

На правах рукописи

Бобок Алексей Станиславович

**Локальная динамика цепочек и решеток
нелинейных осцилляторов**

Специальность: 01.01.02 - «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2013

Работа выполнена на кафедре компьютерных сетей федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова»

Научный руководитель доктор физ.-мат. наук, профессор,
Глызин Сергей Дмитриевич,

Официальные оппоненты: Кубышкин Евгений Павлович,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»,
кафедра математического моделирования

Старков Сергей Олегович,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
Обнинский ИАТЭ НИЯУ «МИФИ»,
заведующий кафедрой КССТ

Ведущая организация МГУ им. М.В. Ломоносова

Защита состоится 27 декабря 2013 года в 17.00 на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова» по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д.14., к. 304

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова» по адресу: г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д.1.

Автореферат разослан 26 ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Глызин С.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В диссертационной работе рассматриваются математические модели на основе нелинейных взаимодействующих осцилляторов, возникающие в ходе решения многих задач механики, радиофизики, популяционной биологии, экологии, нейродинамики, нелинейной оптики и ряда других областей естествознания. Проводится исследование локальной динамики соответствующих систем, в ходе которого особое внимание уделяется феномену буферности, о котором принято говорить, когда в фазовом пространстве некоторой динамической системы при подходящем выборе параметров можно гарантировать сосуществование любого фиксированного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и проч.). Особый интерес изучению физических систем, демонстрирующих динамику, подходящую под описание явления буферности, придает тот факт, что одной из актуальных на настоящий момент задач является развитие и совершенствование техники анализа и проектирования «сложных» систем, то есть нелинейных систем, обладающих большим числом степеней свободы. При попытке решения этой проблемы зачастую приходится сталкиваться с двумя противостоящими друг другу принципами: выбранная система должна быть достаточно простой с тем, чтобы была возможность её сконструировать и построить, но одновременно она должна быть достаточно сложной, чтобы представлять определенный интерес. Такого рода экспериментальные системы, основанные на использовании цепочек и решеток автогенераторов Скотта¹, и будут рассматриваться в ходе данной работы.

Кроме того в работе исследуется система дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями, относящаяся к широкому классу динамических систем со сложным поведением решений. Нетривиальность свойств подобных уравнений обусловлена в первую очередь бесконечномерностью их фазового пространства. В задаче об устойчивости решений этих уравнений может наблюдаться бесконечномерное вырождение и в качестве их нормальных форм, также приходится рассматривать бесконечномерные системы специального вида. Для рассматриваемой в диссертации задачи в сингулярном случае удастся построить квазинормальную форму.

Заметим, что для уравнений указанного типа большое значение имеет объединение их в какую-либо ассоциацию. В радиофизических и нейробиологических приложениях такие ассоциации зачастую представляют собой однонаправленно связанные в кольцо системы. Простейшим нетривиальным кольцом из однонаправленно связанных автогенераторов следует считать систему, включающую три элемента, рассматриваемую в этой работе. В целом ряде случаев рассмотрение такой системы позволяет обнаружить некоторые новые эффекты, возникающие как результат взаимодействия осцил-

¹Scott C.A., Distributed Multimode Oscillators of One and Two Spatial Dimensions /C.A. Scott //, IEEE Trans. on circuit theory, CT-17:1 (1970)— P. 55 – 80.

ляторов², в том числе явление буферности, которое наблюдается в исследуемой задаче.

Обращаясь к практической значимости проводимых исследований, хочется отметить возможность приложения и внедрения полученных результатов в разнообразные промышленные, информационные и иные области производства. В частности, широкие перспективы открываются в сфере хранения информации. Описанные выше системы цепочек и решеток автогенераторов используют для этого способ, включающий локализацию информации в двух пространствах: реальном (самом массиве автогенераторов) и двойственном (комбинации режимов решетки), что интересно в свете исследований методов хранения информации живыми организмами. Ещё одной областью приложения могут стать системы распознавания образов, где среди целевых проблем стоит выделение определенных шаблонных особенностей объекта, как некоторых функций геометрии образа, не зависящих от сдвига и поворота. И, наконец, особенно стоит отметить возможности исследуемых систем при анализе так называемых «мыслительных» процессов биологического мозга в терминах характеристических отражений или состояний нелинейных колебательных систем. Таким образом, полученные в данной работе результаты, обладают как высокой теоретической значимостью, так и широкими возможностями для их практического применения.

Цель работы

Целью диссертационной работы является исследование при помощи универсальных асимптотических и численных методов анализа динамических систем условий возникновения феномена буферности в ряде простейших физических задач, представляющих собой цепочки и решетки нелинейных осцилляторов.

Методы исследования

В работе используются качественные асимптотические методы исследования динамических систем, в частности, метод нормальных форм для случая конечномерного вырождения и метод квазинормальных форм в случае бесконечномерного вырождения. Кроме того использовались методы оценки инвариантных характеристик аттракторов динамических систем и численный анализ.

Научная новизна

1. Построена и проанализирована нормальная форма для различных модификаций цепочек и решеток Скотта. Определены сценарии фазовых перестроек, возникающих в этих задачах. Доказана реализуемость феномена буферности в исследуемых системах.
2. Исследована модель трех связанных в кольцо нейронов с двумя запаздываниями, построена и исследована нормальная форма, определена

²Глызин С. Д., О явлениях хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1809 - 1821.

асимптотика решений. Обосновано наличие явления буферности в данной задаче.

Положения, выносимые на защиту

1. Для цепочки связанных нелинейных осцилляторов размерности N сформулированы условия сосуществования в исходной системе при надлежащем выборе параметров максимального количества (равного N) устойчивых однокомпонентных режимов, позволяющие утверждать о реализации в задаче феномена буферности. Также показано, что все режимы с числом компонент большим единицы неустойчивы.
2. Для решетки связанных нелинейных осцилляторов размерности 4×4 для двух различных вариантов граничных условий в случае отсутствия внутренних резонансов сформулированы условия сосуществования в исходной системе при надлежащем выборе параметров максимального количества устойчивых однокомпонентных режимов (равного 16), двухкомпонентных режимов (равного 120) и четырехкомпонентных режимов (равного 24). Для той же системы в случае наличия внутренних резонансов сформулированы условия сосуществования в исходной системе при надлежащем выборе параметров максимального количества устойчивых однокомпонентных (равного 16) и двухкомпонентных режимов (равного 120). Также показано, что все режимы с числом компонент, отличающимся от всех вышеуказанных, неустойчивы.
3. Для цепочки из трех связанных в кольцо сингулярно возмущенных осцилляторов с двумя запаздываниями доказана возможность сосуществования сколь угодно большого числа различных устойчивых режимов.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях динамики решений нелинейных краевых задач и систем дифференциально-разностных уравнений, а также вопросов, касающихся мультистабильности и буферности в такого сорта системах.

Материал диссертации представляет интерес для специалистов в области дифференциальных уравнений, нелинейной динамики и хаоса. Работа может быть востребована во многих отечественных и международных математических центрах, где ведутся исследования, связанные с дифференциальными уравнениями и их приложениями.

Апробация результатов

Основные результаты работы неоднократно докладывались на научном семинаре, проводимом научно-образовательным центром ЯрГУ «Нелинейная динамика», а также представлялись на следующих научных конференциях:

1. Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 2008.
2. XVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2010», Москва, 2010.
3. Research group "Dynamics and synchronization of complex systems Research Seminar, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, 2010.
4. Всероссийская выставка научно-технического творчества молодежи НТТМ-2011, Москва, 2011.
5. Foundations & Advances in Nonlinear Science: 16th International Conference-School, Minsk, 2012.
6. Межрегиональная выставка работ молодых исследователей «Шаг в будущее», Ярославль, 2012.
7. Mathematical Modeling and Computational Physics, Dubna, Russia, 2013.
8. Международная конференция, посвященная 150-летию со дня рождения Поля Пенлеве, Ярославль, 2013.

Также исследования по теме диссертационной работы были отмечены дипломом министерства образования и науки РФ по итогам открытого конкурса на лучшую работу студентов по естественным, техническим и гуманитарным наукам в вузах РФ, 2008, дипломом мэрии города Ярославля за победу в городском конкурсе на лучшую студенческую научную работу «Ярославль на пороге тысячелетия», 2009, медалью «За успехи в научно-техническом творчестве» НТТМ-2011, дипломом победителя 3 внутривузовского конкурса инновационных проектов молодых ученых «Молодежь и наука», 2011, дипломом II степени межрегиональной выставки работ молодых исследователей «Шаг в будущее», 2012.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 4 в тезисах докладов международных конференций.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации 80 страниц текста с 3 рисунками. Список литературы содержит 70 наименований.

Содержание работы

Во **Введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цели исследования и постановки задач, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена исследованию цепочки связанных нелинейных автогенераторов с туннельным диодом. В работе приводится процедура получения математической модели задачи на основе физического описания эксперимента Скотта с цепочкой нелинейных автогенераторов с туннельными диодами (см. рис. 1)

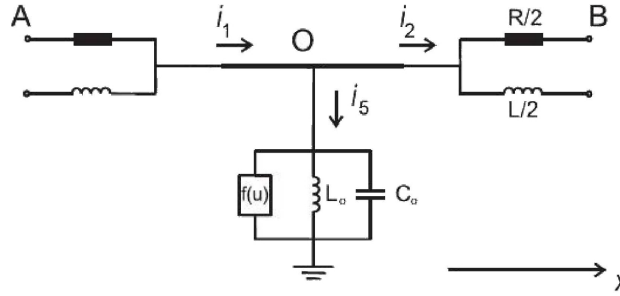


Рис. 1: Схема ячейки цепочки Скотта.

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} - \varepsilon \frac{du_k}{dt} - \varepsilon \nu \frac{d}{dt} L u_k + u_k = L u_k - \varepsilon u_k^2 \frac{du_k}{dt}, \quad (1)$$

$$u_0 = 0, u_{N+1} = 0, \quad k = 1, \dots, N,$$

где $L u_k$ – разностный оператор вида $L u_k = \delta^2(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})$, ε – малый параметр.

В пункте 1.2 описан способ выбора собственных решений задачи

$$u_{(n)} = \exp(\pm i \omega_n t) e_n(j), \quad e_n(j) = \sin \frac{n \pi j}{N+1}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь j – пространственная переменная, а собственные частоты ω_n имеют вид

$$\omega_n = \sqrt{1 + 2\delta^2(1 - \cos \frac{\pi n}{N+1})}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Далее приводится описание алгоритмической части получения нормальной формы исходной задачи, решения которой при условии $0 < \varepsilon \ll 1, v = const > 0$ будут искаться в виде

$$u_j = u_0(t, \tau, j) + \varepsilon u_1(t, \tau, j) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где

$$u_0 = \sum_{n=1}^N [z_n(\tau) \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n(\tau) \exp(-i\omega_n t)] e_n(j), \quad (5)$$

а z_n — неизвестные подлежащие определению амплитуды. Затем дается определение понятия резонанса в системе: под ним понимается одновременное выполнение равенств следующего вида между собственными частотами ω_n : $\omega_{n_0} = m_1 \omega_{n_1} + m_2 \omega_{n_2} + m_3 \omega_{n_3}$, $n_0 = \pm n_1 \pm n_2 \pm n_3$ для любого набора индексов n_k , $k = 0, \dots, 3$, для любого целочисленного вектора (m_1, m_2, m_3) : $|m_1| + |m_2| + |m_3| = 3$ и при любой расстановке знаков во втором соотношении. Далее осуществляется переход к рассмотрению нерезонансного случая, для которого в следующем пункте и строится нормальная форма:

$$2 \frac{dz_n}{d\tau} = (1 - \nu(\omega_n^2 - 1))z_n - \frac{3}{4}z_n|z_n|^2 - \sum_{k=1, k \neq n}^N z_n|z_k|^2, \quad n = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Исследованию ее состояний равновесия посвящен пункт 1.4, в котором формулируется и доказывается основной результат этой главы, опирающийся на теорему о соответствии³ и касающийся максимального числа устойчивых сосуществующих режимов в исходной задаче

Теорема 1. Пусть для краевой нерезонансной задачи (1) выполнены условия

$$\omega_N^2 < \frac{1 + \nu}{\nu}, \quad 1 - \nu(\omega_1^2 - 1) < \frac{4}{3}(1 - \nu(\omega_N^2 - 1)), \quad (7)$$

где ω_1, ω_N задаются равенством (3), тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1) имеет ровно N сосуществующих орбитально асимптотически устойчивых циклов, асимптотика которых задается следующей формулой

$$u_i(t, j) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sqrt{1 - \nu(\omega_i^2 - 1)} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \sin \frac{\pi i j}{N + 1} + O(\varepsilon), \quad (8)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Также в данном пункте приводится доказательство следующей теоремы

Теорема 2. Все состояния исходной нерезонансной системы с числом ненулевых компонент большим либо равным 2 неустойчивы.

Пункт 1.5 посвящен классификации резонансных систем — здесь приводятся всевозможные их типы, после чего в пунктах 1.6–1.7 проводится полное

³ Колесов, А.Ю. Аттракторы типа жесткой турбулентности в релаксационных системах / А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Дифференц. уравнения.—2002.—Т. 38, № 12—С. 1596–1605.

исследование каждого из них, в ходе которого были получены результаты полностью согласующиеся с ранее доказанными для нерезонансных систем.

Вторая глава посвящена исследованию конечномерной решетки нелинейных автогенераторов с туннельным диодом размером 4×4 . Первый пункт посвящен построению соответствующей математической модели на основании схемы узла решетки, представленной на рис. 2.

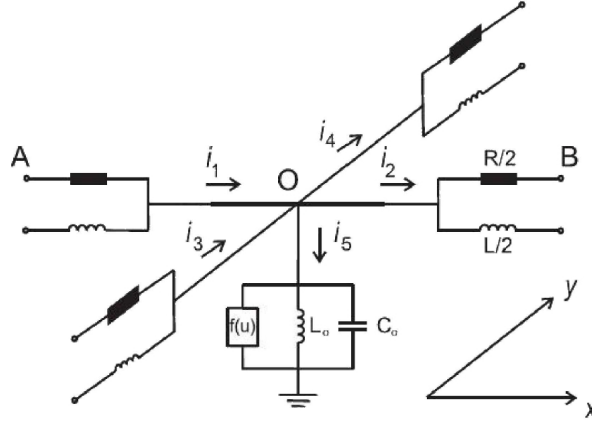


Рис. 2: Схема ячейки решетки Скотта.

В итоге сформулированы и предложены для исследования 2 задачи с различными граничными условиями

$$\frac{d^2 u_{n,m}}{dt^2} - \varepsilon \frac{du_{n,m}}{dt} - \varepsilon \nu \frac{d}{dt} L u_{n,m} + u_{n,m} = L u_{n,m} - \varepsilon u_{n,m}^2 \frac{du_{n,m}}{dt}, \quad (9)$$

$$u_{0,m} = 0, \quad u_{5,m} = 0, \quad u_{n,0} = 0, \quad u_{n,5} = 0, \quad n, m = 0, \dots, 3,$$

$$\frac{d^2 u_{n,m}}{dt^2} - \varepsilon \frac{du_{n,m}}{dt} - \varepsilon \nu \frac{d}{dt} L u_{n,m} + u_{n,m} = L u_{n,m} - \varepsilon u_{n,m}^2 \frac{du_{n,m}}{dt}, \quad (10)$$

$$u_{0,m} = u_{1,m}, \quad u_{4,m} = u_{5,m}, \quad u_{n,0} = u_{n,1},$$

$$u_{n,4} = u_{n,5}, \quad n, m = 1, \dots, 4,$$

где $L u_{n,m}$ - разностный оператор вида

$$L u_{n,m} = \delta_1^2 (u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) + \delta_2^2 (u_{n,m+1} - 2u_{n,m} + u_{n,m-1}),$$

ε — малый параметр. Здесь, как и в предыдущей главе, производится выбор собственных решений приведенных краевых задач: в частности, (10) допускает тригонометрические решения вида

$$u_{(n,m)} = \exp(\pm i \omega_{n,m} t) e_{n,m}(k, j),$$

$$e_{n,m}(k, j) = 2 \cos \frac{\pi n (k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi m (j - \frac{1}{2})}{4}, \quad (11)$$

$$n = 0, \dots, 3, \quad m = 0, \dots, 3, \quad k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4,$$

а (9) соответственно решения вида

$$u_{(n,m)} = \exp(\pm i\omega_{n,m}t)e_{n,m}(k,j), \quad e_{n,m}(k,j) = 2 \sin \frac{\pi nk}{5} \sin \frac{\pi mj}{5}, \quad (12)$$

$$n = 1, \dots, 4, \quad m = 1, \dots, 4, \quad k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4,$$

здесь k, j выполняют роль пространственных переменных. При этом значения собственных частот для задачи (10) имеют вид

$$\omega_{n,m} = \sqrt{1 + 2(\delta_1^2(1 - \cos \frac{\pi n}{4}) + \delta_2^2(1 - \cos \frac{\pi m}{4}))}, \quad n, m = 0, \dots, 3, \quad (13)$$

а для (9):

$$\omega_{n,m} = \sqrt{1 + 2(\delta_1^2(1 - \cos \frac{\pi n}{5}) + \delta_2^2(1 - \cos \frac{\pi m}{5}))}, \quad n, m = 1, \dots, 4. \quad (14)$$

Схема исследования приведенных задач аналогична приведенной в описании первой главы, поэтому приведем лишь основные результаты. Так в пункте 2.3 описано построение нормальных форм исследуемых задач в нерезонансном случае: для (10) соответствующая система будет иметь вид

$$2 \frac{dz_{n,m}}{d\tau} = (1 - \nu(\omega_{n,m}^2 - 1))z_{n,m} - \frac{9}{4}z_{n,m}|z_{n,m}|^2 - 3 \sum_{k=0, k \neq n}^3 z_{n,m}|z_{k,m}|^2$$

$$- 3 \sum_{s=0, s \neq m}^3 z_{n,m}|z_{n,s}|^2 - 2 \sum_{k,s=0, k \neq n, s \neq m}^3 z_{n,m}|z_{k,s}|^2, \quad (15)$$

$$n = 0, \dots, 3, \quad m = 0, \dots, 3.$$

Для задачи (9)

$$2 \frac{dz_{n,m}}{d\tau} = (1 - \nu(\omega_{n,m}^2 - 1))z_{n,m} - \frac{9}{4}z_{n,m}|z_{n,m}|^2 - 3 \sum_{k=1, k \neq n}^4 z_{n,m}|z_{k,m}|^2$$

$$- 3 \sum_{s=1, s \neq m}^4 z_{n,m}|z_{n,s}|^2 - 2 \sum_{k,s=1, k \neq n, s \neq m}^4 z_{n,m}|z_{k,s}|^2, \quad (16)$$

$$n = 1, \dots, 4, \quad m = 1, \dots, 4.$$

В результате исследования приведенных систем в пункте 2.4 сформулированы следующие теоремы, касающиеся сосуществования большого числа устойчивых циклов, а также двух- и четырехмерных торов в исходной задаче:

Теорема 3. Пусть для задач (10),(9) выполнено условие

$$\begin{aligned} \omega_{i_{max},j_{max}}^2 &< \frac{1+\nu}{\nu}, \\ 1 - \nu(\omega_{i_{min},j_{min}}^2 - 1) &< \frac{8}{9}(1 - \nu(\omega_{i_{max},i_{max}}^2 - 1)), \end{aligned} \quad (17)$$

($i_{min} = j_{min} = 0$, $i_{max} = j_{max} = 3$ для (10), $i_{min} = j_{min} = 1$, $i_{max} = j_{max} = 4$ для (9)), где $\omega_{i_{min},j_{min}}, \omega_{i_{max},j_{max}}$ задаются равенством (13), тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задачи (10),(9) имеют ровно 16 сосуществующих орбитально асимптотически устойчивых циклов, асимптотика которых задается следующей формулой

$$\begin{aligned} u(t, k, j) &= \frac{8}{3} \sqrt{(1 - \nu(\omega_{p,q}^2 - 1))} \cos(\omega_{p,q}t + \varphi_{p,q}) \times \\ &\times \cos \frac{\pi p(k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi q(j - \frac{1}{2})}{4} + O(\varepsilon), \\ p &= i_{min}, \dots, i_{max}, \quad q = j_{min}, \dots, j_{max}, \end{aligned} \quad (18)$$

$i_{min} = j_{min} = 0$, $i_{max} = j_{max} = 3$ для (10), $i_{min} = j_{min} = 1$, $i_{max} = j_{max} = 4$ для (9).

Теорема 4. Пусть для задач (10), (9) выполнено условие

$$(1 - \nu(\omega_{i_{max},j_{max}}^2 - 1)) < \frac{16}{21}(1 - \nu(\omega_{i_{min},j_{min}}^2 - 1)). \quad (19)$$

($i_{min} = j_{min} = 0$, $i_{max} = j_{max} = 3$ для (10), $i_{min} = j_{min} = 1$, $i_{max} = j_{max} = 4$ для (9)), где $\omega_{i_{min},j_{min}}, \omega_{i_{max},j_{max}}$ задаются равенством (13), тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ каждая задача (10),(9) имеет ровно 120 орбитально асимптотически устойчивых торов, асимптотика которых задается следующей формулой

$$\begin{aligned} u(t, k, j) &= 2 \sqrt{\frac{4C_{(p,q)(r,s)}(1 - \nu(\omega_{r,s}^2 - 1)) - 9(1 - \nu(\omega_{p,q}^2 - 1))}{16C_{(p,q)(r,s)}^2 - 81}} \times \\ &\times \cos(\omega_{p,q}t + \varphi_{p,q}) \cos \frac{\pi p(k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi q(j - \frac{1}{2})}{4} + \\ &+ \sqrt{\frac{4C_{(r,s)(p,q)}(1 - \nu(\omega_{p,q}^2 - 1)) - 9(1 - \nu(\omega_{r,s}^2 - 1))}{16C_{(r,s)(p,q)}^2 - 81}} \times \\ &\times \cos(\omega_{r,s}t + \varphi_{r,s}) \cos \frac{\pi r(k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi s(j - \frac{1}{2})}{4} + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (20)$$

где $p = q = r = s = 0, \dots, 3$, для (10), $p = q = r = s = 1, \dots, 4$ для (9).

Теорема 5. Пусть для задачи (10), (9) выполнено условие

$$(1 - \nu(\omega_{i_{max}, j_{max}}^2 - 1)) < \frac{32}{33}((1 - \nu(\omega_{i_{min}, j_{min}}^2 - 1))) \quad (21)$$

$i_{min} = j_{min} = 0$, $i_{max} = j_{max} = 3$ для (10), $i_{min} = j_{min} = 1$, $i_{max} = j_{max} = 4$ для (9)), где $\omega_{i_{min}, j_{min}}, \omega_{i_{max}, j_{max}}$ задаются равенством (13), тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (10), (9) имеет ровно 24 орбитально асимптотически устойчивых тора, асимптотика которых задается следующей формулой

$$\begin{aligned} u(t, k, j) = & \rho_{p_1, q_1} \cos(\omega_{p_1, q_1} t + \varphi_{p_1, q_1}) \cos \frac{\pi p_1(k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi q_1(j - \frac{1}{2})}{4} + \\ & \rho_{p_2, q_2} \cos(\omega_{p_2, q_2} t + \varphi_{p_2, q_2}) \cos \frac{\pi p_2(k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi q_2(j - \frac{1}{2})}{4} + \\ & \rho_{p_3, q_3} \cos(\omega_{p_3, q_3} t + \varphi_{p_3, q_3}) \cos \frac{\pi p_3(k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi q_3(j - \frac{1}{2})}{4} + \\ & \rho_{p_4, q_4} \cos(\omega_{p_4, q_4} t + \varphi_{p_4, q_4}) \cos \frac{\pi p_4(k - \frac{1}{2})}{4} \cos \frac{\pi q_4(j - \frac{1}{2})}{4} + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (22)$$

где $p_s = q_s = 0, \dots, 3$, для (10), $p_s = q_s = 1, \dots, 4$ для (9), $s=1, \dots, 4$.

Теорема 6. Все состояния равновесия исходной нерезонансной системы с числом ненулевых компонент равным 3, а также большим либо равным 5 неустойчивы.

Для резонансного случая были проведены аналогичные исследования. Под резонансом в исследуемой в этой главе системе будет пониматься одновременное выполнение равенств вида $\omega_{n_0, m_0} = s_1 \omega_{n_1, m_1} + s_2 \omega_{n_2, m_2} + s_3 \omega_{n_3, m_3}$, $n_0 = \pm n_1 \pm n_2 \pm n_3, m_0 = \pm m_1 \pm m_2 \pm m_3$ для любых наборов индексов n_k, m_k $k = 0, \dots, 3$, для любого целочисленного вектора (s_1, s_2, s_3) : $|s_1| + |s_2| + |s_3| = 3$ и при любой расстановке знаков во втором и третьем соотношениях. Проведенный анализ позволил сформулировать сходные с нерезонансным случаем результаты, но со следующими поправками: в случае наличия в системе резонанса четырехкомпонентные режимы теряют устойчивость, таким образом, справедлива следующая теорема

Теорема 7. Все состояния равновесия исходной системы с числом ненулевых компонент большим либо равным 3 неустойчивы.

В **Третьей главе** рассматривается модельная система, применяемая в нейродинамике и популяционной биологии, состоящая из трех связанных в кольцо сингулярно возмущенных осцилляторов с двумя запаздываниями

$$\dot{u}_j = \lambda [-1 + f_1(u_j(t - h_1)) + f_2(u_j(t - h_2)) + \nu g(u_{j-1})] u_j, \quad (23)$$

где $j = 1, 2, 3$, $\lambda > 0$, $h_1, h_2 > 0$ – параметры, $f_j(u)$, $j = 1, 2$, $g(u)$ – достаточно гладкие функции, ν – коэффициент связи между осцилляторами.

При отсутствии связи ($\nu = 0$) каждое из уравнений системы (23) в случае линейных функций $f_j(u)$ представляет собой обобщенное уравнение Хатчинсона в котором учтены две возрастные группы. Кроме того, данное уравнение может служить феноменологической моделью импульсного нейрона с учетом двух запаздываний.

Предполагалось, что (23) имеет единственное ненулевое состояние равновесия u_* так, что $f_1(u_*) + f_2(u_*) = 1$. Пусть, кроме того, функции правой части (23) раскладываются в точке u_* в ряд $f_i(u) = a_{i0} + a_{i1}u_*(u - 1) + a_{i2}u_*^2(u - 1)^2 + a_{i3}u_*^3(u - 1)^3 + \mathcal{O}((u - 1)^4)$, здесь $u = (u_1, u_2, u_3)$, $i = 1, 2$. Также предполагалось, что параметр γ фиксирован и удовлетворяет неравенству $\gamma < 1$. В работе задача (23) изучалась в сингулярно возмущенном случае, когда

$$\begin{aligned} h_2 &= \varepsilon\gamma h_1, \quad a_{11} = -1/2 - \mu, \quad a_{21} = -1/2 + \mu, \\ \gamma &= \text{const} > 0, \quad \varepsilon = 1/\lambda, \quad 0 < \varepsilon, \mu \ll 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Порядок малости параметра ν будет согласован с порядками малости величин ε и μ . Тем самым, объектом исследований нашей работы будет служить система

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{v}_j &= -[(1/2 + \mu)v_j(t - 1) - a_{12}v_j^2(t - 1) - a_{13}v_j^3(t - 1) + (1/2 - \mu)v_j(t - \varepsilon\gamma) - \\ &- a_{22}v_j^2(t - \varepsilon\gamma) - a_{23}v_j^3(t - \varepsilon\gamma) + \mathcal{O}(v_j^4) + \nu v_{j-1}](1 + v_j), \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (25)$$

получающееся из (23) при условиях (24) и соответствующем выборе функции $g(u) = u_*(u_j - 1)$ после замен $t/h_1 \rightarrow t$ и $v_j = u_*(u_j - 1)$ $j = 1, 2, 3$. Отметим, что как и выше выполнено условие $v_0(t) \equiv v_3(t)$ кольцевой связи между осцилляторами.

Поставим вопрос о существовании и устойчивости автоколебаний системы (25), бифурцирующих из нуля при увеличении μ . Первым этапом в решении этой задачи является анализ устойчивости нулевого состояния равновесия парциального уравнения системы (25) при отсутствии взаимодействия. Для этого необходимо выяснить расположение корней соответствующего этому состоянию равновесия характеристического уравнения

$$2\varepsilon\lambda + (1 + 2\mu) \exp(-\lambda) + (1 - 2\mu) \exp(-\lambda\varepsilon\gamma) = 0. \quad (26)$$

Результаты этого анализа позволяют согласовать порядки малости параметров ε , μ и ν , а также уточнить выбор параметра γ .

Для получения информации о поведении корней (26) близких к мнимой оси используются асимптотические равенства

$$\lambda_n(\varepsilon, \mu) = i\omega_n(1 + \varepsilon(\gamma - 2) + \varepsilon^2(\gamma - 2)^2) - 2\varepsilon^2\omega_n^2(1 - \gamma) + 4\mu + O(\varepsilon^3 + \varepsilon\mu), \quad (27)$$

где $n = 1, 2, \dots, \omega_n = \pi(2n - 1)$, и доказывается следующее утверждение.

Лемма 1. *Предположим, что параметр γ фиксирован и удовлетворяет условию $\gamma < 1$. Тогда по любому натуральному N можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma, N) > 0$, что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, во-первых, каждое из уравнений $\text{Re}\lambda_n(\varepsilon, \mu) = 0$, $n = 1, \dots, N$ допускает единственное решение*

$$\mu = \mu_n(\varepsilon), \quad \mu_n(\varepsilon) = \varepsilon^2\omega_n^2(1 - \gamma)/2 + O(\varepsilon^3), \quad (28)$$

во-вторых, при $0 \leq \mu \leq \mu_1(\varepsilon)$ все корни уравнения (26) имеют отрицательные действительные части, а в случае $\mu_k(\varepsilon) < \mu < \mu_{k+1}(\varepsilon)$ при некотором $1 \leq k \leq N - 1$ выполняются неравенства $\text{Re}\lambda_n(\varepsilon, \mu) > 0$, $1 \leq n \leq k$; $\text{Re}\lambda_n(\varepsilon, \mu) < 0 \forall n > k$.

Выполненный линейный анализ показывает, что поставленная бифуркационная проблема близка к бесконечномерной: при $\varepsilon, \mu, \nu \rightarrow 0$ к мнимой оси стремится счетное число корней (27) характеристического уравнения (26). Это означает, что в данной ситуации невозможно напрямую использовать известные конечномерные методы исследования динамики, базирующиеся на аппарате интегральных многообразий и нормальных форм, в связи с чем используется специальный асимптотический метод, введенный Ю. С. Колесовым и называемый методом квазинормальных форм⁴. Для его применения необходимо согласовать порядки малости параметров ε , μ и ν : в соответствии с предположением о величине параметра γ и асимптотическими формулами (28) для критических значений μ уместно положить

$$\mu = \beta\varepsilon^2, \quad \nu = \nu_0\varepsilon^3. \quad (29)$$

Будем считать, что

$$\beta = \text{const} > \pi^2(1 - \gamma)/2. \quad (30)$$

Условие (29) обеспечивает неустойчивость нулевого решения системы (25). В этой ситуации в соответствии с алгоритмами построения квазинормальных

⁴ *Васильева А. Б., Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией / А. Б. Васильева, С. А. Каценко, Ю. С. Колесов, Н. Х. Розов // Матем. сб. 1986. Т. 130(172), № 4(8). С. 488–499.*

форм⁵ решение (25) будем искать в виде

$$v_j = \varepsilon \xi_j(s, \tau) + \varepsilon^2 u_{1j}(s, \tau) + \varepsilon^3 u_{2j}(s, \tau) + \dots \quad j = 1, 2, 3. \quad (31)$$

Здесь

$$\tau = (1 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2)t, \quad \sigma_1 = \gamma - 2, \quad \sigma_2 = (\gamma - 2)^2, \quad s = \varepsilon^2 \tau,$$

$$\xi(s, \tau+1) \equiv -\xi(s, \tau), \quad u_{kj}(s, \tau+2) \equiv u_{kj}(s, \tau), \quad k = 1, 2, \dots, j = 1, 2, 3. \quad (32)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , из условий разрешимости системы, получающейся для $u_{2j}(s, \tau)$, $j = 1, 2, 3$, получаем квазинормальную форму исследуемой системы (23), представляющую собой следующую параболическую краевую задачу

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial s} = 2(1 - \gamma) \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial \tau^2} + 4\beta \xi_j + d \xi_j^3 + 2\nu_{31} \xi_{j-1}, \quad \xi(s, \tau + 1) \equiv -\xi(s, \tau), \quad (33)$$

$$j = 1, 2, 3,$$

где s играет роль времени, τ является пространственной переменной, $d = 2(a_{23} - a_{13}) + 4(a_{22}^2 - a_{12}^2)$.

Соответствие между автоколебательными режимами квазинормальной формы (33) и исходного уравнения (25) устанавливается в формулируемом ниже основном утверждении главы. В качестве фазовых пространств краевой задач (33) возьмем соответственно пространство $E_2 \times E_2 \times E_2$, состоящее из антипериодических функций $(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau), \xi_2(\tau))$, где каждая из функций $\xi_j(\tau)$ принадлежит классу $W_2^2[0, 1]$. Фазовым пространством самого уравнения (25) будем считать $C[-1, 0] \times C[-1, 0] \times C[-1, 0]$.

Теорема 8. Пусть $\mu = \beta \varepsilon^2$, $\beta > \pi^2(1 - \gamma)/2$, $\gamma < 1$, а квазинормальная форма (33) допускает периодическое решение типа бегущей волны

$$\xi_j = \xi_{0j}(y) : y = \alpha_0 s + \tau, \quad \xi_{0j}(y + 1) \equiv -\xi_{0j}(y), \quad j = 1, 2, 3, \quad \alpha_0 = \text{const}, \quad (34)$$

экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ решению (34) отвечает цикл системы (25) с теми же свойствами устойчивости. Главная асимптотика этого цикла задается равенством (31), в котором учтено соотношение (43).

⁵ Колесов А. Ю., Новые методы доказательства существования и устойчивости периодических решений в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием / А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов // Анализ и особенности. Часть 2, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Тр. МИАН. Т. 259. М.: Наука, 2007. С. 106–133.

Для изучения состояний равновесия системы (33) выполним в ней следующую замену

$$\xi_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_{jn} \exp(i\omega_n \tau) + \bar{\xi}_{jn} \exp(-i\omega_n \tau), \quad \omega_n = (2k+1)\pi, \quad (35)$$

в результате чего получим бесконечномерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\xi_{jn}(s)$ $j = 1, 2, 3$, $n = 1, 2, \dots$. Найдем условия существования одномодовых решений данной системы, т. е. таких для которых обращаются в ноль все кроме одного слагаемые разложения (35). Считаем, что для некоторого r

$$\xi_{jr} \neq 0, \text{ и } \xi_{jm}(s) \equiv 0, \text{ для } m \neq r \quad (j = 1, 2, 3). \quad (36)$$

Для ненулевых амплитуд получаем следующую систему:

$$\dot{\xi}_{jr} = (4\beta - 2(\gamma - 1)\omega_r^2)\xi_{jr} + 3d|\xi_{jr}|^2\xi_{jr} + 2\nu_0\xi_{j-1r}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (37)$$

Будем предполагать, что

$$\gamma_r = 4\beta - 2(\gamma - 1)\omega_r^2 > 0, \quad (38)$$

тогда выполним в (37) полярную замену переменных

$$\xi_{jr} = \eta_j e^{i\varphi_j} \sqrt{-\frac{\gamma_r}{3d}} \quad (39)$$

и нормирующую замену времени $s \rightarrow \gamma_r s$, кроме того, обозначим $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\psi = \varphi_2 - \varphi_3$ и $\alpha_r = \frac{2\nu_0}{\gamma_r}$. В этой ситуации из (37) получаем следующую пятимерную систему:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_1 + \alpha_r \eta_3 \cos(\varphi + \psi) - \eta_1^3, \\ \dot{\eta}_2 &= \eta_2 + \alpha_r \eta_1 \cos \varphi - \eta_2^3, \\ \dot{\eta}_3 &= \eta_3 + \alpha_r \eta_2 \cos \psi - \eta_3^3, \\ \dot{\varphi} &= -\alpha_r \left(\frac{\eta_3}{\eta_1} \sin(\varphi + \psi) + \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \varphi \right), \\ \dot{\psi} &= \alpha_r \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \varphi - \frac{\eta_2}{\eta_3} \sin \psi \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Сразу отметим, что в силу замены (39) имеем $\eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0$, кроме того система (40) 2π -периодична по φ и ψ . Учитывая это, рассмотрим условия

существования и устойчивости простейших состояний равновесия системы (40), для которых $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$. Выделим следующие два случая.

В первом из них

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2a_r}, \quad \varphi = \psi = \frac{2\pi}{3}. \quad (41)$$

Для исследования устойчивости данного состояния равновесия линеаризуем на нем систему (40). Нетрудно убедиться, что получившаяся матрица устойчивости имеет собственное число $\lambda_1 = -2 + a_r$, причем остальные собственные числа являются корнями следующего многочлена:

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= (4\pi - 5a_r)/\pi, \\ a_2 &= 4 + \frac{43}{4}a_r^2 - 13a_r + \frac{9}{16\pi}a_r^2\sqrt{4 - 2a_r}, \\ a_3 &= \frac{9}{8\pi}a_r^3(2a_r - 1)\sqrt{4 - 2a_r} + 3a_r^2 - \frac{21}{2}a_r^3 + \frac{45}{4}a_r^4, \\ a_4 &= \frac{9}{16}a_r^3(2 - 3a_r)\sqrt{4 - 2a_r} - 6a_r - \frac{57}{4}a_r^3 + \frac{33}{2\pi}a_r^3. \end{aligned} \quad (43)$$

Условием гурвицевости многочлена (42) с коэффициентами (43) оказывается неравенство

$$a_r < 0. \quad (44)$$

Учитывая, что первое из собственных чисел $\lambda_1 = -2 + a_r$ в этом случае также оказывается отрицательным, заключаем, что при выполнении (44) состояние равновесия (41) устойчиво.

Второе состояние равновесия, имеющее равные друг другу амплитудные составляющие, имеет вид

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \sqrt{1 + a_r}, \quad \varphi = \psi = 0. \quad (45)$$

Матрица устойчивости этого состояния равновесия распадается на два блока:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 - 3a_r & 0 & a_r \\ a_r & -2 - 3a_r & 0 \\ 0 & a_r & -2 - 3a_r \end{pmatrix} \quad (46)$$

и

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2a_r & -a_r \\ a_r & -a_r \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Собственные числа матриц (46), (47) имеют вид

$$\lambda_1 = -2a_r - 2, \lambda_{2,3} = -\frac{7}{2}a_r - 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}ia_r, \lambda_{4,5} = \left(-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) a_r,$$

откуда следует, что условием устойчивости состояния равновесия (45), является неравенство

$$a_r > 0. \quad (48)$$

Отметим, что для существования у квазинормальной формы (33) одномерных режимов необходимо выполнение условия (38), которое выполняется для сколь угодно большого конечного числа номеров r при подходящем выборе входящих параметров β и γ , тем самым, реализуется хорошо известное явление буферности. С другой стороны, выбор знака параметра a_r определяет распределение колебаний по однонаправленно связанным осцилляторам. В первом случае (условие (44)) колебания происходят с разностью фаз равной $\frac{2\pi}{3}$, а во втором (условие (48)) разность фаз равна π . Приведенные выводы в силу теоремы 8 о соответствии могут быть перенесены на исходную систему (25).

В **Заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Выполнен бифуркационный анализ динамических систем, моделирующих цепочки и решетки взаимодействующих осцилляторов в опыте Скотта.
2. Найдены условия сосуществования большого числа устойчивых одно- и многокомпонентных режимов в системах Скотта.
3. Для системы однонаправленно связанных сингулярно возмущенных скалярных нелинейных дифференциально-разностных уравнений с двумя запаздываниями показано, что при подходящем выборе параметров в фазовом пространстве этой системы может сосуществовать любое наперед заданное конечное число устойчивых периодических движений.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации из перечня ведущих рецензируемых научных журналов, рекомендуемых ВАК

1. Бобок, А.С. Локальный анализ цепочки автогенераторов в опыте Скотта/А.С. Бобок // Моделирование и анализ информационных систем. — 2012.—Т.19,№ 3. — С.145-146.

2. *Бобок, А.С.* Автоколебания решеток нелинейных элементов в опыте Скотта/*А.С. Бобок, С.Д. Глызин* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2012.—Т.19,№ 5. — С.56-68.
3. *Бобок, А.С.* Экстремальная динамика системы трех однонаправленно связанных сингулярно возмущенных уравнений из нейродинамики/*А.С. Бобок, С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2013.—Т.20,№ 5. — С.157-166.

Прочие публикации

4. *Бобок, А.С.* Простейшие бифуркации уравнений Гинзбурга-Ландау и Кортевега-де Фриза с кубической нелинейностью/*А.С. Бобок* // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. — Ярославль, 2008.— Вып. 9. — С.4-12.
5. *Бобок, А.С.* Простейшие бифуркации уравнений Гинзбурга-Ландау и Кортевега-де Фриза с кубической нелинейностью/*А.С. Бобок* //Современные методы теории функций и смежные проблемы: Сборник материалов математической зимней школы. — Воронеж, 2009. — С.27-28.
6. *Бобок, А.С.* Локальный анализ простейших цепочек и решеток автогенераторов в опыте Скотта/*А.С. Бобок* //Сборник лучших студенческих научных работ городского конкурса «Ярославль на пороге тысячелетия». — Ярославль, 2009. — С.17-21.
7. *Бобок, А.С.* Локальный анализ простейших цепочек и решеток автогенераторов в опыте Скотта/*А.С. Бобок* //Материалы XVI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2010». — Москва, 2010.
8. *Bobok, A.* Local dynamics of the oscillators array in Scott experiment/*A. Bobok* //Foundations & Advances in Nonlinear Science: 16th International Conference-School. — Minsk, 2012. — 56 p.
9. *Bobok, A.* Extremal dynamics of the system of three coupled singularly perturbed equations with two delays /*A. Bobok*// Mathematical Modeling and Computational Physics —JINR, 2013. — 53 p.
10. *Бобок, А.С.* Динамика трех однонаправленно связанных сингулярно возмущенных уравнений с двумя запаздываниями /*А.С. Бобок, С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов*// Нелинейная динамика и ее приложения: Международная конференция, посвященная 150-летию со дня рождения Поля Пенлеве (15-18 октября 2013): Тезисы докладов. — Ярославль: ЯрГУ, 2013. — С.8-10.