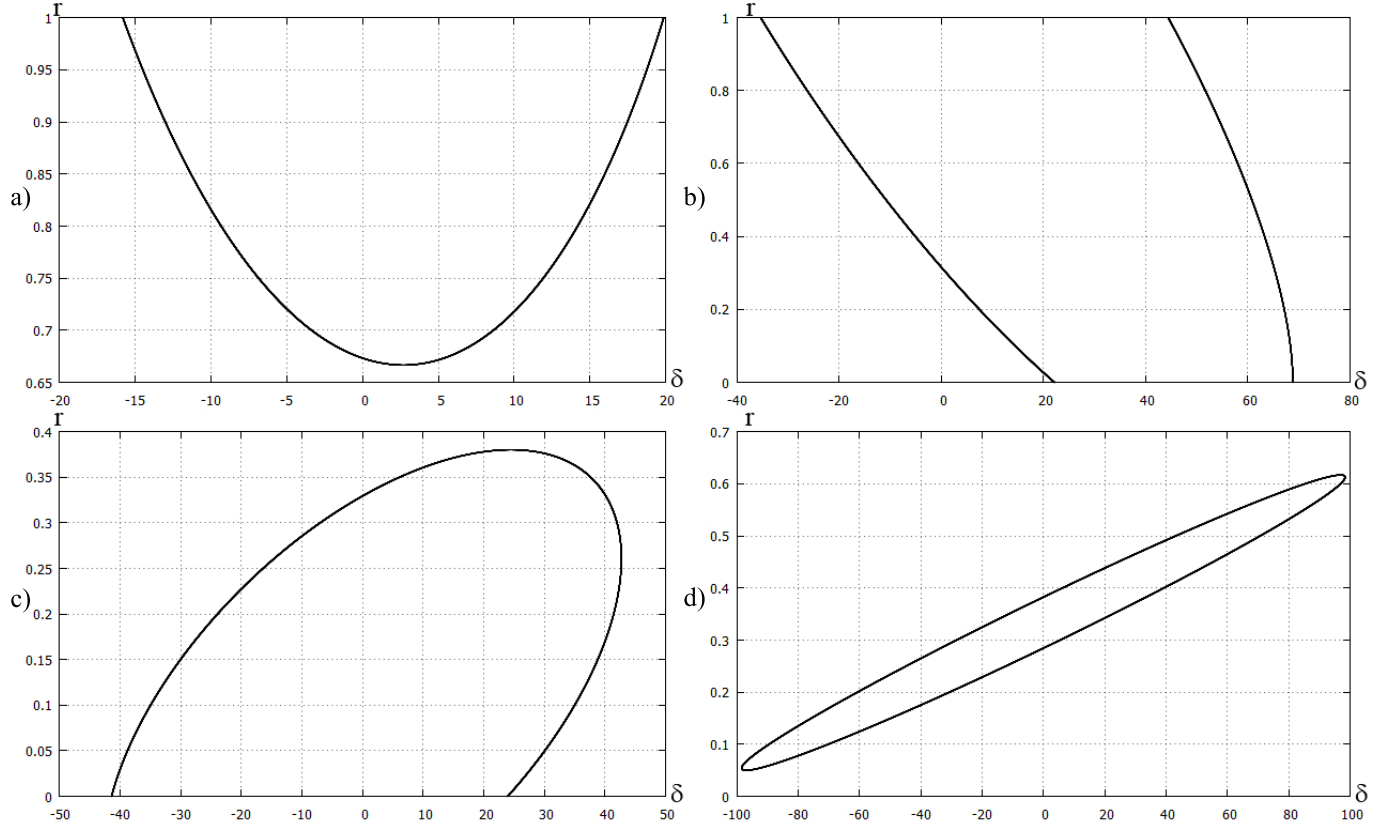


Рис. 2.11: Виды множеств $I(v, \alpha, q, \gamma)$. а) случай II, б) случай III, в) случай IV, д) случай V.

2.2.3 Устойчивость непрерывных волн

Постановка задачи об устойчивости

Выразим решение $y = Y$ второго уравнения системы (45) как функцию от $|E|$:

$$y = q(1 + |E|^2)^{-1},$$

и подставим это выражение в первое уравнение системы (45). Получим следующее уравнение на функцию E

$$\varepsilon \dot{E} = 1/2v(1 + i\alpha)(q(1 + |E|^2)^{-1} - 1)E + \gamma \exp(i\varphi)E(t - 1). \quad (59)$$

Для каждого фиксированного целого n при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ у уравнения (59) есть решение

$$E_0 = (\rho + \varepsilon w) \exp[i(\delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d)t]. \quad (60)$$

В данном параграфе будем искать такие условия устойчивости (неустойчивости), чтобы для каждого целого n при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение (60) уравнения (59) было устойчивым (неустойчивым) в фазовом пространстве $C[-1, 0]$ [15, 82].

Построение характеристического квазиполинома

Линеаризуем уравнение (59) на решении (60). Для этого подставим в уравнение (59) вместо E выражение $E_0(1+z)$, где $z = z_1 + iz_2$, z_1 и z_2 действительные функции. Линеаризованная система будет иметь вид

$$\varepsilon \dot{z} = -v(1+i\alpha)q(\rho+\varepsilon w)^2(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^{-2}z_1 + \gamma \exp(i(\varphi-\Omega-\varepsilon d))(z(t-1)-z). \quad (61)$$

Выделим действительную и мнимую части уравнения (61):

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{z}_1 &= -pz_1 + \gamma \cos \Psi(z_1(t-1) - z_1) - \gamma \sin \Psi(z_2(t-1) - z_2), \\ \varepsilon \dot{z}_2 &= \alpha pz_1 + \gamma \sin \Psi(z_1(t-1) - z_1) + \gamma \cos \Psi(z_2(t-1) - z_2), \end{aligned}$$

где $p = vq(\rho+\varepsilon w)^2(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^{-2}$, а $\Psi = \varphi - \Omega - \varepsilon d$. Тогда приходим к следующему характеристическому уравнению (относительно значений $z_1 = P$, $z_2 = Q$)

$$\varepsilon \lambda \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -p + \gamma \cos \Psi(e^{-\lambda} - 1) & -\gamma \sin \Psi(e^{-\lambda} - 1) \\ \alpha p + \gamma \sin \Psi(e^{-\lambda} - 1) & \gamma \cos \Psi(e^{-\lambda} - 1) \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы данное уравнение имело нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы $\det(B - \varepsilon \lambda I) = 0$, где I — единичная матрица. Равенство нулю этого определителя эквивалентно равенству

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \lambda^2 + 2\varepsilon \lambda \left(\frac{vq(\rho + \varepsilon w)^2}{2(1 + (\rho + \varepsilon w)^2)^2} - \gamma \cos(\varphi - \Omega - \varepsilon d)(e^{-\lambda} - 1) \right) + \gamma^2(e^{-\lambda} - 1)^2 - \\ - \frac{vq(\rho + \varepsilon w)^2}{(1 + (\rho + \varepsilon w)^2)^2}(e^{-\lambda} - 1)\gamma(\cos(\varphi - \Omega - \varepsilon d) + \alpha \sin(\varphi - \Omega - \varepsilon d)) = 0. \quad (62) \end{aligned}$$

Исследуем расположение корней характеристического квазиполинома (62).

Изучение расположения корней характеристического квазиполинома

Для того, чтобы сделать вывод об устойчивости, необходимо изучить расположение корней характеристического квазиполинома (62). Поскольку мы линеаризовывали уравнение на периодическом решении, то при любых значениях параметров задачи у квазиполинома (62) будет корень $\lambda = 0$. Поэтому речь пойдет об орбитальной устойчивости периодических решений. Изучим расположение остальных корней. Если у квазиполинома (62) при всех достаточно малых значениях ε

все корни кроме одного расположены в левой полуплоскости, то отсюда будет следовать устойчивость решения. Если же хотя бы один корень будет в правой комплексной полуплоскости, то это повлечет неустойчивость. Так как при каждом значении ε справа от любой вертикальной прямой на комплексной полуплоскости располагается лишь конечное число корней квазиполинома (62) (см. [82]), то среди корней квазиполинома есть корень (один или несколько) с максимальной действительной частью. Если при всех достаточно малых значениях ε максимальная действительная часть всех корней (кроме одного $\lambda = 0$ кратности один) будет отрицательная, то это означает устойчивость. Далее мы будем изучать поведение корней квазиполинома на всевозможных последовательностях $\varepsilon_m \rightarrow 0$. Если во всех рассматриваемых случаях корни будут в левой полуплоскости, значит и корень с максимальной действительной частью будет в левой полуплоскости.

Пусть $\lambda_* = \lambda_*(\varepsilon)$ — некоторый корень (62). Тогда возможны следующие три случая.

Случай 1. $\varepsilon_m \lambda_* \rightarrow 0$ на некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}$ такой, что $\varepsilon_m \rightarrow 0$.

Случай 2. $\varepsilon_m \lambda_* \rightarrow \text{const} \neq 0$ на некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}$ такой, что $\varepsilon_m \rightarrow 0$.

Случай 3. $|\varepsilon_m \lambda_*| \rightarrow \infty$ на некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}$ такой, что $\varepsilon_m \rightarrow 0$.

Отметим, что третий случай интереса не представляет, так как из (62) следует, что в данном случае $\text{Re } \lambda_* \rightarrow -\infty$ при $\varepsilon_m \rightarrow 0$.

Далее последовательно рассмотрим первые два случая.

Случай 1. Потенциально возможны 3 варианта поведения λ_* .

а) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_i}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\lambda_* \rightarrow 0$ при $\varepsilon_{m_i} \rightarrow 0$.

б) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_i}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\lambda_* \rightarrow \text{const} \neq 0$ при $\varepsilon_{m_i} \rightarrow 0$.

в) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_i}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $|\lambda_*| \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_{m_i} \lambda_* \rightarrow 0$ при $\varepsilon_{m_i} \rightarrow 0$.

Рассмотрим случай 1.а). Поскольку мы линеаризовывали задачу на периодическом решении, то при любых значениях параметров есть корень $\lambda = 0$ кратности один, который на устойчивость не влияет.

Определим, к каким ненулевым константам может стремиться λ_* при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ (случай 1.б)). Предельное уравнение имеет вид

$$\gamma^2(e^{-\lambda} - 1)^2 - vq\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}(e^{-\lambda} - 1)\gamma(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega)) = 0. \quad (63)$$

Как видно из (63), верно либо $e^{-\lambda_*} = 1 + vq\rho^2\gamma^{-1}(1 + \rho^2)^{-2}(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega)) + o(1)$, либо $\lambda_* = 2\pi ki + o(1)$. Рассмотрим первую ситуацию. Для устойчи-

ности необходимо, чтобы $|e^{-\lambda_*}| \geq 1$. Далее будем рассматривать только строгие неравенства. Тогда с учетом ограничений на параметры задачи получим необходимое условие устойчивости

$$\begin{cases} \cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega) > 0, \\ \cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega) < -2\gamma(1 + \rho^2)^2(vq)^{-1}\rho^{-2}. \end{cases} \quad (64)$$

Теперь рассмотрим вторую ситуацию. Для этого подставим представление корня $\lambda_* = 2\pi ki + \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ в квазиполином (62). Здесь λ_1 и λ_2 — неизвестные константы, подлежащие определению. Получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2\pi ki\gamma^{-1}(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega))^{-1}, \\ \lambda_2 &= \frac{2\pi ki(1 + \gamma d_0(\sin(\varphi - \Omega) - \alpha \cos(\varphi - \Omega)))}{\gamma^2(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega))^2} - \\ &= \frac{2\pi^2 k^2(-2(1 + \alpha^2)\gamma(1 + \rho^2)^2 \sin^2(\varphi - \Omega) + q\rho^2 v(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega)))}{\gamma^2 q\rho^2 v(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega))^3}. \end{aligned}$$

Для устойчивости необходимо $\operatorname{Re} \lambda_2 \leq 0$. Потребуем, чтобы выполнялось строгое неравенство:

$$\frac{q\rho^2 v}{2(1 + \rho^2)^2} - \frac{(1 + \alpha^2)\gamma \sin^2(\varphi - \Omega)}{(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega))} > 0. \quad (65)$$

Теперь рассмотрим случай 1.в). В этом случае $\varepsilon\lambda_* \rightarrow 0$, поэтому в пределе корень удовлетворяет уравнению (63). Мы считаем, что полученные ранее условия устойчивости выполняются, поэтому либо корень λ_* будет в левой полуплоскости при малых ε , либо он будет перескакивать из окрестности точки $2\pi h$ в окрестность точки $2\pi(h+1)$ или $2\pi(h-1)$, где h — некоторое целое число (так как мы считаем, что $|\lambda| \rightarrow \infty$). В этой ситуации представим $\lambda_*(\varepsilon)$ в виде $\lambda_*(\varepsilon) = 2\pi k(\varepsilon)i + \lambda_{k,1} + i\lambda_{k,2}$. Здесь $k(\varepsilon) \rightarrow \infty$, но принимает только целые значения, $\lambda_{k,1}$ и $\lambda_{k,2}$ — неизвестные действительные величины, стремящиеся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ (порядок стремления относительно ε заранее неизвестен). Введем обозначение $\mu = \varepsilon k(\varepsilon)$. Тогда $\mu \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon = o(\mu)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. После подстановки в уравнение (62) корня λ_* приходим к равенству

$$\begin{aligned} &(2\pi\mu i + \varepsilon\lambda_{k,1} + i\varepsilon\lambda_{k,2})^2 + \gamma^2(e^{-(\lambda_{k,1} + i\lambda_{k,2})} - 1)^2 + 2(2\pi\mu i + \varepsilon\lambda_{k,1} + \\ &+ i\varepsilon\lambda_{k,2}) \left(\frac{vq(\rho + \varepsilon w)^2}{2(1 + (\rho + \varepsilon w)^2)^2} - \gamma \cos(\varphi - \Omega - \varepsilon d)(e^{-(\lambda_{k,1} + i\lambda_{k,2})} - 1) \right) - \\ &- \frac{\gamma vq(\rho + \varepsilon w)^2(e^{-(\lambda_{k,1} + i\lambda_{k,2})} - 1)}{(1 + (\rho + \varepsilon w)^2)^2} (\cos(\varphi - \Omega - \varepsilon d) + \alpha \sin(\varphi - \Omega - \varepsilon d)) = 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Выписывая старшие члены в уравнении (66), находим соотношение на μ и первые приближения $\lambda_{k,1}$ и $\lambda_{k,2}$:

$$2\pi qv\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}i\mu + qv\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}\gamma(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega))(\lambda_{k,1} + i\lambda_{k,2}) = 0. \quad (67)$$

Так как μ , $\lambda_{k,1}$ и $\lambda_{k,2}$ действительные, то из (67) получаем, что

$$\begin{aligned}\lambda_{k,2} &= O(\mu), & \lambda_{k,1} &= o(\mu) & \text{при} & \mu \rightarrow 0, \\ \lambda_{k,20} &= -2\pi\mu\gamma^{-1}(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega))^{-1}.\end{aligned}\quad (68)$$

Представим $\lambda_{k,2} = \lambda_{k,20} + \lambda_{k,21}$, где $\lambda_{k,21} = o(\lambda_{k,20})$ при $\lambda_{k,21} \rightarrow 0$. Пользуясь соотношениями (68), выпишем следующее приближение в уравнении (66)

$$\begin{aligned}-4\pi^2\mu^2 - 4\pi\mu\lambda_{k,20}\gamma \cos(\varphi - \Omega) - \gamma^2\lambda_{k,20}^2 + \\ + qv\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}\gamma(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega))(\lambda_{k,10} + 1/2\lambda_{k,20}^2 + i\lambda_{k,21}) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда приходим к выводу, что $\lambda_{k,21} = o(\mu^2)$ и

$$\lambda_{k,10} = \frac{4\pi^2\mu^2(1 + \rho^2)^2 \left(\frac{\gamma(1 + \alpha^2) \sin^2(\varphi - \Omega)}{(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega))} - \frac{qv\rho^2}{2(1 + \rho^2)^2} \right)}{\gamma^2qv\rho^2(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega))^2}.$$

Таким образом, при малых μ корень λ_* имеет вид

$$\begin{aligned}\lambda_* &= 2\pi k(\varepsilon)i - \frac{2\pi i}{\gamma(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega))}\mu + \\ &+ \frac{4\pi^2(1 + \rho^2)^2 \left(\frac{\gamma(1 + \alpha^2) \sin^2(\varphi - \Omega)}{(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega))} - \frac{qv\rho^2}{2(1 + \rho^2)^2} \right)}{\gamma^2qv\rho^2(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega))^2}\mu^2 + o(\mu^2).\end{aligned}$$

Заметим, что внутри $o(\mu^2)$ не содержится номеров корней, поэтому действительная часть асимптотики λ_* является равномерной по номеру k . В силу (65) корень λ_* будет находиться в левой комплексной полуплоскости.

Случай 2. Потенциально возможны 2 варианта поведения λ_* :

- а) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\operatorname{Re} \lambda_* \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$;
- б) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\operatorname{Re} \lambda_* \rightarrow \operatorname{const} \geq 0$, а $\operatorname{Im} \lambda_* \rightarrow \infty$ при $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$.

Пусть $\operatorname{Re} \lambda_* \rightarrow +\infty$ и $\lim_{\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0} \varepsilon_{m_l}\lambda_* = s$. Тогда предельное уравнение примет вид

$$s^2 + 2s \left(\frac{vq\rho^2}{2(1 + \rho^2)^2} + \gamma \cos(\varphi - \Omega) \right) + \gamma^2 + \frac{vq\gamma\rho^2}{(1 + \rho^2)^2} (\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega)) = 0. \quad (69)$$

Из уравнения (69) получаем необходимые условия устойчивости

$$\begin{cases} 1/2vq\rho^2(1 + \rho^2)^{-2} + \gamma \cos(\varphi - \Omega) > 0, \\ \cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega) > -\gamma(1 + \rho^2)^2/(vq\rho^2). \end{cases} \quad (70)$$

Из условий (64) и (70) следует, что для устойчивости необходимо выполнение системы неравенств

$$\begin{cases} 1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2} + \gamma \cos(\varphi - \Omega) > 0, \\ \cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega) > 0. \end{cases} \quad (71)$$

Рассмотрим случай 2.б). Введем дополнительные обозначения. Пусть $g = \lim_{\varepsilon_{m,l} \rightarrow 0} \exp(-\operatorname{Re} \lambda_*(\varepsilon_{m,l}))$. Тогда $g \in (0, 1]$, поскольку $\operatorname{Re} \lambda_* \geq 0$. Напомним, что $\operatorname{Im} \lambda_* \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} \lambda_* \rightarrow \operatorname{const} \geq 0$ и $\varepsilon \lambda_* \rightarrow \operatorname{const} \neq 0$ при $\varepsilon_{m,l} \rightarrow 0$. Отсюда следует, что последовательность $\varepsilon_{m,l}$ можно проредить так, что на получившейся подпоследовательности $\{\varepsilon_j\}$ существует предел $b = \lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \varepsilon_j \operatorname{Im} \lambda_*(\varepsilon_j) \neq 0$. Пусть χ — некоторое число из $[0, 2\pi)$. Тогда семейство предельных уравнений в случае 2.б) будет иметь вид

$$\begin{aligned} & -b^2 + 2ib \left(\frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} - \gamma \cos(\varphi - \Omega)(ge^{-i\chi} - 1) \right) + \\ & + \gamma^2 (ge^{-i\chi} - 1)^2 - \frac{vq\rho^2}{(1+\rho^2)^2} (ge^{-i\chi} - 1) \gamma (\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega)) = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Если ни при каком значении пары (g, χ) из $(0, 1] \times [0, 2\pi)$ у уравнения (72) не будет действительных корней $b \neq 0$, то у уравнения (62) не будет корней из случая 2.б).

Выделим действительную и мнимую части уравнения (72). Действительная часть:

$$\begin{aligned} & -b^2 - 2b\gamma \cos(\varphi - \Omega)g \sin \chi + \gamma^2 ((g \cos \chi - 1)^2 - g^2 \sin^2 \chi) - \\ & - \frac{vq\rho^2}{(1+\rho^2)^2} (g \cos \chi - 1) \gamma (\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega)) = 0. \end{aligned} \quad (73)$$

Мнимая:

$$\begin{aligned} & b \left(\frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} - \gamma \cos(\varphi - \Omega)(g \cos \chi - 1) \right) = \\ & = -\gamma g \sin \chi \left(\gamma(1 - g \cos \chi) + \frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} (\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega)) \right). \end{aligned} \quad (74)$$

Пусть

$$1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2} - \gamma \cos(\varphi - \Omega)(g \cos \chi - 1) = 0. \quad (75)$$

Тогда исходя из положительности параметров v, q, ρ , получаем, что $\cos(\varphi - \Omega) \neq 0$. Отсюда приходим к равенству

$$g \cos \chi = 1 + \frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2 \gamma \cos(\varphi - \Omega)}.$$

Если выполняется неравенство

$$\left| 1 + \frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2\gamma\cos(\varphi-\Omega)} \right| < 1,$$

то найдется пара (g, χ) из $(0, 1) \times [0, 2\pi)$ такая, что равенство (75) выполнится. Для того, чтобы равенство (74) выполнилось в случае зануления коэффициента перед b , необходимо, чтобы правая часть равенства (74) также была равна нулю. Из условия устойчивости (71) и ограничений на параметры следует, что правая часть (74) может быть равна нулю только в случае $\sin \chi = 0$. Действительная часть (73) в этом случае примет вид

$$b^2 = \gamma(g \cos \chi - 1) \left(\gamma(g \cos \chi - 1) - \frac{vq\rho^2}{(1+\rho^2)^2}(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega)) \right).$$

В силу неравенства $g \cos \chi < 1$ и условия (71), получаем, что при условии (75) у системы (73), (74) будут действительные ненулевые корни b . Поэтому потребуем невырождения коэффициента при b в (74), то есть выполнения неравенства

$$\left| 1 + \frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2\gamma\cos(\varphi-\Omega)} \right| > 1. \quad (76)$$

Система (65), (71), (76) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega) > 0, \\ 1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2} + 2\gamma\cos(\varphi - \Omega) > 0, \\ \frac{qv\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} - \frac{\gamma(1+\alpha^2)\sin^2(\varphi - \Omega)}{(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega))} > 0. \end{cases} \quad (77)$$

Пусть условие (76) выполнено, тогда коэффициент при b в (74) отличен от нуля для любой пары (g, χ) из $(0, 1] \times [0, 2\pi)$.

Пусть выполнено условие $v - 2\gamma > 0$. Тогда эллипс $I(v, \alpha, q, \gamma)$ находится выше оси абсцисс и точка $(\delta_{low}, (1 + \rho_{low}^2)^{-1})$, где

$$(1 + \rho_{low}^2)^{-1} = (v - 2\gamma)/(vq), \quad \delta_{low} = 1/2v\alpha(q(1 + \rho_{low}^2)^{-1} - 1),$$

принадлежит множеству $I(v, \alpha, q, \gamma)$. В этой точке $\cos(\varphi - \Omega) = 1$, поэтому уравнение (72) в данной точке примет вид

$$-b^2 + 2ib \left(\frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} - \gamma(ge^{-i\chi} - 1) \right) + \gamma(ge^{-i\chi} - 1) \left(\gamma(ge^{-i\chi} - 1) - \frac{vq\rho^2}{(1+\rho^2)^2} \right) = 0. \quad (78)$$

Выделим действительную и мнимую части в уравнении (78):

$$-b^2 - 2b\gamma g \sin \chi + \gamma^2((g \cos \chi - 1)^2 - g^2 \sin^2 \chi) - vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}\gamma(g \cos \chi - 1) = 0, \quad (79)$$

$$b(vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}-2\gamma(g\cos\chi-1)) = -\gamma g\sin\chi(vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}-2\gamma(g\cos\chi-1)). \quad (80)$$

Из уравнения (80) получаем, что $b = -\gamma g\sin\chi$. Подставляя значение b в уравнение (79), приходим к равенству

$$\gamma(g\cos\chi-1)(\gamma(g\cos\chi-1)-vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}) = 0.$$

Первый и третий множитель данного равенства отличны от нуля, а второй множитель равен нулю только в случае $\cos\chi = 1$, то есть только при $b = 0$, а, согласно построениям данного пункта, $b \neq 0$. Таким образом, в точке $(\delta_{low}, (1+\rho_{low}^2)^{-1})$ у уравнения (72) нет действительных, отличных от нуля корней b , и выполняется система (77).

Следовательно, в данной точке у квазиполинома (62) все корни, кроме одного нулевого, находятся в левой полуплоскости. Для того, чтобы корни оказались в правой полуплоскости, они должны пересечь мнимую ось. В случае 2.б) мнимой оси отвечает равенство $g = 1$, поэтому далее мы будем рассматривать уравнение (72) при $g = 1$. После обозначения $u = 1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}$ действительная и мнимая части уравнения (72) примут вид

$$\begin{aligned} -b^2 - 2b\gamma\cos(\varphi - \Omega)\sin\chi + \gamma^2((\cos\chi - 1)^2 - \sin^2\chi) - \\ - 2u(\cos\chi - 1)\gamma(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha\sin(\varphi - \Omega)) = 0. \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} b(u - \gamma\cos(\varphi - \Omega)(\cos\chi - 1)) = \\ = -\gamma\sin\chi(\gamma(1 - \cos\chi) + u(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha\sin(\varphi - \Omega))). \end{aligned} \quad (82)$$

Поскольку считаем, что выполнено условие (77), то коэффициент перед b в (82) отличен от нуля. Выразим из (82) значение b :

$$b = -\frac{\gamma\sin\chi(\gamma(1 - \cos\chi) + u(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha\sin(\varphi - \Omega)))}{u - \gamma\cos(\varphi - \Omega)(\cos\chi - 1)}. \quad (83)$$

Тогда, подставив (83) в (81), получим уравнение относительно $\cos\chi$. После обозначений $x = \cos\chi$ и $\psi = \varphi - \Omega$ это уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \gamma(u - \gamma\cos\psi(x - 1))^{-2}(x - 1)(\gamma^3x^3 - \gamma^2(\gamma + 4u\cos\psi + 2\gamma\cos^2\psi + 2\alpha u\sin\psi)x^2 + \\ + \gamma(-\gamma^2 + 2u^2 + 4\gamma u\cos\psi + 4\gamma^2\cos^2\psi + 3u^2\cos^2\psi + 4\gamma u\cos^3\psi + 4\alpha u^2\cos\psi\sin\psi + \\ + 4\alpha\gamma u\cos^2\psi\sin\psi + \alpha^2u^2\sin^2\psi)x + 2\alpha\gamma^2u\sin\psi - 2u^3\cos\psi - 2\gamma^3\cos^2\psi - 5\gamma u^2\cos^2\psi - \\ - 4\gamma^2u\cos^3\psi + \gamma^3 - 2\alpha u^3\sin\psi - 4\alpha\gamma u^2\cos\psi\sin\psi - 4\alpha\gamma^2u\cos^2\psi\sin\psi + \\ + \alpha^2\gamma u^2\sin^2\psi) = 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Первые два множителя отличны от нуля в силу условия (77), равенство $x = 1$ эквивалентно равенству $b = 0$, что не соответствует построениям пункта 2.б). Обозначим последний множитель (84) через $H(x)$. Поскольку $x = \cos \chi$, то x принимает значения из $[-1, 1]$. Найдем значения H в концах отрезка изменения переменной x .

$$H(-1) = -2(u + 2\gamma \cos \psi)^2(\gamma + u(\cos \psi + \alpha \sin \psi)),$$

$$H(1) = -2u^2(u(\cos \psi + \alpha \sin \psi) - \gamma(1 + \alpha^2) \sin^2 \psi).$$

Из (77) следует, что $H(-1) < 0$ и $H(1) < 0$. Если выполняется (77) и на всем отрезке $[-1, 1]$ функция $H(x)$ отрицательна, то у уравнения (72) не будет корней на мнимой оси. Для того, чтобы $H(x)$ было отрицательным при условии $H(-1) < 0$ и $H(1) < 0$, необходимо и достаточно, чтобы или локальный максимум функции H был вне $(-1, 1)$ или чтобы он был отрицательным. Для произвольных параметров и точки эллипса это условие легко проверяется численно.

Таким образом, верны следующие утверждения.

Теорема 16 (Достаточное условие устойчивости). *Пусть $0 < v - 2\gamma < qv$. Пусть для некоторой точки $(\delta_*, (1 + \rho_*^2)^{-1})$ множества $I(v, \alpha, q, \gamma)$ выполнена система неравенств (77), а уравнение $H(x) = 0$ не имеет корней ни при каком значении x из $[-1, 1]$ для всех точек кратчайшей дуги $I(v, \alpha, q, \gamma)$, соединяющей точки $(\delta_*, (1 + \rho_*^2)^{-1})$ и $(\delta_{low}, (1 + \rho_{low}^2)^{-1})$. Тогда для каждого целого n существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение уравнения (59) вида (60), соответствующее точке $(\delta_*, (1 + \rho_*^2)^{-1})$, устойчиво.*

Для формулировки теоремы о неустойчивости, введем в рассмотрение следующую совокупность неравенств:

$$\begin{cases} \cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega) < 0, \\ \frac{vq\rho^2}{2(1 + \rho^2)^2} + \gamma \cos(\varphi - \Omega) < 0, \\ \frac{vq\rho^2}{2(1 + \rho^2)^2} - \frac{\gamma(1 + \alpha^2) \sin^2(\varphi - \Omega)}{\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega)} < 0. \end{cases} \quad (85)$$

Теорема 17 (Достаточное условие неустойчивости). *Пусть для некоторой точки $(\delta_*, (1 + \rho_*^2)^{-1})$ множества $I(v, \alpha, q, \gamma)$ выполняется совокупность (85). Тогда для каждого целого n существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение (60) уравнения (59), соответствующее точке $(\delta_*, (1 + \rho_*^2)^{-1})$, неустойчиво.*

2.2.4 Расположение областей устойчивости на кривой $I(v, 0, q, \gamma)$

Изучим вопрос о количестве областей устойчивости на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$. Сначала выпишем систему (77) в координатах (δ, r) . Так как $\rho^2(1 + \rho^2)^{-2} = r - r^2$, то, пользуясь равенствами (52), получаем, что система (77) примет вид

$$\begin{cases} \delta\alpha - 1/2v(1 + \alpha^2)(qr - 1) > 0, \\ -qv/2(r^2 + r - 2/q) > 0, \\ \frac{vq(r - r^2)}{2} - \frac{(1 + \alpha^2)(\delta - 1/2v\alpha(qr - 1))^2}{\delta\alpha - 1/2v(1 + \alpha^2)(qr - 1)} > 0. \end{cases} \quad (86)$$

Лемма 11. Пусть $\alpha = 0$. Пусть $0 < v - 2\gamma < qv$, тогда точки множества $I(v, 0, q, \gamma)$, для которых система (86) верна, образуют непустую связную область. Если же выполнено неравенство $v < 2\gamma$, то система неравенств (86) несовместна на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$.

Доказательство. Рассмотрим первое неравенство системы (86). При $\alpha = 0$ оно принимает вид

$$r < q^{-1}.$$

Заметим, что

$$\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} < q^{-1} < (v + 2\gamma)(vq)^{-1},$$

поэтому первое неравенство (86) верно в нижней точке множества $I(v, 0, q, \gamma)$ и не выполняется при $r = (v + 2\gamma)(vq)^{-1}$.

Из системы неравенств (77) (которая эквивалентна системе неравенств (86)) легко видеть, что при $\alpha = 0$ из выполнения первого неравенства системы следует выполнение второго неравенства.

Рассмотрим третье неравенство системы (86). При $\alpha = 0$ оно принимает вид

$$\frac{vq(r - r^2)}{2} + \frac{2\delta^2}{v(qr - 1)} > 0.$$

Учитывая, что точки множества $I(v, 0, q, \gamma)$ принадлежат эллипсу (49), имеем соотношение

$$\delta^2 = \gamma^2 - 1/4v^2(qr - 1)^2.$$

Таким образом для точек множества $I(v, 0, q, \gamma)$ третье неравенство системы (86) можно записать в виде

$$\frac{4\gamma^2 - v^2 + qr v^2 + qr^2 v^2 - q^2 r^3 v^2}{2v(qr - 1)} > 0. \quad (87)$$

При выполнении первого неравенства системы (86) знаменатель выражения (87) будет отрицательным, поэтому числитель также должен быть отрицательным.

Введем функцию

$$f(r) = 4\gamma^2 - v^2 + qrv^2 + qr^2v^2 - q^2r^3v^2.$$

Ниже понадобится ее производная

$$f'(r) = qv^2 + 2qrv^2 - 3q^2r^2v^2.$$

Для корней r_1 и r_2 уравнения $f'(r) = 0$ верны формулы

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 3q}}{3q}, \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 3q}}{3q}.$$

Очевидно, что

$$r_1 < 0 < \max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\}. \quad (88)$$

Докажем, что

$$r_2 \geq \min\{1, q^{-1}\}. \quad (89)$$

Пусть $\min\{1, q^{-1}\} = 1$. Тогда неравенство (89) перепишется в виде

$$1 + \sqrt{1 + 3q} \geq 3q. \quad (90)$$

В случае $0 < q < 1/3$ это неравенство, очевидно, верно. Если же $1/3 \leq q \leq 1$, то (90) эквивалентно неравенству

$$1 + 3q \geq 9q^2 - 6q + 1.$$

Очевидно, данное неравенство верно при $1/3 \leq q \leq 1$. Пусть теперь $\min\{1, q^{-1}\} = q^{-1}$. Тогда неравенство (89) принимает вид

$$1 + \sqrt{1 + 3q} \geq 3.$$

Данное неравенство, очевидно, верно при $q \geq 1$.

Из (88) и (89) следует, что на отрезке $[\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\}, \min\{1, q^{-1}\}]$ производная $f'(r)$ сохраняет свой знак. Следовательно, функция $f(r)$ монотонна и уравнение $f(r) = 0$ имеет не более одного корня на данном отрезке.

Найдем значения функции f в точках $0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}, 1, q^{-1}$.

$$\begin{aligned} f(0) &= (2\gamma - v)(2\gamma + v), \\ f((v - 2\gamma)(vq)^{-1}) &= 2\gamma(2\gamma - v)(2\gamma - (1 - q)v)(qv)^{-1}, \\ f(q^{-1}) &= 4\gamma^2, \\ f(1) &= (2\gamma - (1 - q)v)(2\gamma + v(1 - q)). \end{aligned}$$

Из условия существования решения (58) и ограничений на параметры следует, что

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(f(0)) &= -\operatorname{sgn}(v - 2\gamma), \\ \operatorname{sgn}(f((v - 2\gamma)(vq)^{-1})) &= -\operatorname{sgn}(v - 2\gamma), \\ f(q^{-1}) &> 0, \\ \operatorname{sgn}(f(1)) &= \operatorname{sgn}(2\gamma + v(1 - q)).\end{aligned}$$

Таким образом

$$f(\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\}) < 0,$$

если $\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} = (v - 2\gamma)(vq)^{-1}$, и

$$f(\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\}) > 0,$$

если $\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} = 0$.

Из того, что $f(q^{-1}) > 0$ и $f(1) > 0$ при $1 < q^{-1}$, следует, что

$$f(\min\{1, q^{-1}\}) > 0.$$

Далее рассмотрим два случая: 1) множество $I(v, 0, q, \gamma)$ пересекает ось абсцисс, то есть $\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} = 0$; 2) множество $I(v, 0, q, \gamma)$ выше оси абсцисс, то есть $\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} = (v - 2\gamma)(vq)^{-1}$.

В первом случае на всем отрезке $[0, \min\{1, q^{-1}\}]$ функция f положительна и третье неравенство системы (86) не выполняется на этом отрезке. А на полуинтервале $(\min\{1, q^{-1}\}, \min\{1, (v + 2\gamma)(vq)^{-1}\})$ не выполняется первое неравенство системы (86). Таким образом, для любой точки множества $I(v, 0, q, \gamma)$ система (86) не верна.

Во втором случае функция f отрицательна в левом конце отрезка $[(v - 2\gamma)(vq)^{-1}, \min\{1, q^{-1}\}]$ и положительна в правом. Следовательно, учитывая монотонность f на данном отрезке, имеем, что уравнение $f(r) = 0$ имеет ровно один корень r_* на интервале $((v - 2\gamma)(vq)^{-1}, \min\{1, q^{-1}\})$ и $f(r) < 0$ при r из полуинтервала $[(v - 2\gamma)(vq)^{-1}, r_*)$. Таким образом, третье неравенство верно на полуинтервале $[(v - 2\gamma)(vq)^{-1}, r_*)$. Первое и второе неравенства системы (86) выполняются на полуинтервале $[(v - 2\gamma)(vq)^{-1}, \min\{1, q^{-1}\})$, а при $r \geq \min\{1, q^{-1}\}$ либо первое неравенство системы (86) не верно (если $\min\{1, q^{-1}\} = q^{-1}$), либо решение не определено (если $\min\{1, q^{-1}\} = 1$). Получаем, что система (86) верна на полуинтервале $[(v - 2\gamma)(vq)^{-1}, r_*)$, то есть она выполняется для односвязной области на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$, содержащей точку (δ_{low}, r_{low}) , но не для всего множества целиком. \square

Лемма 12. Пусть $\alpha = 0$ и выполнены условия (77). Тогда $H(x) < 0$ при $x \in [-1, 1]$.

Доказательство. Найдем производную $H'(x)$:

$$H'(x) = 3\gamma^3 x^2 - 2\gamma^2 x(\gamma + 4u \cos \psi + 2\gamma \cos^2 \psi) + \\ + \gamma(-\gamma^2 + 2u^2 + 4\gamma u \cos \psi + 4\gamma^2 \cos^2 \psi + 3u^2 \cos^2 \psi + 4\gamma u \cos^3 \psi).$$

Графиком $H'(x)$ является парабола ветвями вверх. Для абсциссы вершины x_v верно равенство

$$x_v = 1/3(\gamma + 4u \cos \psi + 2\gamma \cos^2 \psi)\gamma^{-1}.$$

Докажем, что из условий (77) следует неравенство $x_v > 1$. Действительно, в силу условий (77) при $\alpha = 0$ правая часть равенства

$$3\gamma(x_v - 1) = 4u \cos \psi + 2\gamma \cos^2 \psi - 2\gamma = 4u \cos \psi - 2\gamma \sin^2 \psi = 2 \cos \psi \left(u + u - \frac{\gamma \sin^2 \psi}{\cos \psi} \right)$$

положительна. Следовательно, $x_v > 1$. Для $H'(1)$ имеем формулу

$$H'(1) = \gamma u \left(u + u \sin^2 \psi + 4 \cos^2 \psi \left(u - \frac{\gamma \sin^2 \psi}{\cos \psi} \right) \right).$$

Из (77) следует, что $H'(1) > 0$. Таким образом, графиком $H'(x)$ является парабола ветвями вверх с вершиной правее единицы, а в единице функция $H'(x)$ положительна. Следовательно, $H'(x)$ положительна на всем отрезке $[-1, 1]$. Поэтому $H(x) < H(1) < 0$ на всем отрезке $[-1, 1]$ при $\alpha = 0$ и выполнении условий (77), что и требовалось доказать. \square

Будем говорить, что решение, соответствующее некоторой точке множества $I(v, \alpha, q, \gamma)$, устойчиво (неустойчиво), если для каждого n существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение (60) уравнения (59) с параметрами из $I(v, \alpha, q, \gamma)$ устойчиво (неустойчиво).

Из теорем 16, 17 и лемм 11, 12 вытекает следующее утверждение.

Теорема 18. Пусть $v < 2\gamma$. Тогда решения, соответствующие любой точке множества $I(v, 0, q, \gamma)$, являются неустойчивыми. Пусть $0 < v - 2\gamma < qv$. Тогда на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$ расположена односвязная область устойчивости и одна или две области неустойчивости. Пусть $v - 2\gamma > qv$. Тогда множество $I(v, 0, q, \gamma)$ пусто.

Иллюстрацией к теореме 18 служит рисунок 2.12. Черной сплошной линией на рисунке 2.12 обозначены области устойчивости, серым пунктиром — области неустойчивости.

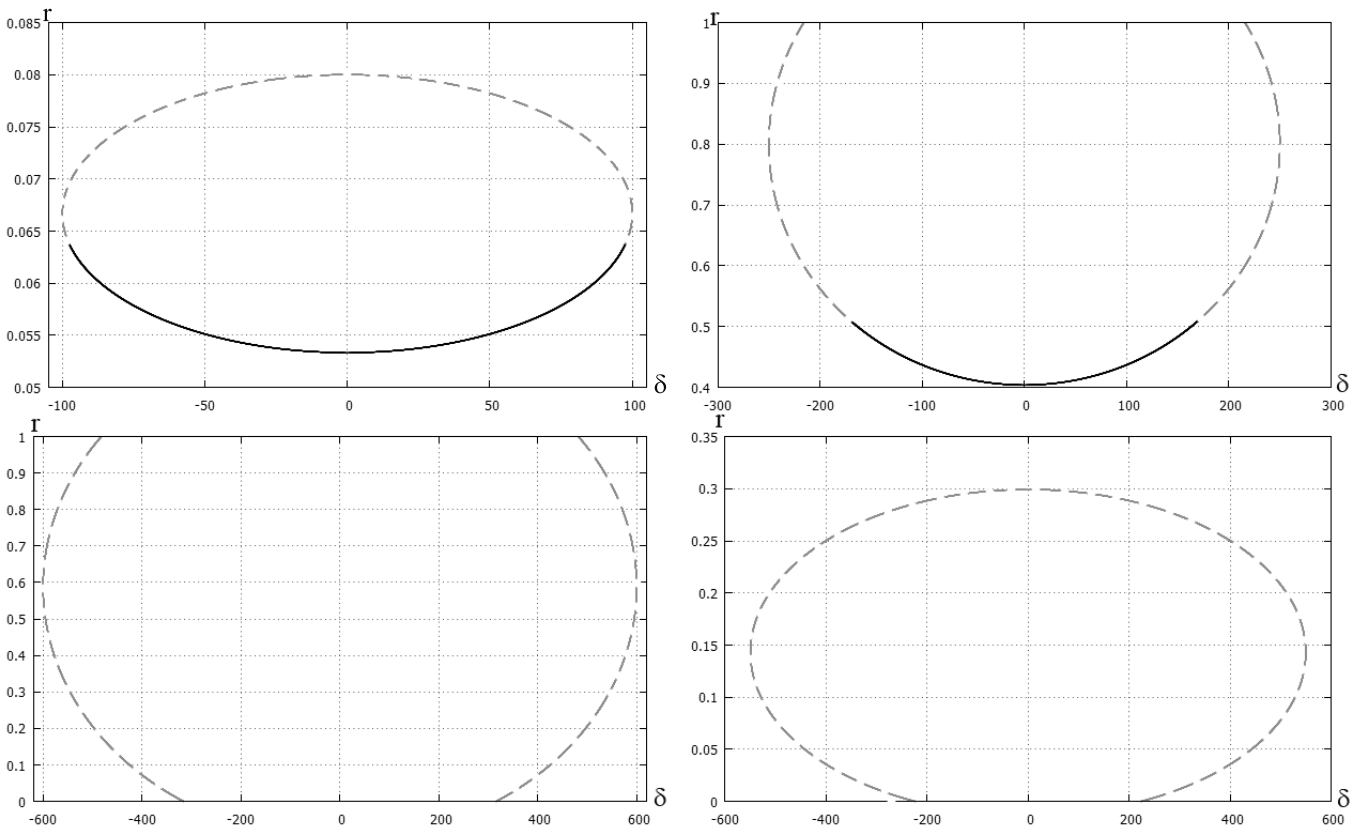


Рис. 2.12: Расположение областей устойчивости на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$. Значения параметров: а) $v = 1000, q = 15, \gamma = 100$; б) $v = 1010, q = 1.25, \gamma = 250$; в) $v = 1020, q = 1.7, \gamma = 600$; д) $v = 1005, q = 7, \gamma = 550$.

2.2.5 Сводка основных результатов параграфа 2.2

1. Доказано, что на плоскости (δ, r) существует однопараметрическое семейство, зависящее от параметров v, α, q, γ , каждой точке которого соответствует счетное число непрерывных волн (см. теорему 15). При малых значениях параметра ε найдено асимптотическое приближение этих решений, зависящее от разрывной функции $\theta(\varepsilon, \delta)$.

2. Найдены достаточные условия устойчивости (см. теорему 16) и неустойчивости (см. теорему 17) автомодельных циклов. Причем в случае $\alpha = 0$ найдены необходимые и достаточные условия устойчивости.

3. В случае $\alpha = 0$ показано, что на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$ либо нет области устойчивости, либо она единственна. Множество точек (v, q, γ) поделено на три подмножества. В первом из них множество $I(v, 0, q, \gamma)$ пусто, во втором на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$ нет областей устойчивости, а в третьем на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$ расположена одна область устойчивости. Для третьего подмножества аналитически найдены границы области устойчивости в координатах (δ, r) (см. теорему 18).

Выводы

В данной главе проведен анализ существования и устойчивости непрерывных волн для двух моделей лазерной динамики. Найдены условия существования семейств непрерывных волн. Показано, что в обоих случаях на двумерной плоскости есть кривая, каждой точке которой соответствует счетное число решений. Сформулированы достаточные условия устойчивости и неустойчивости отдельных решений и описана геометрия множеств устойчивых решений в зависимости от значений параметров. Показано, что в обеих моделях может наблюдаться гипермультистабильность (то есть можно добиться сосуществования сколь угодно большого конечного числа устойчивых решений).

Заключение

В работе рассматривались важные классы сингулярно возмущенных распределенных систем: уравнения в частных производных с малой диффузией и дифференциальные уравнения с большим запаздыванием. Исследовалась динамика следующих представителей данных классов: уравнения Гинзбурга-Ландау с малой диффузией, моделей Стюарта-Ландау, FDM-лазера и Лэнга-Кобаяши с большим запаздыванием. Изучение динамики данных уравнений в полном объеме, то есть поведения различных решений при стремлении времени к бесконечности, — очень сложная задача, поэтому была поставлена задача исследовать вопросы существования и устойчивости семейств решений из одного класса, имеющего большое значение, — автомодельных циклов. Для всех моделей были найдены условия существования семейств данного вида, и было показано, что за счет уменьшения бифуркационного параметра можно добиться сосуществования асимптотически большого числа устойчивых решений.

В первой главе изучены вопросы существования и устойчивости автомодельных циклов в сингулярно возмущенных уравнениях Гинзбурга-Ландау и Стюарта-Ландау.

В параграфе 1.1 рассмотрены свойства устойчивости для бегущих волн в уравнении Гинзбурга-Ландау с малой диффузией. Основным результатом параграфа 1.1 является нахождение границ номеров k бегущих волн u_k , для которых выполнены достаточные условия устойчивости и неустойчивости. Направлением дальнейших исследований может служить изучение свойств устойчивости бегущих волн u_k с номерами k из $(z_{min}\varepsilon^{-1}, z_2\varepsilon^{-1})$ при выполнении неравенств $bd + 1 > 0$ и $|b| < |d|$.

В параграфе 1.2 изучены вопросы существования и устойчивости простейших периодических решений в уравнении Стюарта-Ландау с большим запаздыванием. Основными результатами параграфа 1.2 являются определение множества $L(c, \gamma, \varphi)$, задающего условия существования семейства простейших периодических решений; конкретный вид достаточных условий устойчивости при произвольных значениях параметров c, γ, φ ; доказательство того, что достаточные условия устойчивости совпадают с необходимыми при $c = 0$ и то, что на кривой $L(0, \gamma, \varphi)$ область устойчивости односвязна. Дальнейшие усилия могут быть направлены на

нахождение необходимых и достаточных условий устойчивости при $c \neq 0$.

Во второй главе изучены вопросы существования и устойчивости непрерывных волн для двух моделей лазерной динамики.

В параграфе 2.1 данные вопросы рассмотрены для модели FDML лазера с большим запаздыванием. Построено специальное множество $\Gamma(\kappa, g_0)$, отвечающее за условие существования семейства решений вида непрерывных волн. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости для соответствующих решений упрощенной модели FDML лазера. В случае $\alpha = 0$ удалось полностью решить задачу аналитически, то есть доказать, что необходимые и достаточные условия устойчивости совпадают. Важным следствием этого факта является то, что при $\alpha = 0$ на множестве $\Gamma(\kappa, g_0)$ может быть от нуля до трех областей устойчивости. Более того, при $\alpha = 0$ в плоскости параметров (g_0, κ) аналитически найдены границы областей, в каждой из которых свое число областей устойчивости на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$. Направлением для дальнейших исследований может служить нахождение необходимых и достаточных условий устойчивости при $\alpha \neq 0$.

В параграфе 2.2 рассмотрены вопросы существования и устойчивости непрерывных волн для модели полупроводникового лазера с большим запаздыванием, предложенной Лэнгом и Кобаяши. Основными результатами параграфа являются нахождение вида множества $I(v, \alpha, q, \gamma)$, задающего условие существования семейства решений вида непрерывных волн, а также вид достаточных условий устойчивости и неустойчивости автомодельных решений для упрощенной модели полупроводникового лазера. Важным следствием того факта, что при $\alpha = 0$ найденные достаточные условия являются необходимыми, является то, что на кривой $I(v, 0, q, \gamma)$ может быть ноль или одна область устойчивости. Интересной задачей для будущего исследования является нахождение количества областей устойчивости на кривых $I(v, \alpha, q, \gamma)$ при $\alpha \neq 0$.

Литература

- [1] *Ахромеева, Т.С.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос / *Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский.* — М.: Наука, 1992.
- [2] *Беллман, Р.* Дифференциально-разностные уравнения / *Р. Беллман, К. Кук.* — М.: Мир, 1967.
- [3] *Богаевская, В.Г.* Влияние запаздывающей обратной связи на устойчивость периодических орбит / *В.Г. Богаевская, И.С. Кащенко* // Моделирование и анализ динамических систем. — 2014. — Т. 21, № 1. — С. 53–65.
- [4] *Васильева, А.Б.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией / *А.Б. Васильева, С.А. Кащенко, Ю.С. Колесов, Н.Х. Розов* // Матем. сб. — 1986. — Т. 130(172), № 4(8). — С. 488–499.
- [5] *Гинзбург, В.И.* К теории сверхпроводимости / *В.И. Гинзбург, Л.Д. Ландау* // ЖЭТФ. — 1950. — Т. 20. — С. 1064.
- [6] *Глазков, Д.В.* Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием в окрестности автомодельного цикла / *Д.В. Глазков, С.А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2010. — Т. 17, № 3. — С. 38–47.
- [7] *Глызин, С.Д.* Динамические свойства простейших конечноразностных аппроксимаций краевой задачи «реакция-диффузия» / *С.Д. Глызин* // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33, № 6. — С. 805–811.
- [8] *Глызин, С.Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке / *С.Д. Глызин* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2009. — Т. 16, № 3. — С. 96–116.
- [9] *Глызин, С.Д.* Размерностные характеристики диффузионного хаоса / *С.Д. Глызин* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 30–51.

- [10] *Глызин, С.Д.* Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 49, № 1. — С. 76–89.
- [11] *Глызин, С.Д.* Конечномерные модели диффузионного хаоса / *С. Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н. Х. Розов* // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — Т. 50, № 5. — С. 860–875.
- [12] *Глызин, С.Д.* Явление буферности в нейродинамике / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // ДАН. — 2012. — Т. 443, № 2. — С. 168–172.
- [13] *Глызин, С.Д.* Диффузионный хаос в задаче «реакция-диффузия» с гантелеобразной областью определения пространственной переменной / *Глызин С.Д., Шокин П.Л.* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2013. — Т. 20, № 3. — С. 43–57.
- [14] *Григорьева, Е.В.* Квазинормальные формы для уравнений Лэнга–Кобаяши с большим коэффициентом управления / *Е.В. Григорьева, И.С. Кащенко, С.А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 18–29.
- [15] *Като, Т.* Теория возмущений линейных операторов / *Т. Като.* — М.: Мир, 1972.
- [16] *Кащенко, А.А.* Устойчивость бегущих волн в уравнении Гинзбурга–Ландау с малой диффузией / *А.А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2011. — Т. 18, № 3. — С. 58–62.
- [17] *Кащенко, А.А.* Устойчивость простейших периодических решений в уравнении Стюарта–Ландау с большим запаздыванием / *А.А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2012. — Т. 19, № 3. — С. 136–141.
- [18] *Кащенко, А.А.* Устойчивость непрерывных волн для модели FDML лазера / *А.А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2014. Т. 21, № 3. — С. 35–54.
- [19] *Кащенко, А.А.* Устойчивость непрерывных волн для модели полупроводникового лазера с большим запаздыванием / *А.А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2015. — Т. 22, № 3. — С. 420–438.
- [20] *Кащенко, И.С.* Нормализация в системе с двумя близкими большими запаздываниями / *И.С. Кащенко* // Нелинейная динамика. — 2010. — Т. 6, № 1. — С. 169–180.

- [21] *Кащенко, И.С.* Динамика уравнения с большим коэффициентом запаздывающего управления / *И.С. Кащенко* // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 437, № 6. — С. 743–747.
- [22] *Кащенко, И.С.* Асимптотика сложных пространственно-временных структур в системах с большим запаздыванием / *И.С. Кащенко, С.А. Кащенко* // Известия вузов «ПНД». 2008. — Т. 16, № 4. — С. 137–146.
- [23] *Кащенко, С.А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией / *С.А. Кащенко* // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 299, № 5. — С. 1049–1052.
- [24] *Кащенко, С.А.* Пространственные особенности высокомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией / *С.А. Кащенко* // Диф. уравнения. — 1989. — Т.25, № 2. — С. 262–270.
- [25] *Кащенко, С.А.* Уравнение Гинзбурга–Ландау — нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием / *С.А. Кащенко* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1998. — Т. 38, № 3, С. 457–465.
- [26] *Колесов, А.Ю.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений: Учебное пособие / *А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов*. — Ярославль: ЯрГУ, 2003.
- [27] *Колесов, А.Ю.* Двухчастотные автоволновые процессы в комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау / *А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // ТМФ. — 2003. — Т. 134, № 3. — С. 353–373.
- [28] *Колесов, А.Ю.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений / *А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов*. — М.: Физматлит, 2004.
- [29] *Колесов, А.Ю.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения / *А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Теоретическая и математическая физика. — 2004. — Т. 140, № 1. — С. 14–28.
- [30] *Колесов, Ю.С.* Устойчивость и бифуркация бегущих волн / *Ю.С. Колесов* // Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль: ЯрГУ, 1985. — С. 3–10.
- [31] *Колесов, Ю.С.* Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией / *Ю.С. Колесов* // Укр. матем. журн. — 1987. — Т. 39, № 1. — С. 28–34.

- [32] *Кудряшов, Н.А.* Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие / *Н.А. Кудряшов.* — М.: МИФИ, 2008.
- [33] *Мищенко, Е.Ф.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / *Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов.* — М.: Физматлит, 2005.
- [34] *Соболевский, П.Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах / *П.Е. Соболевский* // Тр. ММО. — 1961. — Т.10. — С. 297–350.
- [35] *Хейл, Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений / *Дж. Хейл.* — М.: Мир, 1984.
- [36] *Aranson, I.* The world of cubic Ginzburg-Landau equation / *I. Aranson, L. Kramer* // Rev. Mod. Phys. — 2002. — V. 74. — P. 99–143.
- [37] *Bogaevskaya, V.G.* Influence of Delayed Feedback Control on the Stability of Periodic Orbits / *V.G. Bogaevskaya, I.S. Kashchenko* // Automatic Control and Computer Sciences. — 2014. — V. 48, No. 7. — P. 478–487.
- [38] *Bohr, T.* Dynamical systems approach to turbulence / *T. Bohr, M.H. Jensen, G. Paladin, A. Vulpiani.* — Cambridge University Press, 2005.
- [39] *Cross, M.C.* Pattern formation outside of equilibrium / *M.C. Cross, P.C. Hohenberg* // Reviews of modern physics. — 1993. — V. 65, No. 3. — P. 851.
- [40] *Ekhaus, W.* Studies in Non-Linear Stability Theory / *W. Ekhaus.* — Berlin: Springer-Verlag, 1965.
- [41] *Erneux, T.* Applied Delay Differential Equations / *T. Erneux.* — Springer, 2009.
- [42] *Erneux, T.* Stable microwave oscillations due to external-cavity-mode beating in laser diodes subject to optical feedback / *T. Erneux, A. Gavrielides, M. Sciamanna* // Phys. Rev. A. — 2002. — V. 66. — P. 033809.
- [43] *Fiedler, B.* Refuting the odd-number limitation of time-delayed feedback control / *B. Fiedler, V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel, E. Schöll* // Physical Review Letters. — 2007. — V. 98, No. 11. — P. 114101.
- [44] *Fiedler, B.* Beyond the odd number limitation of time-delayed feedback control / *B. Fiedler, V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel, E. Schöll* // Handbook of chaos control. — 2008. — P. 73–84.

- [45] *Fischer, I.* High-dimensional chaotic dynamics of an external cavity semiconductor laser / *I. Fischer, O. Hess, W. Elsässer, E. Göbel* // Phys. Rev. Lett. — 1994. — V. 73. — P. 2188–2191.
- [46] *Gourley, S.A.* Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics / *S.A. Gourley, J.W.-H. So, J.H. Wu* // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 124, No. 4. — P. 5119–5153.
- [47] *Green, K.* Stability near threshold in a semiconductor laser subject to optical feedback: A bifurcation analysis of the Lang-Kobayashi equations / *K. Green* // Phys. Rev. E. — 2009. — V. 79. — P. 036210.
- [48] *Grigorieva, E.V.* Quasiperiodicity in Lang-Kobayashi model of lasers with delayed optical feedback / *E.V. Grigorieva* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. — 2001. — V. 4. — P. 333340.
- [49] *Heil, T.* Influence of amplitude-phase coupling on the dynamics of semiconductor lasers subject to optical feedback / *T. Heil, I. Fischer, W. Elsässer* // Phys. Rev. A. — 1999. — V. 60. — P. 634–640.
- [50] *Huber, R.* Fourier Domain Mode Locking (FDML): A new laser operating regime and applications for optical coherence tomography / *R. Huber, M. Wojtkowski, J.G. Fujimoto* // Opt. Express. — 2006. — V. 14. — P. 3225–3237.
- [51] *Huyet, G.* Low frequency fluctuations and multimode operation of a semiconductor laser with optical feedback / *G. Huyet, S. Balle, M. Giudici, C. Green, G. Giacomelli, J.R. Tredicce* // Opt. Commun. — 1999. — V. 149. — P. 341–347.
- [52] *Jeon, M.Y.* Characterization of Fourier domain modelocked wavelength swept laser for optical coherence tomography imaging / *M.Y. Jeon, J. Zhang, Z. Chen* // Optics express. — 2008. — V. 16, No. 6. — P. 3727–3737.
- [53] *Jirauschek, C.* A theoretical description of Fourier domain mode locked lasers / *C. Jirauschek, B. Biedermann, R. Huber* // Optics express. — 2009. — V. 17, No. 26. — P. 24013–24019.
- [54] *Kashchenko, A.A.* Stability of the Simplest Periodic Solutions in the Stuart-Landau Equation with Large Delay / *A.A. Kashchenko* // Automatic Control and Computer Sciences. — 2013. — V. 47, No. 7. — P. 566–570.
- [55] *Kashchenko, A.A.* Stability of continuous wave solutions of one laser model with large delay / *A.A. Kashchenko* // Regular and Chaotic Dynamics. — 2015. — V. 20, No. 2. — P. 173–183.

- [56] *Kuramoto, Y.* Chemical oscillations, waves, and turbulence / *Y. Kuramoto.* — Springer Science and Business Media, 1984.
- [57] *Kuramoto, Y.* Reductive perturbation approach to chemical instabilities / *Y. Kuramoto, T. Tsuzuki* // *Progr. Theor. Phys.* — 1975. — V. 52. — P. 1399–1401.
- [58] *Kuramoto, Y.* On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems / *Y. Kuramoto, T. Tsuzuki* // *Progr. Theor. Phys.* — 1975. — V. 54, No. 3. — P. 687–699.
- [59] *Kuramoto, Y.* Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium / *Y. Kuramoto, T. Tsuzuki* // *Progress of theoretical physics.* — 1976. — V. 55, No. 2. — P. 356–369.
- [60] *Lang, R.* External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties / *R. Lang, K. Kobayashi* // *Quantum Electronics.* — 1980. — V. 16, No. 3. — P. 347–355.
- [61] *Levine, A.M.* Diode lasers with optical feedback: Stability of the maximum gain mode / *A.M. Levine, G.H.M. Tartwijk, D. Lenstra, T. Erneux* // *Phys. Rev. A.* — 1995. — V. 52. — P. 3436–3439.
- [62] *Lythe, G.* Low pump limit of the bifurcation to periodic intensities in a semiconductor laser subject to external optical feedback / *G. Lythe, T. Erneux* // *Phys. Rev. A.* — 1997. — V. 55. — P. 4443–4448.
- [63] *Masoller, C.* Stability and dynamical properties of the coexisting attractors of an external-cavity semiconductor laser / *C. Masoller, N.B. Abraham* // *Phys. Rev. A.* — 1998. — V. 57. — P. 1313–1322.
- [64] *Mork, J.* Chaos in semiconductor lasers with optical feedback: theory and experiment / *J. Mork, B. Tromborg, J. Mark* // *J. Quant. Electr.* — 1992. — V. 28. — P. 93–108.
- [65] *Newell, A.C.* Order parameter equations for patterns / *A.C. Newell, T. Passot, J. Lega* // *Annual review of fluid mechanics.* — 1993. — V. 25, No. 1. — P. 399–453.
- [66] *Newell, A.C.* Review of the finite bandwidth concept. IN: Instability of continuous systems / *Newell A.C., Whitehead J.A.* Edited by: H. Leipholz. — Berlin, West Germany: Springer-Verlag, 1971.
- [67] *Perlikowski, P.* Periodic patterns in a ring of delay-coupled oscillators / *P. Perlikowski, S. Yanchuk, O.V. Popovych, P.A. Tass* // *Physical Review E.* — 2010. — V. 82, No. 3. — P. 036208.

- [68] *Pismen, L.M.* Vortices in nonlinear fields: From liquid crystals to superfluids, from non-equilibrium patterns to cosmic strings / *L.M. Pismen.* — Oxford University Press, 1999.
- [69] *Reddy, D.V.R.* Time delay effects on coupled limit cycle oscillators at Hopf bifurcation / *D.V.R. Reddy, A. Sen, G.L. Johnston* // *Physica D.* — 1999. — V. 129. — P. 15–34.
- [70] *Reddy, D.V.R.* Dynamics of a limit cycle oscillator under time delayed linear and nonlinear feedbacks / *D.V.R. Reddy, A. Sen, G.L. Johnston* // *Physica D.* — 2000. — V. 144. — P. 335–357.
- [71] *Ritter, A.* Theory of laser diodes with weak optical feedback. I. Small-signal analysis and side-mode spectra / *A. Ritter, H. Haug* // *JOSA B.* — 1993. — V. 10. — P. 130–144.
- [72] *Ritter, A.* Theory of laser diodes with weak optical feedback. II. Limit-cycle behavior, quasi-periodicity, frequency locking, and route to chaos / *A. Ritter, H. Haug* // *JOSA B.* — 1993. — V. 10. — P. 145–154.
- [73] *Sano, T.* Antimode dynamics and chaotic itinerancy in the coherent collapse of semiconductor lasers with optical feedback / *T. Sano* // *Phys. Rev. A.* — 1994. — V. 50. — P. 2719–2726.
- [74] *Slepneva, S.* Dynamics of Fourier domain mode-locked lasers / *S. Slepneva, B. Kelleher, B. O'Shaughnessy, S.P. Hegarty, A.G. Vladimirov, G. Huyet* // *Opt. Express.* — 2013. — V. 21. — P. 19240–19251.
- [75] *Tager, A.A.* High-frequency oscillations and self-mode locking in short external-cavity laser diodes / *A.A. Tager, K. Petermann* // *IEEE J. Quantum Electron.* — 1994. — V. 30, No. 7. — P. 1553–1561.
- [76] *Tartwijk, G.* Semiconductor lasers with optical injection and feedback / *G. Tartwijk, D. Lenstra* // *Quantum. Semiclass. Opt.* — 1995. — V. 7. — P. 87–143.
- [77] *Turing, A.* The Chemical Basis of Morphogenesis / *A. Turing* // *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* — 1952. — V. 237. — P. 37–72.
- [78] *Vladimirov, A.* A new model for a mode-locked semiconductor laser / *A. Vladimirov, D. Turaev* // *Radiophysics and Quantum Electronics.* — 2004. — V. 47. — P. 769–776.

- [79] *Vladimirov, A.* Model for passive mode-locking in semiconductor lasers / *A. Vladimirov, D. Turaev* // Phys. Rev A. — 2005. — V. 72. — P. 033808.
- [80] *Vladimirov, A.* Delay differential equations for mode-locked semiconductor lasers / *A. Vladimirov, D. Turaev, G. Kozyreff* // Opt. Lett. — 2004. — V. 29. — P. 1221–1223.
- [81] *Wolfrum, M.* Complex dynamics in delay-differential equations with large delay / *M. Wolfrum, S. Yanchuk, P. Hövel, E. Schöll* // The European Physical Journal Special Topics. — 2011. — V. 191, No. 1. — P. 91–103.
- [82] *Wu, J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations / *J. Wu.* — Springer, 1996.
- [83] *Yanchuk, S.* Delay and periodicity / *S. Yanchuk, P. Perlikowski* // Physical review E. — 2009. — V. 79, No. 4. — P. 046221.
- [84] *Ye, J.* Period-doubling route to chaos in a semiconductor laser with weak optical feedback / *J. Ye, H. Li, J.G. McInerney* // Physical Review A. — 1993. — V. 47, No. 3. — P. 2249–2252.