

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского»

На правах рукописи

Гавриков Александр Владимирович

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕКОНСТРУКЦИИ  
ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

01.01.09 — дискретная математика  
и математическая кибернетика

Диссертация  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физ.-мат. наук,  
профессор В. Н. Салий

Саратов 2015

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА I. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЭЙЛЕРОВЫ РЕКОНСТРУКЦИИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ.....	21
1. Оптимальная эйлерова реконструкция орграфов методом переориентации дуг.....	21
2. Оптимальная эйлерова реконструкция орграфов методом добавления дуг.....	36
3. Оптимальная эйлерова реконструкция орграфов методом удаления дуг.....	62
ГЛАВА II. Т-НЕПРИВОДИМЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ.....	71
1. Критерий ТНР для орграфов.....	71
2. Т-неприводимые расширения для цепей.....	71
3. Т-неприводимые расширения для звезд.....	75
4. Т-неприводимые расширения для объединения цепей.....	83
5. Т-неприводимые расширения для четных многоугольных орграфов.....	97
6. Т-неприводимые расширения для многоугольных орграфов.....	109
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	119
Список литературы.....	120

## ВВЕДЕНИЕ

Под *ориентированным графом* (или, для краткости, *орграфом*) понимается пара  $G = (V, \alpha)$ , где  $V$  — конечное непустое множество (вершины орграфа), а  $\alpha$  — отношение смежности на множестве  $V$  (дуги орграфа). *Неориентированный граф* (или, для краткости, *граф*) — пара  $G = (V, \alpha)$ , где  $\alpha$  — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве  $V$  (ребра графа) (см. [7]).

Пусть  $K$  представляет собой некоторый класс графов (орграфов), а  $G$  — произвольный граф (орграф), не принадлежащий классу  $K$ . Требуется произвести те или иные реконструкции, т. е. изменения в структуре графа (орграфа)  $G$ , чтобы полученный граф (орграф)  $G'$  оказался  $K$ -графом (орграфом). В качестве допустимых реконструкций данного графа (орграфа) обычно рассматриваются: отождествление вершин графа (орграфа), ориентация ребер неориентированного графа, переориентация дуг орграфа, добавление новых ребер (дуг), удаление некоторых ребер (дуг) (см. [16]).

Под *путем* в орграфе понимается последовательность дуг  $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-2}, v_{n-1})$ , где  $(v_i, v_{i+1}) \in \alpha$ ,  $0 \leq i \leq n-2$ , каждые две соседние дуги имеют общую вершину и никакая дуга не встречается более одного раза.

*Длина пути* — количество входящих в него дуг. Путь является *циклическим*, если его начальная и конечная вершины совпадают:  $v_0 = v_{n-1}$ .

Путь считается *простым*, если каждая его вершина принадлежит не более чем двум его дугам.

*Расстояние от вершины  $u$  до вершины  $v$*  в орграфе определяется как длина кратчайшего пути из вершины  $u$  в вершину  $v$  и обозначается через  $dist(u, v)$ .

Путь длины  $|\alpha|$  называется *эйлеровым*.

*Контуром* в орграфе называется простой циклический путь.

Под *эйлеровым орграфом* понимается орграф  $G = (V, \alpha)$ , в котором существует циклический эйлеров путь.

Вершины  $u$  и  $v$  орграфа  $G = (V, \alpha)$  называются *связанными*, если  $(\exists v_0, v_1 \dots v_{k-1} \in V)[u = v_0 \ \& \ (v_0, v_1) \in \alpha \cup \alpha^{-1} \ \& \ (v_1, v_2) \in \alpha \cup \alpha^{-1} \ \&$

$\dots \& (v_{k-2}, v_{k-1}) \in \alpha \cup \alpha^{-1} \ \& \ v_{k-1} = v]$ . Любая вершина  $v \in V$  связана сама с собой по определению.

Отношение связности является эквивалентностью на множестве вершин орграфа. Классы этого отношения называются *компонентами связности* (или просто *компонентами*) орграфа.

Орграф  $G = (V, \alpha)$  с универсальным отношением связности называется *связным*.

Исследованию реконструкций ориентированных графов посвящены ряд публикаций.

Пусть  $G = (V, \alpha)$  – орграф и  $\varepsilon \subseteq V \times V$  – отношение эквивалентности на множестве его вершин. Факторграфом орграфа  $G$  по эквивалентности  $\varepsilon$  называется орграф  $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha/\varepsilon)$ , где  $\alpha/\varepsilon = \{(\varepsilon(u), \varepsilon(v)) \in V/\varepsilon \times V/\varepsilon \mid (\exists u' \in \varepsilon(u), v' \in \varepsilon(v))((u', v') \in \alpha)\}$ . Если  $K$  – некоторый класс орграфов и  $G \notin K$ , то под  $K$ -конгруэнцией орграфа  $G$  понимается такая эквивалентность  $\theta \subseteq V \times V$ , что  $G/\theta \in K$ . Для класса  $K$  функциональных орграфов М. А. Кабанов [8] указал наименьшую  $K$ -конгруэнцию на произвольном орграфе и установил некоторые свойства решетки функциональных конгруэнций орграфов. Он же решил аналогичные задачи для классов входящих и выходящих ориентированных деревьев, описал орграфы со специальными решетками циклических и ациклических конгруэнций [9].

Древесным конгруэнциям ориентированных деревьев посвящена публикация А. В. Киреевой [10].

М. Р. Мирзаянов [14] рассматривал случай, когда  $K$  – класс сильно связанных орграфов, и предложил полиномиальный алгоритм построения сильно связной конгруэнции произвольного орграфа, наибольшей по числу вершин в факторграфе.

В технической диагностике используется полиномиальный алгоритм [7], позволяющий в данной направленной (т. е. с антисимметричным отношением смежности) сети переориентировать некоторое множество дуг с минимальной суммарной стоимостью так, чтобы получилась бесконтурная сеть. Задача оп-

тимальной эйлеровой реконструкции методом переориентации дуг решена в первой главе диссертации: дан произвольный связный оргграф  $G = (V, \alpha)$ , необходимо методом переориентации минимального количества дуг преобразовать его в эйлеров. Решение задачи докладывалось на научных конференциях (см. [А1, А6]) и опубликовано в [А4].

Дуга в оргграфе  $G = (V, \alpha)$  называется *инцидентной* вершине  $v$ , если вершина  $v$  — конец или начало этой дуги.

*Вложение* оргграфа  $G = (V, \alpha)$  в оргграф  $H = (W, \beta)$  — взаимно однозначное отображение  $\phi : V \rightarrow W$ , такое что  $(\forall u, v \in V)((u, v) \in \alpha \rightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in \beta)$ . При этом говорят, что оргграф  $G$  вкладывается в оргграф  $H$ .

*Часть* оргграфа  $G = (V, \alpha)$  — оргграф  $H = (W, \beta)$  такой, что  $W \subseteq V$  и  $\beta \subseteq (W \times W) \cap \alpha$ . Часть оргграфа  $G = (V, \alpha)$  является *подграфом* оргграфа  $H = (W, \beta)$ , если  $\beta = (W \times W) \cap \alpha$ .

Подграф  $H$  *максимален*, если он получается из исходного оргграфа  $G$  удалением одной вершины  $v$  и всех инцидентных ей дуг.

*Объединение* оргграфа  $G = (V, \alpha)$  и оргграфа  $H = (W, \beta)$ , таких что  $V \cap W = \emptyset$ , — оргграф  $G \cup H = (V \cup W, \alpha \cup \beta)$ .

*Соединение* оргграфа  $G = (V, \alpha)$  и оргграфа  $H = (W, \beta)$ , таких что  $V \cap W = \emptyset$ , — оргграф  $G + H = (V \cup W, \alpha \cup \beta \cup V \times W \cup W \times V)$ .

Граф  $G' = (V, \alpha')$  называется *минимальным  $K$ -расширением* графа  $G$ , если  $\alpha \subset \alpha'$ ,  $G' \in K$  и  $|\alpha'|$  минимально при соблюдении этих условий. Следующая модификация конструкции минимального  $K$ -расширения восходит к работе Хейза [19]. Пусть  $G$  — некоторый  $n$ -вершинный граф и  $K(G)$  — класс  $(n + 1)$ -вершинных графов таких, что если  $G' \in K(G)$ , то  $G$  вкладывается в любой максимальный подграф графа  $G'$ . Граф  $G'$  называется *минимальным  $K(G)$ -расширением* объединения  $G \cup \{1\}$  графа  $G$  с одновершинным графом. Характеризациям минимальных расширений для различных видов оргграфов посвящено множество публикаций. М. Б. Абросимов и А. А. Долгов в работах [5, 6] исследовали точные расширения турниров. А. В. Киреева [10] показала, как можно построить минимальное расширение для функционального графа.

Минимальные расширения направленных звезд описаны М. Б. Абросимовым в [3, 4]. В диссертации решена задача оптимальной эйлеровой реконструкции методом добавления дуг. Получен полиномиальный алгоритм, который преобразует произвольный оргграф  $G = (V, \alpha)$  в эйлеров методом добавления минимального количества дуг. Корректность алгоритма доказана. Решение задачи докладывалось на научных конференциях (см. [A3, A7]) и опубликовано в [A4, A8].

Если граф  $G$  принадлежит классу  $K$ , то его  $K$ -сужением называется всякая остовная часть  $G'$ , принадлежащая классу  $K$ . Если граф  $G'$  не имеет собственных  $K$ -сужений, он называется *неприводимым  $K$ -ядром* исходного графа  $G$ . Если к тому же  $G'$  содержит минимальное количество дуг среди всех  $K$ -сужений графа  $G$ , то  $G'$  по определению является минимальным  $K$ -ядром графа  $G$ .

Общеизвестными результатами являются алгоритмы построения минимальных остовных деревьев для взвешенных графов (см. [7]). Относительно класса эйлеровых оргграфов в диссертации приведен полиномиальный алгоритм, который методом удаления минимального количества дуг преобразует исходный оргграф в оргграф, каждая компонента связности которого является эйлеровой. Корректность алгоритма доказана. Решение задачи докладывалось на научных конференциях (см. [A2, A7]) и опубликовано в [A4].

Помимо теоретических выкладок составлена программа для ЭВМ, реализующая алгоритмы оптимальных эйлеровых реконструкций оргграфов [A5].

*Расширение* оргграфа  $G = (V, \alpha)$  — оргграф  $H = (W, \beta)$ , такой, что  $|W| = |V| + 1$  и оргграф  $G$  вкладывается в каждый максимальный подграф оргграфа  $H$ .

*Тривиальное расширение* (для краткости, ТР) оргграфа  $G = (V, \alpha)$  — соединение  $G + K_1$  исходного оргграфа  $G$  с одновершинным графом  $K_1$ . В силу того, что тривиальное расширение оргграфа  $G$  единственно с точностью до изоморфизма, возможно ввести функцию ТР( $G$ ).

Следующая модификация конструкции минимального  $K$ -ядра предложена

В. Н. Салием в [15]. Пусть  $G$  — некоторый  $n$ -вершинный граф. Классу  $K(G)$  всегда принадлежит тривиальное расширение  $G + K_1$ , то есть соединение графа  $G$  с одновершинным графом  $K_1$ . Неприводимые  $K(G)$ -ядра называются  *$T$ -неприводимыми расширениями* (для краткости, ТНР) исходного графа  $G$ . Другими словами,  *$T$ -неприводимое расширения* орграфа  $G$  — это расширения исходного орграфа  $G$ , полученные удалением максимального множества дуг из  $TP(G)$ . ТНР для некоторых классов неориентированных графов и их объединений рассматривались С. Г. Курносовой в диссертации [13]. *Минимальным  $T$ -неприводимым расширением* орграфа  $G$  называется расширение исходного орграфа  $G$ , полученное удалением максимального количества дуг из  $TP(G)$ . То есть минимальное ТНР орграфа  $G$  — одно из ТНР, содержащее минимальное количество дуг среди всех других ТНР этого орграфа.

$T$ -неприводимые расширения являются одним из видов оптимальных расширений для орграфов. Конструкции оптимальных расширений применяются в диагностике дискретных систем и криптографии (см. [15]), а также в задачах отказоустойчивости (см. [1, 4, 19]). В общем случае задача определения того, является ли орграф  $H$  расширением для орграфа  $G$ , является  $NP$ -полной, а задача поиска ТНР по заданному орграфу  $G = (V, \alpha)$  не принадлежит классу  $NP$ , если  $P \neq NP$  (см. [2]).

Во второй главе диссертации описаны полиномиальный алгоритм построения для цепи отличного от контура ТНР, полиномиальный алгоритм построения для звезды  $S_{l,m}$   $\min(l, m)$  неизоморфных друг другу ТНР и полиномиальный алгоритм построения для звезды минимального ТНР. Также доказаны теорема о построении одного из ТНР для объединения цепей и описан полиномиальный алгоритм построения минимального ТНР для объединения цепей. Все предложенные алгоритмы имеют доказательство корректности. Некоторые из этих результатов докладывались на научной конференции [A9] и опубликованы в [A10].

Исследованы ТНР для многоугольных орграфов. Доказана теорема о построении одного из ТНР для многоугольных орграфов с четным количеством

вершин. Получен полиномиальный алгоритм построения ТНР для произвольного многоугольного орграфа [A11]. Доказана теорема о корректности предложенного алгоритма.

**Научная новизна и выносимые на защиту положения.** В работе получены следующие основные результаты:

1. получены полиномиальные алгоритмы построения оптимальных эйлеровых реконструкций орграфов методом переориентации, добавления и удаления дуг. Доказаны теоремы о корректности предложенных алгоритмов и приведены оценки их асимптотической сложности;

2. описаны  $T$ -неприводимые и минимальные  $T$ -неприводимые расширения для цепей, звезд и объединения цепей;

3. найден явный вид одного из  $T$ -неприводимых расширений для многоугольных орграфов с четным количеством вершин;

4. получен полиномиальный алгоритм построения  $T$ -неприводимого расширения для произвольного многоугольного орграфа. Доказана теорема о корректности предложенного алгоритма и оценена его асимптотическая сложность.

Все результаты диссертации являются новыми.

**Личный вклад автора.** Все выносимые на защиту результаты диссертации принадлежат лично автору.

**Методы исследования.** При решении перечисленных задач применяются понятийный аппарат и методы теории графов, теории алгоритмов.

**Достоверность полученных результатов.** Все полученные в диссертации результаты имеют строгое математическое доказательство. Кроме того, достоверность теоретических результатов подтверждают вычислительные эксперименты.

**Апробация работы.** Результаты работы были представлены на межвузовской научной конференции «Компьютерные науки и информационные технологии» (Саратов, 2008, 2010 годы), на 11-й региональной научно-практической конференции аспирантов, студентов и учащихся (Бийск, 2009 год), на VIII все-



российской межвузовской конференции молодых ученых (Санкт-Петербург, 2011 год), на международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, 2011 год), на XVIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» МГУ (Москва, 2011 год), на XVI международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Нижний Новгород, 2011 год), на финальном туре Шестнадцатого конкурса студенческих и аспирантских работ имени Августа Мебиуса НМУ (Москва, 2012 год), на XXI международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» МГУ (Москва, 2013 год), на 56-ой научной конференции МФТИ (Москва-Долгопрудный-Жуковский, 2013 год), на XXI международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» МГУ (Москва, 2014 год), на XII Сибирской научной школе-семинаре с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография» (Екатеринбург, 2014 год), на 58-ой научной конференции МФТИ (Москва-Долгопрудный-Жуковский, 2015 год), на научных и учебных семинарах кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии СГУ им. Н.Г.Чернышевского.

Задача нахождения оптимальной эйлеровой реконструкции орграфов методом переориентации дуг отмечена медалью за лучшую научную студенческую работу по итогам открытого конкурса студентов по естественным, техническим и гуманитарным наукам в вузах РФ (приказ Федерального агентства по образованию №470 от 27 мая 2010 года).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [A1 - A11]. Работы автора [A8] и [A10] опубликованы в изданиях, включенных в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий» ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций. Имеется свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2010616499 от 2 августа 2010 года «Оптимальные эйлеровы реконструкции ориентированных графов» (см. [A5]).

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников. Полный ее объём – 123 страницы.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** содержатся основные определения, формулируется общая постановка задач диссертации, обосновывается актуальность темы исследования, дается характеристика методов исследования, перечень новых научных результатов, содержащихся в работе и выносимых на защиту, характеристика практической ценности и полезности работы, сведения об апробации результатов работы.

**Первая глава** посвящена рассмотрению оптимальных эйлеровых реконструкций ориентированных графов. В ней рассматриваются оптимальные эйлеровы реконструкции методом переориентации дуг, методом добавления дуг и методом удаления дуг. Решением каждой задачи является полиномиальный алгоритм, который имеет доказательство корректности и оптимальности.

Задача нахождения оптимальной эйлеровой реконструкции методом переориентации дуг формулируется следующим образом: дан произвольный связный орграф  $G = (V, \alpha)$ , необходимо путем переориентации минимального количества дуг преобразовать его в эйлеров.

*Степенью исхода вершины  $v$*  называют количество дуг в орграфе  $G = (V, \alpha)$ , имеющих своим началом вершину  $v$ . Степень исхода вершины  $v$  обозначают через  $d^+(v)$ , таким образом  $d^+(v) = |\alpha(v)|$ . Вершина является *стоком*, если ее степень исхода равна 0.

*Степенью захода вершины  $v$*  называют количество дуг в орграфе  $G = (V, \alpha)$ , имеющих своим концом вершину  $v$ . Степень захода вершины  $v$  обозначают через  $d^-(v)$ , таким образом  $d^-(v) = |\alpha^{-1}(v)|$ . Вершина является *источником*, если ее степень захода равна 0.

Критерий существования решения задачи об оптимальной эйлеровой реконструкции сформулирован в следующей лемме.

**Лемма 1.1.** *Связный орграф  $G = (V, \alpha)$  допускает эйлерову реконструк-*

цию методом переориентации дуг тогда и только тогда, когда для любой его вершины  $v \in V$  сумма  $d^+(v) + d^-(v)$  четна.

Балансом вершины  $v$  в орграфе  $G = (V, \alpha)$  назовем число  $bal(v) = d^+(v) - d^-(v)$ . При этом вершина  $v \in V$  считается положительной, отрицательной или нулевой в зависимости от соответствующего свойства числа  $bal(v)$ .

При построении алгоритмов нахождения оптимальных эйлеровых реконструкций будут использоваться методы нахождения потоков в транспортных сетях (см. [12, 18]).

Следующий алгоритм строит оптимальную эйлерову реконструкцию орграфов методом переориентации дуг.

### Алгоритм 1.1.

1. Если исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  не является связным или в нем существует хотя бы одна вершина  $v \in V$ , сумма степени исхода и степени захода которой нечетна, то данный орграф не допускает реконструкцию методом переориентации дуг. Выводится сообщение об этом и алгоритм завершает свою работу. Иначе переходим к пункту 2.

2. Преобразуем исходный связный орграф  $G = (V, \alpha)$  в транспортную сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  следующим образом:

— придаем каждой дуге  $(u, v) \in \alpha$  пропускную способность  $cap(u, v)$ , равную 1;

— придаем каждой дуге  $(u, v) \in \alpha$  стоимость  $cost(u, v)$ , равную 1;

— добавляем две новые вершины: источник  $s$  и сток  $t$ ;

— для каждой положительной вершины  $v \in V$  добавляем  $\frac{|bal(v)|}{2}$  дуг  $(s, v)$ , полагая их пропускную способность  $cap(s, v)$  и цену  $cost(s, v)$  равными 1;

— для каждой отрицательной вершины  $v \in V$  добавляем  $\frac{|bal(v)|}{2}$  дуг  $(v, t)$ , полагая их пропускную способность  $cap(v, t)$  и цену  $cost(v, t)$  равными 1;

Получаем транспортную сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , в которой каждая дуга  $(u, v) \in \beta$  имеет пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ , равные 1.

3. Находим максимальный поток минимальной стоимости в построенной транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  между источником  $s$  и стоком  $t$  алго-

ритмом Басакера-Гоуэна (см. [18]).

4. Дуги в транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , насыщенные потоком и соответствующие дугам исходного связного орграфа  $G = (V, \alpha)$ , переориентируем в орграфе  $G = (V, \alpha)$ . Полученный орграф является эйлеровым.

Асимптотическая сложность алгоритма 1.1 равна асимптотической сложности алгоритма Басакера-Гоуэна поиска максимального потока минимальной стоимости, который применяется в пункте 3. На данный момент известна реализация этого алгоритма за  $O(|V|^5)$  (см. [18]). Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 1.3.

Задача нахождения оптимальной эйлеровой реконструкции методом добавления дуг формулируется следующим образом: дан произвольный орграф  $G = (V, \alpha)$ , необходимо путем добавления минимального количества дуг преобразовать его в эйлеров. Для любого орграфа существует эйлерова реконструкция методом добавления дуг.

Орграф  $G = (V, \alpha)$  — это множество компонент связности, из которых часть, быть может, является эйлеровыми компонентами связности, а остальные — неэйлеровыми. Пусть  $c$  — количество неэйлеровых компонент связности, а  $e$  — количество эйлеровых компонент связности в орграфе  $G$ .

Реконструкцию, содержащую среди всех реконструкций исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$  минимальное количество добавленных дуг, назовем оптимальным добавлением по принципу путей (для краткости, ОДПП). Согласно лемме 1.8 добавление дуг из ОДПП преобразует орграф  $G = (V, \alpha)$  в орграф, у которого каждая компонента связности является эйлеровой.

Доказательства следующих двух лемм дают конструктивный способ преобразования орграфа, у которого каждая компонента связности эйлерова, в эйлеров орграф, используя при этом минимальное количество добавленных дуг.

**Лемма 1.10.** *После нахождения произвольной реконструкции ОДПП возможно все  $c$  неэйлеровых компонент связности «соединить» в одну компоненту путем действий с добавленными дугами в дополнении  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$*

исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$ .

После применения леммы 1.10 полученный орграф состоит из  $e + 1$  компонент связности,  $e$  из которых были эйлеровыми компонентами в исходном орграфе  $G = (V, \alpha)$ . Эйлерову компоненту, которая получена после преобразований в лемме 1.10, назовем, для краткости, «базисной».

**Лемма 1.11.** *После нахождения произвольной реконструкции ОДПП и построения «базисной» компоненты возможно уменьшить количество компонент связности на  $\sum_{i=1}^k (l_i - 1) = m - k$ , где  $k$  — количество путей в найденной ОДПП,  $l_0, l_1, \dots, l_{k-1}$  — длины путей в найденной реконструкции ОДПП,  $m$  — количество дуг в найденной ОДПП,  $m = \sum_{i=1}^k (l_i - 1)$ .*

### Алгоритм 1.2.

1. Если исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  является эйлеровым, то поставленная задача решена, следовательно, не производим никаких действий и алгоритм завершает свою работу. Иначе переходим к пункту 2.

2. Если в исходном орграфе  $G = (V, \alpha)$  нет неэйлеровых компонент связности, то выбираем из каждой эйлеровой компоненты связности по одной вершине и добавляем цикл из  $e$  дуг, проходящий последовательно через все выбранные вершины. Полученный орграф стал эйлеровым орграфом, алгоритм завершает свою работу. Иначе переходим к пункту 3.

3. Преобразуем исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  следующим образом.

— придаем каждой дуге  $(u, v) \in \alpha$  пропускную способность  $cap(u, v) = 0$  и цену  $cost(u, v) = 0$ ;

— к исходному орграфу  $G = (V, \alpha)$  добавляем две новые вершины: источник  $s$  и сток  $t$ ;

— для каждой отрицательной вершины  $v$  добавляем  $|bal(v)|$  дуг  $(s, v)$ , с пропускной способностью  $cap(u, v) = 1$  и ценой  $cost(u, v) = 1$ ;

— для каждой положительной вершины  $v$  добавляем  $|bal(v)|$  дуг  $(v, t)$ , с пропускной способностью  $cap(u, v) = 1$  и ценой  $cost(u, v) = 1$ ;

— в орграф  $G = (V, \alpha)$  добавляем всевозможные дуги  $(u, v) \in \beta$  из его дополнения  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$ , полагая их пропускную способность  $cap(u, v) = 1$

и цену  $cost(u, v) = 1$ .

Получаем транспортную сеть  $N = (V \cup \{s\} \cup \{t\}, \beta)$ .

4. Находим максимальный поток минимальной стоимости в построенной транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  между источником  $s$  и стоком  $t$  алгоритмом Басакера-Гоуэна.

5. Дуги в транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , насыщенные потоком и соответствующие дугам дополнения  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$  исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$ , добавляем в орграф  $G = (V, \alpha)$ . После действия в этом пункте в полученном орграфе каждая компонента связности является эйлеровой.

6. «Присоединяем» все неэйлеровы компоненты связности и еще как максимум  $m - k$  эйлеровых к «базисной» компоненте по схеме доказательства леммы 1.10 и леммы 1.11.

7. Добавляем еще  $\max(e - m + k, 0)$  дуг, чтобы «присоединить» оставшиеся компоненты связности.

Асимптотическая сложность алгоритма 1.2 равна асимптотической сложности алгоритма Басакера-Гоуэна поиска максимального потока минимальной стоимости, который применяется в пункте 4. Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 1.6.

Задача нахождения оптимальной эйлеровой реконструкции методом удаления дуг формулируется следующим образом: дан произвольный орграф  $G = (V, \alpha)$ , необходимо методом удаления минимального количества дуг получить орграф, у которого каждая компонента связности является эйлеровой.

Следующий алгоритм строит оптимальную эйлерову реконструкцию орграфов методом удаления дуг.

### **Алгоритм 1.3.**

1. Преобразуем исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  в транспортную сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  следующим образом.

— придаем каждой дуге  $(u, v) \in \alpha$  пропускную способность  $cap(u, v)$ , равную 1;

— придаем каждой дуге  $(u, v) \in \alpha$  стоимость  $cost(u, v)$ , равную 1;

- добавляем две новые вершины: источник  $s$  и сток  $t$ ;
- для каждой положительной вершины  $v \in V$  добавляем  $|bal(v)|$  дуг  $(s, v)$ , полагая их пропускную способность  $cap(s, v)$  и цену  $cost(s, v)$  равными 1;
- для каждой отрицательной вершины  $v \in V$  добавляем  $|bal(v)|$  дуг  $(v, t)$ , полагая их пропускную способность  $cap(v, t)$  и цену  $cost(v, t)$  равными 1;

Получаем транспортную сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , в которой каждая дуга  $(u, v) \in \beta$  имеет пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ , равные 1.

2. Находим максимальный поток минимальной стоимости в построенной транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  между источником  $s$  и стоком  $t$  алгоритмом Басакера-Гоуэна.

3. Дуги в транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , насыщенные потоком и соответствующие дугам исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$ , удаляем в орграфе  $G = (V, \alpha)$ . В полученном орграфе каждая компонента связности является эйлеровой.

Асимптотическая сложность алгоритма 1.3 равна асимптотической сложности алгоритма Басакера-Гоуэна поиска максимального потока минимальной стоимости, который применяется в пункте 2. Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 1.8.

**Вторая глава** посвящена рассмотрению  $\Gamma$ -неприводимых расширений некоторых ориентированных графов. В ней рассматриваются ТНР для цепей, звезд, объединения цепей и многоугольных орграфов.

Следующий алгоритм позволяет построить ТНР, не изоморфное контуру  $C_{n+1}$ , для цепи  $P_n$ , где  $n \geq 4$  (см. [A9, A10]).

**Алгоритм 2.1.** Дана цепь  $P_n = (V, \alpha)$ , при этом  $n \geq 4$ . Построим одно из ее ТНР  $H = (W, \beta)$ , такое что  $H \not\cong C_{n+1}$ , следующим образом.

1. Добавим к  $P_n$  вершину  $w$ .
2. Добавим дуги  $(v_0, w)$  и  $(v_1, w)$ .
3. Добавим дуги  $(w, v_{n-2})$  и  $(w, v_{n-1})$ .
4. Для каждой вершины  $v_i \in V$ , где  $2 \leq i \leq n - 3$ , добавим дуги  $(v_i, w)$  и  $(w, v_i)$ .

Количество дуг  $|\beta|$  в  $H = (W, \beta)$  равно  $(n - 1) + 4 + 2(n - 4) = 3n - 5$ .

Асимптотическая сложность алгоритма 2.1 равна  $O(n)$ . Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 2.2.

Неориентированный граф  $G = (V, \alpha)$  называется двудольным, если множество его вершин можно разбить на две доли  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $V_1 \cup V_2 = V$ ,  $|V_1| > 0$ ,  $|V_2| > 0$  и ни одна вершина из  $V_1$  не соединена ребром с другой вершиной из  $V_1$ , ни одна вершина из  $V_2$  не соединена ребром с другой вершиной из  $V_2$ . Двудольный граф называется полным двудольным, если любая вершина первой доли  $V_1$  соединена ребром с каждой вершиной второй доли  $V_2$ . При  $|V_1| = i$ ,  $|V_2| = j$  такой граф обозначается через  $K_{i,j}$ .

Под звездой с  $k$  дугами будем понимать орграф, полученный из полного двудольного графа  $K_{1,k}$  некоторой ориентацией его ребер. Понятия корня и листьев в звездах аналогичны случаю неориентированных графов. Корень звезды будем далее обозначать через  $c$ . Очевидно, что звезду с  $k$  листьями можно задать парой чисел  $l$  и  $m$ , где  $d^+(c) = l$  и  $d^-(c) = m$ , при этом  $l + m = k$ .

Следующий алгоритм позволяет для звезды  $S_{l,m}$  построить  $\min(l, m)$  неизоморфных ТНР, содержащих  $2(l + m) + 2$  дуг.

**Алгоритм 2.2.** Дана звезда  $S_{l,m}$ , в которой  $l > 0$  и  $m > 0$ . Построим  $\min(l, m)$  ее попарно неизоморфных ТНР следующим образом.

1. Добавим к звезде  $S_{l,m}$  вершину  $w$ .
2. Выберем некоторое число  $q$ , такое что  $1 \leq q \leq \min(l, m)$ .
3. Выберем любые  $q$  листьев-источников. Для каждого листа-источника  $u$ , вошедшего в эту выборку, добавим дугу  $(w, u)$ . Для каждого листа-источника  $v$ , не вошедшего в эту выборку, добавим дугу  $(v, w)$ .
4. Выберем любые  $q$  листьев-стоков. Для каждого листа-стока  $u$ , вошедшего в эту выборку, добавим дугу  $(u, w)$ . Для каждого листа-стока  $v$ , не вошедшего в эту выборку, добавим дугу  $(w, v)$ .
5. Добавим встречные дуги  $(c, w)$  и  $(w, c)$  между корнем  $c$  и вершиной  $w$ .

Асимптотическая сложность алгоритма 2.2 равна  $O(l + m)$ , так как за  $O(1)$  требуется проанализировать каждую из  $l + m + 1$  вершин звезды  $S_{l,m}$ .



Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 2.3.

Следующий алгоритм позволяет построить минимальное ТНР для звезды  $S_{l,m}$  (см. [A9, A10]).

**Алгоритм 2.3.** Дана звезда  $S_{l,m}$ . Построим ее минимальное ТНР  $H = (W, \beta)$  следующим образом.

1. Добавим к звезде  $S_{l,m}$  вершину  $w$ .
2. Для каждого листа-источника  $v_i$  добавим дугу  $(v_i, w)$ .
3. Для каждого листа-стока  $v_i$  добавим дугу  $(w, v_i)$ .
4. Добавим дугу  $(c, w)$ .

Асимптотическая сложность алгоритма 2.3 равна  $O(l+m)$ . Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 2.4.

Рассмотрим тип орграфов, являющихся объединением цепей  $P_{n_0}^0 = (V_0, \alpha_0)$ ,  $P_{n_1}^1 = (V_1, \alpha_1)$ ,  $\dots$ ,  $P_{n_{k-1}}^{k-1} = (V_{k-1}, \alpha_{k-1})$ . Пусть орграф  $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$  является объединением  $k$  цепей. В орграфе  $G$  существует  $\sum_{i=0}^{k-1} n_i$  вершин и  $\sum_{i=0}^{k-1} (n_i - 1) = \sum_{i=0}^{k-1} n_i - k$  дуг. Обозначим  $\sum_{i=0}^{k-1} n_i$  через  $n$ .

Следующая теорема дает конструкцию одного из ТНР для объединения цепей.

**Теорема 2.5.** Пусть орграф  $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$ , является объединением  $k$  цепей  $P_{n_i}^i = (V_i, \alpha_i)$ , где  $0 \leq i \leq k-1$ . Тогда его ТНР  $H = ((\bigcup_{i=0}^{k-1} V_i) \cup \{w\}, \beta)$  получается добавлением в орграф  $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$  вершины  $w$  и следующих дуг для каждой цепи  $P_{n_i}^i$ , в зависимости от количества вершин в ней.

1. Если  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит не менее четырех вершин, то:
  - добавим дуги  $(v_{i,0}, w)$  и  $(v_{i,1}, w)$ ;
  - добавим дуги  $(w, v_{i,n-2})$  и  $(w, v_{i,n-1})$ ;
  - для каждой вершины  $v_{i,j}$ , где  $2 \leq j \leq n_i - 3$ , добавим дуги  $(v_{i,j}, w)$  и  $(w, v_{i,j})$ .
2. Если  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит две вершины, то:
  - добавим дугу  $(v_{i,0}, w)$ , смежную с источником  $v_{i,0}$ ;
  - добавим дугу  $(w, v_{i,1})$ , смежную со стоком  $v_{i,1}$ .
3. Если  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит три вершины и при этом в орграфе  $G$  не

существует цепи, содержащей две вершины, то:

- добавим дугу  $(v_{i,0}, w)$ , смежную с источником  $v_{i,0}$ ;
- добавим дугу  $(v_{i,1}, w)$ ;
- добавим дугу  $(w, v_{i,2})$ , смежную со стоком  $v_{i,2}$ .

4. Если  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит три вершины и при этом в орграфе  $G$  существует хотя бы одна цепь  $P_{n_j}^j$ , содержащая две вершины, то:

- добавим дугу  $(v_{i,0}, w)$ , смежную с источником  $v_{i,0}$ ;
- добавим дугу  $(w, v_{i,2})$ , смежную со стоком  $v_{i,2}$ .

Следующий алгоритм позволяет построить минимальное ТНР для объединения цепей (см. [A10]).

**Алгоритм 2.4.** Пусть оргграф  $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$ , является объединением  $k$  цепей  $P_{n_i}^i = (V_i, \alpha_i)$ , где  $0 \leq i \leq k-1$ . Тогда построим его минимальное ТНР  $H = (W, \beta)$  следующим образом.

1. Добавим в оргграф  $G$  вершину  $w$ .
2. Для каждого источника  $v_{i,0} \in V_i$ , где  $0 \leq i \leq k-1$  добавим дугу  $(w, v_{i,0})$ .
3. Для каждого стока  $v_{i,n_i} \in V_i$ , где  $0 \leq i \leq k-1$  добавим дугу  $(v_{i,n_i}, w)$ .

Асимптотическая сложность алгоритма 2.4 оценивается как  $O(n)$ . Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 2.6.

Многоугольным оргграфом порядка  $n$  называется всякий оргграф  $M$ , полученный переориентацией некоторых дуг контура  $C_n$ . Под четными многоугольными оргграфами будем понимать многоугольные оргграфы с четным количеством вершин. Следующая теорема показывает одно из ТНР для четных многоугольных оргграфов в явном виде.

**Теорема 2.9.** Пусть  $M = (Z, \gamma)$  – четный многоугольный оргграф порядка  $n$ . Тогда одним из его ТНР будет оргграф  $H = (W, \beta)$ , где  $W = Z \cup \{w\}$ ,  $\beta = \gamma \cup \{(v, w) | v \in Z, d^-(v) = 0\} \cup \{(w, v) | v \in Z, d^+(v) = 0\} \cup \{(v, w), (w, v) | v \in Z, d^+(v) = 1, d^-(v) = 1\}$ .

Для многоугольных оргграфов общего вида, как четных, так и нечетных, предложен полиномиальный алгоритм, позволяющий построить их ТНР, имеющий асимптотическую сложность  $O(n^3)$  (см. [A11]).

**Алгоритм 2.5.** Дан многоугольный оргграф  $M = (Z, \gamma)$ . Построим его ТНР следующим образом.

1. Добавим к  $M$  вершину  $w$ .
2. Для каждой вершины  $v \in Z$  добавим дуги:
  - если  $v \in Z$  является источником, то добавим дугу  $(v, w)$ ;
  - если  $v \in Z$  является стоком, то добавим дугу  $(w, v)$ ;
  - если  $v \in Z$ , такая что  $d^+(v) = 1$  и  $d^-(v) = 1$ , то добавим дуги  $(v, w)$  и  $(w, v)$ .

Оргграф, построенный после вышеописанных пунктов, обозначим через  $H_0 = (W, \beta_0)$ . Положим  $k = 0$ ;

Если  $n \equiv 0 \pmod{2}$ , то есть многоугольный оргграф  $M$  является четным, то завершаем работу алгоритма, так как построенный оргграф  $H_0$  является искомым ТНР. Иначе, в случае  $n \equiv 1 \pmod{2}$ , переходим к следующему пункту алгоритма.

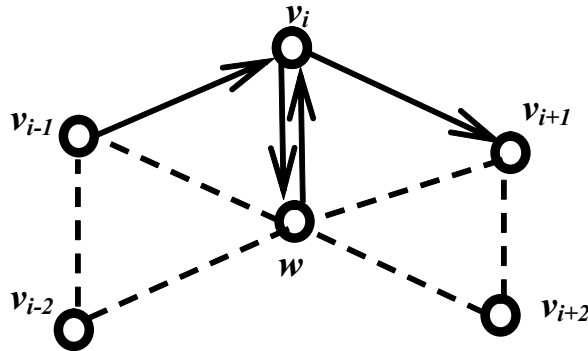


Рисунок 2.1. Иллюстрация п. 3 алгоритма 2.5

3. Рассматриваем вершины  $v_i$ , имеющие степень исхода и степень захода, равные 1,  $d^+(v_i) = 1$  и  $d^-(v_i) = 1$ , в многоугольном оргграфе  $M$ , в порядке возрастания их индексов.

Пусть, для определенности, вершины пронумерованы таким образом, что если рассматриваемая вершина  $v_i \in Z$  в пункте 3 имеет степень исхода и сте-

пень захода, равные 1, то  $\exists v_{i-1} \in Z : (v_{i-1}, v_i) \in \gamma$  и  $\exists v_{i+1} \in Z : (v_i, v_{i+1}) \in \gamma$  (рис. 2.1). Также, по построению в пункте 2 алгоритма, вершина  $v_i$  соединена с вершиной  $w$  дугами  $(v_i, w)$  и  $(w, v_i)$ . Возможны следующие случаи.

Случай А: многоугольный оргграф  $M$  вкладывается в оргграф  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ . Строим оргграф  $H_{k+1} = (W, \beta_{k+1})$ , такой что  $H_{k+1} = H_k - (w, v_i)$ ,  $\beta_{k+1} = \beta_k - (w, v_i)$ . Далее алгоритм продолжает работу с оргграфом  $H_{k+1}$ , переходим к следующей вершине в пункте 3;

Случай В: многоугольный оргграф  $M$  вкладывается в оргграф  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ . Строим оргграф  $H_{k+1} = (W, \beta_{k+1})$ , такой что  $H_{k+1} = H_k - (v_i, w)$ ,  $\beta_{k+1} = \beta_k - (v_i, w)$ . Далее алгоритм продолжает работу с оргграфом  $H_{k+1}$ , переходим к следующей вершине в пункте 3;

Случай С: многоугольный оргграф  $M$  не вкладывается ни в оргграф  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ , ни в оргграф  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ . Не производим никаких действий, переходим к следующей вершине в пункте 3;

После того, как все вершины рассмотрены, алгоритм завершает свою работу. Построенный из оргграфа  $H_0$  оргграф  $H_k$ , где  $k$  — это количество дуг, удаленных в пункте 3 алгоритма, является ТНР для многоугольного оргграфа  $M$ .

Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 2.10.

Следующие две теоремы дают верхнюю и нижнюю оценки количества добавленных дуг в ТНР для многоугольных оргграфов.

**Теорема 2.11.** *Из многоугольных оргграфов контуры и только они, имеют ТНР, содержащие  $2n$  добавленных дуг.*

**Теорема 2.12.** *Многоугольные оргграфы порядка  $n$ , где  $n$  — четное, с двоичным кодом вида  $0101..01$ , имеют ТНР, содержащие  $n$  добавленных дуг.*

# ГЛАВА I. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЭЙЛЕРОВЫ РЕКОНСТРУКЦИИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

## 1. Оптимальная эйлерова реконструкция орграфов методом переориентации дуг

Постановка задачи выглядит следующим образом. Дан произвольный связанный орграф  $G = (V, \alpha)$ , необходимо методом переориентации минимального количества дуг преобразовать его в эйлеров.

Известна следующая теорема, которая является критерием эйлеровости орграфа (см. [7]).

**Теорема 1.1.** *Связный орграф  $G = (V, \alpha)$  тогда и только тогда является эйлеровым, когда для каждой вершины орграфа  $v \in V$  степень ее исхода равняется степени ее захода. ■*

Сформулируем критерий существования решения задачи об оптимальной эйлеровой реконструкции орграфов методом переориентации дуг.

**Лемма 1.1.** *Связный орграф  $G = (V, \alpha)$  допускает эйлерову реконструкцию методом переориентации дуг тогда и только тогда, когда для любой его вершины  $v \in V$  сумма  $d^+(v) + d^-(v)$  четна.*

**Доказательство. Необходимость.** Пусть связанный орграф  $G = (V, \alpha)$  допускает некоторую эйлерову реконструкцию методом переориентации дуг. Переориентируем дуги орграфа  $G = (V, \alpha)$  согласно этой реконструкции. Получим эйлеров орграф  $G' = (V, \alpha')$ , в котором для любой вершины  $v \in V$  выполняется  $d^+(v) = d^-(v)$  в силу теоремы 1.1. Очевидно, что при любой эйлеровой реконструкции методом переориентации дуг орграфа  $G$  для каждой вершины  $v \in V$  сумма  $d^+(v) + d^-(v)$  не меняется. Так как сумма двух равных чисел всегда четное число, то изначально для всех вершин орграфа  $G$  сумма степени исхода и захода каждой вершины  $v$  была четной.

**Достаточность.** *Мультиграфом* называется граф, в котором между парой его вершин может быть более одного ребра. Заменим каждую дугу  $(u, v) \in$

$\alpha$  связного орграфа  $G = (V, \alpha)$  на ребро. Если в исходном орграфе не было встречных дуг  $(u, v) \in \alpha$  и  $(v, u) \in \alpha$  между некоторой парой вершин  $u$  и  $v$ , то получим неориентированный граф  $H$ , иначе получим мультиграф  $H$ , в котором между вершинами  $u$  и  $v$  существуют два ребра  $(u, v)$ . В графе или мультиграфе  $H$  все вершины являются четными, так как степень каждой его вершины  $v$  равна сумме степени исхода и степени захода  $d^+(v) + d^-(v)$  соответствующей вершины  $v$  в орграфе  $G$ . В таком графе или мультиграфе существует эйлеров путь в силу теоремы 1.1. Следовательно, если переориентировать дуги исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$  в порядке прохождения этого пути, получим эйлеров орграф. Утверждение теоремы выполнено. ■

Далее полагаем, что в исходном связном орграфе  $G = (V, \alpha)$  выполняется условие леммы 1.1.

Введем определение баланса вершины  $v$ . Балансом вершины  $v$  в орграфе  $G = (V, \alpha)$  назовем число  $bal(v) = d^+(v) - d^-(v)$ . При этом вершина  $v \in V$  считается положительной, отрицательной или нулевой в зависимости от соответствующего свойства числа  $bal(v)$ . В эйлеровом орграфе баланс каждой вершины равен 0, так как для каждой вершины эйлерова орграфа степень исхода равняется степени захода по теореме 1.1.

Очевидно, для каждой вершины  $v \in V$  исходного связного орграфа  $G = (V, \alpha)$  необходимо переориентировать как минимум  $|bal(v)|$  инцидентных ей дуг, чтобы ее баланс стал нулевым.

**Лемма 1.2.** *Из любой положительной вершины  $v \in V$  связного орграфа  $G = (V, \alpha)$  существует путь в некоторую отрицательную вершину.*

**Доказательство.** Заметим, что в каждом связном орграфе  $G = (V, \alpha)$  сумма балансов всех вершин равняется 0. Действительно, каждая дуга  $(u, v) \in \alpha$  орграфа  $G$  одновременно увеличивает баланс вершины  $u$  на 1 и уменьшает баланс вершины  $v$  на 1. Следовательно, общая сумма  $\sum_{v \in V} bal(v)$  не изменяется и остается равной 0.

Пусть  $v \in V$  — это произвольная положительная вершина связного орграфа  $G = (V, \alpha)$ ,  $d^+(v) > d^-(v)$ . Обозначим через  $D(v)$  множество вершин,

достижимых из вершины  $v$ . В частности, вершина достижима из самой себя. Предположим, от противного, что в  $D(v)$  нет отрицательных вершин, а присутствуют только нулевые или положительные вершины.

Рассмотрим вершины  $v'_0, v'_1, \dots, v'_{r-1}$ , находящиеся на расстоянии 1 от вершины  $v$  (рис. 1.1).

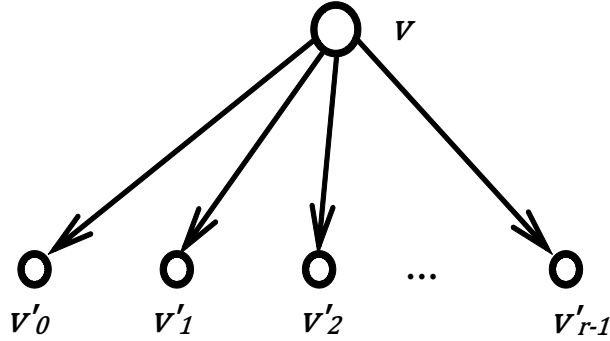


Рисунок 1.1. Вершины, находящиеся на расстоянии 1 от вершины  $v$

Так как в множество  $D(v)$  нет отрицательных вершин, то для каждой вершины  $v'_i$ , где  $d^+(v'_i) \geq d^-(v'_i)$ , степень исхода больше или равна степени захода. Следовательно, у каждой вершины  $v'_i$ , где  $0 \leq i \leq r - 1$ , количество исходящих дуг должно быть больше или равно количеству входящих дуг. При этом, исходящие дуги из вершины  $v'_i$ , где  $0 \leq i \leq r - 1$ , можно разделить на три класса:

1. дуги  $(v'_i, v)$  в положительную вершину  $v$ ;
2. дуги  $(v'_i, v'_j)$  в другую вершину  $v'_j$ , где  $i \neq j$ ,  $0 \leq j \leq r - 1$ , находящуюся на расстоянии 1 от вершины  $v$ ;
3. дуги  $(v'_i, v''_j)$  в некоторую вершину  $v''_j$ , находящуюся на расстоянии 2 от вершины  $v$ .

В вершину  $v$  не может входить больше, чем  $d^-(v)$  дуг. При этом  $d^-(v) < d^+(v)$ , так как вершина  $v$  является положительной. Может случиться, что среди вершин  $v'_0, v'_1, \dots, v'_{r-1}$  существуют вершины, исходящие дуги из которых ведут в вершину  $v$ , то есть исходящие дуги из класса 1 в классификации выше (рис. 1.2). Таким образом, как минимум  $d^+(v) - d^-(v)$  исходящих дуг содержится в классе 2 и в классе 3.

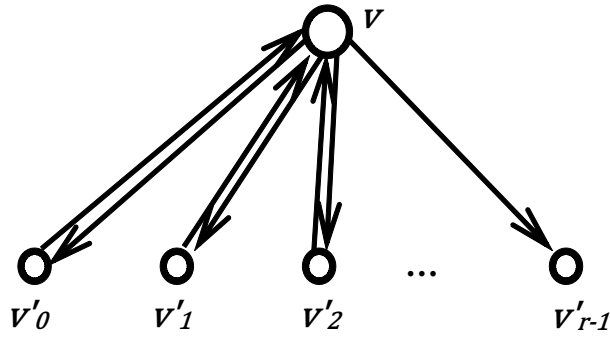


Рисунок 1.2. Дуги класса 1

Так как  $bal(v) > 0$  (вершина  $v$  — положительная) и  $bal(v'_i) \geq 0$ , где  $0 \leq i \leq r - 1$  (вершины  $v'_i$  — неотрицательные), то  $bal(v) + \sum_{i=0}^{r-1} bal(v'_i) > 0$ . Но, так как в любом связном орграфе сумма балансов всех вершин равняется 0, то, помимо вершин  $v$  и  $v'_i$ , где  $0 \leq i \leq r - 1$ , в рассматриваемом орграфе должны быть другие вершины. Заметим, что наличие дуги  $(v'_i, v'_j)$ , где  $0 \leq i \leq r - 1$ ,  $0 \leq j \leq r - 1$ ,  $i \neq j$ , из класса 2 увеличивает степень захода вершины  $v'_j$  на 1 и влечет необходимость наличия еще одной исходящей дуги из этой вершины. Таким образом среди исходящих дуг из вершин  $v'_i$ , где  $0 \leq i \leq r - 1$ , будут обязательно дуги из класса 3. Следовательно, должны существовать вершины  $v''_0, v''_1, \dots, v''_{s-1}$  находящиеся на расстоянии 2 от вершины  $v$ . Вершины  $v''_i$ , где  $0 \leq i \leq s - 1$ , также являются неотрицательными, потому что по допущению выше в множество  $D(v)$  нет отрицательных вершин. Баланс каждой вершины  $v''_i$ , где  $0 \leq i \leq s - 1$ , больше или равен 0. Получается аналогичная ситуация, как для вершин  $v'_i$ , где  $0 \leq i \leq r - 1$ . А именно,  $bal(v) + \sum_{i=0}^{r-1} bal(v'_i) + \sum_{i=0}^{s-1} bal(v''_i) > 0$ , но, так как в любом связном орграфе сумма балансов всех вершин равняется 0, то, помимо вершин  $v$ ,  $v'_i$ , где  $0 \leq i \leq r - 1$  и  $v''_i$ , где  $0 \leq i \leq s - 1$ , в рассматриваемом орграфе должны быть другие вершины, достижимые из вершины  $v$  на расстоянии 3. Если среди вершин, находящихся на расстоянии 3, по допущению выше, также нет отрицательных, то это влечет существование вершин, достижимых из вершины  $v$  на расстоянии 4 и так до бесконечности. При этом, множество  $D(v)$  достижимых вершин из вершины



$v$  является конечным. Приходим к противоречию.

В силу вышеописанных фактов, для каждой положительной вершины  $v \in V$  связного орграфа  $G = (V, \alpha)$  существует хотя бы одна достижимая из нее отрицательная вершина. ■

Для решения задачи необходимо добиться, чтобы у каждой вершины  $v \in V$  ее баланс стал нулевым.

Рассмотрим произвольный путь  $(v = v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-3}, v_{k-2}), (v_{k-2}, v_{k-1} = w)$  длины  $k - 1$  в орграфе  $G = (V, \alpha)$  из некоторой положительной вершиной  $v \in V$  в некоторую отрицательную вершину  $w \in V$  и переориентируем все дуги этого пути. После данного преобразования  $bal(v)$  уменьшится на 1,  $bal(w)$  увеличится на 1, а баланс всех промежуточных вершин пути  $v_i$ , где  $1 \leq i \leq k - 2$ , останется неизменным. Опираясь на вышеизложенные рассуждения, рассмотрим следующий способ переориентации дуг связного орграфа  $G = (V, \alpha)$ : пока в орграфе  $G = (V, \alpha)$  существуют ненулевые вершины, будем переориентировать пути в орграфе  $G = (V, \alpha)$ , исходящие из вершин с положительным балансом в вершины с отрицательным балансом. Назовем такую эйлерову реконструкцию — *переориентация по принципу путей* (в дальнейшем, для краткости, ППП).

**Лемма 1.3.** *Применение реконструкции ППП приводит к получению эйлерова орграфа из связного орграфа  $G = (V, \alpha)$ .*

**Доказательство.** Для каждой ненулевой вершины  $v \in V$  орграфа  $G$  будет переориентировано не менее  $\frac{|bal(v)|}{2}$  смежных с ней дуг. При этом, так как начальными вершинами путей в ППП являются ненулевые вершины и балансы промежуточных вершин останутся неизменными, то балансы всех нулевых вершин также останутся неизменными. В результате применения ППП из связного орграфа  $G = (V, \alpha)$  получим эйлеров орграф, где для любой  $v \in V$  выполняется  $d^+(v) = d^-(v)$ . ■

Лемма 1.4 дает нижнюю границу количества путей в реконструкции ППП.

**Лемма 1.4.** *Минимальное количество путей, которое необходимо переориентировать в реконструкции ППП, равно  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{4}$ .*

**Доказательство.** В силу того, что в ППП участвуют все ненулевые вершины и при переориентации одного пути изменяются балансы ровно двух вершин, то число путей в реконструкции ППП не может быть меньше чем  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{4}$ . В противном случае, если будет переориентировано меньше чем  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{4}$  путей, то в связном орграфе  $G = (V, \alpha)$  останутся ненулевые вершины. ■

В дальнейшем, для краткости, введем обозначение  $k = \frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{4}$ .

Покажем, что пути в ППП возможно выбрать непересекающимися по дугам.

**Лемма 1.5.** *В любой ППП возможно выбрать пути между ненулевыми вершинами так, чтобы они не пересекались по дугам.*

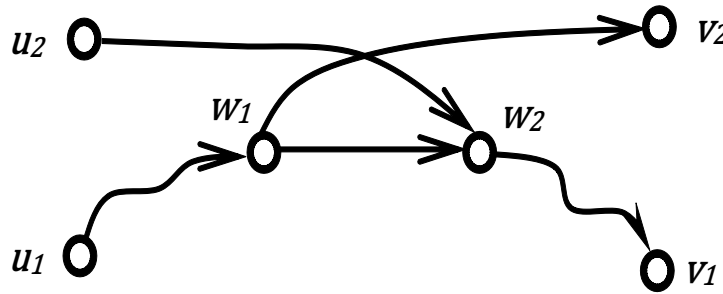


Рисунок 1.3. Пути между вершинами  $u_1, v_1$  и  $u_2, v_2$  в орграфе

**Доказательство.** Рассмотрим часть орграфа, изображенную на рис. 1.3. Под стрелками между вершинами подразумеваются пути между ними. Вершины  $u_1$  и  $u_2$  являются положительными,  $bal(u_1) > 0$  и  $bal(u_2) > 0$ , вершины  $v_1$  и  $v_2$  — отрицательными,  $bal(v_1) < 0$  и  $bal(v_2) < 0$ . Допустим, необходимо переориентировать пути между произвольно выбранными вершинами  $u_1, v_1$  и  $u_2, v_2$ .

Предположим, был выбран путь  $u_1, \dots, w_1, \dots, w_2, \dots, v_1$  и дуги, содержащиеся в этом пути, были переориентированы (рис. 1.4).

Далее необходимо переориентировать дуги в пути  $u_2, \dots, w_2, \dots, w_1, \dots, v_2$  из вершины  $u_2$  в вершину  $v_2$ . После данных действий получен орграф на рис. 1.5.

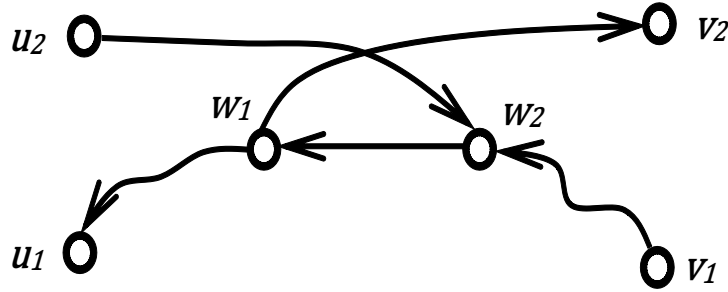


Рисунок 1.4. Дуги после переориентации пути  $u_1, \dots, w_1, \dots, w_2, \dots, v_1$

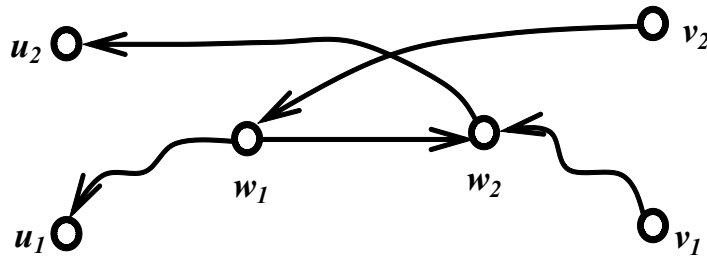


Рисунок 1.5. Дуги после переориентации пути  $u_2, \dots, w_2, \dots, w_1, \dots, v_2$

Посмотрев на рис. 1.5, заметим, что дуги в пути из вершины  $w_1$  в вершину  $w_2$  остались не переориентированными, так как их переориентация осуществлялась два раза. Следовательно, переориентация путей между вершинами  $u_1, v_1$  и  $u_2, v_2$  никак не меняет ориентацию дуг между вершинами  $w_1$  и  $w_2$ . Вышеописанные действия можно интерпретировать как переориентацию путей  $u_1, \dots, w_1, \dots, v_2$  и  $u_2, \dots, w_2, \dots, v_1$ .

На данном примере показано, что любая пара путей в ППП между ненулевыми вершинами не пересекается по дугам. Таким образом доказано, что в любой ППП возможно выбрать пути так, чтобы они не пересекались по дугам между ненулевыми вершинами. ■

Дуги в реконструкции ППП — это некоторое подмножество дуг связного орграфа  $G = (V, \alpha)$ , т. е.  $\text{ППП} \subseteq \alpha$ . В орграфе  $G$  есть множество положительных вершин  $out_i, 0 \leq i \leq l - 1$ , таких что  $bal(out_i) > 0$ , и множество отрицательных вершин  $in_i, 0 \leq i \leq h - 1$ , таких что  $bal(in_i) < 0$ . Впоследствии надо будет переориентировать не менее  $k$  путей, выходящих из поло-

жительных вершин и входящих в отрицательные вершины, с целью решения поставленной задачи (рис. 1.6). Дуги, составляющие эти пути, и есть дуги в некоторой реконструкции ППП.

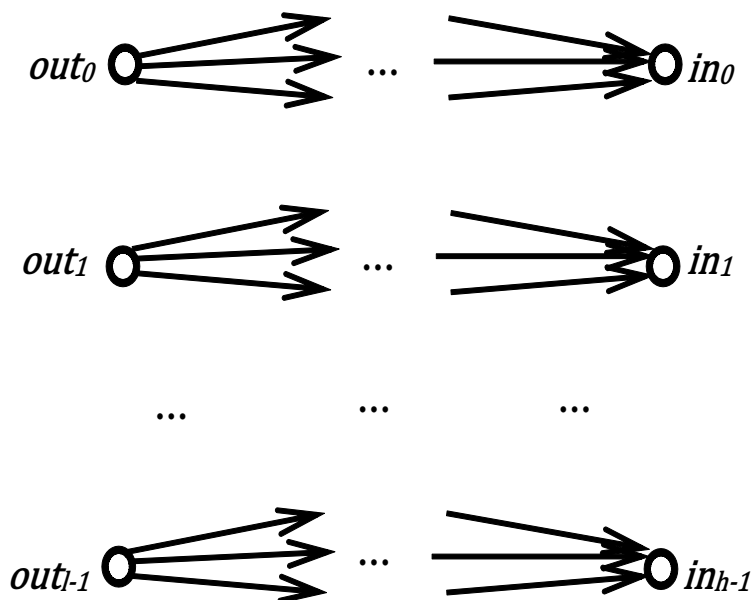


Рисунок 1.6. Пути из положительных вершин в отрицательные в реконструкции ППП

При построении алгоритмов нахождения оптимальных эйлеровых реконструкций будут использоваться методы нахождения потоков в транспортных сетях.

*Транспортная сеть* представляет собой орграф  $N = (V, \beta)$  с одним источником  $s$  и одним стоком  $t$ , где каждая дуга  $(u, v) \in \beta$  имеет неотрицательную пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ .

*Потоком* в транспортной сети  $N = (V, \beta)$  называют функцию  $flow: \beta \rightarrow R$ , удовлетворяющую следующим свойствам:

1.  $flow(u, v) \leq cap(u, v)$  — ограничение, связанное с пропускной способностью;
2.  $flow(u, v) = -flow(v, u)$  — антисимметричность;
3.  $(\forall v \in (V - \{s, t\}))(\sum_{u \in V} flow(u, v) = 0)$  — сохранение потока.

*Величина* потока  $|flow|$  определяется как  $\sum_{v \in V} flow(s, v)$ . *Максимальным потоком* в транспортной сети  $N = (V, \beta)$  является поток максимальной величины (см. [12]).

*Стоимость потока* определяется как величина  $\sum_{u,v \in V} flow(u, v)cost(u, v)$ . *Максимальным поток минимальной стоимости* в транспортной сети  $N = (V, \beta)$  является поток, стоимость которого не больше стоимости любого другого максимального потока (см. [18]).

Дуга  $(u, v) \in \beta$  в транспортной сети  $N = (V, \beta)$  является насыщенной потоком, если  $flow(u, v) > 0$ .

*Остаточная пропускная способность дуги*  $(u, v) \in \beta$  определяется как величина  $cap_f(u, v) = cap(u, v) - f(u, v)$ . Для заданной транспортной сети  $N = (V, \beta)$  и потока  $flow$ , *остаточной транспортной сетью, порожденной потоком*  $flow$ , является сеть  $N_f = (V, \beta_f)$ , где  $\beta_f = \{(u, v) \in \alpha | c_f(u, v) > 0\}$ . *Увеличивающийся путь* для заданной транспортной сети  $N = (V, \beta)$  и потока  $flow$  — это некоторый путь из вершины  $s$  в вершину  $t$  в остаточной сети  $N_f = (V, \beta_f)$  (см. [12]).

«Расширим» реконструкцию ППП следующим образом.

1. Добавим две вершины  $begin$  и  $end$  в исходный связный орграф  $G = (V, \alpha)$ .

2. Для каждой положительной вершины  $out_i$  орграфа  $G = (V, \alpha)$ , где  $0 \leq i \leq l - 1$ , добавим  $\frac{|bal(out_i)|}{2}$  входящих в нее дуг  $(begin, out_i)$ .

3. Для каждой отрицательной вершины  $in_i$  орграфа  $G = (V, \alpha)$ , где  $0 \leq i \leq h - 1$ , добавим  $\frac{|bal(in_i)|}{2}$  выходящих из нее дуг  $(in_i, end)$ .

Полученные построения показаны на рис. 1.7.

Заметим, что при «расширении» не произведено никаких кардинальных изменений, которые бы отразились на реконструкции ППП. За исключением того, что в «расширенной» реконструкции ППП необходимо искать не менее  $k$  путей из вершины  $begin$  в вершину  $end$  с целью решения поставленной задачи. Нахождение  $k$  путей из вершины  $begin$  в вершину  $end$  будет эквивалентно нахождению  $k$  путей из положительных вершин в отрицательные вершины в связном орграфе  $G = (V, \alpha)$ , если не учитывать «мнимые» дуги, смежные с вершинами  $begin$  и  $end$ , добавленные при «расширении», которых нет в связном орграфе  $G = (V, \alpha)$ .

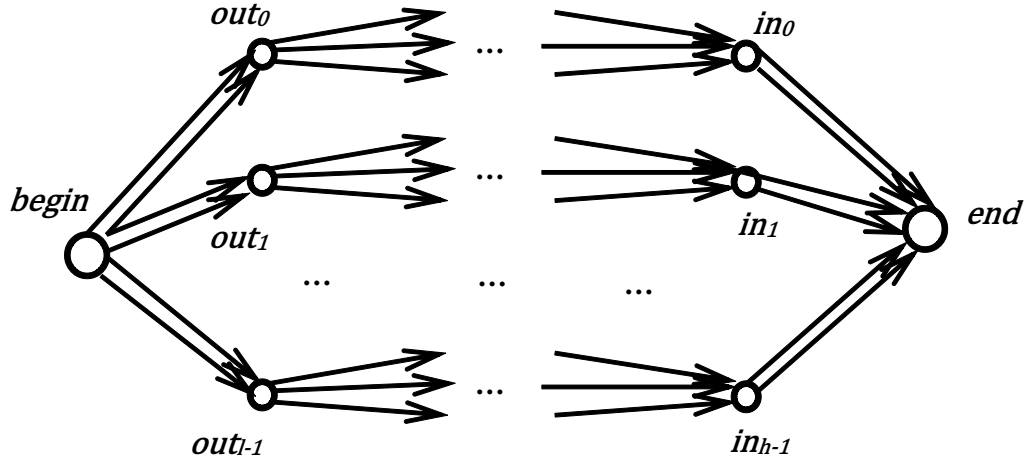


Рисунок 1.7. Пути из положительных вершин в отрицательные в реконструкции ППП

**Теорема 1.2.** Дуги в «расширенной» реконструкции ППП возможно интерпретировать как множество дуг  $\delta$ , насыщенных максимальным потоком  $flow$ , в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ , где величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1, т. е.  $\delta = \{(u, v) \in \beta \mid flow(u, v) = 1\}$ ,  $s = begin$ ,  $t = end$  и  $(u, v) \in \text{ППП} \Leftrightarrow (u, v) \in \delta$ .

**Доказательство.** Связкой путей  $B(u, v)$  из вершины  $u$  в вершину  $v$  в орграфе  $G = (V, \alpha)$  назовем множество путей, непересекающихся по дугам, из вершины  $u$  в вершину  $v$  (см. [7]). В любой «расширенной» реконструкции ППП пути не пересекаются по дугам согласно лемме 1.5. Ясно, что дуги в «расширенной» реконструкции ППП — это связка  $k$  или более путей  $B(begin, end)$  из вершины  $begin$  в вершину  $end$ .

Рассмотрим дуги в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ , в которой величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1, насыщенные потоком:  $\delta = \{(u, v) \in \beta \mid flow(u, v) = 1\}$ . Согласно метода Форда-Фалкенсона поиска максимального потока (см. [12])  $\delta$  является множеством путей из источника  $s$  в сток  $t$ , попарно непересекающихся по дугам, в силу свойства ограничения пропускной способности,  $(\forall (u, v) \in \beta)(cap(u, v) = 1)$ , и в силу свойства сохранения потока,  $(\forall v \in (V - \{s, t\}))(\sum_{u \in V} flow(u, v) = 0)$ . Действительно, в силу свойства сохранения потока для всех вершин, кроме источника  $s$  и стока  $t$ , количество входящих дуг равно количеству исходящих дуг. Каждая дуга

принадлежит только одному пути из источника  $s$  в сток  $t$  и пути по дугам попарно не пересекаются из-за того, что пропускная способность каждой дуги не превосходит 1. То есть  $\delta = \{(u, v) \in \beta \mid flow(u, v) = 1\}$  в транспортной сети  $N = (V, \beta)$  с источником  $s$  и стоком  $t$ , где величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1, — это связка путей  $B(s, t)$ .

Если смотреть на конструкцию на рис. 1.7 как на транспортную сеть  $N = (V, \beta)$  с источником  $begin$  и стоком  $end$ , в которой величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1, то величина максимального потока в такой сети не может превосходить  $\frac{\sum_{i=0}^{l-1} |bal(out_i)|}{2}$  по построению. При этом  $\frac{\sum_{i=0}^{l-1} |bal(out_i)|}{2} = \frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{4} = k$ . Таким образом, поиск ППП в связном орграфе  $G = (V, \alpha)$  соответствует поиску максимального потока в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ , в которой величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1. ■

Теорема 1.2 имеет большое прикладное значение, так как позволяет интерпретировать «расширенные» реконструкции ППП как дуги, насыщенные потоком в транспортных сетях особого вида, у которых цена и пропускная способность каждой дуги равны 1. Это позволяет использовать потоковые алгоритмы для решения поставленной задачи.

В силу существования различных потоков между источником  $s$  и стоком  $t$  в транспортной сети  $N = (V, \beta)$  выбор произвольной ППП не гарантирует выбора оптимального количества дуг для решения поставленной задачи. Назовем оптимальной ППП (для краткости, ОППП) реконструкцию, содержащую среди всех реконструкций связного орграфа  $G = (V, \alpha)$  минимальное количество переориентированных дуг. Фактически, нахождение ОППП составляет суть решения поставленной задачи.

Величина максимального потока минимальной стоимости в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ , где каждая дуга  $(u, v) \in \beta$  имеет пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ , равные 1, составляет  $\sum_{u, v \in V} flow(u, v)$ . Эта величина равна количеству дуг, насыщенных потоком. Следовательно, для нахождения дуг в расширенной ОППП необходимо найти максимальный поток

минимальной стоимости в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ .

Ниже приведен алгоритм нахождения оптимальной эйлеровой реконструкции связного орграфа  $G = (V, \alpha)$  методом переориентации дуг, который базируется на вышесказанных теоретических рассуждениях (см. [A4]).

### Алгоритм 1.1.

1. Если исходный оргграф  $G = (V, \alpha)$  не является связным или в нем существует хотя бы одна вершина  $v$ , сумма степени исхода и степени захода которой нечетна, то данный оргграф не допускает реконструкцию методом переориентации дуг. Выводится сообщение об этом и алгоритм завершает свою работу. Иначе переходим к пункту 2.

2. Преобразуем исходный связный оргграф  $G = (V, \alpha)$  в транспортную сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  следующим образом:

- придаем каждой дуге  $(u, v) \in \alpha$  пропускную способность  $cap(u, v)$ , равную 1;
- придаем каждой дуге  $(u, v) \in \alpha$  стоимость  $cost(u, v)$ , равную 1;
- добавляем две новые вершины: источник  $s$  и сток  $t$ ;
- для каждой положительной вершины  $v \in V$  добавляем  $\frac{|bal(v)|}{2}$  дуг  $(s, v)$ , полагая их пропускную способность  $cap(s, v)$  и цену  $cost(s, v)$  равными 1;
- для каждой отрицательной вершины  $v \in V$  добавляем  $\frac{|bal(v)|}{2}$  дуг  $(v, t)$ , полагая их пропускную способность  $cap(v, t)$  и цену  $cost(v, t)$  равными 1.

Получаем транспортную сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , в которой каждая дуга  $(u, v) \in \beta$  имеет пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ , равные 1.

3. Находим максимальный поток минимальной стоимости в построенной транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  между источником  $s$  и стоком  $t$  алгоритмом Басакера-Гоуэна (см. [18]).

4. Дуги в транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , насыщенные потоком, ( $\forall (u, v) \in \beta | flow(u, v) = 1$ ), и соответствующие дугам исходного связного орграфа  $G = (V, \alpha)$ , переориентируем в орграфе  $G = (V, \alpha)$ . Полученный оргграф является эйлеровым.

Общее количество переориентированных дуг в орграфе  $G = (V, \alpha)$  будет



равно  $\sum_{u,v \in V} cost(u,v)flow(u,v) - 2k$ , так как из стоимости потока, составляющей  $\sum_{u,v \in V} cost(u,v)flow(u,v)$ , необходимо отнять количество дуг, инцидентных источнику  $s$  и стоку  $t$ , поскольку они не существуют в исходном связном орграфе  $G = (V, \alpha)$ .

**Асимптотическая сложность алгоритма 1.1.** Проверка орграфа  $G = (V, \alpha)$  на связность и на то, что у каждой его вершины  $v$  сумма степени исхода и степени захода является четным числом, в пункте 1 осуществляется за  $O(|V|)$ . Асимптотическая сложность пунктов 2, 4 алгоритма 1.1 не превосходит  $O(|V|^2)$ . В итоге, асимптотическая сложность алгоритма 1.1 равна асимптотической сложности алгоритма Басакера-Гоуэна поиска максимального потока минимальной стоимости, который применяется в пункте 3. На данный момент известна реализация этого алгоритма за  $O(|V|^5)$  (см. [18]).

**Пример.** Рассмотрим работу алгоритма 1.1 на примере орграфа  $G = (V, \alpha)$ , изображенного на рис. 1.8.

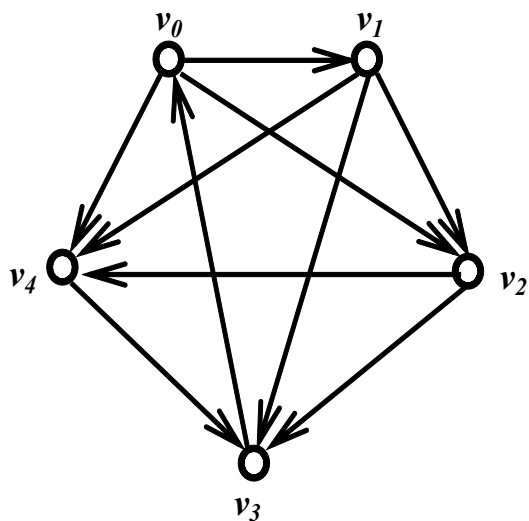


Рисунок 1.8. Орграф  $G = (V, \alpha)$

Заметим, что данный орграф является связным и сумма степени исхода и захода каждой его вершины  $v \in V$  четна. Таким образом, орграф  $G = (V, \alpha)$  допускает эйлерову реконструкцию методом переориентации дуг согласно лемме 1.1. Следовательно, алгоритм 1.1 не завершает свою работу на пункте 1 и переходит к пункту 2.

В орграфе  $G = (V, \alpha)$  существует две положительные вершины  $v_0$  и  $v_1$ , имеющие баланс 2, и две отрицательные вершины  $v_3$  и  $v_4$ , имеющие баланс  $-2$ . После преобразований в пункте 2 будет построена транспортная сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  с источником  $s$  и стоком  $t$ , изображенная на рис. 1.9 слева. В положительные вершины  $v_0$  и  $v_1$  будет добавлена одна входящая дуга из источника  $s$ , в вершины  $v_3$  и  $v_4$  будет добавлена одна выходящая дуга в сток  $t$ . Находим максимальный поток минимальной стоимости в построенной транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  в пункте 3 алгоритма 1.1. Дуги, попавшие в найденный поток, обозначены пунктиром на рис. 1.9 справа.

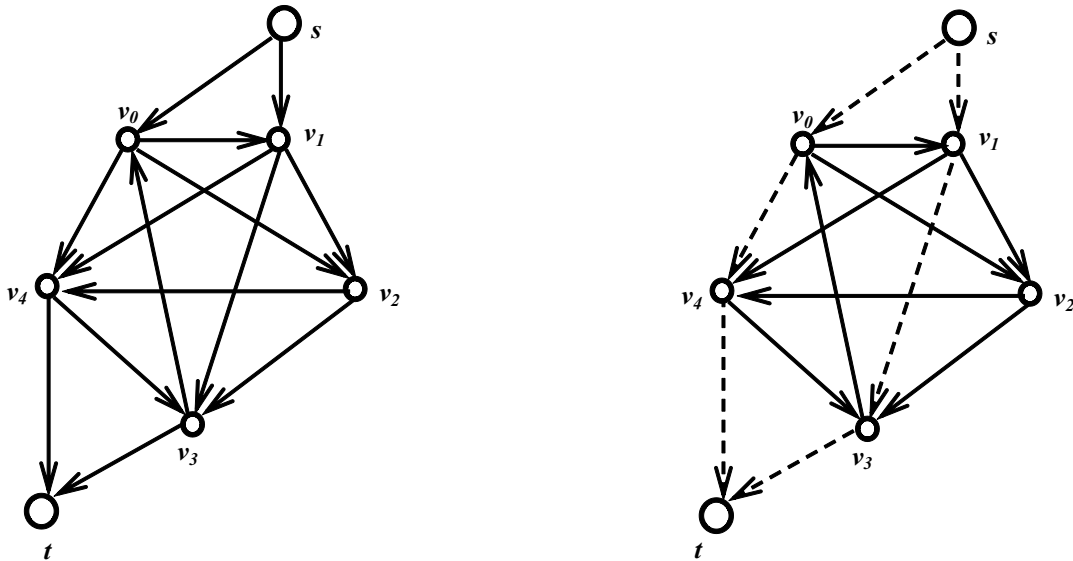


Рисунок 1.9. Транспортная сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  (слева) и дуги, попавшие в поток (справа)

В пункте 4 алгоритма 1.1 переориентируем дуги соответствующие дугам исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$ , насыщенные потоком в транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ . Получим орграф, изображенный на рис. 1.10.

**Теорема 1.3.** Алгоритм 1.1 корректен.

**Доказательство.** Докажем корректность алгоритма 1.1.

Если орграф  $G = (V, \alpha)$  на входе алгоритма 1.1 не соответствует условию леммы 1.1, то алгоритм 1.1 завершает свою работу с выводом соответствующей резолюции. Действительно, согласно лемме 1.1 исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  допускает эйлерову реконструкцию методом переориентации дуг

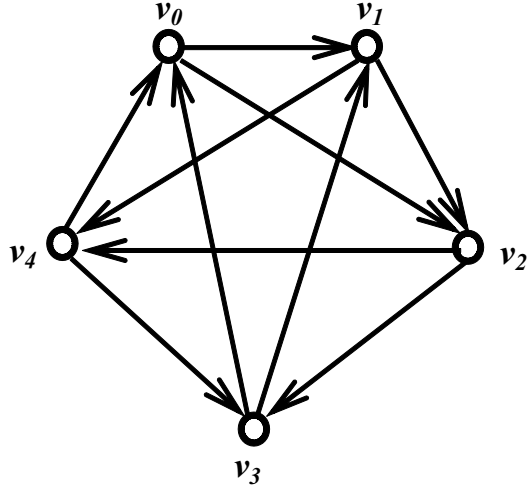


Рисунок 1.10. Оптимальная эйлерова реконструкция орграфа  $G = (V, \alpha)$

тогда и только тогда, когда он является связным и сумма степени исхода и захода каждой его вершины четна. Именно это и проверяется в пункте 1 алгоритма 1.1. Если же орграф допускает эйлерову реконструкцию методом переориентации дуг, то алгоритм 1.1 переходит к пункту 2.

В пункте 2 строится транспортная сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , в которой каждая дуга  $(u, v) \in \beta$  имеет пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ , равные 1. При этом для каждой положительной вершины  $v \in V$  добавляется  $\frac{|bal(v)|}{2}$  входящих в нее дуг  $(s, v)$  из источника  $s$ , а для каждой отрицательной вершины  $v \in V$  добавляется  $\frac{|bal(v)|}{2}$  выходящих из нее дуг  $(v, t)$  в сток  $t$ . Заметим, что по построению мощность максимального потока в сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  не может быть больше, чем  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{4}$ , так как  $\sum_{v \in V} flow(s, v) \leq \frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{4}$ . В пункте 3 алгоритма 1.1 в транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  находится максимальный поток минимальной стоимости. Согласно теореме 1.2 дуги, насыщенные максимальным потоком в построенной транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , интерпретируются как дуги, содержащиеся в «расширенной» реконструкции ППП. Как раз величина максимального потока в транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , составляющая  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{4}$ , равна минимальному количеству путей, которые необходимо

переориентировать в реконструкции ППП согласно лемме 1.4. При этом по лемме 1.3 применение реконструкции ППП приводит к получению эйлерова орграфа из исходного связного орграфа  $G = (V, \alpha)$ .

В силу того, что в пункте 3 алгоритма 1.1 ищется не просто максимальный поток, а максимальный поток минимальной стоимости, и по построению каждая дуга  $(u, v)$  имеет пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ , равные 1, то алгоритм находит не произвольную ППП, а оптимальную ППП. В этом случае требование минимизации стоимости максимального потока означает выбор эйлеровой реконструкции с минимально возможным количеством дуг среди всех других реконструкций. Общее количество переориентированных дуг в орграфе  $G = (V, \alpha)$  будет равно  $\sum_{u,v \in V} cost(u, v) flow(u, v) - 2\left(\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{4}\right) = \sum_{u,v \in V} cost(u, v) flow(u, v) - 2k$ , как указано в алгоритме 1.1. ■

## 2. Оптимальная эйлерова реконструкция орграфов методом добавления дуг

Постановка задачи выглядит следующим образом. Дан произвольный орграф  $G = (V, \alpha)$ , необходимо методом добавления минимального количества дуг преобразовать его в эйлеров.

Следующая лемма показывает, что для любого орграфа существует эйлерова реконструкция методом добавления дуг.

**Лемма 1.6.** *Любой орграф  $G = (V, \alpha)$  всегда допускает эйлерову реконструкцию методом добавления дуг.*

**Доказательство.** Полный орграф  $(V, (V \times V) - \Delta)$ , в котором между каждой парой вершин есть дуги в обоих направлениях, и который может быть получен из любого орграфа  $G = (V, \alpha)$  добавлением соответствующего числа дуг, является эйлеровым. ■

Напомним определение баланса вершины, которое будет использоваться при решении задачи нахождения оптимальной эйлеровой реконструкции методом добавления дуг. Баланс вершины  $v \in V$  в орграфе  $G = (V, \alpha)$  — это величина, равная разности степени исхода и степени захода вершины,

$bal(v) = d^+(v) - d^-(v)$ . Вершина  $v \in V$  будет по-прежнему называться положительной, отрицательной или нулевой в зависимости от соответствующего свойства числа  $bal(v)$ . В эйлеровом орграфе баланс каждой вершины равен 0, так как для каждой вершины эйлерова орграфа степень исхода равняется степени захода по теореме 1.1.

Для каждой вершины  $v \in V$  необходимо добавить как минимум  $|bal(v)|$  инцидентных ей дуг, чтобы ее баланс стал нулевым. Таким образом, общее количество добавленных дуг в орграф  $G = (V, \alpha)$  не может быть меньше, чем сумма балансов всех его вершин, деленная пополам,  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ , иначе в орграфе  $G = (V, \alpha)$  останутся ненулевые вершины. Очевидно, что дуги можно добавлять только из дополнения орграфа  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$ .

**Лемма 1.7.** *Каждая дуга  $(u, v)$ , добавленная в исходный орграф  $G = (V, \alpha)$ , будет содержаться либо в некотором контуре из добавленных дуг, либо в некотором пути из добавленных дуг из отрицательной вершины  $u$  в положительную вершину  $v$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим две произвольные вершины  $u$  и  $v$  исходного орграфа  $G$ , такие что не существует дуги из вершины  $u$  в вершину  $v$ ,  $(u, v) \notin \alpha$ . Добавим дугу  $(u, v)$  (рис. 1.11). Далее на рисунках добавленные дуги будут обозначаться пунктиром.

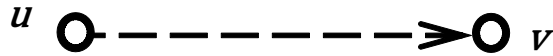


Рисунок 1.11. Добавленная дуга  $(u, v)$

Рассмотрим, как такое преобразование исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$  повлияет на степени его вершин. Возможны несколько случаев.

1. Вершина  $u$  является отрицательной, т. е.  $bal(u) < 0$ ;

После добавления дуги  $(u, v)$  баланс вершины  $u$  увеличится на 1 и приблизится к 0. Баланс вершины  $v$  в таком случае может быть либо положительным, либо неположительным.

1.1. Вершина  $v$  является положительной, т. е.  $bal(v) > 0$ ;

После добавления дуги  $(u, v)$  баланс вершины  $v$  уменьшится на единицу и приблизится к нулю. Следовательно, добавлен путь из отрицательной вершины  $u$  в положительную вершину  $v$ . Утверждение леммы выполнено.

1.2. Вершина  $v$  является неположительной, т. е.  $bal(v) \leq 0$ ;

Чтобы сделать баланс вершины  $v$  нулевым после добавления дуги  $(u, v)$ , необходимо добавить  $|bal(v)| + 1$  дуг, выходящих из вершины  $v$ , как было сказано выше. Пусть добавлена дуга  $(v, w)$  (рис. 1.12).

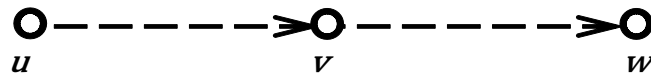


Рисунок 1.12. Добавленная дуга  $(v, w)$

Ситуация с вершиной  $w$  будет аналогичной ситуации с вершиной  $v$ . Если вершина  $w$  положительная, то утверждение леммы выполнено, так как добавлен путь из отрицательной вершины  $u$  в положительную вершину  $w$ . Если вершина  $w$  неположительная, то необходимо будет добавить  $|bal(w)| + 1$  дуг, выходящих из вершины  $w$ . Так как задача ставится для конечных орграфов, то возможны две перспективы. Либо в исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  добавится путь из отрицательной вершины  $u$  в некоторую положительную вершину, либо добавится контур, если конец добавленной дуги будет являться вершиной  $u$ . Утверждение леммы выполнено.

2. Вершина  $u$  является неотрицательной, т. е.  $bal(u) \geq 0$ .

Чтобы сделать баланс вершины  $v$  нулевым после добавления дуги  $(u, v)$ , необходимо добавить  $|bal(u)| + 1$  дуг, входящих в вершину  $u$ . Одну из таких добавленных дуг обозначим через  $(w, u)$  (рис. 1.13).

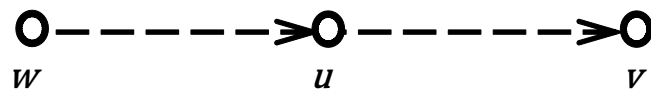


Рисунок 1.13. Добавленная дуга  $(w, u)$

Если вершина  $w$  отрицательная, то ее баланс увеличится на 1 и приблизится к 0. Иначе, если вершина  $w$  неотрицательная, то после добавления дуги

$(w, u)$ , необходимо будет добавить еще  $|bal(w)| + 1$  дуг, входящих в вершину  $w$ . Одну из таких добавленных дуг обозначим через  $(w_1, w)$ . С вершиной  $w_1$  складывается аналогичная ситуация. В конце концов, в исходный оргграф  $G$  либо добавится дуга  $(w_{i+1}, w_i)$  из отрицательной вершины  $w_{i+1}$ , либо добавится контур, если  $w_{i+1} = v$ . При добавлении контура в исходный оргграф  $G$  утверждение леммы выполнено. Если вершина  $w_{i+1}$  отрицательная, то баланс вершины  $v$  может быть либо положительным, либо неположительным.

2.1. Вершина  $v$  является положительной, т. е.  $bal(v) > 0$ .

После добавления дуг  $(w_{i+1}, w_i), (w_i, w_{i-1}), (w_{i-1}, w_{i-2}), \dots, (w_1, w)$  баланс вершины  $w_{i+1}$  увеличится на 1 и приблизится к 0. Балансы вершин  $w_i, w_{i-1}, w_{i-2}, \dots, w_1, w$  при этом не изменятся. Следовательно, добавлен путь из отрицательной вершины  $w_{i+1}$  в положительную вершину  $v$ . Утверждение леммы выполнено.

2.2. Вершина  $v$  является неположительной, т. е.  $bal(v) \leq 0$ .

Случай аналогичен пункту 1.2. Утверждение леммы выполнено.

В итоге, каждая добавленная в исходный оргграф  $G = (V, \alpha)$  дуга будет содержаться либо в некотором пути из отрицательной вершины в положительную, либо в некотором контуре из добавленных дуг. ■

Конструктивный смысл леммы 1.7 заключается в том, что в исходный оргграф  $G = (V, \alpha)$  необходимо добавлять либо пути из отрицательных вершин в положительные, либо контуры.

Оргграф  $G = (V, \alpha)$  — это множество компонент связности, из которых часть, быть может, является эйлеровыми компонентами связности, а остальные — неэйлеровыми. Пусть  $c$  — количество неэйлеровых компонент связности, а  $e$  — количество эйлеровых компонент связности в оргграфе  $G$ .

Рассмотрим частный случай, когда в исходном оргграфе  $G = (V, \alpha)$  нет неэйлеровых компонент связности. Все вершины такого оргграфа являются нулевыми. Если при этом  $e = 1$ , то исходный оргграф  $G = (V, \alpha)$  является эйлеровым, поставленная задача решена, никаких действий предпринимать не надо. Если  $e > 1$ , то каждая компонента связности оргграфа  $G = (V, \alpha)$  явля-

ется эйлеровой. Например, на рис. 1.14 в орграфе три эйлеровых компоненты связности:  $\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ ,  $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ ,  $\{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ .

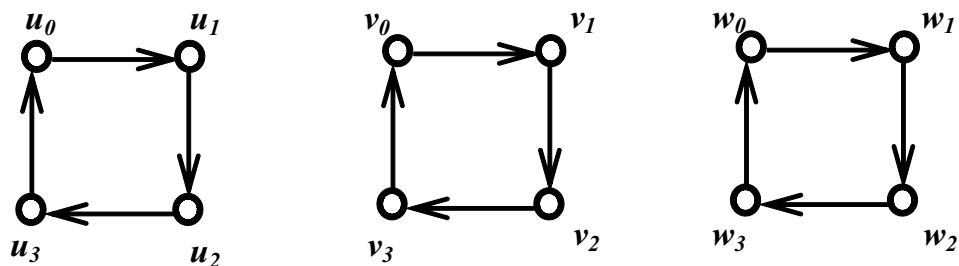


Рисунок 1.14. Орграф, состоящий из трех эйлеровых компонент связности

Для того, чтобы сделать исходный орграф  $G = (V, \alpha)$ , который состоит только из эйлеровых компонент, эйлеровым орграфом, необходимо выбрать из каждой эйлеровой компоненты связности по одной вершине и добавить цикл из  $e$  дуг, проходящий последовательно через все выбранные вершины. Например, в орграфе на рис. 1.14 выберем вершины  $u_0$ ,  $v_0$  и  $w_0$  и добавим цикл  $(u_0, v_0), (v_0, w_0), (w_0, u_0)$  длины 3. Получим орграф на рис. 1.15.

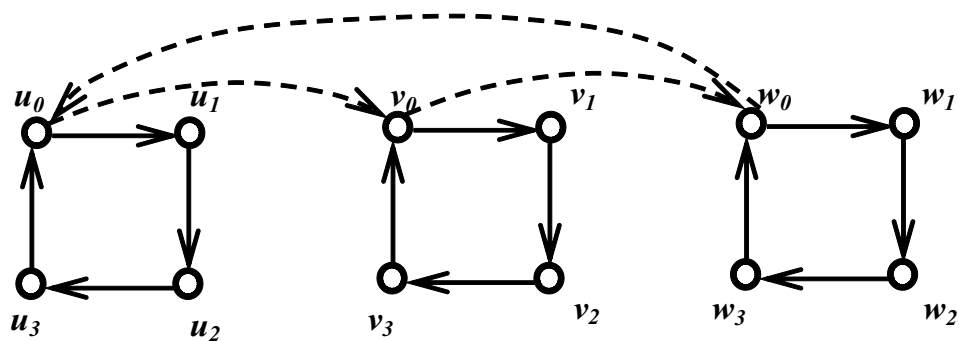


Рисунок 1.15. Орграф после добавления цикла  $(u_0, v_0), (v_0, w_0), (w_0, u_0)$

Очевидно, что нельзя из орграфа  $G = (V, \alpha)$ , состоящего из  $e$  компонент связности, получить эйлеров орграф, добавив в него менее, чем  $e$  дуг.

Далее будем полагать, что в исходном орграфе  $G = (V, \alpha)$  есть хотя бы одна неэйлерова компонента связности, т. е.  $c > 0$ . Рассмотрим произвольный путь  $(v = v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-3}, v_{k-2}), (v_{k-2}, v_{k-1} = w)$  длины  $k - 1$  в дополнении орграфа  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$ , из некоторой отрицательной вершины  $v \in V$ , в некоторую положительную вершину  $w \in V$ , и добавим все



дуги этого пути в исходный оргграф  $G = (V, \alpha)$ . После данного преобразования  $bal(v)$  уменьшится на 1,  $bal(w)$  увеличится на 1, а баланс всех промежуточных вершин пути  $v_i$ , где  $1 \leq i \leq k - 2$ , останется неизменным. Опираясь на вышеизложенные рассуждения, рассмотрим следующий способ добавления дуг в оргграф  $G = (V, \alpha)$ : пока в оргграфе  $G = (V, \alpha)$  существуют ненулевые вершины, будем добавлять пути из дополнения оргграфа  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$ , исходящие из вершин с отрицательным балансом в вершины с положительным балансом. Назовем такую эйлерову реконструкцию — *добавление по принципу путей* (в дальнейшем, для краткости, ДПП).

**Лемма 1.8.** *Применение реконструкции ДПП приводит к получению из оргграфа  $G = (V, \alpha)$  оргграфа, у которого каждая компонента связности является эйлеровой.*

**Доказательство.** Для каждой ненулевой вершины  $v \in V$  оргграфа  $G$ , будет добавлено не менее  $|bal(v)|$  смежных с ней дуг. При этом, так как начальными вершинами путей в ДПП являются ненулевые вершины и балансы промежуточных вершин останутся неизменными, то балансы всех нулевых вершин также останутся неизменными. В результате применения ДПП из оргграфа  $G = (V, \alpha)$  получим оргграф, где любой вершины  $v \in V$  выполняется  $d^+(v) = d^-(v)$ , у которого каждая компонента связности является эйлеровой. ■

Следующая лемма дает нижнюю границу количества путей в реконструкции ДПП.

**Лемма 1.9.** *Минимальное количество путей, которое необходимо добавить в реконструкции ДПП, равно  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ .*

**Доказательство.** В силу того, что в ДПП участвуют все ненулевые вершины и при добавлении одного пути изменяются балансы ровно двух вершин, то количество путей в реконструкции ДПП не может быть меньше чем  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ . В противном случае, если будет добавлено меньше чем  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$  путей, то в оргграфе  $G = (V, \alpha)$  останутся ненулевые вершины. ■

В дальнейшем, для краткости, введем обозначение  $k = \frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ .

Дуги в реконструкции ДПП — это некоторое подмножество дуг в дополнении  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$  орграфа  $G = (V, \alpha)$ , т. е. ДПП  $\subseteq \bar{\alpha} - \Delta$ . В орграфе  $G$  есть множество отрицательных вершин  $out_i$ ,  $0 \leq i \leq l - 1$ , таких что  $bal(out_i) < 0$ , и множество положительных вершин  $in_i$ ,  $0 \leq i \leq h - 1$ , таких что  $bal(in_i) > 0$ . Впоследствии надо будет добавить не менее  $k$  путей из  $\bar{\alpha} - \Delta$ , выходящих из отрицательных вершин и входящих в положительные вершины, чтобы каждая компонента связности орграфа  $G = (V, \alpha)$  стала эйлеровой (рис. 1.16). Дуги, составляющие эти пути, и есть дуги в некоторой реконструкции ДПП.

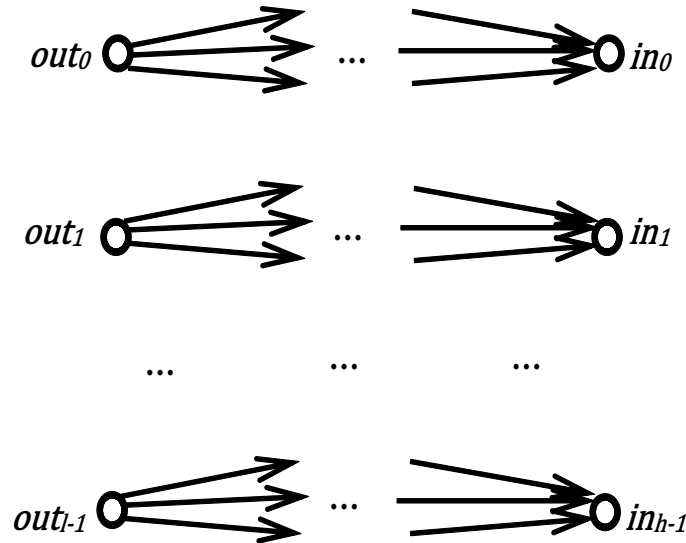


Рисунок 1.16. Пути из положительных вершин в отрицательные в реконструкции ДПП

«Расширим» реконструкцию ДПП следующим образом.

1. Добавим две вершины  $begin$  и  $end$  в дополнение  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$  исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$ .

2. Для каждой отрицательной вершины  $out_i$  орграфа  $G = (V, \alpha)$ , где  $0 \leq i \leq l - 1$ ,  $bal(out_i) < 0$ , добавим  $|bal(out_i)|$  входящих в нее дуг  $(begin, out_i)$ .

3. Для каждой положительной вершины  $in_i$  орграфа  $G = (V, \alpha)$ , где  $0 \leq i \leq h - 1$ ,  $bal(in_i) > 0$ , добавим  $|bal(in_i)|$  выходящих из нее дуг  $(in_i, end)$ .

Полученные построения показаны на рис. 1.17.

Заметим, что при «расширении» не произведено никаких кардинальных изменений, которые бы отразились на реконструкции ДПП. За исключением

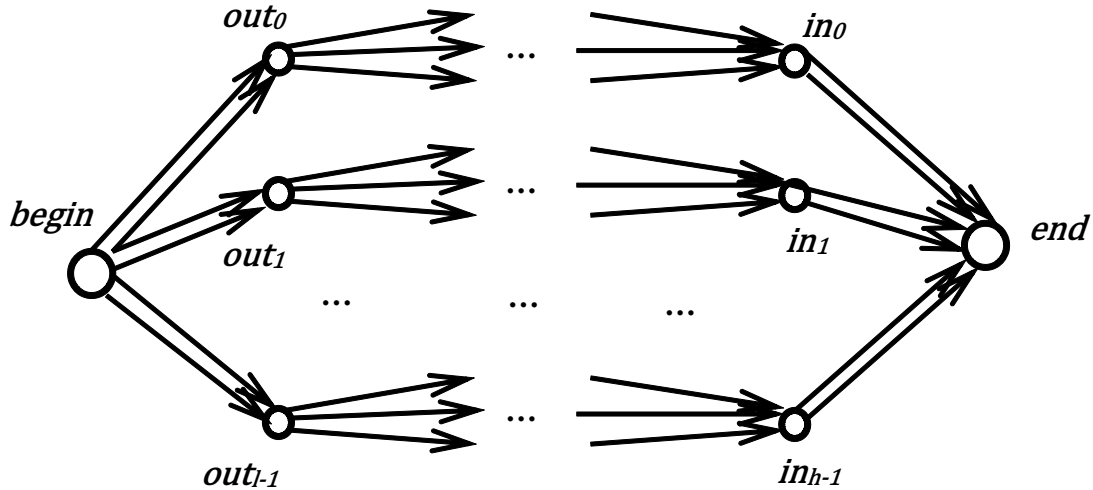


Рисунок 1.17. Пути из положительных вершин в отрицательные в реконструкции ДПП

того, что в «расширенной» реконструкции ДПП необходимо искать не менее  $k$  путей из вершины  $begin$  в вершину  $end$ , чтобы каждая компонента связности орграфа  $G = (V, \alpha)$  стала эйлеровой. Нахождение  $k$  путей из вершины  $begin$  в вершину  $end$  будет эквивалентно нахождению  $k$  путей из отрицательных вершин в положительные вершины в дополнении  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$  орграфа  $G = (V, \alpha)$ , если не учитывать «мнимые» дуги, смежные с вершинами  $begin$  и  $end$ , добавленные при «расширении», которых нет в дополнении  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$ .

**Теорема 1.4.** Дуги в «расширенной» реконструкции ДПП возможно интерпретировать, как множество дуг  $\delta$ , насыщенных максимальным потоком  $flow$ , в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ , где величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1, т. е.  $\delta = \{(u, v) \in \beta \mid flow(u, v) = 1\}$ ,  $s = begin$ ,  $t = end$  и  $(u, v) \in \text{ДПП} \Leftrightarrow (u, v) \in \delta$ .

**Доказательство.** Ясно, что дуги в «расширенной» реконструкции ДПП — это связка  $k$  или более путей  $B(begin, end)$  из вершины  $begin$  в вершину  $end$ .

Рассмотрим дуги в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ , в которой величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1, насыщенные потоком:  $\delta = \{(u, v) \in \beta \mid flow(u, v) = 1\}$ . Согласно метода Форда-Фалкенсона поиска максимального потока  $\delta$  является множеством путей из источника  $s$  в

сток  $t$ , попарно непересекающихся по дугам, в силу свойства ограничения пропускной способности,  $(\forall (u, v) \in \beta)(cap(u, v) = 1)$ , и в силу свойства сохранения потока,  $(\forall v \in (V - \{s, t\}))(\sum_{u \in V} flow(u, v) = 0)$ . Действительно, в силу свойства сохранения потока для всех вершин, кроме источника  $s$  и стока  $t$ , количество входящих дуг равно количеству исходящих дуг. Каждая дуга принадлежит только одному пути из источника  $s$  в сток  $t$ , и пути по дугам попарно не пересекаются из-за того, что пропускная способность каждой дуги не превосходит 1. То есть  $\delta = \{(u, v) \in \beta | flow(u, v) = 1\}$  в транспортной сети  $N = (V, \beta)$  с источником  $s$  и стоком  $t$ , где величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1, — это связка путей  $B(s, t)$ .

Если смотреть на конструкцию на рис. 1.17 как на транспортную сеть  $N = (V, \beta)$  с источником  $begin$  и стоком  $end$ , в которой величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1, то величина максимального потока в такой сети не может превосходить  $\sum_{i=0}^{l-1} |bal(out_i)|$  по построению. При этом  $\sum_{i=0}^{l-1} |bal(out_i)| = \frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2} = k$ . Таким образом, поиск ДПП в дополнении  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$  орграфа  $G = (V, \alpha)$  соответствует поиску максимального потока в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ , в которой величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1. ■

Теорема 1.4 имеет большое прикладное значение, так как позволяет интерпретировать «расширенные» реконструкции ДПП как дуги, насыщенные потоком в транспортных сетях особого вида, у которых цена и пропускная способность каждой дуги равны 1. Это позволяет использовать потоковые алгоритмы для решения поставленной задачи.

В силу существования различных потоков между источником  $s$  и стоком  $t$  в транспортной сети  $N = (V, \beta)$  выбор произвольного ДПП не гарантирует выбора оптимального количества дуг для решения поставленной задачи. Назовем оптимальным ДПП (для краткости, ОДПП) реконструкцию, содержащую среди всех реконструкций орграфа  $G = (V, \alpha)$  минимальное количество добавленных дуг. Количество дуг в реконструкции ОДПП обозначим через  $m$ . Фактически, нахождение ОДПП позволяет из орграфа  $G = (V, \alpha)$

получить оргграф, у которого каждая компонента связности будет эйлеровой. Действительно, после добавления дуг в найденной реконструкции ОДПП все вершины полученного оргграфа будут нулевыми, следовательно, каждая компонента полученного оргграфа будет эйлеровой, но оргграф не будет связным.

Величина максимального потока минимальной стоимости в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ , где каждая дуга  $(u, v) \in \beta$  имеет пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ , равные 1, составляет  $\sum_{u, v \in V} flow(u, v)$ . Эта величина равна количеству дуг, насыщенных потоком. Следовательно, для нахождения дуг в расширенной ОДПП необходимо найти максимальный поток минимальной стоимости в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ .

Заметим, что после добавления  $m$  дуг в оргграф  $G = (V, \alpha)$  может получиться разное количество компонент связности. Покажем это наглядно на примере. Рассмотрим исходный оргграф  $G = (V, \alpha)$  на рис. 1.18. Для оргграфа  $G = (V, \alpha)$  количество компонент связности равно трем:  $\{0, 1\}$ ,  $\{2, 3, 4\}$ ,  $\{5, 6\}$ . Вершины 0, 2, 5 являются положительными, вершины 1, 4, 6 — отрицательными. Согласно лемме 1.9 минимальное количество путей в реконструкции ОДПП для оргграфа  $G = (V, \alpha)$  равно трем,  $k = 3$ . Следовательно, минимальное количество добавленных дуг  $m$  не может быть меньше трех. После добавления трех дуг в оргграф  $G = (V, \alpha)$  на рис. 1.18 возможно получить качественно разный результат: оргграф на рис. 1.19 имеет три компоненты связности, оргграф на рис. 1.20 — две компоненты связности, оргграф на рис. 1.21 — одну компоненту связности.

Пусть в оргграф  $G = (V, \alpha)$  добавлены дуги из произвольной реконструкции ОДПП. Имеет место следующая лемма.

**Лемма 1.10.** *После нахождения произвольной реконструкции ОДПП возможно все с неэйлеровых компонент связности «соединить» в одну компоненту путем действий с добавленными дугами в дополнении  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$  оргграфа  $G = (V, \alpha)$ .*

**Доказательство.** Проводим доказательство конструктивно.

Рассмотрим любые две компоненты связности полученного оргграфа, кото-

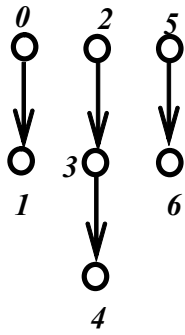


Рисунок 1.18

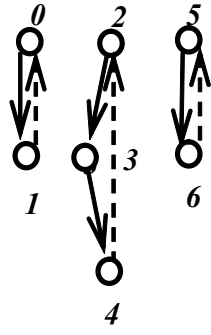


Рисунок 1.19

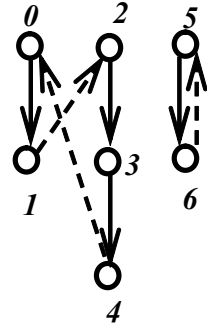


Рисунок 1.20

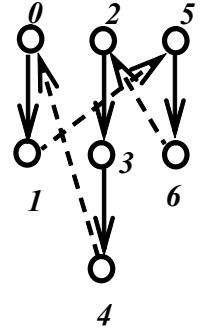


Рисунок 1.21

Орграф  $G = (V, \alpha)$  и варианты добавления трех дуг после нахождения ОДПП

рые в исходном орграфе  $G = (V, \alpha)$  не являлись эйлеровыми. После нахождения произвольной ОДПП в каждой из этих компонент связности есть хотя бы одна добавленная дуга. Для определенности, обозначим одну из добавленных дуг в первой компоненте связности через  $(u_1, u_2)$ , одну из добавленных дуг во второй компоненте связности через  $(v_1, v_2)$  (рис. 1.22).

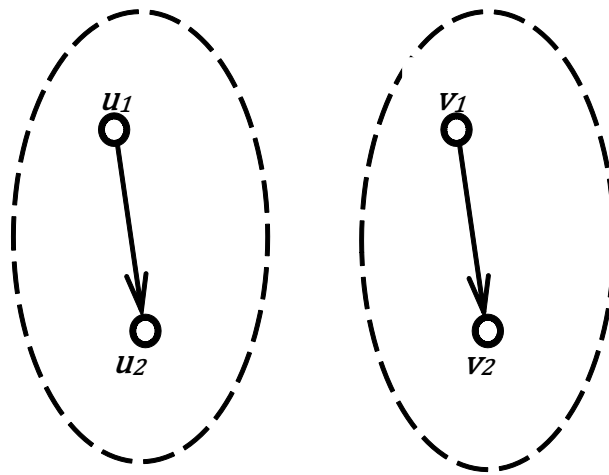


Рисунок 1.22. Дуга  $(u_1, u_2)$  в одной компоненте связности и дуга  $(v_1, v_2)$  во второй компоненте связности

Следовательно, в полученном орграфе нет дуг  $(u_1, v_2)$  и  $(v_1, u_2)$ , иначе рассматриваемые дуги не принадлежали бы разным компонентам связности. Заменяем дуги  $(u_1, u_2)$  и  $(v_1, v_2)$  на дуги  $(u_1, v_2)$  и  $(v_1, u_2)$ , то есть удалим дуги  $(u_1, u_2)$  и  $(v_1, v_2)$  из полученного орграфа после нахождения ОДПП и добавим дуги  $(u_1, v_2)$  и  $(v_1, u_2)$ . Важно, что в этом случае балансы вершин  $u_1, v_1, u_2, v_2$

не изменились, две компоненты связности полученного орграфа «соединились» и число добавленных дуг осталось прежним (рис. 1.23).

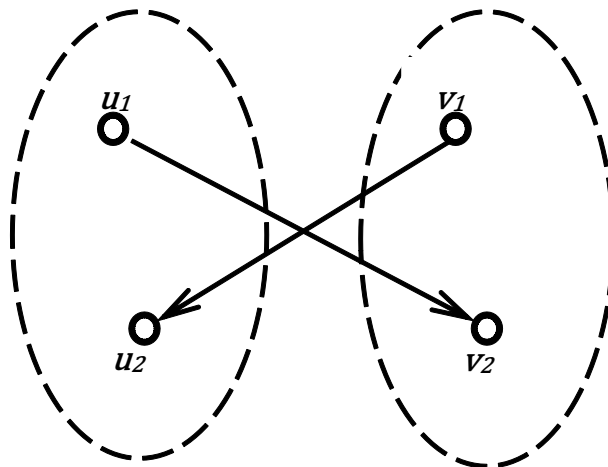


Рисунок 1.23. Замена дуг  $(u_1, u_2)$  и  $(v_1, v_2)$  на дуги  $(u_1, v_2)$  и  $(v_1, u_2)$

Далее, проделываем данные действия с другими добавленными дугами в еще «неприсоединенных» компонентах связности, пока такие компоненты связности существуют. В итоге, в полученном орграфе после вышеописанных преобразований будет ровно  $e + 1$  компонента связности в силу того, что  $s$  компонент исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$  будут «соединены» в одну. Утверждение леммы выполнено. ■

**Пример.** Рассмотрим исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  на рис. 1.20. В нем существует две компоненты связности: первая состоит из вершин 0, 1, 2, 3, 4, вторая — из вершин 5, 6. «Соединим» эти компоненты по схеме доказательства леммы 1.10. Возьмем добавленную дугу  $(1, 2)$  из первой компоненты связности и дугу  $(5, 6)$  из второй компоненты связности. Заменяем выбранные дуги на дуги  $(1, 5)$  и  $(6, 2)$ . В итоге, получим эйлеров орграф на рис. 1.21.

Согласно конструктивному доказательству леммы 1.10 по любой реконструкции ОДПП можно за полиномиальное время построить реконструкции ОДПП, в которой все  $s$  изначально неэйлеровых компонент связности исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$  «соединены» в одну компоненту.

После применения леммы 1.10 полученный орграф состоит из  $e + 1$  ком-

понент связности,  $e$  из которых были эйлеровыми компонентами в исходном орграфе  $G = (V, \alpha)$ . Эйлерову компоненту, которая получена после преобразований в лемме 1.10, назовем, для краткости, «базисной». Далее, необходимо преобразовать полученный орграф, который на данном этапе состоит из множества эйлеровых компонент, в эйлеров орграф, при этом добавив минимальное возможное количество дуг.

Заметим, что если в исходном орграфе  $G = (V, \alpha)$  не было эйлеровых компонент связности, то есть  $e = 0$ , то задача оптимальной эйлеровой реконструкции решена на этом этапе, иначе необходимы дополнительные действия.

Напомним, что дуги в реконструкции ОДПП — это  $k$  путей из отрицательных вершин в положительные вершины в дополнении  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$  исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$  (рис. 1.17). Обозначим через  $l_0, l_1, \dots, l_{k-1}$  длины путей в некоторой найденной реконструкции ОДПП, где  $l_i$  — это длина  $i$ -го пути,  $0 \leq i \leq k - 1$ .

Следующая лемма показывает, каким образом, без добавления дополнительных дуг в орграф  $G = (V, \alpha)$ , кроме дуг из построенной ОДПП после леммы 1.10, уменьшить количество компонент связности.

**Лемма 1.11.** *После нахождения произвольной реконструкции ОДПП и построения «базисной» компоненты возможно уменьшить количество компонент связности на  $\sum_{i=1}^k (l_i - 1) = m - k$ , где  $k$  — количество путей в найденной ОДПП,  $l_0, l_1, \dots, l_{k-1}$  — длины путей в найденной реконструкции ОДПП,  $m$  — количество дуг в найденной ОДПП,  $m = \sum_{i=1}^k (l_i - 1)$ .*

**Доказательство.** Доказательство проводим конструктивно.

Рассмотрим произвольный путь  $u, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v$  из  $n + 1$  добавленных дуг в одной из компонент связности полученного орграфа (рис. 1.24).

Покажем, как путем работы с добавленными дугами  $(u, v_0), (v_0, v_1), \dots, (v_{n-2}, v_{n-1}), (v_{n-1}, v)$  выбранного пути возможно «присоединить» как максимум  $n$  компонент связности к «базисной» компоненте полученного орграфа. Выберем одну из вершин пути, за исключение вершины  $u$  и вершины  $v$  (т. е.



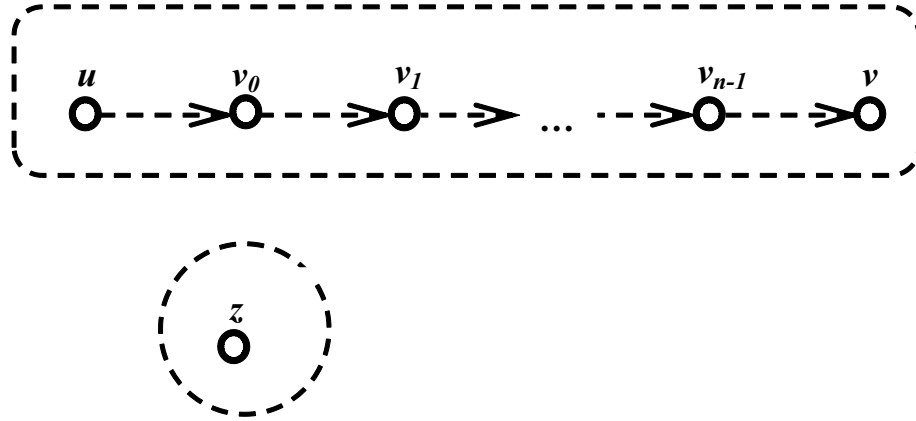


Рисунок 1.24. Путь  $u, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v$  из  $n + 1$  добавленных дуг

крайних вершин пути), для определенности вершину  $v_0$ . Удалим входящую в нее добавленную дугу  $(u, v_0)$  и выходящую из нее дугу  $(v_0, v_1)$  из построенного орграфа и добавим дуги  $(u, z), (z, v_1)$ , где  $z$  — вершина из еще «неприсоединенной» компоненты связности полученного орграфа, то есть одной из  $e$  эйлеровых компонент в исходном орграфе  $G = (V, \alpha)$ . Фактически, добавленные дуги  $(u, v_0)$  и  $(v_0, v_1)$  были заменены на дуги  $(u, z), (z, v_1)$ . В результате этих действий количество компонент связности уменьшилось на 1 (рис. 1.25).

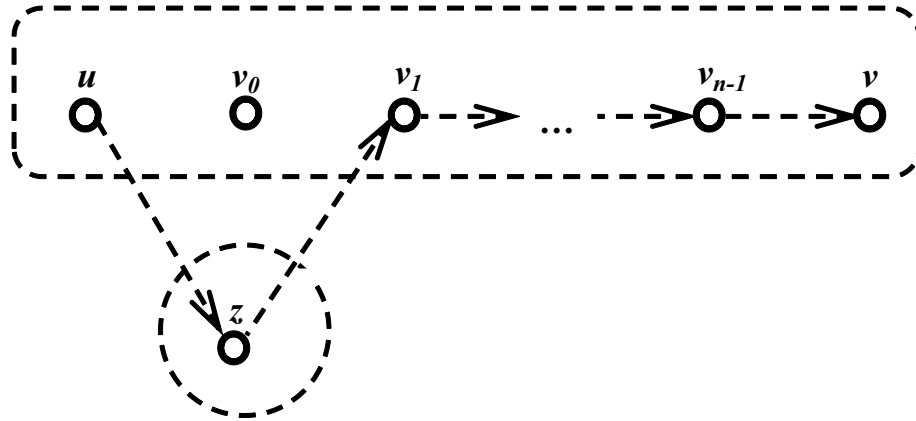


Рисунок 1.25. Замена добавленных дуг  $(u, v_0)$  и  $(v_0, v_1)$  на дуги  $(u, z), (z, v_1)$

Данные преобразования необходимо проделывать с другими промежуточными вершинами  $v_i$ , где  $1 \leq i \leq n - 1$ , выбранного пути, пока есть «несоединенные» компоненты связности, которые являлись эйлеровыми в исходном

орграфе  $G = (V, \alpha)$ . То есть, в «несоединенной» компоненте выбираем некоторую вершину  $w$ , затем заменяем дуги  $(v_{i-1}, v_i)$ ,  $(v_i, v_{i+1})$  на дуги  $(v_{i-1}, w)$ ,  $(w, v_{i+1})$ .

Выбрав некоторый другой путь из добавленных дуг длины  $len$  возможно «присоединить» еще  $len - 1$  компонент связности к «базисной» компоненте. В итоге, возможно «присоединить» как максимум  $\sum_{i=1}^k (l_i - 1) = m - k$  компонент связности, где  $l_i$  длина  $i$ -го пути в реконструкции ОДПП. Утверждение леммы выполнено. ■

Преобразования в доказательстве леммы 1.11 необходимо применять  $\min(e, m - k)$  раз, либо пока существуют «несоединенные» эйлеровы компоненты связности в построенном орграфе, в случае  $e \leq m - k$ , либо пока есть для этого возможность, в случае  $e > m - k$ .

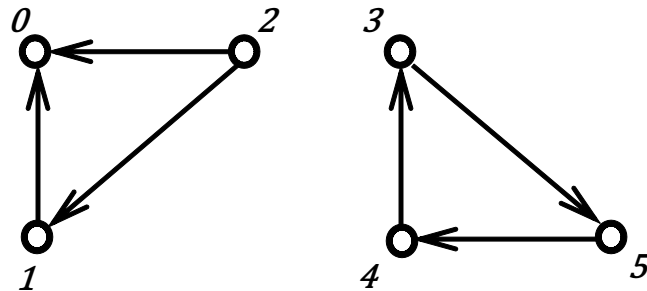


Рисунок 1.26. Орграф  $G = (V, \alpha)$  с двумя компонентами связности

**Пример.** Рассмотрим исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  на рис. 1.26. В орграфе  $G = (V, \alpha)$  существует три ненулевых вершины: 0, 1, 2; две компоненты связности, одна из которых не является эйлеровой, другая является эйлеровой,  $c = 1$ ,  $e = 1$ .

Путем добавления трех дуг, указанных пунктиром на рис. 1.27, получим орграф, в котором обе компоненты связности эйлеровы. Добавлены два пути из отрицательной вершины 0 в положительную вершину 2:  $(0, 1) (1, 2)$  и  $(0, 2)$ . «Базисной» компонентой является компонента связности, состоящая из вершин 0, 1, 2.

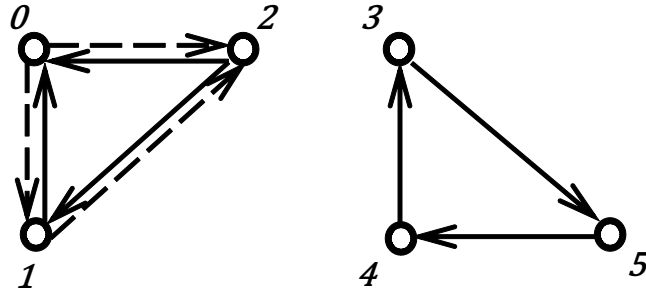


Рисунок 1.27. Орграф  $G = (V, \alpha)$  после добавления трех дуг из ОДПП

Выберем промежуточную вершину 1 и одну из вершин в еще «неприсоединенной» компоненте связности, для определенности вершину 4. Удалим дуги  $(0, 1)$ ,  $(1, 2)$  и добавим дуги  $(0, 4)$ ,  $(4, 2)$ , по схеме доказательства леммы 1.11. В итоге, получим эйлеров орграф на рис. 1.28.

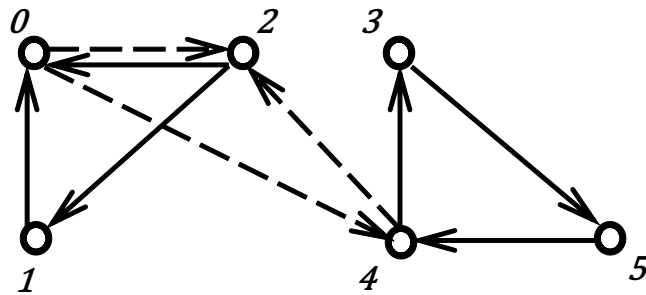


Рисунок 1.28. Орграф  $G = (V, \alpha)$  после добавления трех дуг из ОДПП и применения лемм 1.10 и 1.11

После нахождения некоторой реконструкции ОДПП, а также действий, описанных в доказательствах леммы 1.10 и леммы 1.11, получим орграф, который либо уже является эйлеровым, в случае  $e \leq m - k$ , либо каждая его компонента связности является эйлеровой, в случае, если  $e > m - k$ . При этом, если  $e > m - k$ , то в полученном орграфе будет  $e - m + k + 1$  компонент связности, одна из компонент будет «базисной», а остальные  $e - m + k$  компонент были эйлеровыми в исходном орграфе до добавления дуг.

Для того чтобы «присоединить» оставшиеся  $e - m + k$  компонент связности к «базисной» компоненте необходимо как минимум  $e - m + k$  дуг. Продемонстрируем данные преобразования на примере. Рассмотрим одну из добавленных дуг  $(u, v)$  (рис. 1.29).

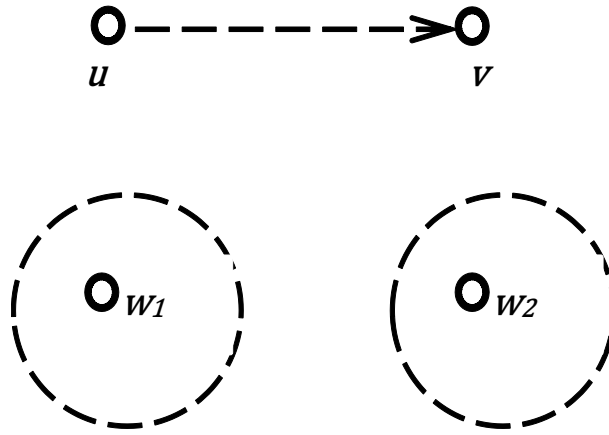


Рисунок 1.29. Добавленная дуга  $(u, v)$

Удалим дугу  $(u, v)$  из построенного орграфа. Вместо дуги  $(u, v)$  добавим путь  $(u, w_1), (w_1, w_2), \dots, (w_n, v)$ , где  $w_1$  — вершина в первой из «неприсоединенных» компонент связности,  $w_2$  — вершина во второй «неприсоединенной» компоненте связности,  $\dots$ ,  $w_n$  — вершина в  $n$ -ой «неприсоединенной» компоненте связности. (рис. 1.30).

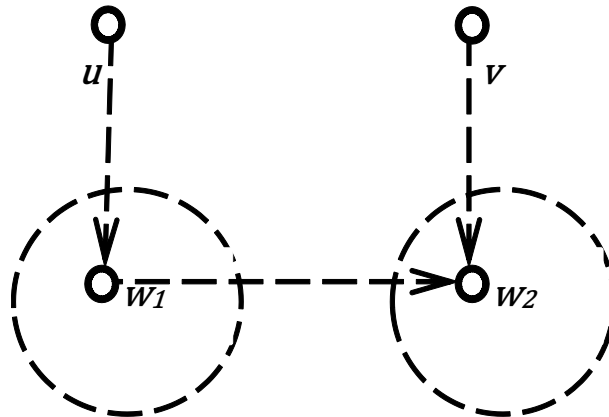


Рисунок 1.30. Добавленный путь  $(u, w_1), (w_1, w_2), \dots, (w_n, v)$

В итоге, всего в орграф  $G = (V, \alpha)$  необходимо будет добавить  $m + \max(e - m + k, 0)$  дуг, где  $m$  — количество добавленных дуг в реконструкции ОДПП,  $e$  — количество эйлеровых компонент связности исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$ ,  $k$  — количество путей в реконструкции ОДПП. Докажем оптимальность предложенного метода.

**Теорема 1.5.** *Величина  $m + \max(e - m + k, 0)$ , где  $m$  — количество дуг в способе ОДПП,  $e$  — количество эйлеровых компонент в орграфе  $G = (V, \alpha)$ ,*

$k = \frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$  — количество путей из отрицательных вершин в положительные в реконструкции ОДПП, — минимально возможное количество дуг, которые необходимо добавить в оргграф  $G = (V, \alpha)$ , чтобы получить эйлеров оргграф.

**Доказательство.** От противного.

Предположим, что существует решение, в котором используется меньшее количество дуг, чем  $m + \max(e - m + k, 0)$ . Каждая добавленная дуга в исходный оргграф  $G = (V, \alpha)$  содержится либо в некотором пути из отрицательной вершины в положительную, либо в цикле в силу леммы 1.7.

Докажем, что в любой схеме решения задачи в исходный оргграф  $G = (V, \alpha)$  будет добавлено ровно  $k$  путей из отрицательных вершин в положительные. В силу леммы 1.9 в схеме решения задачи количество путей из отрицательных вершин в положительные не может быть меньше чем  $k$ . Покажем, что в любой схеме решения задачи количество путей из отрицательных вершин в положительные не может быть больше чем  $k$ . Пусть в оргграф  $G = (V, \alpha)$  добавлено  $k = \frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$  путей из отрицательных вершин в положительные, следовательно, баланс каждой вершины оргграфа равен нулю,  $(\forall v \in V)(bal(v) = 0)$ . При добавлении  $(k + 1)$ -го пути из некоторой отрицательной вершину  $u$  в некоторую положительную вершину  $v$  необходимо добавить путь из вершины  $v$  в вершину  $u$  с целью обнуления баланса вершин  $v$  и  $u$ . Следовательно, в исходный оргграф  $G = (V, \alpha)$  будет добавлен цикл, а количество добавленных путей из отрицательных вершин в положительные останется равным  $k$ .

После добавления дуг в реконструкции ОДПП и построений, указанных в схеме доказательств леммы 1.10 и леммы 1.11, возможны две ситуации:

1. не осталось «неприсоединенных» эйлеровых компонент, в случае  $e \leq m - k$ ;
2. такие компоненты остались, в случае  $e > m - k$ .

Рассмотрим каждую ситуацию.

1.  $e \leq m - k$ . Следовательно, исходный оргграф  $G = (V, \alpha)$  после добавления дуг в реконструкции ОДПП и построений, указанных в схеме доказательств

1.10 и леммы 1.11, является эйлеровым оргграфом. Всего было добавлено ровно  $m$  дуг. Утверждение теоремы выполнено.

2.  $e > m - k$ . Предположим, существует альтернативный набор  $k$  путей из отрицательных вершин в положительные, состоящий из  $m'$  дуг. Следовательно,  $m' > m$ , иначе получаем схему решения задачи, приведенную выше. Имея  $m'$  дуг, возможно «соединить» все  $s$  неэйлеровых компонент связности исходного оргграфа  $G = (V, \alpha)$  в силу леммы 1.10 и, как максимум,  $m' - k$  эйлеровых компонент исходного оргграфа  $G = (V, \alpha)$  в силу леммы 1.11. В дальнейшем возможны две ситуации.

2.1. существуют «несоединенные» эйлеровы компоненты связности, в случае  $e > m' - k$ ;

2.2. не существует «несоединенных» эйлеровых компонент связности, в случае  $e \leq m' - k$ .

Рассмотрим каждую ситуацию.

2.1.  $e > m' - k$ . Тогда необходимо добавить еще  $e - (m' - k)$  дуг с целью «присоединения» оставшихся эйлеровых компонент связности. В итоге, для решения задачи потребует  $m' + (e - m' + k) = e + k$ , что не меньше, чем  $m + \max(e - m + k, 0)$ , в случае  $e > m - k$ .

2.2.  $e \leq m' - k \Rightarrow m' \geq e + k$ . Однако, предполагается, что найдено лучшее решение задачи с точки зрения количества добавленных дуг в найденной реконструкции:  $m' < m + (e - (m - k)) = e + k$ .

Следовательно,  $m' \geq e + k$  и  $m' < e + k$ . Приходим к противоречию. Утверждение теоремы выполнено.

В итоге, минимальное количество дуг, которое необходимо добавить для решения поставленной задачи в исходный оргграф  $G = (V, \alpha)$ , составляет  $m + \max(e - m + k, 0)$ . ■

Основываясь на вышеприведенных теоретических рассуждениях, предложим алгоритм нахождения оптимальной эйлеровой реконструкции оргграфа методом добавления дуг (см. [A4, A8]).

## Алгоритм 1.2.

1. Если исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  является эйлеровым, то поставленная задача решена, следовательно, не производим никаких действий и алгоритм завершает свою работу. Иначе переходим к пункту 2.

2. Если в исходном орграфе  $G = (V, \alpha)$  нет неэйлеровых компонент связности,  $c = 0$ , то выбираем из каждой эйлеровой компоненты связности по одной вершине и добавляем цикл из  $e$  дуг, проходящий последовательно через все выбранные вершины. Полученный орграф стал эйлеровым орграфом, алгоритм завершает свою работу. Иначе переходим к пункту 3.

3. Преобразуем исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  следующим образом.

— придаем каждой дуге  $(u, v) \in \alpha$  пропускную способность  $cap(u, v) = 0$  и цену  $cost(u, v) = 0$ ;

— к исходному орграфу  $G = (V, \alpha)$  добавляем две новые вершины: источник  $s$  и сток  $t$ ;

— для каждой отрицательной вершины  $v$  добавляем  $|bal(v)|$  дуг  $(s, v)$ , с пропускной способностью  $cap(u, v) = 1$  и с ценой  $cost(u, v) = 1$ ;

— для каждой положительной вершины  $v$  добавляем  $|bal(v)|$  дуг  $(v, t)$ , с пропускной способностью  $cap(u, v) = 1$  и с ценой  $cost(u, v) = 1$ ;

— в орграф  $G = (V, \alpha)$  добавляем всевозможные дуги  $(u, v) \in \beta$  из его дополнения  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$ , полагая их пропускную способность  $cap(u, v) = 1$  и цену  $cost(u, v) = 1$ .

Получаем транспортную сеть  $N = (V \cup \{s\} \cup \{t\}, \beta)$ ;

4. Находим максимальный поток минимальной стоимости в построенной транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  между источником  $s$  и стоком  $t$  алгоритмом Басакера-Гоуэна.

5. Дуги в транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , насыщенные потоком и соответствующие дугам дополнения  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$  исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$ , добавляем в орграф  $G = (V, \alpha)$ . После действия в этом пункте в полученном орграфе каждая компонента связности является эйлеровой.

6. «Присоединяем» все неэйлеровы компоненты связности и еще как мак-

симум  $m - k$  эйлеровых к «базисной» компоненте по схеме доказательства леммы 1.10 и леммы 1.11.

7. Добавляем еще  $\max(e - m + k, 0)$  дуг, чтобы «присоединить» оставшиеся компоненты связности.

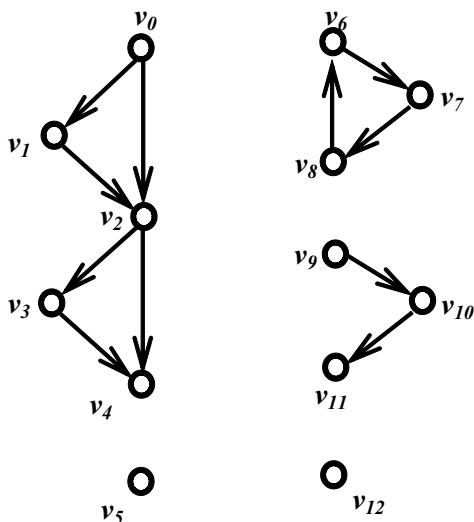


Рисунок 1.31. Орграф  $G = (V, \alpha)$

**Асимптотическая сложность алгоритма 1.2.** Асимптотическая сложность пунктов 1, 2, 3, 5, 6, 7 алгоритма 1.2 не превосходит  $O(|V|^2)$ . В итоге, асимптотическая сложность алгоритма 1.2 равна асимптотической сложности алгоритма поиска максимального потока минимальной стоимости.

**Пример.** Рассмотрим работу алгоритма 1.2 на примере орграфа  $G = (V, \alpha)$ , изображенного на рис. 1.31.

Орграф  $G = (V, \alpha)$ , изображенный на рис. 1.31, имеет пять компонент связности:  $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $\{v_5\}$ ,  $\{v_6, v_7, v_8\}$ ,  $\{v_9, v_{10}, v_{11}\}$ ,  $\{v_{12}\}$ . Вершины  $v_0$  и  $v_9$  являются положительными, вершины  $v_4$  и  $v_{11}$  — отрицательными. Вершина  $v_0$  имеет баланс, равный 2; вершина  $v_9$  имеет баланс, равный 1; вершина  $v_{11}$  имеет баланс, равный  $-1$ ; вершина  $v_4$  имеет баланс, равный  $-2$ .

Исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  не является эйлеровым, поэтому алгоритм 1.2 переходит к пункту 2. В орграфе  $G = (V, \alpha)$  также существуют неэйлеровы компоненты связности, такие как  $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$  и  $\{v_9, v_{10}, v_{11}\}$ , по этой причине алгоритм 1.2 переходит к пункту 3. Всего в орграфе  $G = (V, \alpha)$  на



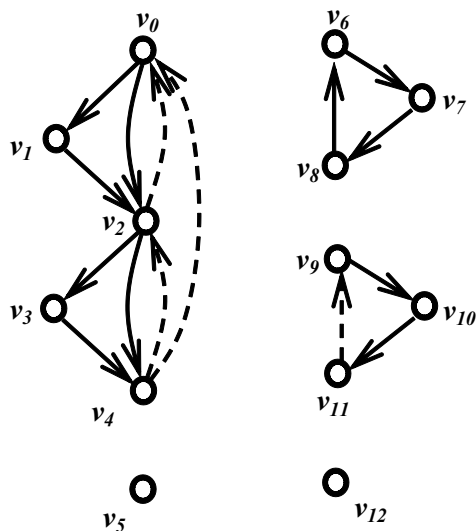


Рисунок 1.32. Орграф  $G = (V, \alpha)$  после добавления дуг из ОДПП (п. 5 алгоритма 1.2)

рис. 1.31 две неэйлеровы компоненты связности,  $c = 2$ , и три эйлеровы компоненты связности,  $e = 3$ . Изолированные вершины  $v_5$  и  $v_{12}$  тоже считаются эйлеровыми компонентами связности, не нарушая общности.

После преобразований в пункте 3 будет построена транспортная сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  с источником  $s$  и стоком  $t$ . Далее в пункте 4 алгоритма 1.2 находим максимальный поток минимальной стоимости в построенной транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ . Добавленные дуги в пункте 5, насыщенные потоком и соответствующие дугам дополнения  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$  исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$ , обозначены пунктиром на рис. 1.32. Было добавлено два пути из отрицательной вершины  $v_4$  в положительную вершину  $v_0$ : это путь из двух дуг  $(v_4, v_2)$ ,  $(v_2, v_0)$  и путь из одной дуги  $(v_4, v_0)$ , которые находятся в компоненте связности  $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . Также была добавлена дуга  $(v_{11}, v_9)$ , которая относится к компоненте связности  $\{v_9, v_{10}, v_{11}\}$ . Таким образом, в ОДПП было добавлено 4 дуги,  $m = 4$ , и три пути,  $k = 3$ .

Заметим, что после пункта 5 каждая компонента связности исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$  является эйлеровой. «Соединяем» компоненты связности  $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$  и  $\{v_9, v_{10}, v_{11}\}$ , в которых присутствуют добавленные дуги после пункта 5, по схеме доказательства леммы 1.10. Для этого заменяем пару добавленных дуг  $(v_4, v_2)$  и  $(v_{11}, v_9)$ , находящихся в разных компонентах

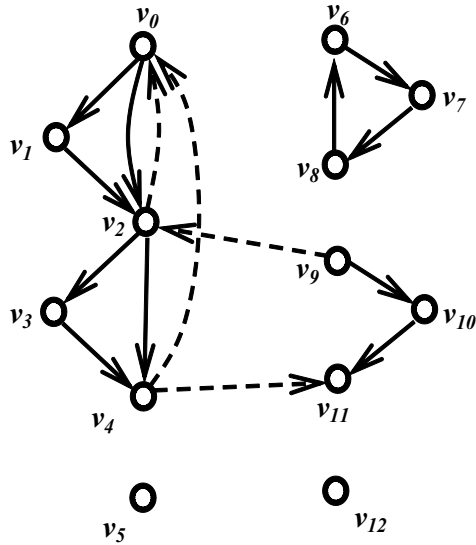


Рисунок 1.33. Орграф  $G = (V, \alpha)$  после действий леммы 1.10

связности, на дуги  $(v_4, v_{11})$  и  $(v_9, v_2)$ . Орграф, после данных изменений, показан на рис. 1.33. Теперь в орграфе стало на одну компоненту связности меньше: две компоненты связности  $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$  и  $\{v_9, v_{10}, v_{11}\}$  «соединились» в одну компоненту связности  $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_9, v_{10}, v_{11}\}$ , которая является «базисной».

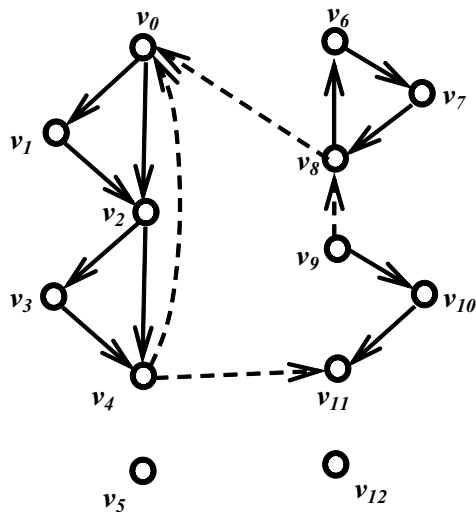


Рисунок 1.34. Орграф  $G = (V, \alpha)$  после действий леммы 1.11

В пункте 6 алгоритма 1.2 возможно еще «присоединить» как максимум  $m - k$  эйлеровых компонент к «базисной» компоненте по схеме доказатель-

ства леммы 1.11. В рассматриваемом примере  $m - k = 1$ . Присоединим компоненту  $\{v_6, v_7, v_8\}$  к «базисной» компоненте. Для этого путь  $(v_9, v_2), (v_2, v_0)$  из добавленных дуг заменим на путь  $(v_9, v_8), (v_8, v_0)$ . Орграф, после данных изменений, показан на рис. 1.34.

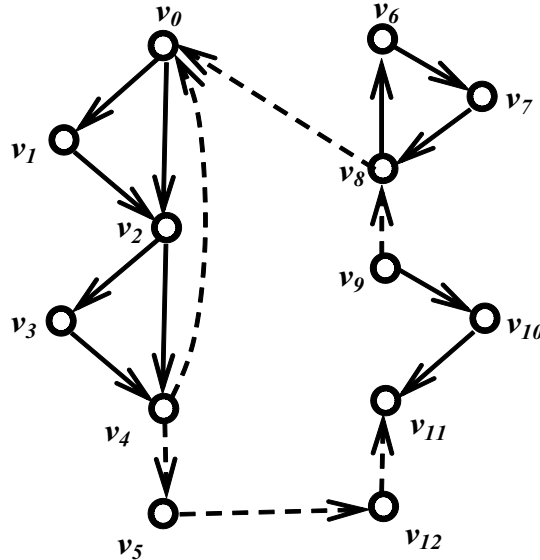


Рисунок 1.35. Орграф  $G = (V, \alpha)$  после п. 7 алгоритма 1.2

После выполнения шести пунктов алгоритма 1.2 в орграфе остались две изолированные вершины  $v_5$  и  $v_{11}$ . Следовательно, необходимо еще добавить как минимум две дуги, чтобы «присоединить» их к «базисной» компоненте. Для этого удалим добавленную дугу  $(v_4, v_{11})$  и вместо нее добавим путь из трех дуг  $(v_4, v_5), (v_5, v_{12}), (v_{12}, v_{11})$ , которые проходят через изолированные вершины  $v_5$  и  $v_{12}$ . После этих действий получим эйлеров орграф, показанный на рис. 1.35.

**Теорема 1.6.** Алгоритм 1.2 корректен.

**Доказательство.** Докажем корректность алгоритма 1.2.

В пункте 1 алгоритма 1.2 проверяется, является ли исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  эйлеровым или нет. В случае, если исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  уже является эйлеровым, то никаких действий производить не требуется и алгоритм завершает свою работу. Иначе переходим к пункту 2.

В пункте 2 алгоритма 1.2 проверяется, что каждая компонента связности

исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$  является эйлеровой. Пусть исходный орграф  $G = (V, \alpha)$  состоит только из  $e$  эйлеровых компонент связности. В таком случае, очевидно, что минимальное возможное количество дуг, которое необходимо добавить в орграф  $G = (V, \alpha)$ , чтобы преобразовать его в эйлеров орграф, не может быть меньше, чем  $e$ . Именно это и делается в пункте 2 алгоритма 1.2.

В первых двух пунктах алгоритма 1.2 были разобраны случаи входных данных, когда в исходном орграфе  $G = (V, \alpha)$  не было неэйлеровых компонент связности, то есть  $c = 0$ . В случае, если в исходном орграфе  $G = (V, \alpha)$  существует хотя бы одна компонента связности, которая не является эйлеровым орграфом, то алгоритм переходит к пункту 3.

В пункте 3 строится транспортная сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , в которой каждая дуга  $(u, v) \in \beta$  из дополнения орграфа  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$  имеет пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ , равные 1. При этом для каждой отрицательной вершины  $v \in V$  добавляется  $|bal(v)|$  входящих в нее дуг  $(s, v)$  из источника  $s$ , а для каждой положительной вершины  $v \in V$  добавляется  $|bal(v)|$  выходящих из нее  $(v, t)$  дуг в сток  $t$ . Заметим, что по построению мощность максимального потока в сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  не может быть больше, чем  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ , так как  $\sum_{v \in V} flow(s, v) \leq \frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ . В пункте 4 алгоритма 1.2 в транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  находится максимальный поток минимальной стоимости. Согласно теореме 1.4 дуги, насыщенные максимальным потоком в построенной транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , интерпретируются как дуги, содержащиеся в «расширенной» реконструкции ДПП. Как раз величина максимального потока в транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , составляющая  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ , равна минимальному количеству путей, которое необходимо добавить в реконструкцию ДПП согласно лемме 1.9. При этом по лемме 1.8 применение реконструкции ДПП приводит к получению из исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$  орграфа, у которого каждая компонента связности является эйлеровой.

Если после добавления дуг в найденной реконструкции ДПП орграф не

стал связным, то все с неэйлеровых компонент связности «соединятся» в одну «базисную» компоненту по схеме доказательства леммы 1.10 в пункте 6 алгоритма 1.2. Если после этих действий в орграфе останутся еще компоненты связности, не присоединенные к «базисной» компоненте, то в пункте 6 алгоритма 1.2 еще  $\max(m - k, 0)$  будут «соединены» с «базисной» компонентой по схеме доказательства леммы 1.11.

После действий в пункте 6 каждая компонента связности орграфа  $G = (V, \alpha)$  будет эйлеровой. Если действий в пункте 6 алгоритма 1.2 будет недостаточно, чтобы получить эйлеров орграф, то добавляем еще  $\max(e - m + k, 0)$  дуг, чтобы «присоединить» оставшиеся компоненты связности.

В силу того, что в пункте 4 алгоритма 1.2 ищется не просто максимальный поток, а максимальный поток минимальной стоимости, и по построению каждая дуга  $(u, v)$  из дополнения орграфа  $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$  имеет пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ , равные 1, то алгоритм находит не произвольное ДПП, а оптимальное ДПП. В этом случае требование минимизации стоимости максимального потока означает выбор эйлеровой реконструкции с минимально возможным количеством дуг среди всех других реконструкций. Общее количество добавленных дуг в орграф  $G = (V, \alpha)$  в пункте 5 будет равно  $\sum_{u,v \in V} cost(u, v) flow(u, v) - 2 \left( \frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2} \right) = \sum_{u,v \in V} cost(u, v) flow(u, v) - 2k$ , как указано в алгоритме 1.2. В итоге общее количество добавленных дуг в алгоритме 1.2 после выполнения всех пунктов составит  $m + \max(e - m + k, 0)$ . По теореме 1.5 данное количество добавленных дуг является минимально возможным. ■

### **3. Оптимальная эйлерова реконструкция орграфов методом удаления дуг**

Постановка задачи выглядит следующим образом. Дан произвольный орграф  $G = (V, \alpha)$ , необходимо методом удаления минимального количества дуг получить орграф, у которого каждая компонента связности является эйлеровой.

Сформулируем критерий существования решения задачи об оптимальной

эйлеровой реконструкции оргграфов методом удаления дуг.

**Лемма 1.12.** *Любой оргграф  $G = (V, \alpha)$  допускает реконструкцию к оргграфу, у которого каждая компонента связности является эйлеровой, методом удаления дуг.*

**Доказательство.** В пустом оргграфе  $(V, \emptyset)$ , который может быть получен из оргграфа  $G = (V, \alpha)$  удалением всех дуг, каждая компонента связности является эйлеровой. ■

Напомним определение баланса вершины  $v$  в оргграфе  $G = (V, \alpha)$ . Баланс вершины  $v \in V$  в оргграфе  $G = (V, \alpha)$  — это величина, равная разности степени исхода и степени захода вершины,  $bal(v) = d^+(v) - d^-(v)$ . Вершина  $v \in V$  будем по-прежнему называться положительной, отрицательной или нулевой в зависимости от соответствующего свойства числа  $bal(v)$ . В эйлеровом оргграфе баланс каждой вершины равен 0, так как для каждой вершины эйлерова оргграфа степень исхода равняется степени захода по теореме 1.1.

Для каждой вершины  $v \in V$  оргграфа  $G = (V, \alpha)$  необходимо удалить как минимум  $|bal(v)|$  инцидентных ей дуг, чтобы ее баланс стал нулевым. Таким образом, общее количество удаленных дуг в оргграфе  $G = (V, \alpha)$  не может быть меньше, чем сумма балансов всех его вершин, деленная пополам,  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ , иначе в оргграфе  $G = (V, \alpha)$  останутся ненулевые вершины.

Из каждой положительной вершины оргграфа  $G = (V, \alpha)$  существуют  $d^+(v) - d^-(v)$  путей в отрицательные вершины в силу следствия 1 из леммы 1.2. Рассмотрим произвольный путь  $(v = v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-3}, v_{k-2}), (v_{k-2}, v_{k-1} = w)$  длины  $k - 1$  в оргграфе  $G = (V, \alpha)$  из некоторой положительной вершины  $v \in V$  в некоторую отрицательную вершину  $w \in V$  и удалим все дуги этого пути. После данного преобразования  $bal(v)$  уменьшится на 1,  $bal(w)$  увеличится на 1, а баланс всех промежуточных вершин пути  $v_i$ , где  $1 \leq i \leq k - 2$ , останется неизменным. Опираясь на вышеизложенные рассуждения, рассмотрим следующий способ удаления дуг оргграфа  $G = (V, \alpha)$ : пока в оргграфе  $G = (V, \alpha)$  существуют ненулевые вершины, будем удалять пути в оргграфе  $G = (V, \alpha)$ , исходящие из вершин с положительным балансом в вер-

шины с отрицательным балансом. Назовем такую эйлерову реконструкцию — *удаление по принципу путей* (в дальнейшем, для краткости, УПП).

**Лемма 1.13.** *Применение реконструкции УПП приводит к получению из оргграфа  $G = (V, \alpha)$  оргграфа, у которого каждая компонента связности является эйлеровой.*

**Доказательство.** Для каждой ненулевой вершины  $v \in V$  оргграфа  $G$  будет удалено не менее  $|bal(v)|$  смежных с ней дуг. При этом, так как начальными вершинами путей в УПП являются ненулевые вершины и балансы промежуточных вершин останутся неизменными, то балансы всех нулевых вершин также останутся неизменными. После данных действий для каждой вершины  $v \in V$  степень исхода будет равняться степени захода. В результате применения УПП из оргграфа  $G = (V, \alpha)$  получим оргграф, у которого каждая компонента связности является эйлеровой. ■

Лемма 1.14 дает нижнюю оценку количества путей в реконструкции УПП.

**Лемма 1.14.** *Минимальное количество путей, которое необходимо удалить в реконструкции УПП, равно  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ .*

**Доказательство.** В силу того, что в УПП участвуют все ненулевые вершины и при удалении одного пути изменяются балансы ровно двух вершин, то число путей в реконструкции УПП не может быть меньше чем  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ . В противном случае, если будет удалено меньше чем  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$  путей, то в оргграфе  $G = (V, \alpha)$  останутся ненулевые вершины. ■

В дальнейшем, для краткости, введем обозначение  $k = \frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ .

Дуги в реконструкции УПП — это некоторое подмножество дуг оргграфа  $G = (V, \alpha)$ , т. е.  $УПП \subseteq \alpha$ . В оргграфе  $G = (V, \alpha)$  есть множество положительных вершин  $out_i$ ,  $0 \leq i \leq l - 1$ , таких что  $bal(out_i) > 0$ , и множество отрицательных вершин  $in_i$ ,  $0 \leq i \leq h - 1$ , таких что  $bal(in_i) < 0$ . Впоследствии надо будет удалить не менее  $k$  путей, выходящих из вершин и входящих в вершины с целью решения поставленной задачи (рис. 1.36). Дуги, составляющие эти пути, и есть дуги в некоторой реконструкции УПП.

«Расширим» реконструкцию УПП следующим образом.

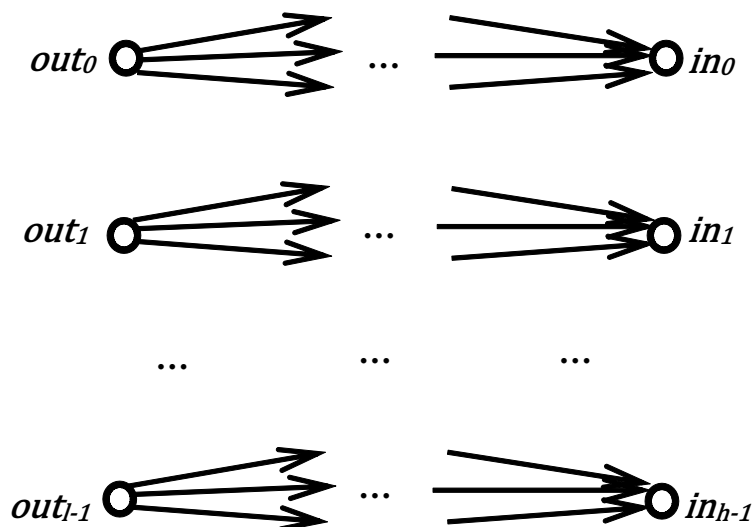


Рисунок 1.36. Пути из положительных вершин в отрицательные в реконструкции УПП

1. Добавим две вершины  $begin$  и  $end$  в исходный орграф  $G = (V, \alpha)$ .
2. Для каждой положительной вершины  $out_i$  орграфа  $G = (V, \alpha)$ , где  $0 \leq i \leq l - 1, bal(out_i) > 0$ , добавим  $|bal(out_i)|$  входящих в нее дуг  $(begin, out_i)$ .
3. Для каждой отрицательной вершины  $in_i$  орграфа  $G = (V, \alpha)$ , где  $0 \leq i \leq h - 1, bal(in_i) < 0$ , добавим  $|bal(in_i)|$  выходящих из нее дуг  $(in_i, end)$ .

Полученные построения показаны на рис. 1.37.

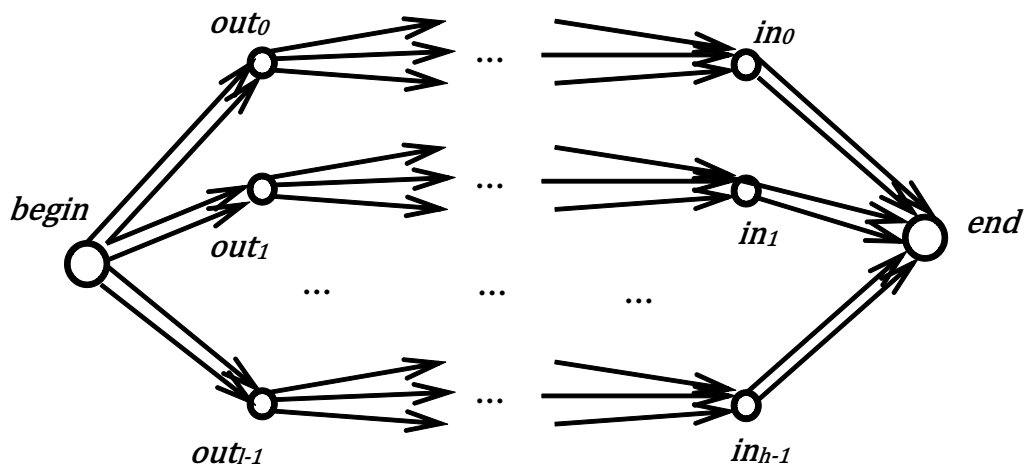


Рисунок 1.37. Пути из положительных вершин в отрицательные в реконструкции УПП



Заметим, что при «расширении» не произведено никаких кардинальных изменений, которые бы отразились на реконструкции УПП. За исключением того, что в «расширенной» реконструкции УПП необходимо искать не менее  $k$  путей из вершины  $begin$  в вершину  $end$  с целью решения поставленной задачи. Нахождение  $k$  путей из вершины  $begin$  в вершину  $end$  будет эквивалентно нахождению  $k$  путей из положительных вершин в отрицательные вершины в исходном орграфе  $G = (V, \alpha)$ , если не учитывать «мнимые» дуги, смежные с вершинами  $begin$  и  $end$ , добавленные при «расширении», которых нет в исходном орграфе  $G = (V, \alpha)$ .

**Теорема 1.7.** *Дуги в «расширенной» реконструкции УПП возможно интерпретировать, как множество дуг  $\delta$ , насыщенных максимальным потоком  $flow$ , в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ , где величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1, т. е.  $\delta = \{(u, v) \in \beta \mid flow(u, v) = 1\}$ ,  $s = begin$ ,  $t = end$  и  $(u, v) \in \text{УПП} \Leftrightarrow (u, v) \in \delta$ .*

**Доказательство.** Ясно, что дуги в «расширенной» реконструкции УПП — это связка  $k$  или более путей  $B(begin, end)$  из вершины  $begin$  в вершину  $end$ .

Рассмотрим дуги в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ , в которой величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1, насыщенные потоком:  $\delta = \{(u, v) \in \beta \mid flow(u, v) = 1\}$ . Согласно метода Форда-Фалкенсона поиска максимального потока  $\delta$  является множеством путей из источника  $s$  в сток  $t$ , попарно непересекающихся по дугам, в силу свойства ограничения пропускной способности,  $(\forall (u, v) \in \beta)(cap(u, v) = 1)$ , и в силу свойства сохранения потока,  $(\forall v \in (V - \{s, t\}))(\sum_{u \in V} flow(u, v) = 0)$ . Действительно, в силу свойства сохранения потока для всех вершин, кроме источника  $s$  и стока  $t$ , количество входящих дуг равно количеству исходящих дуг. Каждая дуга принадлежит только одному пути из источника  $s$  в сток  $t$  и пути по дугам попарно не пересекаются из-за того, что пропускная способность каждой дуги не превосходит 1. То есть  $\delta = \{(u, v) \in \beta \mid flow(u, v) = 1\}$  в транспортной сети  $N = (V, \beta)$  с источником  $s$  и стоком  $t$ , где величина пропускной способности

и цена каждой дуги равна 1, — это связка путей  $B(s, t)$ .

Если смотреть на конструкцию на рис. 1.37 как на транспортную сеть  $N = (V, \beta)$  с источником  $begin$  и стоком  $end$ , в которой величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1, то величина максимального потока в такой сети не может превосходить  $\sum_{i=0}^{l-1} |bal(out_i)|$  по построению. При этом  $\sum_{i=0}^{l-1} |bal(out_i)| = \frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2} = k$ . Таким образом, поиск УПП в исходном орграфе  $G = (V, \alpha)$  соответствует поиску максимального потока в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ , в которой величина пропускной способности и цена каждой дуги равна 1. ■

Теорема 1.7 имеет большое прикладное значение, так как позволяет интерпретировать «расширенные» реконструкции УПП как дуги, насыщенные потоком в транспортных сетях особого вида, у которых цена и пропускная способность каждой дуги равны 1. Это позволяет использовать потоковые алгоритмы для решения поставленной задачи.

В силу существования различных потоков между источником  $s$  и стоком  $t$  в транспортной сети  $N = (V, \beta)$  выбор произвольного УПП не гарантирует выбора оптимального количества дуг для решения поставленной задачи. Назовем оптимальным УПП (для краткости, ОУПП) реконструкцию, содержащую среди всех реконструкций исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$  минимальное количество удаленных дуг. Фактически, нахождение ОУПП составляет суть решения поставленной задачи.

Величина максимального потока минимальной стоимости в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ , где каждая дуга  $(u, v) \in \beta$  имеет пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ , равные 1, составляет  $\sum_{u, v \in V} flow(u, v)$ . Эта величина равна количеству дуг, насыщенных потоком. Следовательно, для нахождения дуг в расширенной ОУПП необходимо найти максимальный поток минимальной стоимости в транспортной сети  $N = (V, \beta)$ .

Ниже приведен алгоритм нахождения оптимальной эйлеровой реконструкции связного орграфа  $G = (V, \alpha)$  методом удаления дуг, который базируется на вышесказанных теоретических рассуждениях (см. [A4]).

### Алгоритм 1.3.

1. Преобразуем исходный оргграф  $G = (V, \alpha)$  в транспортную сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  следующим образом.

— придаем каждой дуге  $(u, v) \in \alpha$  пропускную способность  $cap(u, v)$  равную 1;

— придаем каждой дуге  $(u, v) \in \alpha$  стоимость  $cost(u, v)$  равную 1;

— добавляем две новые вершины: источник  $s$  и сток  $t$ ;

— для каждой положительной вершины  $v \in V$  добавляем  $|bal(v)|$  дуг  $(s, v)$ , полагая их пропускную способность  $cap(s, v)$  и цену  $cost(s, v)$  равными 1;

— для каждой отрицательной вершины  $v \in V$  добавляем  $|bal(v)|$  дуг  $(v, t)$ , полагая их пропускную способность  $cap(v, t)$  и цену  $cost(v, t)$  равными 1;

Получаем транспортную сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , в которой каждая дуга  $(u, v) \in \beta$  имеет пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ , равные 1.

2. Находим максимальный поток минимальной стоимости в построенной транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  между источником  $s$  и стоком  $t$  алгоритмом Басакера-Гоуэна.

3. Дуги в транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , насыщенные потоком и соответствующие дугам исходного оргграфа  $G = (V, \alpha)$ , удаляем в оргграфе  $G = (V, \alpha)$ . В полученном оргграфе каждая компонента связности является эйлеровой.

Суммарное количество удаленных дуг в оргграфе  $G = (V, \alpha)$  будет равно  $\sum_{u,v \in V} cost(u, v) flow(u, v) - 2k$ , так как из стоимости потока, равной  $\sum_{u,v \in V} cost(u, v) flow(u, v)$ , необходимо отнять количество дуг, инцидентных источнику  $s$  и стоку  $t$ , поскольку они не существуют в исходном оргграфе  $G = (V, \alpha)$ .

**Асимптотическая сложность алгоритма 1.3.** Асимптотическая сложность пунктов 1, 3 алгоритма 1.3 не превосходит  $O(|V|^2)$ . В итоге, асимптотическая сложность алгоритма 1.3 равна асимптотической сложности алгоритма Басакера-Гоуэна поиска максимального потока минимальной стоимости.

**Пример.** Рассмотрим работу алгоритма 1.3 на примере оргграфа  $G =$

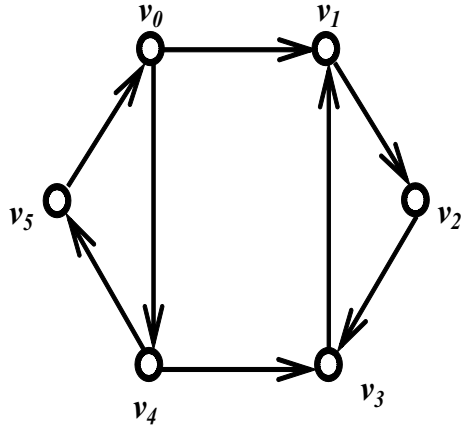


Рисунок 1.38. Орграф  $G = (V, \alpha)$

$(V, \alpha)$ , изображенного на рис. 1.38.

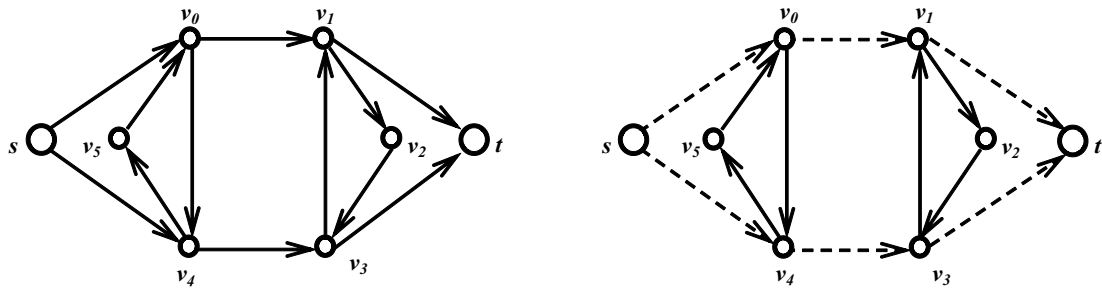


Рисунок 1.39. Транспортная сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  (слева) и дуги, попавшие в поток (справа)

В орграфе  $G = (V, \alpha)$  существует две положительные вершины  $v_0$  и  $v_4$ , имеющие баланс 1, и две отрицательные вершины  $v_1$  и  $v_3$ , имеющие баланс  $-1$ . После преобразований в пункте 1 будет построена транспортная сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  с источником  $s$  и стоком  $t$ , изображенная на рис. 1.39 слева. В положительные вершины  $v_0$  и  $v_4$  будет добавлена одна входящая дуга из источника  $s$ , в вершины  $v_1$  и  $v_3$  будет добавлена одна выходящая дуга в сток  $t$ . Находим максимальный поток минимальной стоимости в построенной транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  в пункте 2 алгоритма 1.3. Дуги, попавшие в найденный поток, обозначены пунктиром на рис. 1.39 справа.

В пункте 3 алгоритма 1.3 удаляем дуги соответствующие дугам исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$ , насыщенные потоком в транспортной сети  $N = (V \cup$

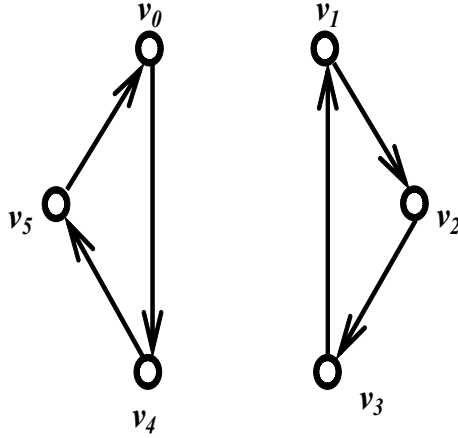


Рисунок 1.40. Оптимальная эйлерова реконструкция орграфа  $G = (V, \alpha)$

$\{s, t\}, \beta$ ). Получим орграф, изображенный на рис. 1.40.

**Теорема 1.8.** Алгоритм 1.3 корректен.

**Доказательство.** Докажем корректность алгоритма 1.3.

В пункте 1 строится транспортная сеть  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , в которой каждая дуга  $(u, v) \in \beta$  имеет пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ , равные 1. При этом для каждой положительной вершины  $v \in V$  добавляется  $|bal(v)|$  входящих в нее дуг  $(s, v)$  из источника  $s$ , а для каждой отрицательной вершины  $v \in V$  добавляется  $|bal(v)|$  выходящих из нее  $(v, t)$  дуг в сток  $t$ . Заметим, что по построению мощность максимального потока в сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  не может быть больше, чем  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ , так как  $\sum_{v \in V} flow(s, v) \leq \frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ . В пункте 2 алгоритма 1.3 в транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$  находится максимальный поток минимальной стоимости. Согласно теореме 1.7 дуги, насыщенные максимальным потоком в построенной транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , интерпретируются как дуги, содержащиеся в «расширенной» реконструкции УПП. Как раз величина максимального потока в транспортной сети  $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ , составляющая  $\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}$ , равна минимальному количеству путей, которое необходимо удалить в реконструкции УПП согласно лемме 1.14. При этом по лемме 1.13

применение реконструкции УПП приводит к получению из исходного орграфа  $G = (V, \alpha)$  орграфа, у которого каждая компонента связности является эйлеровой.

В силу того, что в пункте 2 алгоритма 1.3 ищется не просто максимальный поток, а максимальный поток минимальной стоимости, и по построению каждая дуга  $(u, v)$  имеет пропускную способность  $cap(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ , равные 1, то алгоритм находит не произвольное УПП, а оптимальное УПП. В этом случае требование минимизации стоимости максимального потока означает выбор эйлеровой реконструкции с минимально возможным количеством дуг среди всех других реконструкций. Общее количество удаленных дуг в орграфе  $G = (V, \alpha)$  будет равно  $\sum_{u,v \in V} cost(u, v) flow(u, v) - 2\left(\frac{\sum_{v \in V} |bal(v)|}{2}\right) = \sum_{u,v \in V} cost(u, v) flow(u, v) - 2k$ , как указано в алгоритме 1.3. ■

## ГЛАВА II. Т-НЕПРИВОДИМЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

### 1. Критерий ТНР для оргграфов

*Тривиальное расширение* (для краткости, ТР) оргграфа  $G = (V, \alpha)$  — это соединение  $G + w$  исходного оргграфа  $G$  с вершиной  $w \notin V$ . В силу того, что тривиальное расширение оргграфа  $G$  единственное с точностью до изоморфизма, возможно ввести функцию  $\text{ТР}(G)$ . *Т-неприводимое расширение* (для краткости, ТНР) оргграфа  $G$  — это расширение исходного оргграфа  $G$ , полученное удалением максимального множества дуг из  $\text{ТР}(G)$ .

Следующий критерий, на который опирается доказательство процедуры построения ТНР, вытекает непосредственно из определения.

**Теорема 2.1.** *Оргграф  $H = (W, \beta)$  является ТНР для оргграфа  $G = (V, \alpha)$  тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия.*

1.  $|W| = |V| + 1$ ;
2. В оргграфе  $H = (W, \beta)$  существует вершина  $w$ , такая что  $H - w \cong G$ ;
3. Оргграф  $G = (V, \alpha)$  вкладывается в каждый максимальный подграф  $H - u$  оргграфа  $H = (W, \beta)$ , где  $u \neq w$ ;
- 4 (свойство неприводимости). При удалении любой дуги, инцидентной вершине  $w$  из оргграфа  $H = (W, \beta)$ , полученный оргграф не будет расширением для  $G = (V, \alpha)$ .

### 2. Т-неприводимые расширения для цепей

Простой путь из  $n$  вершин, у которого начальная и конечная вершины не совпадают, является *цепью* и обозначается через  $P_n$ .

Вершина  $v$  называется *изолированной*, если ее степень исхода и степень захода равны 0.

Введём следующие обозначения для вершин, из которых состоит цепь  $P_n$ . Вершину  $v$  цепи  $P_n$ , являющуюся источником, обозначим через  $v_0$ . Остальные вершины пометим номерами от 1 до  $n - 1$  в порядке их прохождения по дугам цепи из вершины  $v_0$  (рис. 2.1).

Очевидным ТНР для цепи  $P_n$  является контур  $C_{n+1}$  (рис. 2.2). Ясно, что

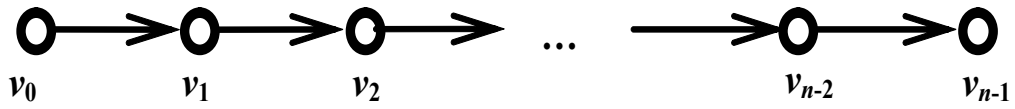


Рисунок 2.1. Цепь  $P_n$

контур  $C_{n+1}$  является минимальным ТНР для цепи  $P_n$ , так как каждый максимальный подграф контура  $C_{n+1}$  изоморфен цепи  $P_n$ .

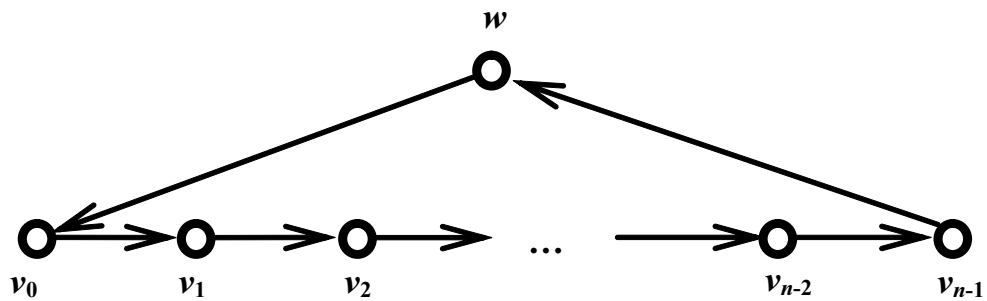


Рисунок 2.2. Контур  $C_{n+1}$

Однако контур  $C_{n+1}$  не является единственным ТНР для цепи  $P_n$ . Для цепи  $P_2$  еще одним ТНР является транзитивный турнир, состоящий из 3-х вершин (рис. 2.3).

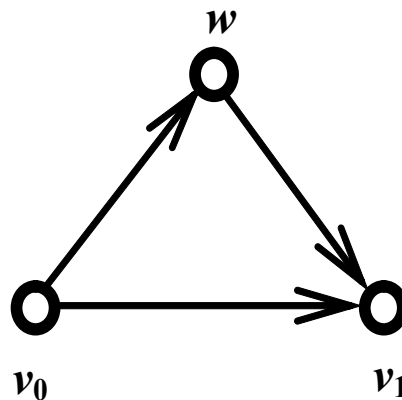


Рисунок 2.3. Транзитивный турнир

Для цепи  $P_3$  ТНР, не изоморфным контуру  $C_4$ , является орграф, изображенный на рис. 2.4.



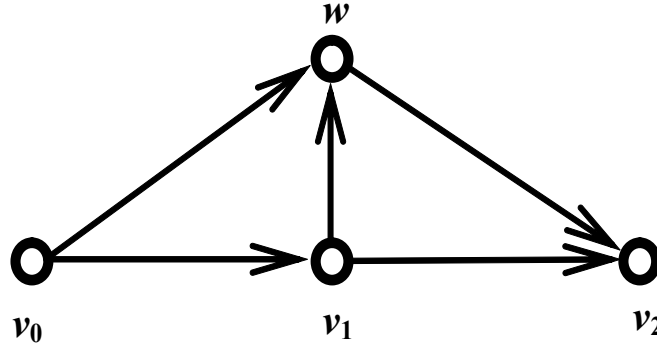


Рисунок 2.4. ТНР для цепи  $P_3$ , не изоморфное контуру  $C_4$

Следующий алгоритм позволяет построить ТНР, не изоморфное контуру  $C_{n+1}$ , для цепи  $P_n$  (см. [A9, A10]).

**Алгоритм 2.1.** Дана цепь  $P_n = (V, \alpha)$ , при этом  $n \geq 4$ . Построим одно из ее ТНР  $H = (W, \beta)$ , такое что  $H \not\cong C_{n+1}$ , следующим образом.

1. Добавим к  $P_n$  вершину  $w$ .
2. Добавим дуги  $(v_0, w)$  и  $(v_1, w)$ .
3. Добавим дуги  $(w, v_{n-2})$  и  $(w, v_{n-1})$ .
4. Для каждой вершины  $v_i \in V$ , где  $2 \leq i \leq n - 3$ , добавим дуги  $(v_i, w)$  и  $(w, v_i)$ .

Количество дуг  $|\beta|$  в  $H = (W, \beta)$  равно  $(n - 1) + 4 + 2(n - 4) = 3n - 5$ .

**Асимптотическая сложность алгоритма 2.1.** Для реализации алгоритма 2.1 достаточно для каждой вершины  $v_i$  цепи  $P_n$ , в зависимости от ее номера, добавить одну или две инцидентные ей и вершине  $w$  дуги. Таким образом, асимптотическая сложность алгоритма равна  $O(n)$ .

Общий вид орграфа, построенного по алгоритму 2.1, показан на рис. 2.5.

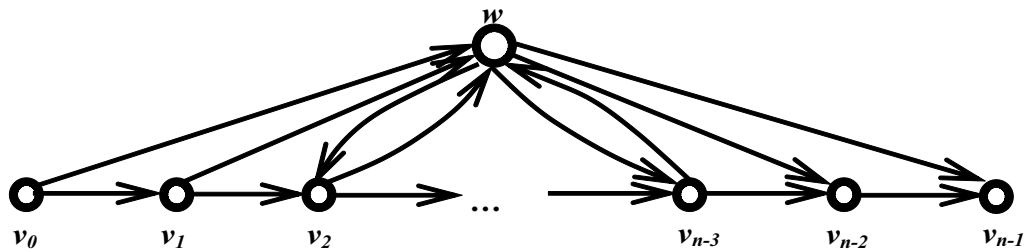


Рисунок 2.5. Общий вид ТНР для цепи, построенный по алгоритму 2.1

**Теорема 2.2.** Алгоритм 2.1 корректен.

**Доказательство.** Для доказательства корректности алгоритма 2.1 необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы 2.1 (критерия ТНР для орграфов).

1. Очевидно,  $|W| = |V| + 1$ , так как  $W = V \cup \{w\}$ .

2. Очевидно, что  $P_n \cong H - w$  в силу построения в алгоритме.

3. Докажем, что для любой вершины  $v_i$ , не совпадающей с вершиной  $w$ , исходная цепь  $P_n$  вкладывается в орграф  $H - v_i$ .

При удалении источника  $v_0$  цепь  $P_n$  вложим в цепь длины  $n$ , образованную дугами  $(v_1, w), (w, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-2}, v_{n-1}) \in \beta$ , в орграфе  $H - v_0$ .

При удалении стока  $v_n$  цепь  $P_n$  вложим в цепь длины  $n$ , образованную дугами  $(v_0, v_1), (v_1, w), (w, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-3}, v_{n-2}) \in \beta$ , в орграфе  $H - v_{n-1}$ .

При удалении вершины  $v_i$ , которая не является ни источником, ни стоком, цепь  $P_n$  вложим в цепь длины  $n$ , образованную дугами  $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{i-2}, v_{i-1}), (v_{i-1}, w), (w, v_{i+1}), (v_{i+1}, v_{i+2}), \dots, (v_{n-3}, v_{n-2}), (v_{n-2}, v_{n-1}) \in \beta$ , в орграфе  $H - v_i$ .

Таким образом, цепь  $P_n$  вкладывается в каждый максимальный подграф орграфа  $H$ .

4. (Свойство неприводимости). Докажем, что при удалении любой дуги, инцидентной вершине  $w$  из орграфа  $H$ , полученный орграф не будет расширением для исходной цепи  $P_n$ .

В случае удаления дуги  $(v_0, w) \in \beta$ , добавленной в пункте 2 алгоритма 2.1, максимальный подграф  $H - (v_0, w) - v_1$  орграфа  $H - (v_0, w)$  содержит изолированную вершину  $v_0$ . Следовательно, вложение цепи  $P_n$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (v_0, w)$  невозможно.

В случае удаления дуги  $(v_1, w) \in \beta$ , добавленной в пункте 2 алгоритма 2.1, максимальный подграф  $H - (v_1, w) - v_2$  орграфа  $H - (v_1, w)$  содержит два стока  $v_1$  и  $v_{n-1}$ , в то время как цепь  $P_n$  только один. Следовательно, вложение цепи  $P_n$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (v_1, w)$  невозможно.

Таким образом, при удалении дуг из пункта 2 алгоритма 2.1, полученный

орграф не будет расширением для цепи  $P_n$ .

В случае удаления дуги  $(w, v_{n-1}) \in \beta$ , добавленной в пункте 3 алгоритма 2.1, максимальный подграф  $H - (w, v_{n-1}) - v_{n-2}$  орграфа  $H - (w, v_{n-1})$  содержит изолированную вершину  $v_{n-1}$ . Следовательно, вложение цепи  $P_n$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_{n-1})$  невозможно.

В случае удаления дуги  $(w, v_{n-2}) \in \beta$ , добавленной в пункте 3 алгоритма 2.1, максимальный подграф  $H - (w, v_{n-2}) - v_{n-3}$  орграфа  $H - (w, v_{n-2})$  содержит два источника  $v_0$  и  $v_{n-2}$ , в то время как цепь  $P_n$  только один. Следовательно, вложение цепи  $P_n$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_{n-2})$  невозможно.

Таким образом, при удалении дуг, добавленных в пункте 3 алгоритма 2.1, полученный орграф не будет расширением для цепи  $P_n$ .

Пусть удалена любая дуга  $(v_i, w)$ , где  $2 \leq i \leq n - 3$ . Тогда максимальный подграф  $H - (v_i, w) - v_{i+1}$  орграфа  $H - (v_i, w)$  содержит два стока  $v_i$  и  $v_{n-1}$ , в то время как цепь  $P_n$  только один. Следовательно, вложение цепи  $P_n$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (v_i, w)$  невозможно.

Пусть удалена любая дуга  $(w, v_i)$ , где  $2 \leq i \leq n - 3$ . Тогда максимальный подграф  $H - (w, v_i) - v_{i-1}$  орграфа  $H - (w, v_i)$  содержит два источника  $v_0$  и  $v_i$ , в то время как цепь  $P_n$  только один. Следовательно, вложение цепи  $P_n$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_i)$  невозможно.

Таким образом, при удалении дуг, добавленных в пункте 4 алгоритма 2.1, полученный орграф не будет расширением для цепи  $P_n$ . Свойство неприводимости доказано.

Очевидно, что  $H \not\cong C_{n+1}$ , так как  $H$  имеет  $3n - 5$  дуг, а контур  $C_{n+1}$  имеет  $n + 1$  дуг. ■

### 3. T-неприводимые расширения для звезд

Под звездой с  $k$  дугами будем понимать орграф, полученный из полного двудольного графа  $K_{1,k}$  некоторой ориентацией его ребер. Понятия корня и листьев в звездах аналогичны случаю неориентированных графов. Корень звезды будем далее обозначать через  $s$ . Очевидно, что звезду с  $k$  листьями

можно задать парой чисел  $l$  и  $m$ , где  $d^+(c) = l$  и  $d^-(c) = m$ , при этом  $l + m = k$ . Далее будем считать, что  $l + m > 1$  и  $lm \neq 1$ , иначе звезда вырождается в цепь.

Назовем две вершины  $u$  и  $v$  орграфа  $G = (V, \alpha)$  смежными, если в орграфе  $G = (V, \alpha)$  существует дуга  $(u, v) \in \alpha$  или дуга  $(v, u) \in \alpha$ . Корень  $c$  звезды  $S_{l,m}$  смежен с  $l + m$  листьями  $v_i$ , где  $0 \leq i \leq l + m - 1$ .

Звезда  $S_{3,4}$  изображена на рис. 2.6.

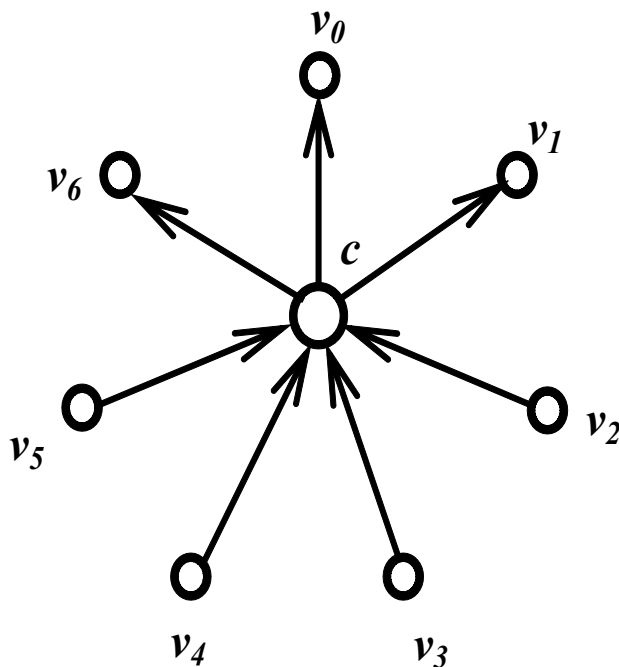


Рисунок 2.6. Звезда  $S_{3,4}$

Следующая лемма дает представление о вложении звезды в максимальный подграф ее ТНР, полученный удалением корня  $c$ .

**Лемма 2.1.** Пусть  $S_{l,m}$  — звезда, а  $H = (W, \beta)$  одно из ее ТНР.

При любом вложении  $\phi : V \rightarrow W$  звезды  $S_{l,m}$  в максимальный подграф  $H - c$ , полученный удалением корня  $c$ , выполняется  $\phi(c) = w$ , т. е. корень  $c$  звезды  $S_{l,m}$  отображается в вершину  $w$  орграфа  $H - c$ .

**Доказательство.** Корень  $c$  звезды  $S_{l,m}$  имеет  $l + m$  инцидентных дуг. При этом корень  $c$  смежен с каждым листом  $v_i$ , где  $0 \leq i \leq l + m - 1$ . В каждом максимальном подграфе любого ТНР для звезды  $S_{l,m}$  лист  $v_i$  может

быть смежен не более чем с двумя вершинами: с корнем  $c$  и вершиной  $w$ . Следовательно, так как корень  $c$  должен быть смежен не менее чем с  $l + m$  вершинами, где  $l + m > 2$ , то единственной вершиной, в которую может отобразиться корень  $c$ , в максимальном подграфе  $H - c$  является вершина  $w$ . Т. е. при любом вложении  $\phi : V \rightarrow (W - c)$  звезды  $S_{l,m}$  в максимальный подграф  $H - c$  выполняется  $\phi(c) = w$ . ■

**Следствие.** В любом ТНР  $H$  для звезды  $S_{l,m}$  выполняются неравенства  $l \leq d^+(w)$ ,  $m \leq d^-(w)$ , и вершина  $w$  смежна с каждым листом  $v_i$ , где  $0 \leq i \leq l + m - 1$ .

Следующий алгоритм позволяет для звезды  $S_{l,m}$ , в которой  $l > 0$  и  $m > 0$ , построить  $\min(l, m)$  неизоморфных ТНР, содержащих  $2(l + m) + 2$  дуг (см. [A9]).

**Алгоритм 2.2.** Дана звезда  $S_{l,m}$ , в которой  $l > 0$  и  $m > 0$ . Построим  $\min(l, m)$  ее попарно неизоморфных ТНР следующим образом.

1. Добавим к звезде  $S_{l,m}$  вершину  $w$ .
2. Выберем некоторое число  $q$ , такое что  $1 \leq q \leq \min(l, m)$ .
3. Выберем любые  $q$  листьев-источников. Для каждого листа-источника  $u$ , вошедшего в эту выборку, добавим дугу  $(w, u)$ . Для каждого листа-источника  $v$ , не вошедшего в эту выборку, добавим дугу  $(v, w)$ .
4. Выберем любые  $q$  листьев-стоков. Для каждого листа-стока  $u$ , вошедшего в эту выборку, добавим дугу  $(u, w)$ . Для каждого листа-стока  $v$ , не вошедшего в эту выборку, добавим дугу  $(w, v)$ .
5. Добавим встречные дуги  $(c, w)$  и  $(w, c)$  между корнем  $c$  и вершиной  $w$ .

В ТНР, который строит вышеописанный алгоритм, будет  $2(l + m) + 2$  дуг, так как к исходной звезде  $S_{l,m}$  добавляется  $l + m + 2$  дуг.

Так как число  $q$  выбирается из отрезка  $[1, \min(l, m)]$ , то по алгоритму 2.2 можно построить  $\min(l, m)$  различных ТНР для звезды  $S_{l,m}$ . Все  $\min(l, m)$  построенных ТНР будут неизоморфными, так как будут содержать разное количество источников, стоков и вершин, у которых степень исхода и степень захода равны 1.

**Асимптотическая сложность алгоритма 2.2.** Одно из ТНР для звезды  $S_{l,m}$  по рецепту алгоритма 2.2 строится за  $O(l + m)$ , так как за  $O(1)$  требуется проанализировать каждую из  $l + m + 1$  вершин звезды  $S_{l,m}$ . Таким образом, асимптотическая сложность построения всех  $\min(l, m) = O(l + m)$  неизоморфных ТНР для звезды  $S_{l,m}$  по алгоритму 2.2 оценивается  $O((l+m)^2)$ .

Три ТНР для звезды  $S_{3,4}$  на рис. 2.6, построенных по алгоритму 2.2, показаны на рис. 2.7.

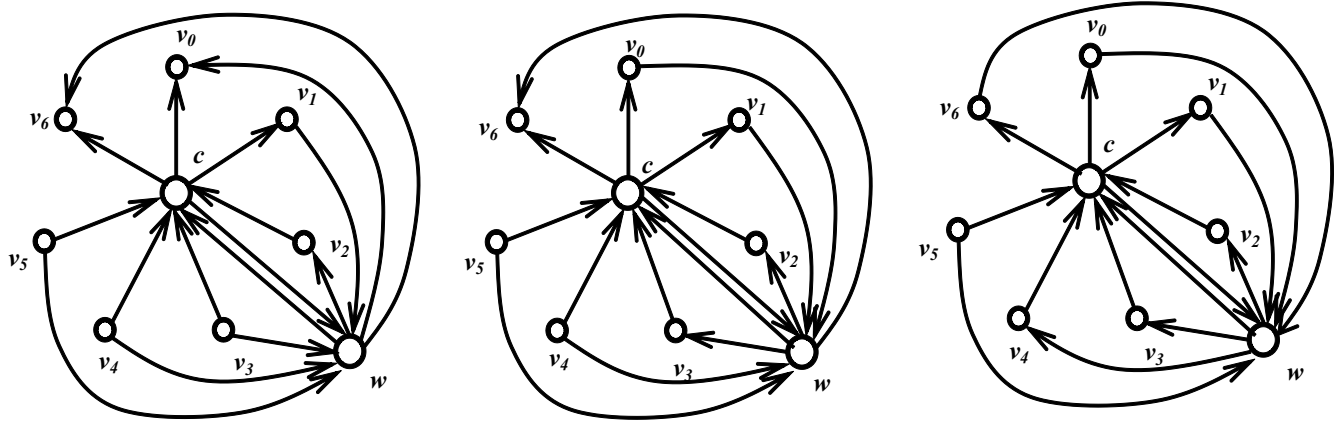


Рисунок 2.7. Три ТНР для звезды  $S_{3,4}$ , построенных по алгоритму 2.2

**Теорема 2.3.** Алгоритм 2.2 корректен.

**Доказательство.** Рассмотрим один из  $\min(l, m)$  орграфов  $H = (W, \beta)$ , полученный после выполнения алгоритма 2.2. Для доказательства корректности предложенного алгоритма 2.2 необходимо и достаточно показать, что выполняются все пункты теоремы 2.1 (критерия ТНР для орграфов):

1.  $|W| = |V| + 1$ , так как  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{l+m-1}\}$ ,  $W = \{v_0, v_1, \dots, v_{l+m-1}, w\}$ .
2. Очевидно, что  $S_{l,m} \cong H - w$  в силу построения в алгоритме 2.2.
3. Покажем, что звезда  $S_{l,m}$  вкладывается в каждый максимальный подграф орграфа  $H = (W, \beta)$ .

Рассмотрим максимальный подграф  $H - c$ , полученный удалением корня  $c$ . По построению  $S_{l,m} \cong H - c$ .

Рассмотрим максимальный подграф  $H - v_i$ , полученный удалением любого листа  $v_i$ , где  $0 \leq i \leq l + m - 1$ . Существует вложение  $\phi : V \rightarrow (W - v_i)$ , при котором  $\phi(c) = c$ ,  $\phi(v_i) = w$  и  $\phi(v_j) = v_j$ , где  $0 \leq j \leq l + m - 1, i \neq j$ , так как  $(c, w) \in \beta$  и  $(w, c) \in \beta$  по построению.

4. (Свойство неприводимости). Докажем, что при удалении любой дуги, инцидентной вершине  $w$ , из орграфа  $H = (W, \beta)$ , полученный орграф не будет расширением для звезды  $S_{l,m}$ .

Пусть из  $H$  удалена дуга между вершиной  $w$  и некоторым листом  $v_i$ , добавленная в пункте 2 или в пункте 3 алгоритма 2.2, для определенности  $(v_i, w)$ . Тогда в максимальном подграфе  $H - (v_i, w) - c$  орграфа  $H - (v_i, w)$ , полученном удалением корня  $c$ , вершина  $v_i$  является изолированной. Т. е. вложение звезды  $S_{l,m}$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (v_i, w)$  невозможно.

Пусть из  $H$  удалена дуга  $(c, w)$ , добавленная в пункте 4 алгоритма 2.2. Рассмотрим максимальный подграф  $H - (c, w) - v_i$  орграфа  $H - (c, w)$ , полученный удалением листа  $v_i$ , такого что  $(c, v_i) \in \beta$  и  $(v_i, w) \in \beta$ . В максимальном подграфе  $H - (c, w) - v_i$  получаем, что  $d^+(c) = l - 1$ , так как нет дуги  $(c, v_i)$  и дуги  $(c, w)$ , и  $d^-(w) = m - 1$ , так как нет дуг  $(v_i, w)$  и  $(c, w)$ . Следовательно, корень  $c$  звезды  $S_{l,m}$  нельзя будет отобразить в какую-либо вершину максимального подграфа  $H - (c, w) - v_i$  при вложении. Т. е. вложение звезды  $S_{l,m}$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (c, w)$  невозможно.

Пусть из  $H$  удалена дуга  $(w, c)$ , добавленная в пункте 4 алгоритма 2.2. Рассмотрим максимальный подграф  $H - (w, c) - v_i$  орграфа  $H - (w, c)$ , полученный удалением листа  $v_i$ , такого что  $(w, v_i) \in \beta$  и  $(v_i, c) \in \beta$ . В максимальном подграфе  $H - (w, c) - v_i$  получаем, что  $d^-(c) = m - 1$ , так как нет дуги  $(w, v_i)$  и дуги  $(v_i, c)$ , и  $d^+(w) = l - 1$ , так как нет дуг  $(w, v_i)$  и  $(w, c)$ . Следовательно, корень  $c$  звезды  $S_{l,m}$  нельзя будет отобразить в какую-либо вершину максимального подграфа  $H - (w, c) - v_i$  при вложении. Т. е. вложение звезды  $S_{l,m}$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, c)$  невозможно.

Свойство неприводимости доказано. ■

Заметим, что существуют другие ТНР для направленных звезд, содержащие  $2(l + m) + 2$  дуг, не изоморфные ни одному из ТНР, полученных по построению в алгоритме 2.3. На рис. 2.8 изображено одно из таких ТНР. Действительно, вершина  $v_2$  в ТНР для направленной звезды  $S_{3,4}$  на рис. 2.8

соединена встречными дугами с вершиной  $w$ . В то время как каждый лист  $v_i$ , где  $0 \leq i \leq l + m - 1$ , соединен только одной дугой с вершиной  $w$ , по построению в алгоритме 2.3.

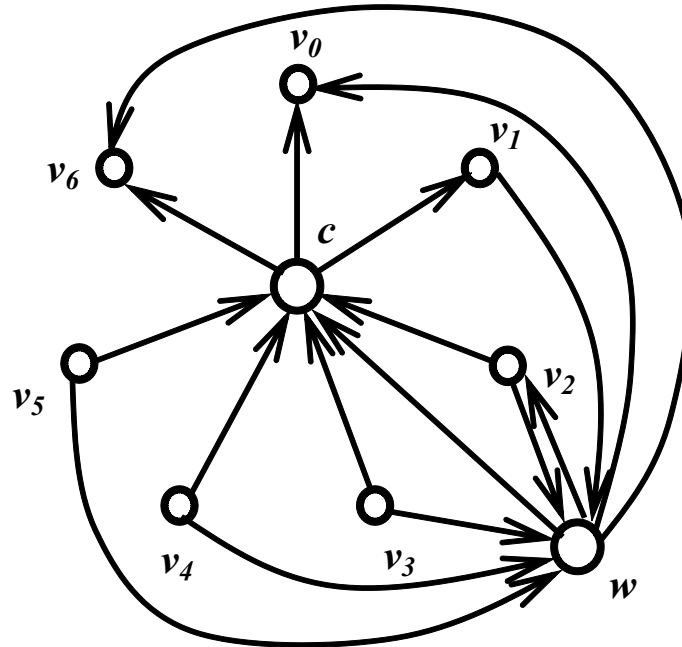


Рисунок 2.8. ТНР для звезды  $S_{3,4}$ , содержащее  $2(l + m) + 2$  дуг

Минимальные вершинные расширения звезд рассматривались М. Б. Абрисимов в [3]. Для звезд минимальные вершинные 1-расширения являются минимальным ТНР. Дадим доказательство этих результатов через использование критерия ТНР.

Оценим количество дуг, которое должно содержаться в минимальном ТНР для звезд. Следующая лемма дает нижнюю оценку количества дуг в любом минимальном ТНР для звезд.

**Лемма 2.2.** *Минимальное ТНР  $H = (W, \beta)$  для звезды  $S_{l,m}$  имеет не менее  $2(l + m) + 1$  дуг.*

**Доказательство.** Докажем, что в любом ТНР  $H = (W, \beta)$  для звезды  $S_{l,m}$  каждый лист  $v_i$ , где  $0 \leq i \leq l + m - 1$ , должен быть смежен с вершиной  $w$ . Допустим противное. Пусть в некотором ТНР  $H = (W, \beta)$  некоторый лист  $v_i$  не смежен с вершиной  $w$ . В этом случае в максимальном подграфе  $H - c$  орграфа  $H$ , полученном удалением корня  $c$ , вершина  $v_i$  является изолированной. Следовательно, вложение звезды  $S_{l,m}$  в один из максимальных



подграфов орграфа  $H$  невозможно. Таким образом, в любом ТНР  $H$  каждый лист  $v_i$ , где  $0 \leq i \leq l + m - 1$ , смежен с вершиной  $w$ , т. е. или  $(v_i, w) \in \beta$ , или  $(w, v_i) \in \beta$ .

Докажем, что в любом ТНР  $H = (W, \beta)$  для звезды  $S_{l,m}$  корень  $c$  должен быть смежен с вершиной  $w$ . Допустим противное. Пусть в некотором ТНР  $F$  корень  $c$  не смежен с вершиной  $w$ . В этом случае в максимальном подграфе  $F - v_i$ , полученном удалением любого листа  $v_i$ , где  $0 \leq i \leq l + m$ , вершина  $w$  и вершина  $c$  смежны менее чем с  $l + m$  вершинами каждая. При этом в звезде  $S_{l,m}$  корень  $c$  смежен с  $l + m$  листьями  $v_i$ , где  $0 \leq i \leq l + m - 1$ . Следовательно, вложение звезды  $S_{l,m}$  в максимальный подграф  $F - v_i$  невозможно. Таким образом, в любом ТНР  $F$  корень  $c$  смежен с вершиной  $w$ .

В результате каждый лист  $v_i$ , где  $0 \leq i \leq l + m - 1$ , и корень  $c$  в любом ТНР для звезды  $S_{l,m}$  должен быть смежен с вершиной  $w$ . Таким образом, в любом минимальном ТНР должно быть не меньше, чем  $2(l + m) + 1$  дуг. ■

Следующий алгоритм позволяет построить минимальное ТНР для звезды  $S_{l,m}$  (см. [A9, A10]).

**Алгоритм 2.3.** Дана звезда  $S_{l,m}$ . Построим ее минимальное ТНР  $H = (W, \beta)$  следующим образом.

1. Добавим к звезде  $S_{l,m}$  вершину  $w$ .
2. Для каждого листа-источника  $v_i$  добавим дугу  $(v_i, w)$ .
3. Для каждого листа-стока  $v_i$  добавим дугу  $(w, v_i)$ .
4. Добавим дугу  $(c, w)$ .

**Асимптотическая сложность алгоритма 2.3.** Асимптотическая сложность алгоритма 2.3 равна  $O(l + m)$ , так как за  $O(1)$  требуется проанализировать каждую из  $l + m + 1$  вершин звезды  $S_{l,m}$ .

В ТНР, который строит алгоритм 2.3, будет  $2(l + m) + 1$  дуг, так как к звезде  $S_{l,m}$  добавляется  $l + m + 1$  дуг.

ТНР для звезды  $S_{3,4}$  на рис. 2.6, построенное по алгоритму 2.3, показано на рис. 2.9.

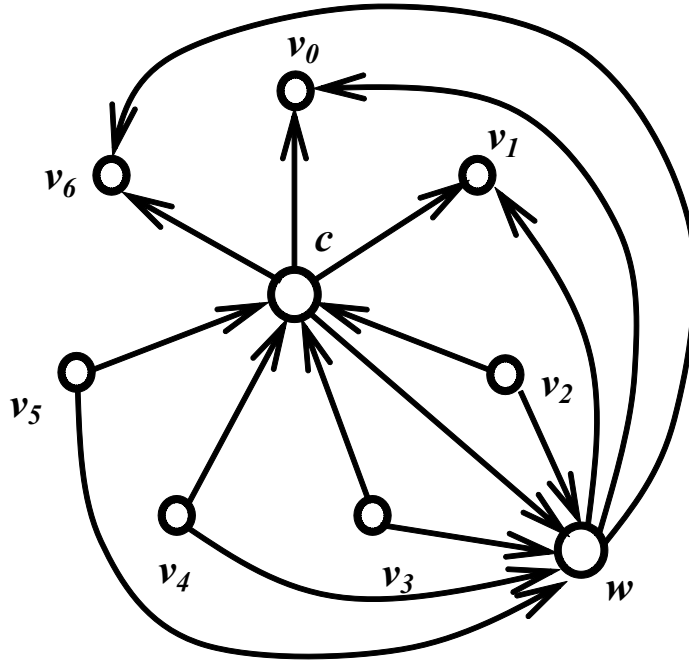


Рисунок 2.9. Минимальное ТНР для звезды  $S_{3,4}$

**Теорема 2.4.** Алгоритм 2.3 корректен.

**Доказательство.** Рассмотрим оргграф  $H = (W, \beta)$ , полученный после выполнения алгоритма 2.3. Для доказательства того, что  $H = (W, \beta)$  является ТНР для звезды  $S_{l,m}$ , необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы 2.1 (критерия ТНР для оргграфов).

1.  $|W| = |V| + 1$ , так как  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{l+m-1}\}$ ,  $W = \{v_0, v_1, \dots, v_{l+m-1}, w\}$ .
2. Очевидно, что  $S_{l,m} \cong H - w$  в силу построения в алгоритме 2.3.
3. Покажем, что звезда  $S_{l,m}$  вкладывается в каждый максимальный подграф оргграфа  $H$ .

Рассмотрим максимальный подграф  $H - c$ , полученный удалением корня  $c$ . Тогда существует вложение  $\phi : V \rightarrow W$ , такое что  $\phi(c) = w$  и  $\phi(v_i) = v_i$ , где  $0 \leq i \leq l+m-1$ . Действительно, в оргграфе  $H - c$  выполняется  $d^+(c) = d^+(w)$  и  $d^-(c) = d^-(w)$ , а также оргграф  $H - c$  является звездой по построению, т. е.  $H - c \cong S_{l,m}$ .

Рассмотрим максимальный подграф  $H - v_i$  оргграфа  $H$ , полученный удалением некоторого листа  $v_i$ . Если лист  $v_i$  — сток, то существует вложение  $\phi : V \rightarrow (W - v_i)$ , такое что  $\phi(c) = c$ ,  $\phi(v_i) = w$  и  $\phi(v_j) = v_j$ , где  $0 \leq j \leq l+m-1, i \neq j$ ; если же лист  $(v_i)$  — источник, то существует вложе-

ние  $\phi : V \rightarrow (W - v_i)$ , такое что  $\phi(c) = w$ ,  $\phi(v_i) = c$  и  $\phi(v_j) = v_j$ , где  $0 \leq j \leq l + m - 1, i \neq j$ .

Таким образом, звезда  $S_{l,m}$  вкладывается в каждый максимальный подграф орграфа  $H = (W, \beta)$ , построенного по алгоритму 2.3.

4. (Свойство неприводимости). Докажем, что при удалении любой дуги, инцидентной вершине  $w$ , из орграфа  $H = (W, \beta)$ , полученный орграф не будет расширением для звезды  $S_{l,m}$ .

Пусть из орграфа  $H$  удалена дуга  $(v_i, w) \in \beta$ , добавленная в пункте 2 алгоритма 2.3. Тогда в максимальном подграфе  $H - (v_i, w) - c$  орграфа  $H - (v_i, w)$  вершина  $v_i$  является изолированной. Следовательно, вложение звезды  $S_{l,m}$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (v_i, w)$  невозможно.

Пусть из орграфа  $H$  удалена дуга  $(w, v_i) \in \beta$ , добавленная в пункте 3 алгоритма 2.3. Тогда в максимальном подграфе  $H - (w, v_i) - c$  орграфа  $H - (v_i, w)$  вершина  $v_i$  является изолированной. Следовательно, вложение звезды  $S_{l,m}$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_i)$  невозможно.

Пусть из  $H$  удалена дуга  $(c, w)$ , добавленная в пункте 4 алгоритма 2.3. Тогда в каждом максимальном подграфе  $H - (c, w) - v_i$  орграфа  $H - (v_i, w)$ , где  $v_i$  — некоторый лист, для каждой вершины  $v \in W$  сумма степени ее исхода и ее захода меньше чем  $l + m$ , т. е.  $d^+(v) + d^-(v) < l + m$ . Следовательно, корень  $c$  звезды  $S_{l,m}$  не отображается ни в одну из вершин  $v$  орграфа  $H - (c, w) - v_i$ ,  $v \in W$ . Т. е. вложение звезды  $S_{l,m}$  в некоторые максимальные подграфы орграфа  $H - (c, w)$  невозможно.

Свойство неприводимости доказано.

Докажем, что ТНР для звезды  $S_{l,m}$ , построенное по алгоритму 2.3, является минимальным ТНР. Действительно, в ТНР, который строит алгоритм 2.3, содержится  $2(l + m) + 1$  дуг, при этом любое минимальное ТНР для звезды  $S_{l,m}$  имеет не менее  $2(l + m) + 1$  дуг по лемме 2.2. Таким образом не существует минимального ТНР для звезды  $S_{l,m}$ , содержащего менее чем  $2(l + m) + 1$  дуг. Следовательно, алгоритм 2.3 строит одно из минимальных ТНР для звезды  $S_{l,m}$ . ■

#### 4. Т-неприводимые расширения для объединения цепей

Рассмотрим тип орграфов, являющихся объединением цепей  $P_{n_0}^0 = (V_0, \alpha_0)$ ,  $P_{n_1}^1 = (V_1, \alpha_1), \dots, P_{n_{k-1}}^{k-1} = (V_{k-1}, \alpha_{k-1})$ . Пусть орграф  $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$  является объединением  $k$  цепей. В орграфе  $G$  существует  $\sum_{i=0}^{k-1} n_i$  вершин и  $\sum_{i=0}^{k-1} (n_i - 1) = \sum_{i=0}^{k-1} n_i - k$  дуг. Обозначим  $\sum_{i=0}^{k-1} n_i$  через  $n$ . При этом  $k$  вершин являются источниками (начальные вершины каждой из  $k$  цепей) и  $k$  вершин являются стоками (конечные вершины каждой из  $k$  цепей). Остальные  $n - 2k$  вершин имеют степень исхода и степень захода, равные 1.

Введем следующие обозначения для вершин, из которых состоят цепи орграфа  $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$ . Вершину  $i$ -й цепи  $P_{n_i}^i$  являющуюся источником, обозначим через  $v_{i,0}$ . Остальные вершины  $i$ -й цепи  $P_{n_i}^i$  пометим номерами от  $v_{i,1}$  до  $v_{i,n_i-1}$  в порядке прохождения вершин данной цепи по дугам из вершины  $v_{i,0}$ .

На рис. 2.10 изображен орграф, являющийся объединением цепей.

Следующая теорема дает конструкцию одного из ТНР для объединения цепей.

**Теорема 2.5.** Пусть орграф  $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$ , является объединением  $k$  цепей  $P_{n_i}^i = (V_i, \alpha_i)$ , где  $0 \leq i \leq k - 1$ . Тогда его ТНР  $H = ((\bigcup_{i=0}^{k-1} V_i) \cup \{w\}, \beta)$  получается добавлением в орграф  $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$  вершины  $w$  и следующих дуг для каждой цепи  $P_{n_i}^i$ , в зависимости от количества вершин в ней.

1. Если  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит не менее четырех вершин,  $n_i \geq 4$ , то:
  - добавим дуги  $(v_{i,0}, w)$  и  $(v_{i,1}, w)$ ;
  - добавим дуги  $(w, v_{i,n-2})$  и  $(w, v_{i,n-1})$ ;
  - для каждой вершины  $v_{i,j}$ , где  $2 \leq j \leq n_i - 3$ , добавим дуги  $(v_{i,j}, w)$  и  $(w, v_{i,j})$ .
2. Если  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит две вершины,  $n_i = 2$ , то:
  - добавим дугу  $(v_{i,0}, w)$ , смежную с источником  $v_{i,0}$ ;
  - добавим дугу  $(w, v_{i,1})$ , смежную со стоком  $v_{i,1}$ .
3. Если  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит три вершины,  $n_i = 3$ , и при этом в орграфе  $G$  не существует цепи, содержащей две вершины, то:

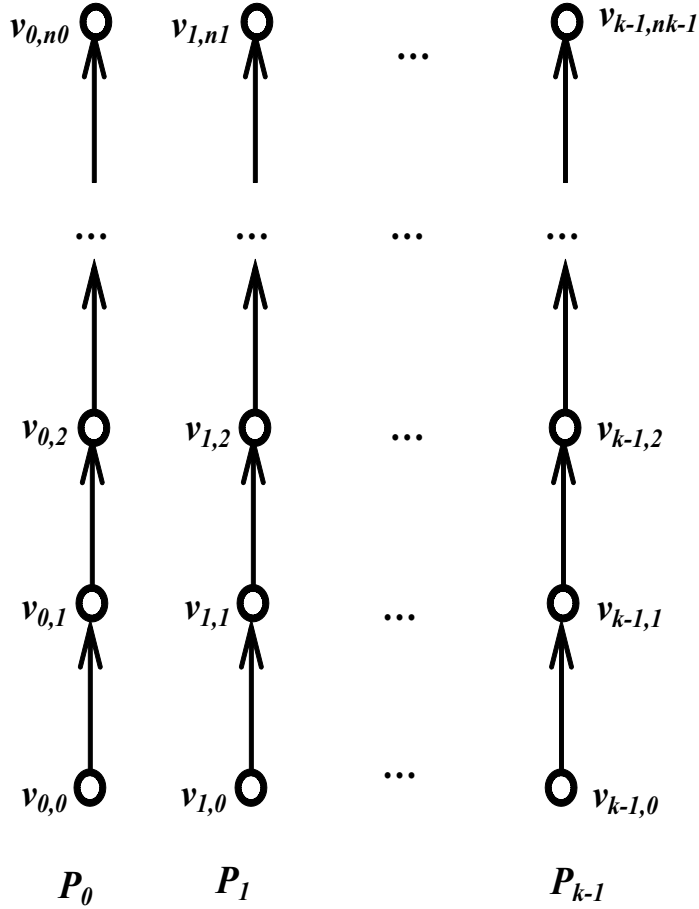


Рисунок 2.10. Объединение цепей  $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$

- добавим дугу  $(v_{i,0}, w)$ , смежную с источником  $v_{i,0}$ ;
- добавим дугу  $(v_{i,1}, w)$ ;
- добавим дугу  $(w, v_{i,2})$ , смежную со стоком  $v_{i,2}$ .

4. Если  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит три вершины,  $n_i = 3$ , и при этом в орграфе  $G$  существует хотя бы одна цепь  $P_{n_j}^j$ , содержащая две вершины,  $n_j = 2$ , то:

- добавим дугу  $(v_{i,0}, w)$ , смежную с источником  $v_{i,0}$ ;
- добавим дугу  $(w, v_{i,2})$ , смежную со стоком  $v_{i,2}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим орграф  $H = ((\bigcup_{i=0}^{k-1} V_i) \cup \{w\}, \beta)$ . Для доказательства корректности предложенной конструкции необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы 2.1 (критерия ТНР для орграфов).

1. Очевидно,  $|W| = |\bigcup_{i=0}^{k-1} V_i| + 1$ , так как  $W = (\bigcup_{i=0}^{k-1} V_i) \cup \{w\}$  по постро-

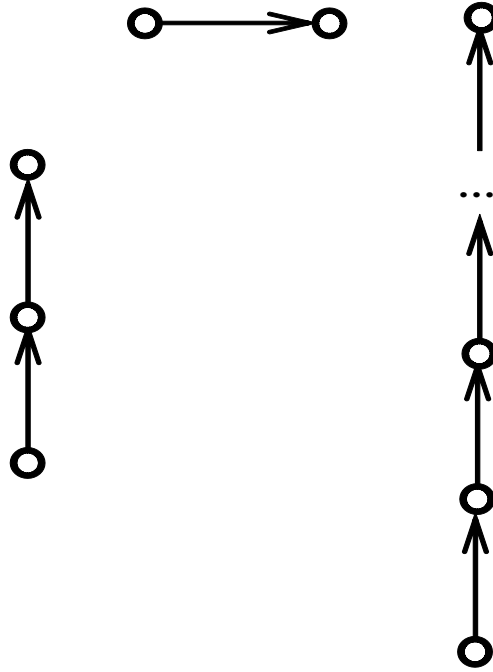


Рисунок 2.11. Орграф  $P_2 \cup P_3 \cup P_n$

ению.

2. Очевидно, что  $G \cong H - w$  в силу построения.

3. Докажем, что для любой вершины  $v_{i,j} \in W$ ,  $v_{i,j} \neq w$ , орграф  $G$  вкладывается в максимальный подграф  $H - v_{i,j}$  орграфа  $H$ . Удалим вершину  $v_{i,j}$  из орграфа  $H$ . Вершина  $v_{i,j}$  входит в  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  орграфа  $G$ . Возможны несколько случаев.

Пусть  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит не менее четырех вершин,  $n_i \geq 4$ . Тогда вложение  $\phi : \bigcup_{i=0}^{k-1} V_i \rightarrow W - v_{i,j}$  орграфа  $G$  в максимальный подграф  $H - v_{i,j}$  орграфа  $H$  построим следующим образом.

Если  $j = 0$ , т. е. вершина  $v_{i,0}$  является источником, то  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим в цепь, состоящую из  $n_i$  вершин и образованную дугами  $(v_{i,1}, w)$ ,  $(w, v_{i,2})$ ,  $(v_{i,2}, v_{i,3})$ ,  $(v_{i,3}, v_{i,4})$ ,  $\dots$ ,  $(v_{i,n_i-2}, v_{i,n_i-1})$ , а остальные вершины отобразим сами в себя при вложении.

Если  $j = n_i - 1$ , т. е. вершина  $v_{i,n_i-1}$  является стоком, то  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим в цепь, состоящую из  $n_i$  вершин и образованную дугами  $(v_{i,0}, v_{i,1})$ ,  $(v_{i,1}, v_{i,2})$ ,  $\dots$ ,  $(v_{i,n_i-3}, w)$ ,  $(w, v_{i,n_i-2})$ , а остальные вершины отобразим сами в себя при вложении.

Если  $1 \leq j \leq n_i - 2$ , т. е. вершина  $v_{i,j}$  имеет степень исхода и степень за-

хода, равные 1, то  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим в цепь, состоящую из  $n_i$  вершин и образованную дугами  $(v_{i,0}, v_{i,1}), (v_{i,1}, v_{i,2}), \dots, (v_{i,j-2}, v_{i,j-1}), (v_{i,j-1}, w), (w, v_{i,j+1}), (v_{i,j+1}, v_{i,j+2}), \dots, (v_{i,n_i-2}, v_{i,n_i-1})$ , а остальные вершины отображим сами в себя при вложении.

Пусть  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит две вершины,  $n_i = 2$ . Тогда вложение  $\phi : \bigcup_{i=0}^{k-1} V_i \rightarrow W - v_{i,j}$  орграфа  $G$  в максимальный подграф  $H - v_{i,j}$  орграфа  $H$  построим следующим образом.

Если  $j = 0$ , то  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим в цепь, состоящую из двух вершин  $w, v_{i,1}$  и образованную дугой  $(w, v_{i,1}) \in \beta$ , а остальные вершины отображим сами в себя при вложении.

Если  $j = 1$ , то  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим в цепь длины 2, состоящую из двух вершин  $v_{i,0}, w$  и образованную дугой  $(v_{i,0}, w) \in \beta$ , а остальные вершины отображим сами в себя при вложении.

Пусть цепь  $P_{n_i}^i$  содержит три вершины,  $n_i = 3$ , и при этом в орграфе  $G$  не существует цепи, содержащей две вершины. Тогда вложение  $\phi : \bigcup_{i=0}^{k-1} V_i \rightarrow W - v_{i,j}$  орграфа  $G$  в максимальный подграф  $H - v_{i,j}$  орграфа  $H$  построим следующим образом.

Если  $j = 0$ , то  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим в цепь, состоящую из трех вершин  $v_{i,1}, w, v_{i,2}$  и образованную дугами  $(v_{i,1}, w), (w, v_{i,2})$ , а остальные вершины отображим сами в себя при вложении.

Если  $j = 1$ , то  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим в цепь, состоящую из трех вершин  $v_{i,0}, w, v_{i,2}$  и образованную дугами  $(v_{i,0}, w), (w, v_{i,2})$ , а остальные вершины отображим сами в себя при вложении.

Если  $j = 2$ , то  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим в цепь, состоящую из трех вершин  $v_{i,0}, v_{i,1}, w$  и образованную дугами  $(v_{i,0}, v_{i,1}), (v_{i,1}, w)$ , а остальные вершины отображим сами в себя при вложении.

Пусть  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит три вершины,  $n_i = 3$ , и при этом в орграфе  $G$  существует  $l$ -я цепь  $P_{n_l}^l$ ,  $l \neq i$ , содержащая две вершины,  $n_l = 2$ . Тогда вложение  $\phi : \bigcup_{i=0}^{k-1} V_i \rightarrow W - v_{i,j}$  орграфа  $G$  в максимальный подграф  $H - v_{i,j}$  орграфа  $H$  построим следующим образом.

Если  $j = 0$ , то  $l$ -ю цепь  $P_{n_i}^l$  вложим в цепь, состоящую из двух вершин  $v_{i,1}$ ,  $v_{i,2}$  и образованную дугой  $(v_{i,1}, v_{i,2})$ , а  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим в цепь длины 3, состоящую из трех вершин  $v_{l,0}$ ,  $v_{l,1}$ ,  $w$ , образованную дугами  $(v_{l,0}, w)$ ,  $(w, v_{l,1})$ , а остальные вершины отображим сами в себя при вложении.

Если  $j = 1$ , то  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим в цепь, состоящую из трех вершин  $v_{i,0}$ ,  $v_{i,1}$ ,  $w$  и образованную дугами  $(v_{i,0}, w)$ ,  $(w, v_{i,1})$ , а остальные вершины отображим сами в себя при вложении.

Если  $j = 2$ , то  $l$ -ю цепь  $P_{n_i}^l$  вложим в цепь, состоящую из трех вершин  $v_{i,0}$ ,  $v_{i,1}$ ,  $w$  и образованную дугой  $(v_{i,0}, v_{i,1})$ , а  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим в цепь, состоящую из трех вершин  $v_{l,0}$ ,  $w$ ,  $v_{l,1}$  и образованную дугами  $(v_{l,0}, w)$ ,  $(w, v_{l,1})$ , а остальные вершины отображим сами в себя при вложении.

Доказано, что оргграф  $G$  вкладывается в каждый максимальный подграф  $H - v_{i,j}$  оргграфа  $H$ .

4. (Свойство неприводимости). Докажем, что при удалении любой дуги, инцидентной вершине  $w$ , из оргграфа  $H$ , полученный оргграф не будет расширением для оргграфа  $G$ . Любая дуга, инцидентная вершине  $w$ , смежна с некоторой вершиной  $v_{i,j}$   $i$ -й цепи  $P_{n_i}^i$ . Возможны несколько случаев.

Пусть  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит не менее четырех вершин,  $n_i \geq 4$ . Рассмотрим варианты удаления дуг, добавленных в пункте 1.

В случае удаления дуги  $(v_{i,0}, w) \in \beta$ , максимальный подграф  $H - (v_{i,0}, w) - v_{i,1}$  оргграфа  $H - (v_{i,0}, w)$  содержит изолированную вершину  $v_{i,0}$ . Т. е. вложение оргграфа  $G$  в один из максимальных подграфов оргграфа  $H - (v_{i,0}, w)$  невозможно.

В случае удаления дуги  $(v_{i,1}, w) \in \beta$  максимальный подграф  $H - (v_{i,1}, w) - v_{i,2}$  оргграфа  $H - (v_{i,1}, w)$  содержит  $k + 1$  сток: вершины  $v_{i,1}$  и  $v_{i,n_i-1}$ , где  $0 \leq i \leq k - 1$ . В то время как оргграф  $G$  содержит только  $k$  стоков: вершины  $v_{i,n_i-1}$ , где  $0 \leq i \leq k - 1$ . Т. е. вложение оргграфа  $G$  в один из максимальных подграфов оргграфа  $H - (v_{i,1}, w)$  невозможно.

В случае удаления дуги  $(w, v_{i,n-1}) \in \beta$  максимальный подграф  $H - (w, v_{i,n-1}) - v_{i,n-2}$  оргграфа  $H - (w, v_{i,n-1})$  содержит изолированную вершину  $v_{i,n-1}$ . Т.



е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_{i,n-1})$  невозможно.

В случае удаления дуги  $(w, v_{i,n-2}) \in \beta$  максимальный подграф  $H - (w, v_{i,n-2}) - v_{i,n-3}$  содержит  $k + 1$  источник: вершины  $v_{i,n-2}$  и  $v_{i,0}$ , где  $0 \leq i \leq k - 1$ . В то время как орграф  $G$  содержит только  $k$  источников: вершины  $v_{i,0}$ , где  $0 \leq i \leq k - 1$ . Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_{i,n-2})$  невозможно.

В случае удаления дуги  $(v_{i,j}, w) \in \beta$ , где  $2 \leq j \leq n_i - 3$ , максимальный подграф  $H - (v_{i,j}, w) - v_{i,j+1}$  орграфа  $H - (v_{i,j}, w)$  содержит  $k + 1$  сток: вершины  $v_{i,j}$  и  $v_{i,n_i-1}$ , где  $0 \leq i \leq k - 1$ . В то время как орграф  $G$  содержит только  $k$  стоков: вершины  $v_{i,n_i-1}$ , где  $0 \leq i \leq k - 1$ . Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (v_{i,j}, w)$  невозможно.

В случае удаления дуги  $(w, v_{i,j}) \in \beta$ , где  $2 \leq j \leq n_i - 3$ , максимальный подграф  $H - (w, v_{i,j}) - v_{i,j+1}$  орграфа  $H - (w, v_{i,j})$  содержит  $k + 1$  источник: вершины  $v_{i,j}$  и  $v_{i,0}$ , где  $1 \leq i \leq k$ . В то время как орграф  $G$  содержит только  $k$  источников:  $v_{i,0}$ , где  $1 \leq i \leq k$ . Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_{i,j})$  невозможно. Таким образом, при удалении дуг, добавленных в пункте 1, полученный орграф не будет расширением для объединения цепей  $G$ .

Пусть  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит две вершины,  $n_i = 2$ . Рассмотрим варианты удаления дуг, добавленных в пункте 2.

В случае удаления дуги  $(v_{i,0}, w) \in \beta$  максимальный подграф  $H - (v_{i,0}, w) - v_{i,1}$  орграфа  $H - (v_{i,0}, w)$  содержит изолированную вершину  $v_{i,0}$ . Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (v_{i,0}, w)$  невозможно.

В случае удаления дуги  $(w, v_{i,1}) \in \beta$  максимальный подграф  $H - (w, v_{i,1}) - v_{i,0}$  орграфа  $H - (w, v_{i,1})$  содержит изолированную вершину  $v_{i,1}$ . Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_{i,1})$  невозможно.

Таким образом, при удалении дуг, добавленных в пункте 2, полученный

орграф не будет расширением для объединения цепей  $G$ .

Пусть  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит три вершины,  $n_i = 3$ , и при этом в орграфе  $G$  не существует цепи длины 2. Рассмотрим варианты удаления дуг, добавленных в пункте 3.

В случае удаления дуги  $(v_{i,0}, w) \in \beta$ , максимальный подграф  $H - (v_{i,0}, w) - v_{i,1}$  орграфа  $H - (v_{i,0}, w)$  содержит изолированную вершину  $v_{i,0}$ . Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (v_{i,0}, w)$  невозможно.

В случае удаления дуги  $(v_{i,1}, w) \in \beta$ , в максимальном подграфе  $H - (v_{i,1}, w) - v_{i,0}$  орграфа  $H - (v_{i,1}, w)$  из вершины  $v_{i,1}$ , являющейся источником, возможно построить цепь, состоящую максимум из двух вершин  $v_{i,1}$  и  $v_{i,2}$  и образованную дугой  $(v_{i,1}, v_{i,2})$ , в то время как минимальная длина цепи в орграфе  $G$  равна 3. Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (v_{i,1}, w)$  невозможно.

В случае удаления дуги  $(w, v_{i,2}) \in \beta$ , максимальный подграф  $H - (w, v_{i,2}) - v_{i,1}$  орграфа  $H - (w, v_{i,2})$  содержит изолированную вершину  $v_{i,2}$ . Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_{i,2})$  невозможно.

Таким образом, при удалении дуг, добавленных в пункте 3, полученный оргграф не будет расширением для объединения цепей  $G$ .

Пусть  $i$ -я цепь  $P_{n_i}^i$  содержит три вершины,  $n_i = 3$ , и при этом в орграфе  $G$  существует  $l$ -я цепь  $P_{n_l}^l$ ,  $l \neq i$ , содержащая две вершины,  $n_l = 2$ .

Рассмотрим варианты удаления дуг, добавленных в пункте 4.

В случае удаления дуги  $(v_{i,0}, w) \in \beta$ , максимальный подграф  $H - (v_{i,0}, w) - v_{i,1}$  орграфа  $H - (v_{i,0}, w)$  содержит изолированную вершину  $v_{i,0}$ . Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (v_{i,0}, w)$  невозможно.

В случае удаления дуги  $(w, v_{i,2}) \in \beta$ , максимальный подграф  $H - (w, v_{i,2}) - v_{i,1}$  орграфа  $H - (w, v_{i,2})$  содержит изолированную вершину  $v_{i,2}$ . Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_{i,2})$

невозможно.

Таким образом, при удалении дуг, добавленных в пункте 4, полученный орграф не будет расширением для объединения цепей  $G$ .

Свойство неприводимости доказано. ■

ТНР для орграфа на рис. 2.11, являющегося объединением цепей, построенное по рецепту теоремы 2.5, показано на рис. 2.12.

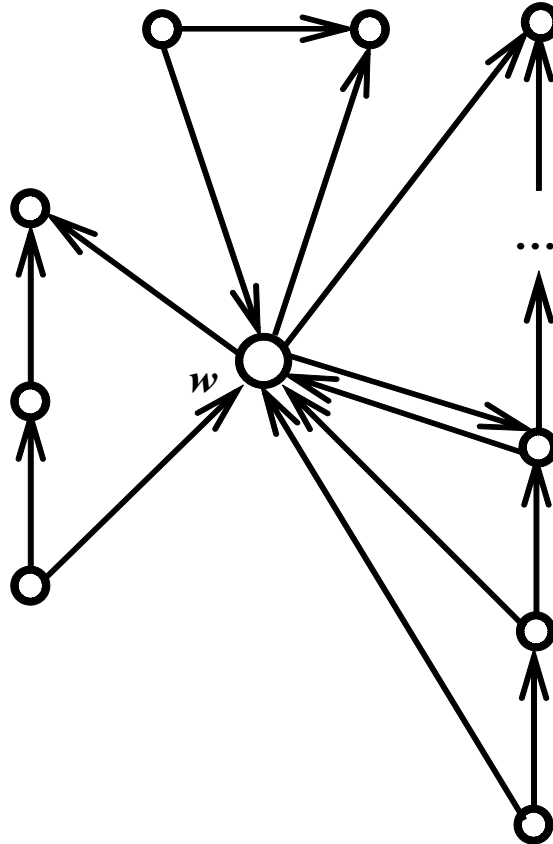


Рисунок 2.12. ТНР для орграфа  $P_2 \cup P_3 \cup P_n$

Следующий алгоритм позволяет построить минимальное ТНР для объединения цепей (см. [A10]).

**Алгоритм 2.4.** Пусть орграф  $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$  является объединением  $k$  цепей  $P_{n_i}^i = (V_i, \alpha_i)$ , где  $0 \leq i \leq k-1$ . Тогда построим его минимальное ТНР  $H = (W, \beta)$  следующим образом.

1. Добавим в орграф  $G$  вершину  $w$ .
2. Для каждого источника  $v_{i,0} \in V_i$ , где  $0 \leq i \leq k-1$ , добавим дугу  $(w, v_{i,0})$ .
3. Для каждого стока  $v_{i,n_i} \in V_i$ , где  $0 \leq i \leq k-1$ , добавим дугу  $(v_{i,n_i}, w)$ .

Количество дуг  $|\beta|$  в  $H = (W, \beta)$  равно  $n + k$ . Множеством вершин  $W$  орграфа  $H$  является множество  $(\bigcup_{i=0}^{k-1} V_i) \cup \{w\}$ . Множеством дуг  $\beta$  является множество  $(\bigcup_{i=0}^{k-1} \alpha_i) \cup \{(w, v_{i,0}) | 0 \leq i \leq k-1\} \cup \{(v_{i,n_i}, w) | 0 \leq i \leq k-1\}$ .

**Асимптотическая сложность алгоритма 2.4.** Для реализации алгоритма 2.4 достаточно знать степени исхода и степени захода каждой вершины орграфа  $G$ , являющегося объединением  $k$  цепей  $P_{n_i}^i = (V_i, \alpha_i)$ , где  $0 \leq i \leq k-1$ . Для данного типа орграфов эту информацию можно вычислить за линейную асимптотику от количества вершин. Каждая вершина  $v \in \bigcup_{i=0}^{k-1} V_i$  в таких орграфах является либо источником, когда  $d^-(v) = 0$ , либо стоком, когда  $d^+(v) = 0$ , либо имеет степень исхода и захода, равные 1, когда  $d^+(v) = 1$  и  $d^-(v) = 1$ . Таким образом, асимптотическая сложность алгоритма 2.4 оценивается как  $O(n)$ .

**Теорема 2.6.** *Алгоритм 2.4 корректен.*

**Доказательство.** Рассмотрим орграф  $H = (W, \beta)$ , построенный по алгоритму 2.4. Для доказательства того, что  $H = (W, \beta)$  является ТНР для орграфа  $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$ , являющегося объединением цепей, необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы 2.1 (критерия ТНР для орграфов).

1. Очевидно, что  $|W| = |\bigcup_{i=0}^{k-1} V_i| + 1$ , так как  $W = (\bigcup_{i=0}^{k-1} V_i) \cup \{w\}$  по построению.

2. Очевидно, что  $G \cong H - w$  в силу построения в алгоритме 2.4.

3. Докажем, что для любой вершины  $v_{i,j} \in W$ , не совпадающей с вершиной  $w$ , орграф  $G$  вкладывается в максимальный подграф  $H - v_{i,j}$  орграфа  $H$ . Удалим вершину  $v_{i,j}$  из орграфа  $H$ . Вершина  $v_{i,j}$  входит в  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  орграфа  $G$ . Тогда вложение  $\phi : \bigcup_{i=0}^{k-1} V_i \rightarrow W - v_{i,j}$  орграфа  $G$  в максимальный подграф  $H - v_{i,j}$  орграфа  $H$  построим следующим образом.

Если  $j = 0$ , т. е. вершина  $v_{i,0}$  является источником, то  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим в цепь, образованную дугами  $(v_{i,1}, v_{i,2}), (v_{i,2}, v_{i,3}), \dots, (v_{i,n_i-2}, v_{i,n_i-1}), (v_{i,n_i-1}, w)$ , а остальные вершины отобразим сами в себя при вложении.

Если  $j = n_i - 1$ , т. е. вершина  $v_{i,n_i-1}$  является стоком, то  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим

в цепь, образованную дугами  $(w, v_{i,0}), (v_{i,0}, v_{i,1}), (v_{i,1}, v_{i,2}), \dots, (v_{i,n_i-3}, v_{i,n_i-2})$ , а остальные вершины отобразим сами в себя при вложении.

Если  $1 \leq j \leq n_i - 2$ , т. е. вершина  $v_{i,j}$  имеет степень захода и степень исхода, равные 1, то  $i$ -ю цепь  $P_{n_i}^i$  вложим в цепь, образованную дугами  $(v_{i,j+1}, v_{i,j+2}), (v_{i,j+2}, v_{i,j+3}), \dots, (v_{i,n_i-2}, v_{i,n_i-1}), (v_{i,n_i-1}, w), (w, v_{i,0}), (v_{i,0}, v_{i,1}), \dots, (v_{i,j-2}, v_{i,j-1})$ , а остальные вершины отобразим сами в себя при вложении.

4. (Свойство неприводимости). Докажем, что при удалении любой дуги, инцидентной вершине  $w$ , из орграфа  $H = (W, \beta)$ , полученный орграф не будет расширением для орграфа  $G$ .

Покажем, что при удалении любой дуги  $(w, v_{i,0}) \in \beta$ , выходящей из вершины  $w$ , которая была добавлена в пункте 2 алгоритма 2.4, орграф  $H - (w, v_{i,0})$  не будет расширением для орграфа  $G$ . Вершина  $v_{i,0}$  является источником и началом  $i$ -й цепи  $P_{n_i}^i$  орграфа  $G$ . Из вершины  $v_{i,0}$  исходит дуга  $(v_{i,0}, v_{i,1})$  в вершину  $v_{i,1}$ . Тогда в максимальном подграфе  $H - (w, v_{i,0}) - v_{i,1}$  орграфа  $H - v_{i,1}$  вершина  $v_{i,0}$  будет изолированной. Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_{i,0})$  невозможно. В силу произвольности выбора дуги  $(w, v_{i,0}) \in \beta$ , выходящей из вершины  $w$ , получаем, что каждая дуга  $(w, v_{i,0}) \in \beta$ , где  $0 \leq i \leq k - 1$ , добавленная в пункте 2 алгоритма 2.4, должна присутствовать в ТНР для объединения цепей  $G$ .

Покажем, что при удалении любой дуги  $(v_{i,n_i}, w) \in \beta$ , входящей в вершину  $w$ , которая была добавлена в пункте 3 алгоритма 2.4, орграф  $H - (v_{i,n_i}, w)$  не будет расширением для орграфа  $G$ . В этом случае вершина  $v_{i,n_i}$  является стоком и концом цепи  $P_{n_i}^i$  орграфа  $G$ . В вершину  $v_{i,n_i-1}$  входит дуга  $(v_{i,n_i-2}, v_{i,n_i-1})$  из некоторой вершины  $v_{i,n_i-2}$ . Тогда в максимальном подграфе  $H - (v_{i,n_i}, w) - v_{i,n_i-2}$  орграфа  $H - (v_{i,n_i}, w)$  вершина  $v_{i,n_i-1}$  будет изолированной. Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_{i,n_i-1})$  невозможно. В силу произвольности выбора дуги  $(v_{i,n_i}, w) \in \beta$ , входящей в вершину  $w$ , получаем, что каждая дуга  $(v_{i,0}, w) \in \beta$ , где  $0 \leq i \leq k - 1$ , добавленная в пункте 3 алгоритма 2.4, должна присутство-

вать в ТНР для объединения цепей  $G$ .

Свойство неприводимости доказано.

Докажем, что алгоритм 2.4 строит минимальное ТНР для объединения  $k$  цепей  $\bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$ . Покажем, что в любом минимальном ТНР для рассматриваемого класса орграфов не может быть меньше  $n+k$  дуг, где  $n = \sum_{i=0}^{k-1} n_i$ . Ровно столько дуг содержится в минимальном ТНР, построенном по алгоритму 2.4.

В орграфе  $G$ , принадлежащем рассматриваемому типу, существует  $k$  вершин, являющихся стоками, и  $k$  вершин, являющихся источниками. Количество дуг  $|\alpha|$  в орграфе  $G$  равно  $n - k$ . При этом для каждого стока  $v_{i,n_i-1}$ , где  $0 \leq i \leq k - 1$ , необходимо добавить дугу, смежную с вершиной  $w$ , иначе в некоторых максимальных подграфах расширения орграфа  $G$  будут присутствовать изолированные вершины. Для этого будет достаточно удалить вершину  $v_{i,n_i-2}$ , которая является началом дуги  $(v_{i,n_i-2}, v_{i,n_i-1})$ . Для каждого источника  $v_{i,0}$ , где  $0 \leq i \leq k - 1$ , необходимо добавить дугу, смежную с вершиной  $w$ , иначе в некоторых максимальных подграфах расширения орграфа  $G$  будут присутствовать изолированные вершины. Для этого будет достаточно удалить вершину  $v_{i,1}$ , которая является концом дуги  $(v_{i,0}, v_{i,1})$ . Количество добавленных дуг в этом случае будет равно  $2k$ , а общее количество дуг в минимальном ТНР будет не меньше, чем  $n+k$ . Итак, необходимо будет добавить  $2k$  дуг, смежных вершине  $w$ . Каждая из  $2k$  добавленных дуг будет инцидентна либо одному из  $k$  источников  $v_{i,0}$ , либо одному из  $k$  стоков  $v_{i,n_i-1}$  орграфа  $G$ .

В ТНР, который строит алгоритм 2.4, содержится  $n+k$  дуг, при этом любое минимальное ТНР для объединения  $k$  цепей  $\bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$  содержит не менее  $n+k$  дуг, как было показано выше. Т. е. не существует минимального ТНР для объединения  $k$  цепей  $\bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$ , содержащего менее чем  $n+k$  дуг. Следовательно, алгоритм 2.4 строит одно из минимальных ТНР для класса орграфов, являющихся объединением цепей. ■

Минимальное ТНР для орграфа на рис. 2.12, являющегося объединением цепей, построенное по алгоритму 2.4, показано на рис. 2.13.

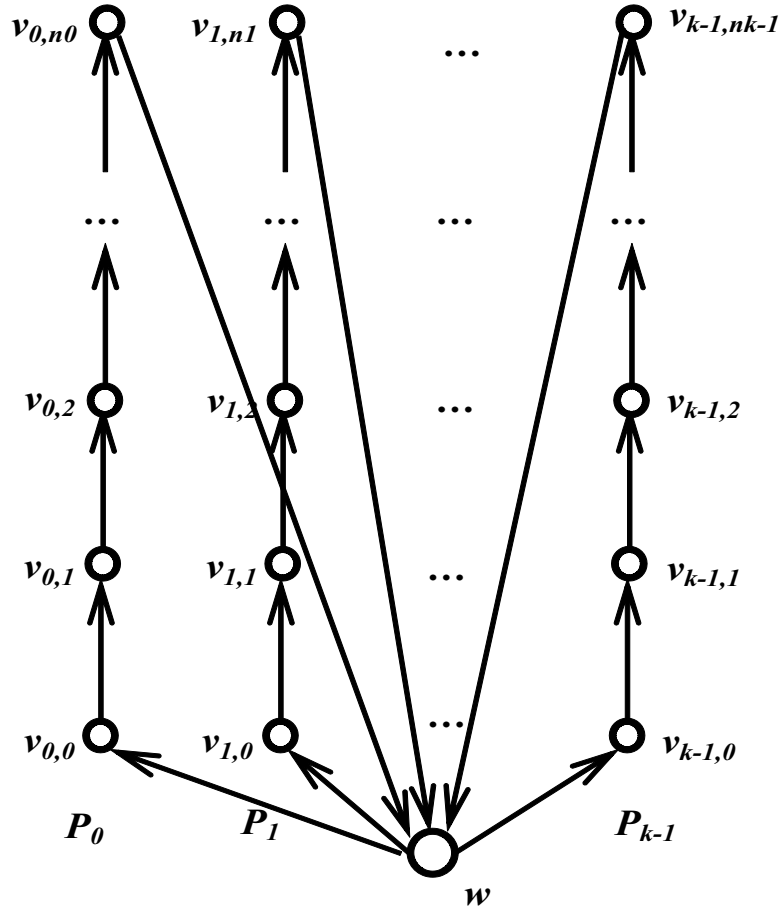


Рисунок 2.13. Минимальное ТНР для объединение цепей  $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$

Следующая теорема говорит о единственности минимального ТНР для объединения цепей, состоящих более чем из двух вершин.

**Теорема 2.7.** *Для орграфов вида  $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$ , являющихся объединением  $k$  цепей, состоящих более чем из двух вершин, с точностью до изоморфизма существует только одно минимальное ТНР.*

**Доказательство.** Докажем, что любое минимальное ТНР для объединения  $k$  цепей, состоящих более чем из двух вершин, изоморфно минимальному ТНР  $H = (W, \beta)$ , построенному по алгоритму 2.4.

Из доказательства теоремы 2.6 следует, что каждый источник  $v_{i,0}$ , где  $0 \leq i \leq k - 1$ , и каждый сток  $v_{i,n_i-1}$ , где  $0 \leq i \leq k - 1$ , орграфа  $G$  должен быть смежен с вершиной  $w$ .

В минимальном ТНР  $H$ , который строит алгоритм 2.4, каждый источ-

ник  $v_{i,0}$  соединен дугой  $(w, v_{i,0})$  с вершиной  $w$ . Пусть, от противного, существует минимальное ТНР  $F = (U, \gamma)$ , не изоморфное минимальному ТНР  $H = (W, \beta)$ , в котором некоторый источник  $v_{i,0}$  соединен дугой  $(v_{i,0}, w)$  с вершиной  $w$ , а не дугой  $(w, v_{i,0})$ . Вершина  $v_{i,0}$  принадлежит  $i$ -й цепи  $P_{n_i}^i$  орграфа  $G$ . В орграфе  $G$  существует вершина  $v_{i,2}$ , так как каждая цепь состоит более чем из двух вершин. Рассмотрим максимальный подграф  $F - v_{i,2}$  орграфа  $F$ . В орграфе  $F - v_{i,2}$  вершина  $v_{i,0}$  является источником, а вершина  $v_{i,1}$  — стоком. При этом вершина  $v_{i,1}$  является концом цепи, состоящей из двух вершин  $v_{i,0}$  и  $v_{i,1}$ , т. е. цепи, образованной дугой  $(v_{i,0}, v_{i,1})$  в максимальном подграфе  $F - v_{i,2}$  орграфа  $F$ . Но орграф  $G$  является объединением  $k$  цепей, состоящих более чем из двух вершин. Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $F$ , не изоморфного орграфу  $H$ , невозможно. Следовательно, в любом минимальном ТНР орграфа  $G$  каждый источник  $v_{i,0}$  соединен дугой  $(w, v_{i,0})$  с вершиной  $w$ .

В минимальном ТНР  $H$ , который строит алгоритм 2.4, каждый сток  $v_{i,n_i-1}$  соединен дугой  $(v_{i,n_i-1}, w)$  с вершиной  $w$ . Пусть, от противного, существует минимальное ТНР  $F = (U, \gamma)$ , не изоморфное минимальному ТНР  $H = (W, \beta)$ , в котором некоторый сток  $v_{i,n_i-1}$  соединен дугой  $(w, v_{i,n_i-1})$  с вершиной  $w$ , а не дугой  $(v_{i,n_i-1}, w)$ . Вершина  $v_{i,n_i-1}$  принадлежит  $i$ -й цепи  $P_{n_i}^i$  орграфа  $G$ . В орграфе  $G$  существует вершина  $v_{i,n_i-3}$ , так как каждая цепь состоит более чем из двух вершин. Рассмотрим максимальный подграф  $F - v_{i,n_i-3}$  орграфа  $F$ . В орграфе  $F - v_{i,n_i-3}$  вершина  $v_{i,n_i-2}$  является источником, а вершина  $v_{i,n_i-1}$  — стоком. При этом вершина  $v_{i,n_i-3}$  является началом цепи, состоящей из двух вершин  $v_{i,n_i-2}$  и  $v_{i,n_i-1}$ , т. е. цепью, образованной дугой  $(v_{i,n_i-2}, v_{i,n_i-1})$  в максимальном подграфе  $F - v_{i,n_i-3}$  орграфа  $F$ . Но орграф  $G$  является объединением цепей, состоящих более чем из двух вершин. Т. е. вложение орграфа  $G$  в один из максимальных подграфов орграфа  $F$ , не изоморфного орграфу  $H$ , невозможно. Следовательно, в любом минимальном ТНР орграфа  $G$  каждый сток  $v_{i,n_i-1}$  соединен дугой  $(v_{i,n_i-1}, w)$  с вершиной  $w$ .

Доказано, что любое минимальное ТНР для объединения  $k$  цепей, состоя-



щих более чем из двух вершин изоморфно минимальному ТНР, построенному по алгоритму 2.4. ■

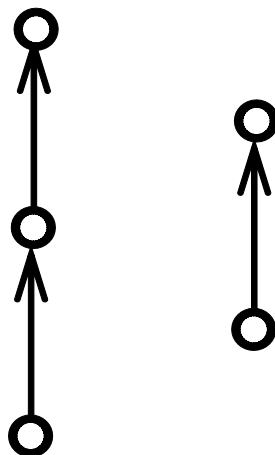


Рисунок 2.14. Орграф  $P_3 \cup P_2$

**Примечание.** В случае, если одна из цепей  $P_{n_i}^i$  орграфа  $G$  состоит из двух вершин, т. е.  $n_i = 2$  (к примеру, на рис. 2.14), то добавление  $2k$  дуг в орграф  $G$  можно будет построить более чем одним способом.

Четыре неизоморфных минимальных ТНР для орграфа, изображенного на рис. 2.14, показаны на рис. 2.15.

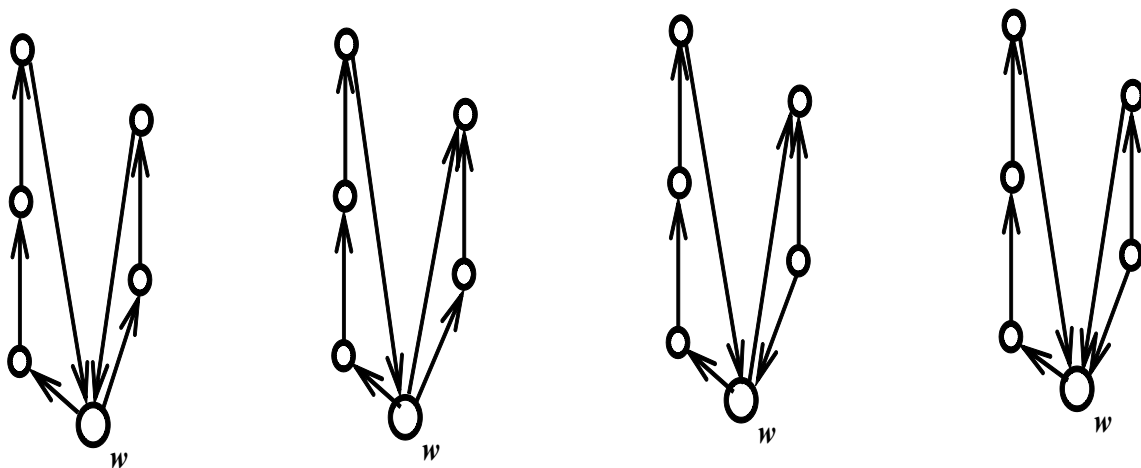


Рисунок 2.15. Четыре неизоморфных минимальных ТНР для орграфа  $P_3 \cup P_2$

## 5. Т-неприводимые расширения для четных многоугольных орграфов

Многоугольным орграфом порядка  $n$  называется всякий орграф  $M$ , полученный переориентацией некоторых дуг контура  $C_n$ . Сумма степеней исхода

и захода каждой вершины многоугольного орграфа  $M = (Z, \gamma)$  равна 2. Все арифметические операции над индексами вершин в многоугольных орграфах в дальнейшем будем производить по модулю числа  $n$ . Для любой вершины  $v_i$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$ , многоугольного орграфа  $M$  смежными вершинами являются вершины  $v_{i-1}$  и  $v_{i+1}$ .

Пусть  $b$  — это некоторый двоичный вектор, через  $b_i$  обозначим его  $i$ -ю компоненту. Двойственным вектором для двоичного вектора  $b$  называется вектор  $b^\delta$ , получаемый из  $b$ , если компоненты вектора  $b$  записать в обратном порядке, а затем взаимно заменить в компонентах нули и единицы, т. е. осуществить преобразование  $b \rightarrow (b^{-1})'$ . К примеру, для  $b = 00101$  будет  $b^\delta = 01011$ . Очевидно, что  $b^{\delta\delta} = b$ . Двоичные векторы можно использовать для кодирования многоугольных орграфов (см. [17]). Пусть  $M$  — многоугольный орграф, полученный переориентацией некоторых дуг контура  $C_n$  порядка  $n$ . Выберем в  $M = (Z, \gamma)$  в качестве начальной вершины вершину  $v_0$  и построим  $n$ -мерный двоичный вектор  $b^0$ , полагая  $b_i^0 = 1$ , если  $(v_i, v_{i+1}) \in \gamma$  и  $b_i^0 = 0$ , если  $(v_{i+1}, v_i) \in \gamma$ . Аналогично строятся векторы  $b^1, b^2, \dots, b^{n-1}$ . К примеру, для многоугольного орграфа  $M = v_0 \rightarrow v_1 \leftarrow v_2 \rightarrow v_3 \leftarrow v_0$  порядка 4 получим  $b^0 = 1010$ ,  $b^1 = 0101$ ,  $b^2 = 1010$ ,  $b^3 = 0101$ . С другой стороны, каждому  $n$ -мерному вектору из совокупности  $b^s$ , где  $0 \leq s \leq n - 1$ , соответствует многоугольный орграф  $M = M(b^s)$  порядка  $n$ , получающийся из контура  $C_n$  переориентацией некоторых его дуг с выбранной начальной вершиной  $v_s$ , согласованный в вышеуказанном смысле со значениями компонент вектора  $b^s$ . К примеру, для  $b^1 = 00101$  будет  $M(b^1) = v_1 \leftarrow v_2 \leftarrow v_3 \rightarrow v_4 \leftarrow v_0 \rightarrow v_1$ . Выберем из  $2n$  векторов  $b^0, b^1, \dots, b^{n-1}, b^{0\delta}, b^{1\delta}, \dots, b^{n-1\delta}$  многоугольного орграфа  $M$  лексикографически минимальный вектор и обозначим его через  $b = b(M)$ . Вектор  $b = b(M)$  сопоставляется многоугольному орграфу  $M$  и называется его двоичным кодом.

К примеру, для многоугольного орграфа  $M$  на рис. 2.16 получим  $b^0 = 1011$ ,  $b^1 = 0111$ ,  $b^2 = 1110$ ,  $b^3 = 1101$ ,  $b^{0\delta} = 0010$ ,  $b^{1\delta} = 0001$ ,  $b^{2\delta} = 1000$ ,  $b^{3\delta} = 0100$ , следовательно,  $b(M) = 0001$ . Понятно, что два многоугольных орграфа  $M_1$  и

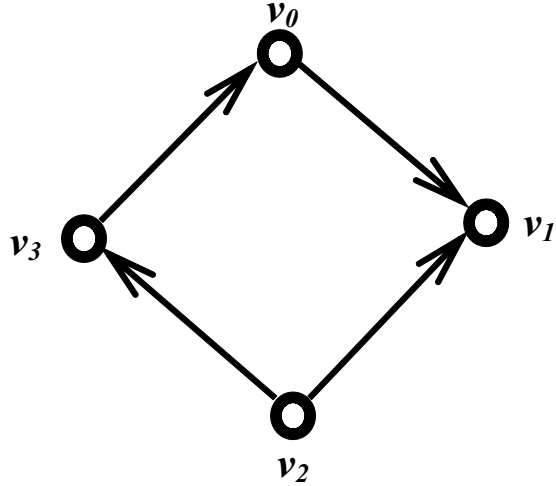


Рисунок 2.16. Многоугольный орграф  $M$

$M_2$  изоморфны тогда и только тогда, когда их двоичные коды  $b(M_1)$  и  $b(M_2)$  покомпонентно равны.

Кодирование многоугольных орграфов двоичными векторами будет широко использоваться в алгоритмах построения ТНР для многоугольных орграфов. Также такое кодирование позволяет на порядок сократить запись многоугольных орграфов по сравнению с матрицей смежности и компактно хранить их в памяти ЭВМ.

Под четными многоугольными орграфами будем понимать многоугольные орграфы с четным количеством вершин. Ниже будет описано одно из ТНР для четных многоугольных орграфов в явном виде. Прежде чем указать явный вид ТНР для четных многоугольных орграфов необходимо показать виды вложений многоугольных орграфов в некоторый максимальный подграф их ТНР. При этом количество вложений полиномиально зависит от порядка многоугольного орграфа  $n$ . Напомним, что все операции над индексами вершин многоугольных орграфов будут рассматриваться далее по модулю их порядка  $n$ .

Пусть  $M = (Z, \gamma)$  — многоугольный орграф порядка  $n$ , полученный произвольной переориентацией дуг контура  $C_n = v_0v_1 \cdots v_{n-1}v_0$ , а  $H = (W, \beta)$  — одно из его ТНР. Тогда вложение  $\phi : Z \rightarrow (W - v_i)$  многоугольного оргра-

фа  $M$  в максимальный подграф  $H - v_i$ , можно задать одним из  $2n$  способов. Существует  $n$  вложений «по часовой стрелке» и  $n$  вложений «против часовой стрелки».

*Вложение  $k$  «по часовой стрелке», где  $0 \leq k \leq n - 1$ :*

- $\phi(v_j) = v_{j+k}$ , где  $v_j \in W, j \neq i - k$ ;
- $\phi(v_{i-k}) = w$ .

Вложение  $k$  «по часовой стрелке» задано таблицей 1.

Таблица 1. Вложения «по часовой стрелке»

$\varphi$	$v_0$	$v_1$	...	$v_{i-k-1}$	$v_{i-k}$	$v_{i-k+1}$	...	$v_{i-1}$	$v_i$	$v_{i+1}$	...	$v_{n-2}$	$v_{n-1}$
	$v_k$	$v_{k+1}$	...	$v_{i-1}$	$w$	$v_{i+1}$	...	$v_{i+k-1}$	$v_{i+k}$	$v_{i+k+1}$	...	$v_{k-2}$	$v_{k-1}$

На языке двоичных векторов, вложение  $k$  «по часовой стрелке» возможно тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

- $b_j = b_{j+k}$ , где  $0 \leq j \leq n - 1, j \neq i - k - 1, i - k$ ;
- если  $b_{i-k-1} = 1$ , то  $(v_{i-1}, w) \in \beta$ , иначе  $(w, v_{i-1}) \in \beta$ ;
- если  $b_{i-k} = 1$ , то  $(w, v_{i+1}) \in \beta$ , иначе  $(v_{i+1}, w) \in \beta$ .

*Вложение  $k$  «против часовой стрелки», где  $0 \leq k \leq n - 1$ :*

- $\phi(v_j) = v_{n+k-j-1}$ , где  $v_j \in W, j \neq n - i - 1$ ;
- $\phi(v_{n-i-1}) = w$ .

Вложение  $k$  «против часовой стрелки» задано таблицей 2.

Таблица 2. Вложения «против часовой стрелки»

$\varphi$	$v_0$	$v_1$	...	$v_{i-1}$	$v_i$	$v_{i+1}$	...	$v_{n-i-2}$	$v_{n-i-1}$	$v_{n-i}$	...	$v_{n-1}$	$v_n$
	$v_{k-1}$	$v_{k-2}$	...	$v_{k-i}$	$v_{k-i-1}$	$v_{k-i-2}$	...	$v_{k+i+1}$	$w$	$v_{k+i-1}$	...	$v_{k+1}$	$v_k$

На языке двоичных векторов, вложение  $k$  «против часовой стрелки» возможно тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

- $b_j = b_{k-j-1}$ , где  $0 \leq j \leq n - 1, j \neq n - i - 2, n - i - 1$ ;
- если  $b_{n-i-2} = 1$ , то  $(v_{k+i+1}, w) \in \beta$ , иначе  $(w, v_{k+i+1}) \in \beta$ ;
- если  $b_{n-i-1} = 1$ , то  $(w, v_{k+i-1}) \in \beta$ , иначе  $(v_{k+i-1}, w) \in \beta$ .

**Теорема 2.8.** Пусть  $M = (Z, \gamma)$  — многоугольный оргграф порядка  $n$ , полученный произвольной переориентацией дуг контура  $C_n = v_0v_1 \cdots v_{n-1}v_0$ , а  $H = (W, \beta)$  — одно из его ТНР. Тогда вложение  $\phi : Z \rightarrow (W - v_i)$  многоугольного оргграфа  $M$  в максимальный подграф  $H - v_i$  можно задать только одним из  $2n$  способов, представленных таблицами 1 и 2.

**Доказательство.** Других вложений многоугольного оргграфа  $M$  в произвольный максимальный подграф  $H - v_i$  его ТНР  $H$ , кроме  $2n$  вышеперечисленных, не существует. Действительно, в максимальном подграфе  $H - v_i$  обязательно должна быть часть, изоморфная многоугольному оргграфу  $M$ . А это возможно тогда и только тогда, когда вершина  $w$  в максимальном подграфе  $H - v_i$  его ТНР  $H$  смежна с вершинами  $v_{i-1}$  и  $v_{i+1}$ . При любом другом, отличном от  $2n$  перечисленных способов, в максимальном подграфе  $H - v_i$  его ТНР  $H$  не будет части, изоморфной какому-либо многоугольному подграфу. ■

Следующая теорема показывает одно из ТНР для четных многоугольных оргграфов в явном виде.

**Теорема 2.9.** Пусть  $M = (Z, \gamma)$  — четный многоугольный оргграф порядка  $n$ . Тогда одним из его ТНР будет оргграф  $H = (W, \beta)$ , где  $W = Z \cup \{w\}$ ,  $\beta = \gamma \cup \{(v, w) | v \in Z, d^-(v) = 0\} \cup \{(w, v) | v \in Z, d^+(v) = 0\} \cup \{(v, w), (w, v) | v \in Z, d^+(v) = 1, d^-(v) = 1\}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим оргграф  $H = (W, \beta)$ , построенный по рецепту теоремы. Для доказательства корректности необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы 2.1 (критерия ТНР для оргграфов):

1.  $|W| = |Z| + 1$ , так как  $Z = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ ,  $W = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, w\}$ .
2. Очевидно, что  $M \cong H - w$  в силу построения.

3. Оргграф  $H$  является расширением для многоугольного оргграфа  $M$ . Действительно, при вложении  $\phi : Z \rightarrow (W - v_i)$  многоугольного оргграфа  $M$  в некоторый максимальный подграф  $H - v_i$  оргграфа  $H$ , полученный удалением вершины  $v_i$ , вершину  $v_i$  отобразим в вершину  $w$ ,  $\phi(v_i) = w$ , а остальные

вершины отобразим сами в себя.

4 (Свойство неприводимости). Докажем, что при удалении любой дуги, инцидентной вершине  $w$  из орграфа  $H$ , полученный орграф не будет расширением для орграфа  $G$ .

Рассмотрим вершины, являющиеся источниками в исходном четном многоугольном орграфе  $M$ . Пусть вершина  $v_i \in Z$  — некоторый источник. Тогда по построению из вершины  $v_i$  входит дуга  $(v_i, w)$  в вершину  $w$  в орграфе  $H$ . В случае удаления дуги  $(v_i, w)$  максимальные орграфы  $H - (v_i, w) - v_{i-1}$  и  $H - (v_i, w) - v_{i+1}$  орграфа  $H - (v_i, w)$  содержат вершину-источник  $v_i$ , которой инцидентна только одна выходящая дуга  $(v_i, v_{i+1})$  и  $(v_i, v_{i-1})$  соответственно. В то время как каждой вершине четного многоугольного орграфа  $M$  инцидентно ровно две дуги. Т. е. вложение четного многоугольного орграфа  $M$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (v_i, w)$  невозможно.

Рассмотрим вершины, являющиеся стоками в исходном четном многоугольном орграфе  $M$ . Пусть вершина  $v_i \in Z$  — некоторый сток. Тогда по построению в вершину  $v_i$  входит дуга  $(w, v_i)$  из вершины  $w$  в орграфе  $H$ . В случае удаления дуги  $(w, v_i)$  максимальные орграфы  $H - (w, v_i) - v_{i-1}$  и  $H - (w, v_i) - v_{i+1}$  орграфа  $H - (w, v_i)$  содержат вершину-сток  $v_i$ , которой инцидентна только одна выходящая дуга  $(v_{i+1}, v_i)$  и  $(v_{i-1}, v_i)$  соответственно. В то время как каждой вершине четного многоугольного орграфа  $M$  инцидентно ровно две дуги. Т. е. вложение четного многоугольного орграфа  $M$  в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_i)$  невозможно.

Рассмотрим вершины  $v \in Z$ , имеющие в исходном четном многоугольном орграфе  $M$  степень исхода и степень захода, равные 1. Одна из таких вершин  $v_i$  изображена на рис. 2.17. Пунктирные линии на рис. 2.17, соединяющие пары вершин, означают, что между ними может быть как одна дуга в любом из направлений, так и две дуги. Пусть для определенности, нумерация вершин выбрана так, что из вершины  $v_{i-1}$  следует дуга  $(v_{i-1}, v_i)$  в вершину  $v_i$ , а из вершины  $v_i$  следует дуга  $(v_i, v_{i+1})$  в вершину  $v_{i+1}$ . По утверждению теоремы в орграфе  $H$  вершина  $v_i$  соединена встречными дугами  $(v_i, w)$  и  $(w, v_i)$  с

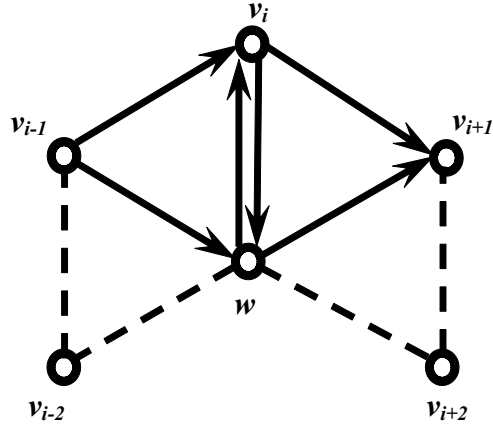


Рисунок 2.17. Одна из вершин многоугольного орграфа  $M$ , имеющая степень исхода и степень захода, равные 1

вершиной  $w$ .

Заметим, что по построению, дуги  $(v_{i-1}, w)$ ,  $(w, v_{i+1})$  присутствуют в расширении  $H$  вне зависимости от ориентации дуги между вершинами  $v_{i-2}$  и  $v_{i-1}$ , а также вершинами  $v_{i+1}$  и  $v_{i+2}$ . Действительно, если в исходном четном многоугольном орграфе  $M$  присутствует дуга  $(v_{i-2}, v_{i-1})$ , т. е.  $b_{i-2} = 1$ , то в орграфе  $H$  вершина  $v_{i-1}$  соединена встречными дугами  $(w, v_{i-1})$  и  $(v_{i-1}, w)$  с вершиной  $w$ ; если в исходном четном многоугольном орграфе  $M$  присутствует дуга  $(v_{i-1}, v_{i-2})$ , т. е.  $b_{i-2} = 0$ ,  $d^-(v_{i-1}) = 0$ , то в орграфе  $H$  вершина  $v_{i-1}$  соединена дугой  $(v_{i-1}, w)$  с вершиной  $w$ . Аналогичные рассуждения применимы для ориентации дуги между вершинами  $v_{i+1}$  и  $v_{i+2}$ .

Заметим, что если дуга  $(v_{i-2}, v_{i-1})$  принадлежит четному многоугольному орграфу  $M$ ,  $(v_{i-2}, v_{i-1}) \in \gamma$ , т. е.  $b_{i-2} = 1$ , то по построению дуга  $(v_{i-2}, w) \in \gamma'$ . Действительно, если  $d^-(v_{i-2}) = 0$ , то есть вершина  $v_{i-2}$  является источником, дуга  $(v_{i-2}, w) \in \gamma'$  присутствует в орграфе  $H$ ; если  $d^+(v_{i-2}) = 1$  и  $d^-(v_{i-2}) = 1$ , то в орграфе  $H$  вершина  $v_{i-2}$  соединена встречными дугами  $(v_{i-2}, w)$  и  $(w, v_{i-2})$  с вершиной  $w$ . В любом случае, если дуга  $(v_{i-2}, v_{i-1}) \in \gamma$ , т. е.  $b_{i-2} = 1$ , то дуга  $(v_{i-2}, w) \in \gamma'$ . Если дуга  $(v_{i-1}, v_{i-2})$  присутствует в четном многоугольном орграфе  $M$ ,  $(v_{i-1}, v_{i-2}) \in \gamma$ , т. е.  $b_{i-2} = 0$ , то по построению дуга  $(w, v_{i-2}) \in \gamma'$ . Действительно, если  $d^+(v_{i-2}) = 0$ , то есть вершина  $v_{i-2}$  является стоком, дуга  $(w, v_{i-2}) \in \gamma'$  присутствует в орграфе  $H$ ; если  $d^+(v_{i-2}) = 1$

и  $d^-(v_{i-2}) = 1$ , то в орграфе  $H$  вершина  $v_{i-2}$  соединена встречными дугами  $(v_{i-2}, w)$  и  $(w, v_{i-2})$  с вершиной  $w$ . В любом случае, если дуга  $(v_{i-1}, v_{i-2}) \in \gamma$ , т. е.  $b_{i-2} = 0$ , то дуга  $(v_{i-2}, w) \in \gamma'$ . Аналогичные рассуждения справедливы для ориентации дуги между вершинами  $v_{i+1}$  и  $v_{i+2}$ . Если дуга  $(v_{i+1}, v_{i+2}) \in \gamma$ , т. е.  $b_{i+1} = 1$ , то дуга  $(w, v_{i+2}) \in \gamma'$ ; если дуга  $(v_{i+2}, v_{i+1}) \in \gamma$ , т. е.  $b_{i+1} = 0$ , то дуга  $(v_{i+2}, w) \in \gamma'$ .

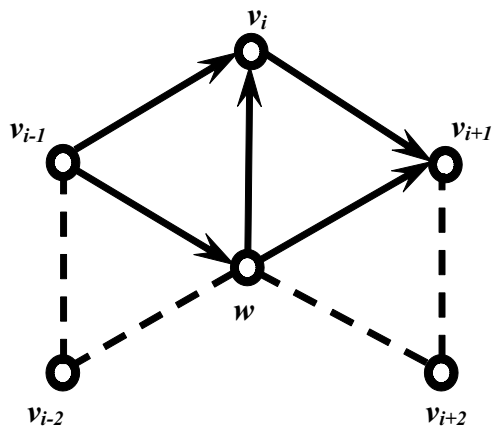


Рисунок 2.18. Орграф  $H - (v_i, w)$

Четный многоугольный орграф  $M$  имеет двоичный вектор  $b^0(M) = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_{i-2}, 1, 1, b_{i+1}, \dots, b_{n-2}, b_{n-1})$ , в силу вышеописанной нумерации его вершин, при которой  $b_{i-1} = 1$  и  $b_i = 1$ . Покажем, что ни дугу  $(v_i, w)$ , ни дугу  $(w, v_i)$  нельзя удалить из орграфа  $H$  без нарушения свойства «быть расширением» для многоугольного орграфа  $M$ .

Рассмотрим орграф  $H - (v_i, w)$ , изображенный на рис. 2.18. Докажем, что четный многоугольный орграф  $M$  не вкладывается в максимальный подграф  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$  орграфа  $H - (v_i, w)$ . Для этого покажем, что не выполняется ни одно из  $2n$  вложений четного многоугольного орграфа  $M$  в максимальный подграф  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$  орграфа  $H - (v_i, w)$ . Все  $2n$  возможных вложений описаны в Теореме 2.8. Единственной частью орграфа  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ , являющейся многоугольным орграфом, является часть, образованная дугами между парами вершин  $v_0$  и  $v_1$ ,  $v_1$  и  $v_2$ ,  $\dots$ ,  $v_{i-2}$  и  $v_{i-1}$ , дугой  $(v_{i-1}, v_i)$ , дугой  $(w, v_i)$ , дугой между вершинами  $w$  и  $v_{i+2}$  и дугами между парами вершин  $v_{i+2}$  и  $v_{i+3}$ ,  $v_{i+3}$  и  $v_{i+4}$ ,  $\dots$ ,  $v_{n-1}$  и  $v_n$ ,  $v_n$  и  $v_0$ . При этом, если вершина  $v_{i+2}$  в



многоугольном орграфе  $M$  является источником или стоком, то направление дуги между вершинами  $w$  и  $v_{i+2}$  совпадает с направлением дуги между вершинами  $v_{i+1}$  и  $v_{i+2}$ ; если  $d^+(v_{i+2}) = 1$  и  $d^-(v_{i+2}) = 1$ , то между вершиной  $w$  и  $v_{i+2}$  существуют встречные дуги  $(w, v_{i+2})$ ,  $(v_{i+2}, w)$  по построению. Обозначим данную часть орграфа  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ , являющуюся многоугольным орграфом, через  $F$ . Часть  $F$  имеет двоичный вектор  $b^0(F) = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_{i-2}, 1, 0, b_{i+1}, \dots, b_{n-2}, b_{n-1})$ , при этом  $b_j^0(M) = b_j^0(F)$ , где  $0 \leq j \leq n-1, j \neq i$ .

Очевидно, что вложение 0 «по часовой стрелке» многоугольного орграфа  $M$  в максимальный подграф  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$  орграфа  $H - v_{i+1}$  не выполняется, так как  $i$ -й элемент в двоичном векторе  $b^0(M)$  равен 1, а  $i$ -й в двоичном векторе  $b^0(F)$  равен 0,  $b_i^0(M) \neq b_i^0(F)$ . Покажем, что также не выполняется ни одно из других  $n-1$  вложений «по часовой стрелке». При вложении  $k$  «по часовой стрелке», где  $1 \leq k \leq n-1$  четного многоугольного орграфа  $M$  в максимальный подграф  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$  орграфа  $H - v_{i+1}$  должно выполняться  $1 = b_i^0(M) = b_{i+k}^0(F) = b_{i+k}^0(M) = b_{i+2k}^0(F) = b_{i+2k}^0(M) = \dots = b_{i+l}^0(F) = b_{i+l}^0(M)$ , где  $l = 1, 2, 3, \dots$ , так как  $b_j = b_{j+k}$ , где  $0 \leq j \leq n-1, j \neq i-k-1, i-k$ , по условию теоремы 2.8 для всех вложений «по часовой стрелке». При  $l = 2n$  получаем, что  $1 = b_i^0(M) = \dots = b_{i+2nl}^0(F) = b_{i+2nl}^0(M) = b_i^0(M) = 0$ , то есть приходим к противоречию. В силу произвольного выбора значения  $k$ , получаем, что ни одно из  $n$  вложений «по часовой стрелке» четного многоугольного орграфа  $M$  в максимальный подграф  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$  орграфа  $H - v_{i+1}$  не выполняется.

Теперь покажем, что ни одно из вложений «против часовой стрелки» четного многоугольного орграфа  $M$  в максимальный подграф  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$  орграфа  $H - v_{i+1}$  не выполняется. Пусть среди элементов  $b_i^0$ , где  $1 \leq i \leq i-2, i+1 \leq i \leq n-1$ , двоичного вектора  $b^0(M)$   $k_0$  элементов являются нулями и  $k_1$  являются единицами. Тогда в двоичном векторе  $b^0(M)$   $k_0$  элементов принимают значение 0, а  $k_1 + 2$  элемента принимают значение 1, так как  $b_{i-1}^0(M) = 1$  и  $b_i^0(M) = 1$ . Так как порядок  $n$  является четным, то  $\exists n_1 \in Z : 2n_1 = n$ , при этом  $k_0 + k_1 + 2 = 2n_1$ . При любом вложении  $k$  «против

часовой стрелки», где  $0 \leq k \leq n-1$  в максимальный подграф  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ , многоугольный оргграф  $M$  должен быть изоморфен части, у которой в двоичном векторе  $k_1 + 1$  нулей, так как  $(b_i^0(M))' = 0$ , и  $k_0 + 1$  единиц, так как  $(b_{i+1}^0(M))' = 1$ . Ясно, что если два многоугольных оргграфа изоморфны, то количество нулей и единиц в их двоичных векторах должно совпадать. В данном случае, при любом из  $n$  вложений «против часовой стрелки», необходимо выполнение эквивалентных условий  $k_0 = k_1 + 1$  (одинаковое количество нулей) и  $k_1 + 2 = k_0 + 1$  (одинаковое количество единиц). Но так как порядок  $n = 2n_1$  многоугольного оргграфа  $M$  четный,  $k_0 = k_1 + 1$  и  $k_0 + k_1 = 2n_1$ , то не существует целых неотрицательных чисел  $k_0$  и  $k_1$ , удовлетворяющих этим условиям, при любом целом положительном  $n \geq 4$ . Действительно, это возможно только если  $k_0 = \frac{2n_1+1}{2}$ , а при любом целом неотрицательном  $n_1$  значение  $\frac{2n_1+1}{2}$  не будет являться целым числом. Получаем, что ни одно из  $n$  вложений «против часовой стрелки» четного многоугольного оргграфа  $M$  в максимальный подграф  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$  не выполняется.

Таким образом, доказано, что дугу  $(v_i, w)$  нельзя удалить из оргграфа  $H$  без потери свойства «быть расширением», так как многоугольный оргграф  $M$  не вкладывается в максимальный подграф  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$  оргграфа  $H - (w, v_i)$ .

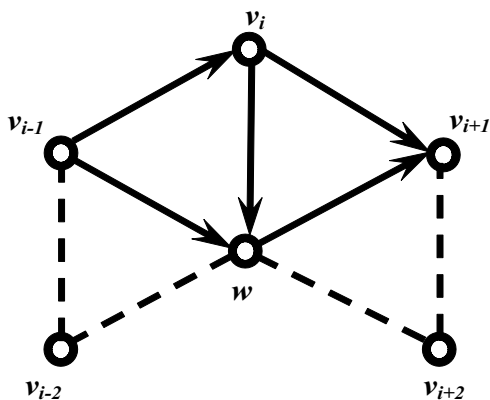


Рисунок 2.19. Оргграф  $H - (w, v_i)$

Далее рассмотрим оргграф  $H - (w, v_i)$ , изображенный на рис. 2.19. Докажем, что четный многоугольный оргграф  $M$  не вкладывается в максимальный подграф  $H - v_{i-1} - (w, v_i)$  оргграфа  $H - (w, v_i)$ . Для этого покажем, что не вы-

полняется ни одно из  $2n$  вложений четного многоугольного орграфа  $M$  в максимальный подграф  $H - v_{i-1} - (w, v_i)$  орграфа  $H - v_{i-1}$ . Единственной частью орграфа  $H - v_{i-1} - (w, v_i)$ , являющейся многоугольным оргграфом, является часть, образованная дугами между парами вершин  $v_0$  и  $v_1$ ,  $v_1$  и  $v_2$ ,  $\dots$ ,  $v_{i-3}$  и  $v_{i-2}$ , дугой между вершинами  $v_{i-2}$  и  $w$ , дугой  $(v_i, w)$ ,  $(v_i, v_{i+1})$ , и дугами между парами вершин  $v_{i+1}$  и  $v_{i+2}$ ,  $v_{i+2}$  и  $v_{i+3}$ ,  $\dots$ ,  $v_{n-1}$  и  $v_n$ ,  $v_n$  и  $v_0$ . При этом, если вершина  $v_{i-2}$  в четном многоугольном орграфе  $M$  является источником или стоком, то направление дуги между вершинами  $v_{i-2}$  и  $w$  совпадает с направлением дуги между вершинами  $v_{i-2}$  и  $v_{i-1}$ ; если  $d^+(v_{i-2}) = 1$  и  $d^-(v_{i-2}) = 1$ , то между вершиной  $v_{i-2}$  и  $w$  существуют встречные дуги  $(w, v_{i-2})$ ,  $(v_{i-2}, w)$  по построению. Обозначим данную часть орграфа  $H - v_{i-1} - (w, v_i)$ , являющуюся многоугольным оргграфом, через  $F$ . Часть  $F$  имеет двоичный вектор  $b^0(F) = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_{i-2}, 0, 1, b_{i+1}, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n)$ , при этом  $b_j^0(M) = b_j^0(F)$ , где  $0 \leq j \leq n, j \neq i - 1$ .

Очевидно, что вложение 0 «по часовой стрелке» четного многоугольного орграфа  $M$  в максимальный подграф  $H - v_{i-1} - (w, v_i)$  не выполняется, так как  $(i - 1)$ -й элемент в двоичном векторе  $b^0(M)$  равен 1, а  $(i - 1)$ -й в двоичном векторе  $b^0(F)$  равен 0,  $b_{i-1}^0(M) \neq b_{i-1}^0(F)$ . Покажем, что также не выполняется ни одно из других  $n - 1$  вложений «по часовой стрелке». При вложении  $k$  «по часовой стрелке», где  $1 \leq k \leq n - 1$ , четного многоугольного орграфа  $M$  в максимальный подграф  $H - v_{i-1} - (w, v_i)$  должно выполняться  $1 = b_{i-1}^0(M) = b_{i-1+k}^0(F) = b_{i-1+k}^0(M) = b_{i-1+2k}^0(F) = b_{i-1+2k}^0(M) = \dots = b_{i-1+l}^0(F) = b_{i-1+l}^0(M)$ , где  $l = 1, 2, 3, \dots$ , так как  $b_j = b_{j+k}$ , где  $0 \leq j \leq n - 1, j \neq i - k - 1, i - k$ , по условию теоремы 2.8 для всех вложений «по часовой стрелке». При  $l = 2n$  получаем, что  $1 = b_{i-1}^0(M) = \dots = b_{i-1+2nl}^0(F) = b_{i-1+2nl}^0(M) = b_{i-1}^0(M) = 0$ , то есть приходим к противоречию. В силу произвольного выбора значения  $k$ , получаем, что ни одно из  $n$  вложений «по часовой стрелке» многоугольного орграфа  $M$  в максимальный подграф  $H - v_{i-1} - (w, v_i)$  не выполняется.

Осталось показать, что ни одно из вложений «против часовой стрелки»

четного многоугольного орграфа  $M$  в максимальный подграф  $H - v_{i-1} - (w, v_i)$  не выполняется. Данный факт доказывает аналогично вышеописанному случаю вложения в максимальный подграф  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ , в силу того, что количество нулей и единиц в соответствующем булевом векторе остается таким же. ■

**Пример.** Для наглядности рассмотрим ТНР для четного многоугольного орграфа  $M$ , изображенного на рис. 2.16,  $b(M) = 0001$ . Орграф  $H$ , изображенный на рис. 2.20, построенный по рецепту теоремы 2.9, будет являться ТНР для четного многоугольного орграфа  $M$ , изображенного на рис. 2.16.

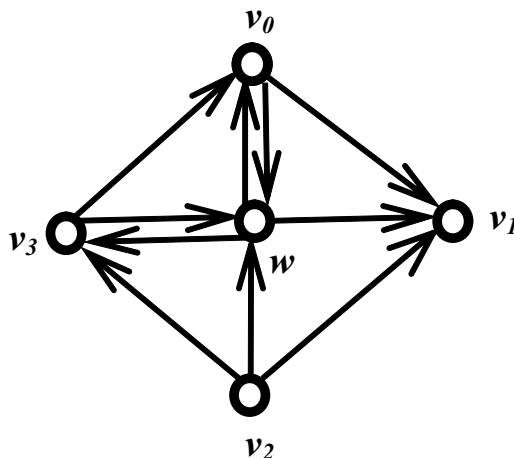


Рисунок 2.20. ТНР для многоугольный орграфа  $M$  по рецепту теоремы 2.9

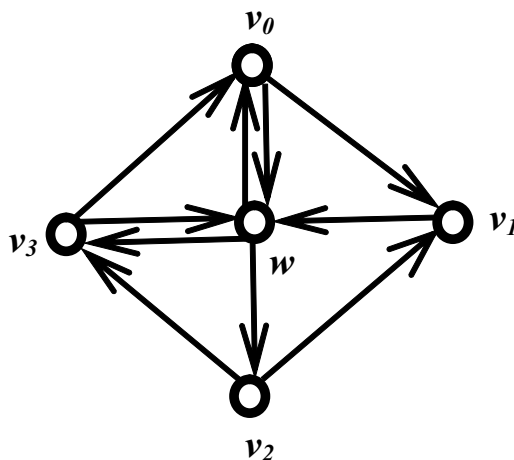


Рисунок 2.21. Альтернативный ТНР для многоугольного орграфа  $M$

ТНР для некоторого четного многоугольного орграфа, построенное по рецепту теоремы 2.9, является не единственным ТНР для этого четного многоугольного орграфа в общем случае. Для четного многоугольного орграфа  $M$ , изображенного на рис. 2.16, существует еще одно ТНР, изображенное на рис. 2.21. Легко понять, что оно не изоморфно ТНР, построенному по теореме 2.9 и изображенному на рис. 2.20, так как в нем нет источников и стоков, а в ТНР на рис. 2.21, вершина  $v_2$  является источником, а вершина  $v_1$  — стоком.

## 6. Т-неприводимые расширения для многоугольных орграфов

Далее будет рассмотрен полиномиальный алгоритм построения ТНР для многоугольных орграфов, как четных, так и нечетных, имеющий асимптотическую сложность  $O(n^3)$  (см. [A11]).

**Алгоритм 2.5.** Дан многоугольный орграф  $M = (Z, \gamma)$ . Построим его ТНР следующим образом.

1. Добавим к  $M$  вершину  $w$ .
2. Для каждой вершины  $v \in Z$  добавим дуги следующим образом:
  - если  $v \in Z$  является источником, то добавим дугу  $(v, w)$ ;
  - если  $v \in Z$  является стоком, то добавим дугу  $(w, v)$ ;
  - если  $v \in Z$ , такая что  $d^+(v) = 1$  и  $d^-(v) = 1$ , то добавим дуги  $(v, w)$  и  $(w, v)$ .

Орграф, построенный после вышеописанных пунктов, обозначим через  $H_0 = (W, \beta_0)$ . Положим  $k = 0$ ;

Если  $n \equiv 0 \pmod{2}$ , то есть многоугольный орграф  $M$  является четным, то завершаем работу алгоритма, так как построенный орграф  $H_0$  является искомым ТНР. Иначе, в случае  $n \equiv 1 \pmod{2}$ , переходим к следующему пункту алгоритма.

3. Рассматриваем вершины  $v_i$ , имеющие степень исхода и степень захода, равные 1,  $d^+(v_i) = 1$  и  $d^-(v_i) = 1$ , в многоугольном орграфе  $M$ , в порядке возрастания их индексов.

Пусть, для определенности, вершины пронумерованы таким образом, что

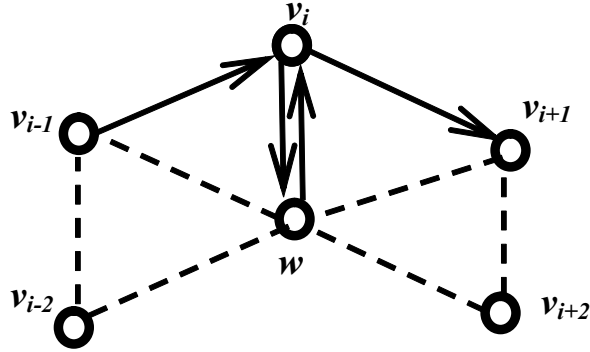


Рисунок 2.22. Иллюстрация п. 3 алгоритма 2.5

если рассматриваемая вершина  $v_i \in Z$  в пункте 3 имеет степень исхода и степень захода, равные 1, то  $\exists v_{i-1} \in Z : (v_{i-1}, v_i) \in \gamma$  и  $\exists v_{i+1} \in Z : (v_i, v_{i+1}) \in \gamma$  (рис. 2.22). Также, по построению в пункте 2 алгоритма 2.5, вершина  $v_i$  соединена с вершиной  $w$  дугами  $(v_i, w)$  и  $(w, v_i)$ . Возможны следующие случаи.

Случай А: многоугольный орграф  $M$  вкладывается в орграф  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ . Строим орграф  $H_{k+1} = (W, \beta_{k+1})$ , такой что  $H_{k+1} = H_k - (w, v_i)$ ,  $\beta_{k+1} = \beta_k - (w, v_i)$ . Далее алгоритм продолжает работу с орграфом  $H_{k+1}$ , переходим к следующей вершине в пункте 3;

Случай В: многоугольный орграф  $M$  вкладывается в орграф  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ . Строим орграф  $H_{k+1} = (W, \beta_{k+1})$ , такой что  $H_{k+1} = H_k - (v_i, w)$ ,  $\beta_{k+1} = \beta_k - (v_i, w)$ . Далее алгоритм продолжает работу с орграфом  $H_{k+1}$ , переходим к следующей вершине в пункте 3;

Случай С: многоугольный орграф  $M$  не вкладывается ни в орграф  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ , ни в орграф  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ . Не производим никаких действий, переходим к следующей вершине в пункте 3;

Каким способом вычислительно быстро за полиномиальное время проверить вложение многоугольного орграфа  $M$  в орграф  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$  или в орграф  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ , подробно описано ниже.

После того, как все вершины рассмотрены, алгоритм завершает свою ра-

боту. Построенный оргграф  $H_k$  из оргграфа  $H_0$ , где  $k$  — это количество дуг, удаленных в пункте 3 алгоритма, является ТНР для многоугольного оргграфа  $M$ .

Проверка вложения многоугольного оргграфа  $M$  в один из подграфов оргграфов  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$  или  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$  осуществляется следующим образом. Как было сказано выше,  $\exists v_{i-1} \in Z : (v_{i-1}, v_i) \in \gamma$  и  $\exists v_{i+1} \in Z : (v_i, v_{i+1}) \in \gamma$  и по построению в пункте 2 алгоритма 2.5, вершина  $v_i$  соединена с вершиной  $w$  дугами  $(v_i, w)$  и  $(w, v_i)$ . Данная ситуация представлена на рис. 2.22. На нем изображены вершина  $v_i$ , такая что  $d^+(v_i) = 1$  и  $d^-(v_i) = 1$  в многоугольном оргграфе  $M$ , вершины  $v_{i-1}$  и  $v_{i+1}$ , смежные с вершиной  $v_i$ , а также вершина  $v_{i-2}$  смежная с вершиной  $v_{i-1}$  и вершина  $v_{i+2}$ , смежная с вершиной  $v_{i+1}$ . Пунктирная линия на рис. 2.22, соединяющая две вершины, означает, что между ними может быть как одна дуга в любом из направлений, так и две дуги, если одна из инцидентных вершин является вершиной  $w$ . Если многоугольный оргграф  $M$  вкладывается в оргграф  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ , то в оргграфе  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$  должна быть часть  $F$ , изоморфная многоугольному оргграфу  $M$ . Такая часть  $F$  в оргграфе  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$  может быть образована одной из дуг между вершинами  $v_{i-2}$  и  $w$ , дугой  $(v_i, w)$ , дугой  $(v_i, v_{i+1})$ , дугой между вершинами  $v_{i+1}$  и  $v_{i+2}$  и остальными дугами многоугольного оргграфа  $M$  между парами еще не рассмотренных вершин. В зависимости от того, одна или две дуги были добавлены между вершинами  $v_{i-2}$  и  $w$ , надо проверить одну или две части оргграфа  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$  на изоморфизм многоугольному оргграфу  $M$ .

Часть  $F$  оргграфа  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ , сама являющаяся многоугольным оргграфом, будет изоморфна многоугольному оргграфу  $M$  тогда и только тогда, когда  $b(F) = b(M)$ . Построение двоичного кода для многоугольного оргграфа осуществляется за время  $2n^2 = O(n^2)$  путем выбора лексикографически наименьшего двоичного вектора из  $2n$  кандидатов. Таким образом проверка вложения многоугольного оргграфа  $M$  и оргграф  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$  осуществляется за время  $O(n^2)$ .

Такая же логика используется при проверке вложения многоугольного орграфа  $M$  в один из подграфов  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ . Если многоугольный орграф  $M$  вкладывается в орграф  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ , то в орграфе  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$  должна быть часть  $F$ , изоморфная многоугольному орграфу  $M$ . Такая часть  $F$  в орграфе  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$  может быть образована одной дугой между вершинами  $v_{i+2}$  и  $w$ , дугой  $(w, v_i)$ , дугой  $(v_{i-1}, v_i)$ , дугой между вершинами  $v_{i-2}$  и  $v_{i-1}$  и остальными дугами многоугольного орграфа  $M$  между парами еще не рассмотренных вершин. В зависимости от того, одна или две дуги были добавлены между вершинами  $v_{i+2}$  и  $w$ , надо проверить одну или две части орграфа  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$  на изоморфизм многоугольному орграфу  $M$ .

Аналогично, будет достаточно проверить изоморфизм многоугольного орграфа  $M$  и одной или двух частей орграфа  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ , являющихся многоугольными орграфами, в зависимости от количества добавленных дуг между вершинами  $v_{i+2}$  и  $w$ .

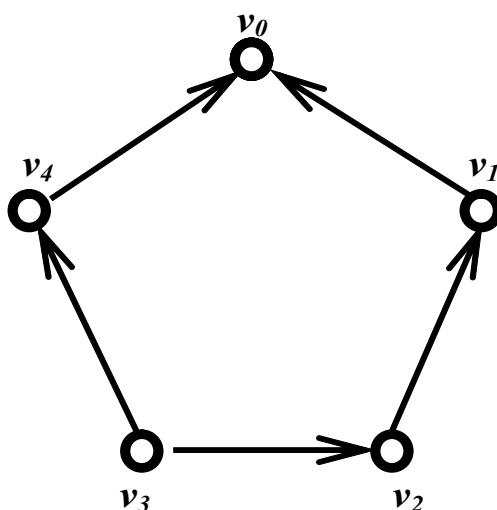


Рисунок 2.23. Многоугольный орграф  $M$ ,  $b(M) = 00011$

**Пример.** Рассмотрим работу алгоритма 2.5 для многоугольного орграфа  $M$ , изображенного на рис. 2.23,  $b(M) = 00011$ .

После применения пунктов 1 и 2 алгоритма 2.5, получим орграф  $H_0 = (W, \beta_0)$ , изображенный на рис. 2.24.

В пункте 3 алгоритма 2.5 будет удалено две дуги из орграфа  $H_0$ : дуга



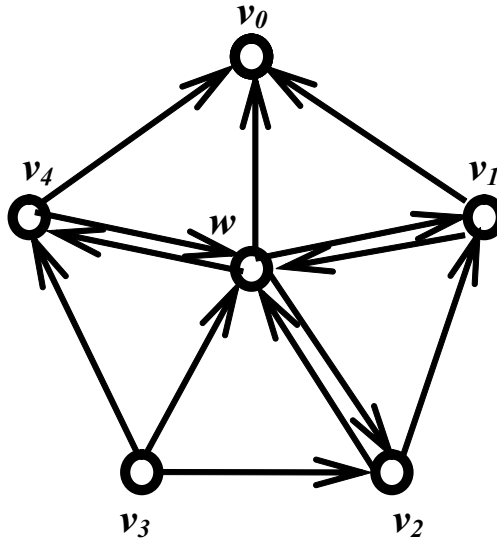


Рисунок 2.24. Орграф  $H_0 = (W, \beta_0)$

$(v_1, w)$  и дуга  $(w, v_2)$ . При рассмотрении вершины  $v_0$  удаляется дуга  $(v_1, w)$ , так как многоугольный орграф  $M$  изоморфен части  $(Z + w - v_0, \{(w, v_1), (v_4, w), (v_3, v_4), (v_3, v_2), (v_2, v_1)\})$  орграфа  $H_0 - v_0 - (v_1, w)$ . Далее строим орграф  $H_1 = H_0 - (v_1, w)$  и алгоритм 2.5 продолжает работу с ним. При рассмотрении вершины  $v_3$  удаляется дуга  $(w, v_2)$ , так как многоугольный орграф  $M$  изоморфен части  $(Z + w - v_3, \{(v_4, v_0), (w, v_4), (v_2, w), (v_2, v_1), (v_1, v_0)\})$  орграфа  $H_1 - v_3 - (w, v_2)$ . Далее строим орграф  $H_2 = H_1 - (w, v_2)$ . Из орграфа  $H_2$  уже нельзя удалить никакую дугу без потери свойства расширения.

После работы алгоритма 2.5 получим орграф  $H_2 = (W, \beta_2)$ , изображенный на рис. 2.25, являющийся ТНР для многоугольного орграфа  $M$ .

**Асимптотическая сложность алгоритма 2.5.** Оценим асимптотическую сложность алгоритма 2.5. Время выполнения пункта 2 алгоритма 2.5 равно  $O(n)$ , так как в нем анализируется степень исхода и степень захода каждой вершины  $v_i \in Z$  многоугольного орграфа  $M = (Z, \gamma)$  порядка  $n$ . Для реализации пункта 3 для каждой вершины  $v_i \in Z$ , не являющейся ни источником, ни стоком, необходимо произвести одну или две проверки многоугольных орграфов на изоморфизм. Изоморфизм многоугольных орграфов устанавли-

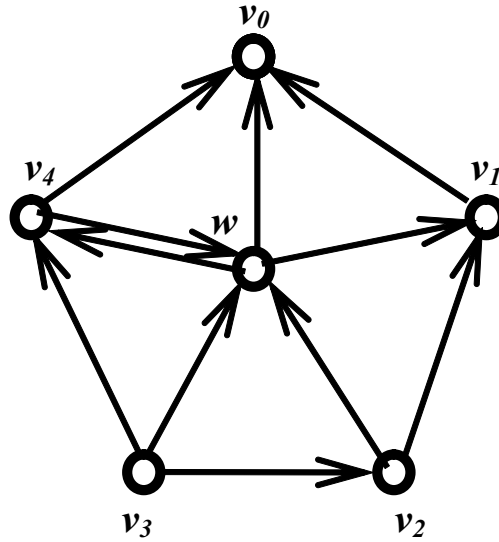


Рисунок 2.25. ТНР для многоугольного орграфа  $M$

вается через анализ их двоичных кодов. Асимптотическая сложность проверки изоморфизма для данного типа орграфов равна  $O(n^2)$ , так как необходимо из  $2n = O(n)$  двоичных векторов многоугольного орграфа выбрать лексикографически минимальный. Так как такую проверку необходимо произвести для не более чем  $O(n)$  вершин, то асимптотическая сложность выполнения пункта 3 оценивается, как  $O(n^3)$ .

В итоге, асимптотическая сложность алгоритма 2.5 составляет  $O(n^3)$  для нечетных многоугольных орграфов и  $O(n)$  для четных многоугольных орграфов.

**Теорема 2.10.** *Алгоритм 2.5 корректен.*

**Доказательство.** Рассмотрим орграф  $H_k = (W, \beta_k)$ , полученный после выполнения алгоритма. Для доказательства корректности предложенного алгоритма необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы 2.1 (критерия ТНР для орграфов).

1.  $|W| = |Z| + 1$ , так как  $Z = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ ,  $W = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, w\}$ .
2. Очевидно, что  $M \cong H_k - w$  в силу построения в алгоритме.
3. После пункта 2, орграф  $H_0$  является расширением для многоугольного

орграфа  $M$ . Действительно, при вложении  $\phi : Z \rightarrow (W - v_i)$  многоугольного орграфа  $M$  в некоторый максимальный подграф  $H_0 - v_i$  орграфа  $H_0$ , полученный удалением вершины  $v_i$ , вершину  $v_i$  отображим в вершину  $w$ ,  $\phi(v_i) = w$ , а остальные вершины отображим сами в себя.

Для четных многоугольных орграфов на этом шаге алгоритма 2.5 ТНР уже получено, так как построения в пунктах 1 и 2 алгоритма 2.5 эквивалентны построениям теоремы 2.9. По этой причине, если многоугольный орграф  $M$  является четным, то на этом шаге алгоритм 2.5 завершает свою работу.

Покажем, что в течение выполнения пункта 3 алгоритма 2.5 каждый орграф  $H_k = (W, \beta_k)$  остается расширением для многоугольного орграфа  $M$ . Если вершина  $v_i$  рассматривается в пункте 3 алгоритма 2.5, то в орграфе  $H_k$  присутствуют встречные дуги  $(v_i, w) \in \beta_k$  и  $(w, v_i) \in \beta_k$  по построению в пункте 2, и в многоугольном орграфе  $M$  будет  $d^+(v_i) = 1$  и  $d^-(v_i) = 1$ , так как  $\exists v_{i-1} \in Z : (v_{i-1}, v_i) \in \gamma$  и  $\exists v_{i+1} \in Z : (v_i, v_{i+1}) \in \gamma$ . Дуга  $(w, v_i)$  используется только при вложении  $\phi : Z \rightarrow (W - v_{i-1})$  многоугольного орграфа  $M$  в орграф  $H_k - v_{i-1}$ , при котором  $v_i$  отображается в вершину  $w$ ,  $\phi(v_i) = w$ , а остальные вершины отображаются сами в себя. При этом  $(w, v_i)$  не используется при вложении  $\phi : Z \rightarrow (W - v_j)$  многоугольного орграфа  $M$  в любой другой максимальный подграф  $H_k - v_j$ , где  $v_j \in W, j \neq i - 1$ . То есть, при удалении дуги  $(w, v_i)$  многоугольный орграф  $M$  будет гарантированно вкладываться в каждый орграф  $H_k - v_j - (w, v_i)$ , где  $v_j \in W, j \neq i - 1$ . При этом в пункте 3 алгоритма 2.5 дуга  $(w, v_i)$  удаляется тогда и только тогда, когда многоугольный орграф  $M$  вкладывается в орграф  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$  (Случай А). Но если многоугольный орграф  $M$  вкладывается в орграф  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$  и вкладывается в каждый орграф  $H_k - v_j - (w, v_i)$ , где  $v_j \in W, j \neq i - 1$ , то орграф  $H_k - (w, v_i)$  является расширением многоугольного орграфа  $M$ . Именно в этом случае в пункте 3 алгоритма 2.5 дуга  $(w, v_i)$  удаляется из орграфа  $H_k$ , после чего алгоритм 2.5 продолжает работу с орграфом  $H_{k+1} = H_k - (w, v_i)$ .

Аналогично, дуга  $(v_i, w)$  используется только при вложении  $\phi : Z \rightarrow (W - v_{i+1})$  многоугольного орграфа  $M$  в орграф  $H_k - v_{i+1}$ . При этом, она

не используется при вложении  $\phi : Z \rightarrow (W - v_j)$  многоугольного орграфа  $M$  в любой максимальный подграф  $H_k - v_j$ , где  $v_j \in W, j \neq i + 1$ . То есть, при удалении дуги  $(v_i, w)$  многоугольный оргграф  $M$  будет гарантированно вкладываться в каждый оргграф  $H_k - v_j - (v_i, w)$ , где  $v_j \in W, j \neq i + 1$ . При этом в пункте 3 алгоритма 2.5 дуга  $(v_i, w)$  удаляется тогда и только тогда, когда многоугольный оргграф  $M$  вкладывается в оргграф  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$  (Случай В). Но если многоугольный оргграф  $M$  вкладывается в оргграф  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$  и вкладывается в каждый оргграф  $H_k - v_j - (v_i, w)$ , где  $v_j \in W, j \neq i + 1$ , то оргграф  $H_k - (v_i, w)$  является расширением многоугольного орграфа  $M$ . Именно в этом случае в пункте 3 алгоритма 2.5 дуга  $(v_i, w)$  удаляется из орграфа  $H_k$ , после чего алгоритм 2.5 продолжает работу с оргграфом  $H_{k+1} = H_k - (v_i, w)$ .

4. (свойство неприводимости). Докажем, что при удалении любой дуги, инцидентной вершине  $w$ , из орграфа  $H_k = (W, \beta_k)$ , полученный оргграф не будет расширением для орграфа  $M = (Z, \gamma)$ . Если из орграфа  $H_k$  удалить дугу  $(v_i, w)$ , добавленную в пункте 2 из источника  $v_i$  в вершину  $w$ , то в максимальном подграфе  $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$  и в максимальном подграфе  $H_k - v_{i-1} - (v_i, w)$  орграфа  $H_k - (v_i, w)$  вершина  $v_i$  будет изолированной. Если из орграфа  $H_k$  удалить дугу  $(w, v_i)$ , добавленную в пункте 2 из вершины  $w$  в сток  $v_i$ , то в орграфе  $H_k - v_{i+1} - (w, v_i)$  и в орграфе  $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$  вершина  $v_i$  будет изолированной. Покажем, что из орграфа  $H_k$  также нельзя удалить никакую дугу, инцидентную вершине  $v$ , которая не является ни источником, ни стоком в многоугольном орграфе  $M$ . Доказательство проведем методом от противного. Пусть при удалении какой-то либо дуги, инцидентной вершине  $v_i$ , которая не является ни источником, ни стоком в многоугольном орграфе  $M$ , из орграфа  $H_k$ , полученный оргграф будет расширением для многоугольного орграфа  $M$ . В таком случае данная дуга должна была быть удалена в пункте 3 в течение работы алгоритма 2.5. Получили противоречие.

Свойство неприводимости доказано. ■

В ТНР  $H$  для многоугольного орграфа  $M$  порядка  $n$  может быть от  $n$  до  $2n$  добавленных дуг, т. е. дуг, инцидентных вершине  $w$ . Предложенный

алгоритм позволяет описать семейства многоугольных орграфов, на которых достигается верхняя и нижняя оценка количества добавленных дуг, где под верхней оценкой подразумевается  $2n$  добавленных дуг, а под нижней —  $n$  добавленных дуг.

**Теорема 2.11.** *Из многоугольных орграфов контуры и только они, имеют ТНР, содержащие  $2n$  добавленных дуг.*

**Доказательство.** Докажем, что контуры имеют  $2n$  добавленных дуг в ТНР. Рассмотрим произвольный контур  $C_n = (V, \alpha)$  порядка  $n$ , тогда орграф  $H = (V \cup \{w\}, \beta)$ , такой что  $H \cong \text{ТР}(C_n)$ , получается из контура  $C_n$  добавлением  $2n$  добавленных дуг, инцидентных вершине  $w$ .

Докажем, что орграф  $H \cong \text{ТР}(C_n)$  является ТНР для контура  $C_n = (V, \alpha)$  порядка  $n$ . Чтобы доказать это, необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы 2.1 (критерия ТНР для орграфов).

Очевидно, что первые три пункта теоремы 2.1 выполняются для тривиальных расширений.

Докажем свойство неприводимости. Пусть некоторой дуги  $(v_i, w) \in \beta$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$ , входящей в вершину  $w$ , нет в орграфе  $H$ . Рассмотрим максимальный подграф  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$  орграфа  $H - (v_i, w)$ , такой что  $H - (v_i, w) \cong \text{ТР}(C_n) - (v_i, w)$ . В подграфе  $H - v_{i+1} - (v_i, w)$  получаем, что  $d^+(v_i) = 0$ , в то время как степень исхода каждой вершины контура  $C_n$  равна 1. Следовательно, контур  $C_n$  не вкладывается в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (v_i, w)$ . В силу произвольности выбора дуги  $(v_i, w) \in \beta$ , входящей в вершину  $w$ , получаем, что каждая дуга, входящая в вершину  $w$ , должна присутствовать в ТНР для контура  $C_n$ .

Пусть некоторой дуги  $(w, v_i) \in \beta$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$ , выходящей из вершины  $w$ , нет в орграфе  $H$ . Рассмотрим максимальный подграф  $H - v_{i-1} - (w, v_i)$  орграфа  $H - (w, v_i)$ , такой что  $H - (w, v_i) \cong \text{ТР}(C_n) - (w, v_i)$ . В подграфе  $H - v_{i-1} - (w, v_i)$  получаем, что  $d^-(v_i) = 0$ , в то время как степень захода каждой вершины контура  $C_n$  равна 1. Следовательно, контур  $C_n$  не вкладывается в один из максимальных подграфов орграфа  $H - (w, v_i)$ . В силу произвольности

выбора дуги  $(w, v_i) \in \beta$ , выходящей из вершины  $w$ , получаем, что каждая дуга, выходящая из вершины  $w$ , должна присутствовать в ТНР для контура  $C_n$ .

Свойство неприводимости доказано.

Докажем теперь, что контуры порядка  $n$  являются единственными многоугольными орграфами, в ТНР которых существует  $2n$  добавленных дуг. Действительно, если многоугольный орграф  $M$  порядка  $n$  не является контуром, то в нем существует хотя бы одна вершина  $v$ , являющаяся либо источником, либо стоком. Тогда по схеме алгоритма у него будет существовать ТНР, в котором меньше, чем  $2n$  дуг, так как в пункте 2 между вершиной  $v$  и  $w$  будет добавлена только одна дуга.

Таким образом доказано, что из многоугольных орграфов контуры и только они, имеют ТНР, содержащие  $2n$  добавленных дуг. ■

Следующая теорема показывает общий вид многоугольных орграфов, в ТНР которых содержится  $n$  добавленных дуг, то есть минимально возможное количество.

**Теорема 2.12.** *Многоугольные орграфы порядка  $n$ , где  $n$  - четное, с двоичным кодом вида  $0101..01$ , имеют ТНР, содержащие  $n$  добавленных дуг.*

**Доказательство.** Каждая вершина многоугольных орграфов с двоичным кодом вида  $0101..01$  является либо источником, либо стоком. Следовательно, по схеме алгоритма 2.5 в пункте 2, для таких орграфов будет добавлено ровно  $n$  дуг, и впоследствии ни одна из  $n$  добавленных дуг не будет удалена. ■

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги исследований, представляемых в диссертации. В данной работе рассмотрены две основные темы и получены следующие результаты.

Тема 1. Оптимальные эйлеровы реконструкции ориентированных графов.

1. Описаны полиномиальные алгоритмы построения оптимальных эйлеровых реконструкций оргграфов методом переориентации, добавления и удаления дуг. Доказаны теоремы о корректности предложенных алгоритмов и приведены оценки их асимптотической сложности.

2. Написана программа для ЭВМ, реализующая алгоритмы оптимальных эйлеровых реконструкций оргграфов (см. [А5]).

Тема 2. T-неприводимые расширения для некоторых ориентированных графов.

1. Описан полиномиальный алгоритм построения неминимального ТНР для цепи. Доказана теорема о корректности алгоритма.

2. Описан полиномиальный алгоритм построения  $\min(l, m)$  неминимальных ТНР для звезды  $S_{l,m}$ , неизоморфных друг другу. Описан полиномиальный алгоритм построения минимального ТНР для звезд. Доказана теорема о корректности предложенных алгоритмов.

3. Доказана теорема о построении одного из неминимальных ТНР для объединения цепей. Описан полиномиальный алгоритм построения минимального ТНР для объединения цепей. Доказана теорема о корректности алгоритма.

4. Доказана теорема о построении одного из T-неприводимых расширений для многоугольных оргграфов с четным количеством вершин. Получен полиномиальный алгоритм построения T-неприводимого расширения для произвольного многоугольного оргграфа. Доказана теорема о корректности предложенного алгоритма и оценена его асимптотическая сложность.

## Список литературы.

1. *Абросимов М. Б.* Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов // Изд-во Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2006. — Т. 6, вып. 1/2. — С. 86-91.
2. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки, 2010. Т. 88. № 5. — С. 643-650.
3. *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения направленных звезд // Дискрет. матем. — 2011. — Т. 23, № 2. — С. 93-102.
4. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2012. — 192 С.
5. *Абросимов М. Б., Долгов А. А.* Точные расширения некоторых турниров // Вестн. Томск. гос. ун-та. Приложение. — 2007. — № 23. — С. 211-216.
6. *Абросимов М. Б., Долгов А. А.* Семейства точных расширений турниров // Прикладная дискретная математика. — 2008. — № 1. — С. 101-107.
7. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. — М.: Наука. Физматлит, 1997.
8. *Кабанов М. А.* Функциональные конгруэнции ориентированных графов // Упорядоченные множества и решетки. Саратов: Сигма-плюс, 1995. Вып. 11.
9. *Кабанов М. А.* О конгруэнциях ориентированных графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во «Колледж», 1998. Вып. 2.
10. *Киреева А. В.* О конгруэнциях и автоморфизмах корневых деревьев // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1991. Вып. 10.
11. *Киреева А. В.* Отказоустойчивость в функциональных графах // Упорядоченные множества и решетки. Саратов: Сигма-плюс, 1995. Вып. 11.
12. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Риверс Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1990.
13. *Курносова С. Г.* Т-неприводимые расширения графов.: дис. канд. физ.-



мат. наук: 01.01.09 / Курносова Светлана Геннадьевна — Саратов, 2007. — 137 С.

14. *Мирзаянов М. Р.* Сильно связанные конгруэнции ориентированных графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 7.

15. *Салий В. Н.* Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширении графов // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. 2003. №6

16. *Салий В. Н.* Оптимальные реконструкции графов // В кн.: Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. — Саратов; Изд-во Саратов. ун-та, 2008. — С. 59-65.

17. *Салий В. Н.* Упорядоченное множество связанных частей многоугольного графа // Известия Саратов. гос. ун-та. — 2013. — Т.13, вып. 2. — С. 44-51.

18. *Седжвик Р.* Фундаментальные алгоритмы на C++. Алгоритмы на графах: Пер. с англ. — СПб.: «ДиаСофтЮП», 2002.

19. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing systems. // IEEE transaction on computers. — 1976. — Vol. C-26. — № 9. — P. 875-884

### **Публикации автора по теме диссертации.**

А1. *Гавриков А. В.* Оптимальная переориентация дуг орграфа, приводящая к эйлерову орграфу // Наука и образование: проблемы и перспективы: Материалы 11-й региональной науч.-практ. конференции аспирантов, студентов и учащихся (Бийск, 15-16 мая 2009 г.). В 2-х частях. — С. 271-273.

А2. *Гавриков А. В.* Оптимальная квазиэйлерова реконструкция орграфа путем удаления дуг // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета: Материалы итог. студ. науч. конф. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. — С. 52-54.

А3. *Гавриков А. В.* Оптимальная эйлерова реконструкция орграфа путем добавления дуг // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы науч. конф. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. — С. 41-45. — ISBN 978-5-292-03935-8.

А4. *Гавриков А. В.* Оптимальные эйлеровы реконструкции орграфов // Саратов, гос. ун-т. — Саратов, 2010. 27 С. Деп. в ВИНТИ, № 734-В.

А5. *Гавриков А. В.* Оптимальные эйлеровы реконструкции ориентированных графов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010616499, выданное Роспатентом. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 30 сентября 2010 г.

А6. *Гавриков А. В.* Некоторые оптимальные эйлеровы реконструкции ориентированных графов // Ломоносов-2011: Материалы XVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция «Вычислительная математика и кибернетика»; 11-15 апреля; Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК: Сборник тезисов. — М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ (лицензия ИД 05899 от 24.09.2001), 2011. — С. 14-15. — ISBN 978-5-89407-450-4

А7. *Гавриков А. В.* О минимальных эйлеровых реконструкциях ориентированных графов // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции (Нижний Новгород, 20-25 июня 2011 г.). — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. — С. 113-

114. — ISBN 978-5-91326-161-8.

A8. *Гавриков А. В.* Оптимальная эйлерова реконструкция ориентированных графов методом добавления дуг // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12 вып. 1. — С. 102-109. — ISSN 1814-733X, ISSN 1816-9791.

A9. *Гавриков А. В.* Т-неприводимые расширения для некоторых типов орграфов и их объединений // Труды 56-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе», Всероссийской молодежной научно-инновационной конференции «Физико-математические науки: актуальные проблемы и их решения». Управление и прикладная математика. Том 1. — М.: МФТИ, 2013. — С. 27-28. — ISBN 978-5-7417-0493-6.

A10. *Гавриков А. В.* Т-неприводимые расширения объединений некоторых типов орграфов // Прикладная дискретная математика, № 4 (22), 2013 г. Издательство ТГУ. — С. 47-56.

A11. *Гавриков А. В.* Алгоритм построения Т-неприводимого расширения для многоугольных орграфов // Прикладная дискретная математика. Приложение. — 2014. — № 7. — С. 124-126. — ISSN 2226-308X.