На правах рукописи

Злобина Мария Юрьевна

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ДИНАМИКУ МАНИПУЛЯЦИОННОГО РОБОТА

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2009

Работа выполнена на кафедре математического моделирования Ярославского государственного университета имени П.Г. Демидова

Научный руководитель	—	доктор физико-математических наук, профессор Кубышкин Евгений Павлович
Официальные оппоненты:		доктор физико-математических наук, профессор Баландин Дмитрий Владимирович
		доктор физико-математических наук, профессор Климов Владимир Степанович
Ведущая организация	—	Самарский государственный университет

Защита состоится «__» декабря 2009 г. в «__» часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 в Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан «__» ____________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета　　　　Глызин С.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Диссертация посвящена построению оптимальных управлений движением механической системы, состоящей из двух твердых тел, соединенных гибкой балкой (стержнем). Система может совершать поворот в одной плоскости вокруг оси, проходящей через центр масс одного из твердых тел, посредством управляющего момента. Такая механическая система может служить моделью манипулятора, переносящего груз. Изучаются задача перевода системы из одного фазового состояния в другое в заданное время с минимизацией функционала энергии от управления и задача быстродействия. Рассматривается случай упругого и наследственно вязкоупругого стержня.

Решению задач управления механическими системами, содержащими упругие элементы, посвящена обширная литература. Отметим, во-первых, монографию Ф.А. Черноусько, Н.Н. Болотника, В.Г. Градецкого[1], которая содержит большой библиографический обзор. В монографии на ряду со многими другими рассмотрена задача управления поворотом упругого стержня с точечным грузом на конце. Получены уравнения движения системы, построены программные управления. Близкие по постановке задачи изучались в работах В.Е. Бербюка, где решаются различные проблемы динамики и оптимизации управляемых дискретно-континуальных систем, моделирующих роботы, шагающие аппараты, манипуляторы и др. В частности рассмотрена задача оптимального управления поворотом двух твердых тел связанных между собой упругим стержнем[2]. В отличие от рассматриваемой в настоящей диссертации модели, в модели, изучаемой В.Е. Бербюком, размеры несомого тела считаются пренебрежительно малыми. Основной метод исследования, возникающих при этом дискретно-распределенных систем – это замена распределенной составляющей конечномерной по методу Галёркина. В качестве базисных функций берутся балочные функции. Для конечномерного аналога строится оптимальное управление, которое и берется в качестве управления распределенной системой. В работе Y. Sakawa, R. Ito, N. Fujii[3], где рассматривается задача поворота гибкой руки манипулятора с полным гашением поперечной вибрации в конце процесса управления, также используется метод приближений Галёркина. Этот же метод применяли при изучении задач управления медленно вращающейся балкой Тимошенко M. Gugat, W. Krabs, G.M. Sklyar и J. Wozniak. Авторы показали, что существует не более чем счетная последовательность значений радиуса диска, при которых балка Ти-

---

[1] *Черноусько, Ф. Л.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация / Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник, В.Г. Градецкий. — М.: Наука, 1989. — 368 с.

[2] *Бербюк, В.Е.* Об управляемом вращении системы двух твердых тел с упругими элементами / В.Е. Бербюк // ПММ. — 1984. — Т. 48, Вып. 2. — С. 238–246.

[3] *Sakawa, Y.* Optimal control of rotation of a flexible arm / Y. Sakawa, R. Ito, N. Fujii // Control Theory for Distributed Parameter Systems and Applications. Lecture Notes in Control and Information Sciences. — 1983. — V. 54 — С. 175–187.

мошенко является не управляемой (не стабилизируемой). В статьях В.Е. Бербюка и М.В. Демидюка[4] задачи динамики и оптимизации манипуляционных роботов с распределенными параметрами решаются методами, основанными на концепции обратных задач динамики. Сходную тематику имеют совместные работы Л.Д. Акуленко и Н.Н. Болотника. Асимптотические методы построения оптимальных управлений и их приложение к решению различных задач управления нелинейными динамическими системами и их оптимизации рассмотрены в монографии Акуленко Л.Д.[5]. В указанной работе развиваются методы малого параметра: регулярных и сингулярных возмущений, усреднения и связанных с ним преобразований переменных. Однако для решения ряда поставленных задач в общем случае предложенные асимптотические методы не применимы — требуется привлечение численных методов. Численным методам решения задач оптимизации управляемых движений посвящена, например, монография Ф.Л. Черноусько и Н.В. Баничука[6].

В диссертации на основе единого подхода, основанного на точном интегрировании дискретно-распределенных систем уравнений (гибридных систем уравнений), строятся оптимальные управления рассматриваемых механических систем. Управления представляют собой ряды по некоторым базисным функциям, строго определенным конкретной изучаемой задачей. В диссертационной работе доказана управляемость системой при любых значениях параметров системы, что является существенным преимуществом по сравнению с методом Галёркина. Метод применим как к случаю упругого, так и наследственно вязкоупругого стержня.

Изучение систем с вязкоупругими элементами особенно актуально в связи с широким применением в современной промышленности, от авиационной[7] до текстильной[8], полимеров и композиционных материалов. Теория наследственности в целом получила существенное развитие в работах Ю.Н. Работнова и его учеников, руководствуясь монографией[9] которого, в настоящей диссертации и построена математическая модель механической системы с наслественно вязкоупругим стержнем. Для описания свойств вязкоупругих

---

[4] *Бербюк, В.Е.* Об управляемом движении упругого манипулятора с распределенными параметрами / В.Е. Бербюк, М.В. Демидюк // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1984. — №. 2. — С. 59–67.; *Бербюк, В.Е.* Параметрическая оптимизация в задачах динамки и управления движением упругого манипулятора с распределенными параметрами / В.Е. Бербюк, М.В. Демидюк // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1986. — №. 2. — С. 81–89.

[5] *Акуленко, Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления / Л.Д. Акуленко. — М.: Наука, 1987. — 368 с.

[6] *Черноусько, Ф. Л.* Асимптотические методы оптимального управления / Ф.Л. Черноусько, Н.В. Баничук. — М.: Наука, 1973. — 240 с.

[7] *Бадалов, Ф.Б.* Вибрации наследственно-деформируемых элементов конструкции летательных аппаратов / Ф.Б. Бадалов, Ш.Ф. Ганихонов — Ташкент.: Наука, 2002. — 230 с.

[8] *Парфенов, О.В.* Исследование релаксационных процессов в ткачестве / О.В. Парфенов // Тезисы докладов Международной научно-технической конференции «Современные технологии и оборудование текстильной промышленности» (Текстиль—2007) — М.: МГТУ имени А.Н. Косыгина, 2007. — С. 32–38.

[9] *Работнов, Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. — М.: Наука, 1977. — 383 с.

материалов существует несколько моделей: Максвелла, Фойгта, Больцмана-Вольтерра. Первые две из них привлекательны своей простотой и наглядностью, однако их использование при исследовании динамических задач механики деформируемого тела приводит к определенным неточностям, которые накапливаются во времени[10]. Наиболее достоверно описывает реальный процесс модель Больцмана-Вольтерра со слабосингулярными ядрами наследственности с особенностью типа Абеля. Среди них — трехпараметрическое ядро наследственности Ржаницына-Колтунова, используемое в данной диссертационной работе при построении оптимальных управлений в главах 2 и 3.

Говоря об управлении системами с распределенными параметрами в общем, нельзя не упомянуть основоположника этого направления кибернетики профессора А.Г. Бутковского. Исследования К.А. Лурье способствовали широкому распространению операторного подхода в области задач управления объектами с распределенными параметрами. отдельное внимание он уделил вопросам о необходимых условиях типа принципа максимума Л.С. Понтрягина в оптимальных задачах с частными производными. Широкий круг задач теории оптимального управления системами с распределенными параметрами освещен в работах Ж.-Л. Лионса. В заключение, не претендуя на полноту приведенного обзора, отмечу работы А.И. Егорова, где рассматриваются как системы с сосредоточенными так и с распределенными параметрами, и Н.Н. Красовского, сделавшего фундаментальный вклад в создание и развитие теории дифференциальных игр.

Цель работы

Основной целью данной работы является разработка и обоснование нового метода построения оптимального управления механической системой, моделирующей динамику манипуляционного робота. Рассмотрено две задачи оптимального управления: задача минимизации функционала энергии от управляющего момента при повороте системы из начального положения в конечное за заданное время и задача быстродействия при ограниченнии на функционал энергии. Отдельно изучен случай, когда рука манипулятора обладает наследственно вязкоупругими свойствами.

Методы исследования

В диссертации использованы методы аналитической теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, выпуклого анализа. При построении управления в задаче с вязкоупругим стержнем применяется асимптотический метод. Для иллюстрации применения предложенных алгоритмов создана компьтерная программа, в которой ряд расчетов производится с использованием численных методов.

[10] *Бадалов, Ф.Б* Численное исследование влияния реологических параметров на характер колебаний наследственно-деформируемых систем / Ф.Б. Бадалов, А. Абдукаримов, Б.А. Худаяров // Вычислительные технологии. — 2006. — Т. 12, № 4. — С. 17–26.

Научная новизна работы

В диссертации разработан новый метод построения оптимального управления механической системой, моделирующей динамику манипуляционного робота. Решены две задачи оптимального управления: задача минимизации функционала энергии от управляющего момента при повороте системы из начального положения в конечное за заданное время и задача быстродействия при ограниченнии на функционал энергии. Впервые для подобных задач изучен случай, когда рука манипулятора обладает наследственно вязкоупругими свойствами.

Положения, выносимые на защиту

1) Решена задача оптимального управления поворотом механической системы, состоящей из твердого тела и жестко связанного с ним наследственно вязкоупругого стержня, из начального положения в конечное за заданное время, минимизирующего функционал энергии от управляющего момента.

2) Решена задача быстродействия для механической системы, состоящей из твердого тела и жестко связанного с ним наследственно вязкоупругого стержня.

3) Предложен асимптотический метод построения оптимального управления системой с наследственно вязкоупругим стержнем.

4) Решена задача оптимального управления поворотом механической системы, состоящей из двух твердых тел, жестко связанных упругим стержнем, из начального положения в конечное за заданное время, минимизирующего функционал энергии от управляющего момента.

5) Решена задача быстродействия для механической системы, состоящей из двух твердых тел, жестко связанных упругим стержнем.

Теоретическая и практическая значимость работы

Предложенная в диссертационной работе методика позволяет строить оптимальное управление поворотом руки манипуляционного робота со сколь угодно большой точностью за достаточно короткое время. Алгоритм легко программируется.

Результаты диссертации могут быть использованы при получении научнообоснованных рекомендаций по созданию оптимального манипуляционного робота, предназначенного для автоматизации ряда технологических процессов производства.

Кроме того предложенный в диссертации метод при определенных модификациях может быть распространен на более широкий круг задач прикладной механики.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на семинаре кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, Всероссийской научной конференциии, посвященной 200-летию Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова (Ярославль, 2003), Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2004), Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (ММТТ-20) (Ярославль, 2007), Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна (Воронеж, 2008), Международной научной конференции памяти А.Ю. Левина (Ярославль, 2008), Международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего (Москва, 2009).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 11 работ, список которых приведен в конце автореферата. Из совместных публикаций в диссертационную работу включены результаты, полученные автором.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, содержащего 68 наименований. Работа содержит 57 рисунков, созданных в специально разработанном в среде Delphi 2007 автором программном комплексе для построения оптимальных управлений с помощью предложенного в диссертации алгоритма. Общий объем диссертации составляет 94 страницы.

Краткое содержание работы

Во **введении** дан краткий обзор работ по теме диссертации, обоснована актуальность рассматриваемых задач, приведены основные результаты.

В **первой главе** работы приведен вывод уравнений движения механической системы, состоящей из двух твердых тел (основания и груза), жестко связанных между собой упругим стержнем, и сформулированы две задачи оптимального управления: задача перевода системы из одного фазового состояния в другое с минимизацией функционала энергии от управляющего момента и задача быстродействия.

Стержень имеет постоянное сечение и равномерно распределенную по длине массу. Центры масс O_1 и O_2 основания и груза расположены на касательных, проведенных к центральной оси стержня в точках заделки. Система может совершать вращательные движения вокруг оси, проходящей через центр масс основания, относительно которой приложен момент сил $M(t)$. Движение происходит в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Считая упругие смещения стержня малыми, положение механической системы можно охарактеризовать углом поворота $\theta(t)$ системы координат, связанной с основанием, относительно системы координат, связанной с инерциальным пространством, и величиной $y(x,t)$ поперечной деформации стержня в точке x в момент времени t.

Кратко остановимся на выводе уравнений движения. Используем следующие обозначения: l – длина стержня; m – погонная масса стержня; m_2 – масса груза; a_1 и a_2 – расстояния от точек заделки стержня до соответствующих центров масс основания и груза; J_1 – момент инерции основания относительно оси вращения; J_2 – момент инерции груза относительно оси, проходящей через O_2 параллельно оси вращения; EI – жесткость поперечного сечения стержня; x – координата точки стержня, отсчитываемая от точки заделки стержня в основание вдоль центральной оси стержня. Взяв произвольную точку P стержня, подсчитав главный момент всех сил, приложенных к точкам подсистемы PO_2 и приравняв его к моменту, создаваемому силами упругости, действующими в сечении, проходящем через точку P, получаем интегродифференциальное уравнение малых упругих колебаний стержня (в линейном приближении по $y(x,t)$). Дважды дифференцируя его по x, имеем уравнение в частных производных

$$\begin{gathered} my_{tt} + EIy_{xxxx} = -m(x+a_1)\ddot{\theta} + \\ +\dot{\theta}^2\big\{m[y_{xx}\int_x^l (s+a_1)ds + y - y_x(x+a_1)] + m_2 y_{xx}(l+a_1+a_2)\big\}. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем индексы t и x обозначает частную производную по соответствующей переменной. Дополняем уравнение (1) уравнением изменения количества движения относительно оси вращения

$$\begin{gathered} J\ddot{\theta} + m\int_0^l (x+a_1)y_{tt}(x,t)dx + m_2(l+a_1+a_2)y_{tt}(l,t) + \\ +[m_2a_2(l+a_1+a_2) + J_2]y_{xtt}(l,t) = M(t), \end{gathered} \tag{2}$$

где $J = J_1 + m\int_0^l (x+a_1)^2dx + m_2(l+a_1+a_2)^2 + J_2$. Краевые условия к системе уравнений (1)-(2) имеют вид

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} EIy_{xx}(l,t) = -J_2(y_{xtt}(l,t) + \ddot{\theta}) - m_2a_2\big\{y_{tt}(l,t) + a_2y_{xtt}(l,t) + \\ +\ddot{\theta}(l+a_1+a_2) - \dot{\theta}^2[y(l,t) + y_x(l,t)(l+a_1)]\big\}, \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} EIy_{xxx}(l,t) = m_2\big\{y_{tt}(l,t) + a_2y_{xtt}(l,t) + \ddot{\theta}(l+a_1+a_2) + \\ +\dot{\theta}^2[-y(l,t) + (l+a_1)y_x(l,t)]\big\}. \end{gathered} \tag{5}$$

Условия (4)-(5) получаются из уравнения малых упругих колебаний стержня и определяют изгибающий момент и перерезающую силу на конце стержня.

Далее задаются начальные условия в некоторый начальный (нулевой) момент времени

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = \dot{y}_0(x). \tag{6}$$

В начально-краевой задаче (1)-(6) осуществляется переход к безразмерным величинам и в соответствии с положениями теории тонких стержней при рассмотрении задач на конечном промежутке времени учитываются лишь линейные слагаемые уравнений (1)-(5). В результате имеем следующую линейную начально-краевую задачу

$$J\ddot{\theta} + \int_0^1 (x + a_1) y_{tt}(x,t)dx + m_2(1 + a_1 + a_2) y_{tt}(1,t) + \\ + [m_2 a_2 (1 + a_1 + a_2) + J_2] y_{xtt}(1,t) = M(t), \tag{7}$$

$$y_{tt} + y_{xxxx} = -(x + a_1)\ddot{\theta}, \tag{8}$$

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0, \tag{9}$$

$$y_{xx}(1,t) = -J_2(y_{xtt}(1,t) + \ddot{\theta}) - \\ -m_2 a_2 \big\{ y_{tt}(1,t) + a_2 y_{xtt}(1,t) + \ddot{\theta}(1 + a_1 + a_2) \big\}, \tag{10}$$

$$y_{xxx}(1,t) = m_2 \big\{ y_{tt}(1,t) + a_2 y_{xtt}(1,t) + \ddot{\theta}(1 + a_1 + a_2) \big\}, \tag{11}$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = \dot{y}_0(x), \tag{12}$$

являющуюся математической моделью рассматриваемой механической системы. Здесь $J = J_1 + \int_0^1 (x + a_1)^2 dx + m_2(1 + a_1 + a_2)^2 + J_2$. В конце первой главы формулируются следующие две задачи оптимального управления.

1. Определить момент управления $M(t) \in L_2(0,T)$, переводящий краевую задачу (7)-(11) из начального состояния (12) в конечное в заданный момент времени T

$$\theta(T) = \theta_T, \quad \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T, \quad y(x,T) = y_T(x), \quad y_t(x,T) = \dot{y}_T(x) \tag{13}$$

и минимизирующий функционал

$$\Phi(M) = \frac{1}{2} \| M(t) \|^2_{L_2(0,T)}. \tag{14}$$

2. Определить момент управления $M(t) \in L_2(0,T)$, $\Phi(M) \leqslant L < \infty$, переводящий краевую задачу (7)-(11) из (12) в (13) за минимальное время T (задача быстродействия).

Во **второй** и **третьей главах** рассмотрен случай вязкоупругого стержня, при этом материал стержня моделируется реологической моделью наследственно вязкоупругого тела[11]:

$$\sigma(t') = E\left(\varepsilon(t') - \int_{-\infty}^{0} R'(\tau')\varepsilon(t'+\tau')d\tau'\right),$$

где $\sigma(t')$ и $\varepsilon(t')$ – соответственно напряжение и относительная деформация, E – модуль Юнга, $R'(\tau')$ – функция релаксации. Рассматривается случай, когда груз на конце стержня отсутствует. Математическая модель изучаемой системы будет следующей

$$J\ddot{\theta} + \int_0^1 (x+a_1)y_{tt}(x,t)dx = M(t), \tag{15}$$

$$y_{tt} + (I - \Gamma^*)y_{xxxx} = -(x+a_1)\ddot{\theta}, \tag{16}$$

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0, \quad y_{xx}(1,t) = y_{xxx}(1,t) = 0. \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0,\\ y(x,t+\tau)\,|_{t=0} = y_0(x,\tau) \in D_{\gamma 0}, \quad y_t(x,0) = \dot{y}_0(x) \in L_2(0,1),\end{gathered} \tag{18}$$

где $(I - \Gamma^*)\varepsilon(t) \equiv \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^{0} R(\tau)\varepsilon(t+\tau)d\tau$.

Система уравнений (15)-(17) является системой уравнений с бесконечным запаздыванием аргумента. При постановке задач управления начальные и конечные условия для $y(x,t+\tau)$ $(-\infty < \tau \leq 0)$ выбираются принадлежащими пространству функций $D_{\gamma 0}$, т.е. тождественно равными нулю при $-\infty < \tau < 0$. С механической точки зрения это означает, что в материале стержня в начальный и конечный момент времени отсутствует остаточное напряжение. Такой выбор обусловлен тем, что априорное задание величины остаточных напряжений в материале стержня с практической точки зрения представляется весьма проблематичным.

Считая $M(t) \in L_2(0,T)$, определим понятие обобщенного решения. Введем область $Q_T = \{(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ и специальные пространства $H_1(0,1)$, $H_1(Q_T)$, $H(Q_T)$. Через $H_1(0,1)$ обозначим энергетическое пространство оператора $\mathcal{B}v \equiv v^{IV}$, полученное замыканием его области определения $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \{v(x) : v(x) \in C^4(0,1), v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0\}$ в норме $\|v\|^2_{H_1(0,1)} = (v(x), v(x))_{H_1(0,1)}$, $((v(x), u(x))_{H_1(0,1)} =$

[11] *Работнов, Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. — М.: Наука, 1977. — 383 с.

$= (\mathcal{B}v(x), u(x))_{L_2(0,1)} = (v''(x), u''(x))_{L_2(0,1)})$. Через $H_1(Q_T) \subset L_2(Q_T)$ обозначим гильбертово пространство функций, полученное замыканием множества функций $y(x,t) \in C^{4,1}(Q_T)$, $y(0,t) = y_x(0,t) = y_{xx}(1,t) = y_{xxx}(1,t) = 0$ в норме $\|y(x,t)\|^2_{H_1(Q_T)} = (y(x,t), y(x,t))_{H_1(Q_T)}$, где $(y(x,t), z(x,t))_{H_1(Q_T)} = = \int_0^T \Big((y(x,t), z(x,t))_{H_1(0,1)} + \langle y_t(x,t), z_t(x,t)\rangle \Big) dt$. Скалярное произведение $\langle *, * \rangle$ в $L_2(0,1)$ определено следующим образом:

$$\langle y, z\rangle \equiv (y(x), z(x))_{L_2(0,1)} - \frac{1}{J}((x+a_1), y(x))_{L_2(0,1)}((x+a_1), z(x))_{L_2(0,1)}. \quad (19)$$

Через $H(Q_T)$ будем обозначать пространство $L_2(Q_T)$ со скалярным произведением $(y(x,t), z(x,t))_{H(Q_T)} = \int_0^T \langle y(x,t), z(x,t)\rangle dt$ и соответствующей нормой.

Под обобщенным решением $\theta(t)$, $y(x, t+\tau)$ $(-\infty < \tau \le 0)$ краевой задачи (15)-(17) в области Q_T, удовлетворяющим начальным условиям

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot\theta(0) = \dot\theta_0,$$
$$y(x, t+\tau)\,|_{t=0} = y_0(x,\tau) \in D_\gamma, \quad y_t(x,0) = \dot y_0(x) \in L_2(0,1),$$

будем понимать совокупность функций $\theta(t) \in W_2^1(0,T)$, $y(x,t) \in H_1(Q_T)$ $(\theta(0) = \theta_0,\ y(x,0) = y_0(x,0))$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\int_0^T \Big(J\dot\theta(t)\dot p(t) + \frac{J}{J_1}\langle x+a_1, y_t(x,t)\rangle \Big) dt + J\dot\theta_0 p(0) +$$
$$+\frac{J}{J_1}\langle x+a_1, \dot y_0(x)\rangle p(0) + \int_0^T M(t)p(t)dt = 0,$$

$$\int_0^T \Big(\langle y_t(x,t), v_t(x,t)\rangle - ((I-\Gamma^*)y(x,t), v(x,t))_{H_1(0,1)} -$$
$$-\frac{1}{J_1}\langle x+a_1, v(x,t)\rangle M(t) \Big) dt + \langle \dot y_0(x), v(x,0)\rangle = 0$$

для любых функций $p(t)$ и $v(x,t)$, соответствующих условиям

$$p(t) \in W_2^1(0,T), \quad p(T) = 0, \quad v(x,t) \in H_1(Q_T), \quad v(x,T) \equiv 0.$$

В разделе 2.2 построено обобщенное решение для начально-краевой задачи (15)-(18), которое представимо в виде

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)\big(\dot{k}_n(t)\omega_n^{-1}a_{0n}(0)+k_n(t)b_{0n}-$$

$$-\frac{1}{J_1}d_n\int\limits_0^t k_n(t-\tau)M(\tau)d\tau\big). \tag{20}$$

$$\theta(t)=\theta_0+\dot{\theta}_0t+\frac{1}{J_1}\big(\langle x+a_1,\dot{y}_0(x)\rangle t-\langle x+a_1,y(x,t)\rangle+\langle x+a_1,y_0(x)\rangle\big)+$$

$$+\frac{1}{J}\int\limits_0^t(t-\tau)M(\tau)d\tau, \tag{21}$$

где

$$a_{0n}(\tau)=\omega_n^{-1}(y_0(x,\tau),v_n(x))_{H_1(0,1)},\quad b_{0n}=\langle\dot{y}_0(x),v_n(x)\rangle$$

$$d_n=\langle x+a_1,v_n(x)\rangle=J_1J^{-1}c_n.$$

При этом $d_n\neq 0$ для всех $n=1,2,\ldots$, что дает возможность говорить об управляемости в рассматриваемой задаче.

Решение $y(x,t)$ определяется методом Фурье в виде $y(x,t)=v(x)s(t)$. В результате чего получаем спектральную задачу для $v(x)$ и дифференциальное уравнение для $s(t)$.

Показано, что спектральная задача для $v(x)$ имеет счетное число вещественных однократных собственных значений $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$ $(\lambda_n=\beta_n^4=\omega_n^2)(n=1,2,\ldots)$. Получено характеристическое уравнение, определены собственные функции $v_n(x)$, приведены графики первых пяти из них для одного набора параметров. Собственные функции являются ортонормированными относительно скалярного произведения (19).

Решение дифференциального уравнения для $s(t)$ представляет особый интерес. Уравнение имеет вид

$$\ddot{s}_n(t)+\omega_n^2(I-\Gamma^*)s_n(t)=f_n(t). \tag{22}$$

Возможно выписать функцию Коши для соответствующего однородного уравнения

$$k_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}H_n^{-1}(p)e^{pt}dp,\quad (i=\sqrt{-1}), \tag{23}$$

где $H_n(p)=p^2+\omega_n^2\left(1-\int_{-\infty}^0R(\tau)e^{p\tau}d\tau\right)$, а β выбрано таким образом, чтобы вещественные части корней уравнений $H_n(p)=0$ $(n=1,2,...)$ были меньше

β. $R_c(\omega)=\int_0^\infty R(-\tau)\cos(\omega\tau)d\tau$, $R_s(\omega)=\int_0^\infty R(-\tau)\sin(\omega\tau)d\tau$ – характеристики ядра Γ^*, нормированные составляющие комплексного модуля упругости материала стержня, которые определяются экспериментально. Однако нахождение интеграла (23) сопряжено с большими вычислительными трудностями особенно при больших ω_n. Поэтому в главе 3 предложен асимптотический способ построения функций $k_n(t)$.

Общее решение $s_n(t)$ уравнения (22) определяется с помощью преобразования Лапласа и свойств изображения свертки функций.

На основании (20), (21) задача оптимального управления может быть сформулирована как гладкая экстремальная задача с ограничениями типа равенств. Записав эти равенства особым образом, получаем

$$\int_0^T M(t)dt=(1,M(t))_{L_2(0,T)}=A_0(T)=J(\dot\theta_T-\dot\theta_0)+\sum_{n=1}^\infty c_n(b_{Tn}-b_{0n}),$$

$$\int_0^T (T-t)M(t)dt=(T-t,M(t))_{L_2(0,T)}=A_1(T)=$$

$$=J(\theta_T-\theta_0-\dot\theta_0 T)+\sum_{n=1}^\infty c_n(a_{Tn}(0)-a_{0n}(0)-b_{0n}T),$$

$$\int_0^T d_n k_n(T-t)M(t)dt=(d_n k_n(T-t),M(t))_{L_2(0,T)}=A_{2n+1}(T)=$$

$$=J_1(a_{0n}(0)\dot k_n(T)+b_{0n}k_n(T)-a_{Tn}(0)),$$

$$\int_0^T d_n \dot k_n(T-t)M(t)dt=(d_n\dot k_n(T-t),M(t))_{L_2(0,T)}=A_{2n}(T)=$$

$$=J_1(a_{0n}(0)\ddot k_n(T)+b_{0n}\dot k_n(T)-b_{Tn})\quad (n=1,2,...).$$

Для построения оптимального управления $M^*(t)$ введена в рассмотрение система функций

$$\begin{gathered}\varphi_0(t)\equiv 1,\quad \varphi_1(t)=T-t,\\ \varphi_{2j}(t)=d_j\dot k_j(T-t),\quad \varphi_{2j+1}(t)=d_jk_j(T-t)\quad (j=1,2,...).\end{gathered}\tag{24}$$

С помощью ортогонализации Шмидта по системе (24) строится ортонормированная в $L_2(0,T)$ система функций $\psi_n(t)$. Аналогично преобразуются величины $A_n(T)$, в результате чего получаем величины $\beta_n(T)$.

Показано, что решение задачи минимизации функционала энергии от управления дается формулой

$$M^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(T)\psi_n(t). \tag{25}$$

Решение задачи быстродействия связано с нахождением первого положительного корня уравнения

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2(T) = L.$$

Точные формулировки результатов содержатся в утверждениях 2.1 и 2.2.

Третья глава посвящена рассмотрению случая малости наследственных свойств материала стержня. Вводится малый параметр

$$\mu = \int_{-\infty}^{0} R'(\tau')d\tau' \ll 1$$

Математической моделью рассматриваемой механической системы в этом случае является следующая система дифференциальных уравнений:

$$J\ddot{\theta} + \int_0^1 (x + a_1)y_{tt}(x,t)dx = M(t),$$
$$y_{tt} + (I - \mu\Gamma^*)y_{xxxx} = -(x + a_1)\ddot{\theta}$$

с краевыми и начальными условиями (17), (18).

Рассуждения главы 3 в значительной мере повторяют рассуждения второй главы. При этом функции $k_n(t;\mu)$ строятся в виде разложения по μ

$$k_n(t;\mu) = k_{n0}(t,t_1) + \mu k_{n1}(t,t_1,t_2) + \ldots,$$
$$t_j = \mu^j t$$

методом многих масштабов. В качестве нулевого приближения имеем

$$k_{n0}(t,t_1) = \omega_n^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{2}\omega_n R_s(\omega_n)t_1\Big)\sin\Big(\omega_n t - \frac{1}{2}\omega_n R_c(\omega_n)t_1\Big).$$

Оно с точностью до $O(\mu\exp(-\mu\gamma t))$ $\gamma > 0$ аппроксимирует при $t > 0$ решение рассматриваемого уравнения. Это решение и будет использоваться для дальнейшего построения управления.

В конце третьей главы рассмотрен пример механической системы, для которой с использованием асимптотического метода построено оптимальное управление поворотом на угол $\theta = \pi/2$ с полным гашением колебаний в конце процесса управления. Приведены графики функций $k_n(t;\mu)$, графики ортонормированных функций $\psi_n(t;\mu)$ и графики оптимального управления

$M(t;\mu)$ для различных значений параметра μ, сделана оценка разницы между асимптотическим и точным решениями.

Главы 4 и 5 посвящены решению задач поворота системы с грузом на конце стержня, постановка которых описана в первой главе диссертации. Общий подход к решению остается прежним: к краевой задаче для $y(x,t)$, имеющей вид

$$y_{tt} - \frac{1}{J}(x+a_1)\left\{\int_0^1 (x_1+a_1)y_{tt}(x_1,t)dx_1 + m_2(1+a_1+a_2)y_{tt}(1,t)+\right.$$
$$\left.+[J_2+m_2a_2(1+a_1+a_2)]y_{xtt}(1,t)\right\} + y_{xxxx} = -\frac{1}{J}(x+a_1)M(t), \tag{26}$$

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0, \tag{27}$$

$$y_{xx}(1,t) = \frac{1}{J}[J_2+m_2a_2(1+a_1+a_2)]\int_0^1 (x_1+a_1)y_{tt}(x_1,t)dx_1 -$$
$$-\frac{1}{J}\left\{J(J_2+m_2a_2^2) - [J_2+m_2a_2(1+a_1+a_2)]^2\right\}y_{xtt}(1,t) -$$
$$-\frac{1}{J}m_2\left\{Ja_2 - (1+a_1+a_2)[J_2+m_2a_2(1+a_1+a_2)]\right\}y_{tt}(1,t) -$$
$$-\frac{1}{J}[J_2+m_2a_2(1+a_1+a_2)]M(t), \tag{28}$$

$$y_{xxx}(1,t) = -\frac{1}{J}m_2(1+a_1+a_2)\int_0^1 (x_1+a_1)y_{tt}(x_1,t)dx_1 +$$
$$+\frac{1}{J}m_2[J - m_2(1+a_1+a_2)^2]y_{tt}(1,t) +$$
$$+\frac{1}{J}m_2\left\{Ja_2 - (1+a_1+a_2)[J_2+m_2a_2(1+a_1+a_2)]\right\}y_{xtt}(1,t) +$$
$$+\frac{1}{J}m_2(1+a_1+a_2)M(t), \tag{29}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = \dot{y}_0(x), \tag{30}$$

применяется метод Фурье ($y(x,t) = v(x)s(t)$), в результате чего получены спектральная краевая задача для $v(x)$ и дифференциальное уравнение для $s(t)$.

Здесь особый интерес представляет решение спектральной краевой задачи для $v(x)$, которая содержит спектральный параметр в краевых условиях. Вся **четвертая глава** посвящена изучению свойств спектра и нахождению собственных функций данной задачи. Показано, что спектр состоит из счетного числа вещественных однократных собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 <$

$\ldots < \lambda_n < \ldots (n = 1, 2, \ldots)$, получено характеристическое уравнение, определены собственные функции $v_n(x)$. Собственные функции являются ортонормированными относительно скалярного произведения

$$
\begin{gathered}
\langle y, z\rangle = (y, z) + my(1)z(1) + (J_2 + a_2^2 m)y'(1)z'(1) + \\
+a_2 m(y'(1)z(1) + y(1)z'(1)) - \frac{1}{J}\Big((x + a_1, y)(x + a_1, z) + \\
+m(1 + a_1 + a_2)((x + a_1, y)z(1) + (x + a_1, z)y(1)) + \\
+(J_2 + ma_2(1 + a_1 + a_2))((x + a_1, y)z'(1) + (x + va_1, z)y'(1)) \\
+m^2(1 + a_1 + a_2)^2 y(1)z(1) + (J_2 + ma_2(1 + a_1 + a_2))^2 y'(1)z'(1) + \\
+m(J_2 + ma_2(1 + a_1 + a_2))(1 + a_1 + a_2)(y(1)z'(1) + z(1)y'(1))\Big).
\end{gathered} \tag{31}
$$

В **пятой главе** формулируется понятие обобщенного решения для рассматриваемой начально-краевой задачи, доказывается его существование и единственность, выводится формула, его определяющая. Предварительно вводятся область $Q_T = \{(x, t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ и специальные пространства $H(0, 1)$ $H_1(0, 1)$, $H(Q_T)$, $H_1(Q_T)$. Через $H(0, 1)$ обозначено гильбертово пространство функций $y(x)$, полученное замыканием в норме $\|y(x)\|_H = \langle y(x), y(x)\rangle^{1/2}$ пространства функций $C^1(0, 1)$. Скалярное произведение $\langle *, *\rangle$ определено в (31). Через $H_1(0, 1)$ обозначено гильбертово пространство функций $y(x)$, полученное замыканием в норме $\|y(x)\|_{H_1} = (y(x), y(x))^{1/2}_{H_1}$ пространства функций $y(x) \in C^2(0, 1)$, $y(0) = y'(0) = 0$. Здесь скалярное произведение имеет вид $(u(x), v(x))_{H_1} = (u''(x), v''(x))_{L_2(0,1)}$. Через $H(Q_T)$ обозначено гильбертово пространство функций $y(x, t)$, полученное замыканием в норме $\|y(x, t)\|_{H(Q_T)} = (y(x, t), y(x, t))^{1/2}_{H(Q_T)}$, где $(u(x, t), v(x, t))_{H(Q_T)} = \int_0^T \langle u(x, t), v(x, t)\rangle dt$, пространства функций $y(x, t) \in C^{1,0}(Q_T)$. Через $H_1(Q_T)$ обозначено гильбертово пространство функций $y(x, t)$, полученное замыканием в норме $\|y(x, t)\|_{H_1(Q_T)} = (y(x, t), y(x, t))^{1/2}_{H_1(Q_T)}$, где $(u(x, t), v(x, t))_{H_1(Q_T)} = (u_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t))_{L_2(Q_T)} + (u_t(x, t), v_t(x, t))_{H(Q_T)}$, множества функций $y(x, t) \in C^{2,1}(Q_T)$, $y(0, t) = y_x(0, t) = 0$.

Под обобщенным решением начально-краевой задачи (26)-(30), определенным в области $Q(T)$, с начальными условиями

$$y_0(x) \in H_1(0, 1), \quad \dot{y}_0(x) \in H(0, 1)$$

понимается функция $y(x, t) \in H_1(Q_T)$, удовлетворяющая интегральному соотношению

$$\int\limits_0^T \Big(\langle y_t(x,t), v_t(x,t) \rangle - (y_{xx}(x,t), v_{xx}(x,t))_{L_2(0,1)} -$$
$$- \frac{1}{J_1} \langle x + a_1, v(x,t) \rangle M(t) \Big) dt + \langle \dot{y}_0(x), v(x,0) \rangle = 0$$

для любой функции $v(x,t)$ вида

$$v(x,t) \in H_1(Q_T), \quad v(x,T) \equiv 0.$$

Доказано, что обобщенным решением начально-краевой задачи (26)-(30) является ряд

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \Big(a_{0n} \omega_n^{-1} \cos(\omega_n t) + b_{0n} \omega_n^{-1} \sin(\omega_n t) -$$
$$- \frac{1}{J_1} d_n \int\limits_0^t \omega_n^{-1} \sin(\omega_n (t-\tau)) M(\tau) d\tau \Big), \tag{32}$$

где

$$a_{0n}(\tau) = \omega_n^{-1} (y_0(x,\tau), v_n(x))_{H_1(0,1)}, \quad b_{0n} = \langle \dot{y}_0(x), v_n(x) \rangle$$
$$d_n = \langle x + a_1, v_n(x) \rangle .$$

При этом $d_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, что дает возможность говорить об управляемости в рассматриваемой задаче.

Под обобщенным решением уравнения (7) понимается функция $\theta(t) \in W_2^1(0,T)$ $\theta(0) = \theta_0$, удовлетворяющую интегральному равенству

$$\int\limits_0^T \Big(J\dot{\theta}(t)\dot{p}(t) + \frac{J}{J_1} \langle x + a_1, y_t(x,t) \rangle \dot{p}(t) \Big) dt + J\dot{\theta}_0 p(0) +$$
$$+ \frac{J}{J_1} \langle x + a_1, \dot{y}_0(x) \rangle p(0) + \int\limits_0^T M(t) p(t) dt = 0.$$

для любой функции $p(t)$ вида

$$p(t) \in W_2^1(0,T), \quad p(T) = 0.$$

Обобщенное решение уравнения (7) определяется следующим выражением

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \frac{1}{J_1} \big(\langle x + a_1, \dot{y}_0(x) \rangle t - \langle x + a_1, y(x,t) \rangle + \langle x + a_1, y_0(x) \rangle \big) +$$
$$+ \frac{1}{J} \int\limits_0^t (t - t_1) M(t_1) dt_1.$$

Далее следует описание алгоритма построения оптимального управления рассматриваемой системой, которое во многом аналогично соответствующему описанию в предыдущих главах. Полученные результаты формально совпадают с результатами главы 2. Их точные формулировки содержатся в утверждениях 5.1 и 5.2.

В конце пятой главы рассмотрен пример механической системы, для которой построены оптимальные управления поворотом из нулевого положения равновесия на угол $\theta = \pi/2$ с полным гашением колебаний стержня при различных значениях размера груза за разные промежутки времени. Приведены соответствующие графики.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в ведущих журналах, включенных в перечень ВАК:

1) *Гарнихина*, М.Ю.* Оптимальное управление поворотом твердого тела с наследственно вязкоупругим стержнем / М.Ю. Гарнихина, Е.П. Кубышкин // Механика твердого тела (Известия АН). — 2006. — № 05. — С. 29–41.

2) *Войтицкий, В.И.* О спектральной задаче, возникающей в механике манипуляционных роботов / В.И. Войтицкий, М.Ю. Злобина, Е.П. Кубышкин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2009. — Т.16. № 3. — С. 22–28.

Другие публикации:

3) *Гарнихина*, М.Ю.* Алгоритм управления поворотом твердого тела с наследственно вязкоупругим стержнем / М.Ю. Гарнихина, Е.П. Кубышкин // Математика: Материалы Всероссийской научной конференции, посвященной 200-летию Ярославского государственного университета им.П.Г.Демидова / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2003. — С. 204–210.

4) *Гарнихина*, М.Ю.* Оптимальное управление одной динамической системой, возникающей в механике манипуляционных роботов / М.Ю. Гарнихина, Е.П. Кубышкин // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции / Самарск. гос. тех. ун-т. Самара, 2004. — С. 56–57.

5) *Гарнихина*, М.Ю.* Асимптотический метод построения управления поворотом твердого тела с наследственно вязкоупругим стержнем / М.Ю. Гарнихина, Е.П. Кубышкин // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2005. — Вып. 7. — С. 114–122.

*Работа Злобиной М.Ю. опубликована под фамилией Гарнихина

6) *Гарнихина*, М.Ю.* Оптимальное управление манипуляционным роботом с учетом гибких свойств руки / М.Ю. Гарнихина, Е.П. Кубышкин // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-20: Сборник трудов XX Международной науч. конференции в 10 т. / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2007. — Т. 2. — С. 67–71.

7) *Гарнихина*, М.Ю.* Анализ одной спектральной краевой задачи, возникающей в механике манипуляционных роботов / М.Ю. Гарнихина // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2008. Тезисы докладов / Воронеж: ВГУ, 2008. — С. 38–39.

8) *Гарнихина*, М.Ю.* Оптимальное управление поворотом твердого тела с упругим стержнем и грузом на конце / М.Ю. Гарнихина, Е.П. Кубышкин // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2008. Тезисы докладов / Воронеж: ВГУ, 2008. — С. 88–90.

9) *Злобина, М.Ю.* Анализ одной спектральной краевой задачи, возникающей в механике манипуляционных роботов / М.Ю. Злобина // Математика, кибернетика, информатика: труды международной научной конференциипамяти А.Ю. Левина / под редакцией С.А. Кащенко, В.А. Соколова / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2008. — С. 100–103.

10) *Кубышкин, Е.П.* Оптимальное управление движением механической системы, моделирующей динамику манипуляционного робота / Е.П. Кубышкин, М.Ю. Злобина // Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего / Москва: Университетская книга, 2009. — С. 285–286.

11) *Злобина, М.Ю.* Оптимальное управление поворотом двух твердых тел, соединенных упругим стержнем / М.Ю. Злобина, Е.П. Кубышкин // Механика и процессы управления. Итоги диссертационных исследований / Екатеринбург: УрО РАН, 2009. — С. 108–117.

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ

Отпечатано на ризографе

Ярославский государственный университет
150000, г. Ярославль, ул. Советская, 14.