

## ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации

Тумановой Елены Александровны

"Аппроксимируемость корневыми классами свободных конструкций групп", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

В диссертации Е. А. Тумановой рассматривается свойство аппроксимируемости произвольным корневым классом применительно к свободным конструкциям групп, таким как обобщенные свободные произведения и  $HNN$ -расширения.

В 1940 году в статье А. И. Мальцева "Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами" впервые в явном виде введено понятие финитно аппроксимируемой группы. Изучением свойства финитной аппроксимируемости групп и его различных обобщений занимались А. И. Мальцев, М. И. Каргаполов, В. Н. Ремесленников, А. Л. Шмелькин, Д. И. Молдаванский, К. Грюнберг, Г. Баумслаг, Д. Коэн, Г. Хигман и многие другие. Заметное место в этих исследованиях отводится получению условий аппроксимируемости свободных конструкций групп. Известно, что свободное произведение финитно аппроксимируемых групп наследует это свойство. Однако обобщенное свободное произведение финитно аппроксимируемых групп и  $HNN$ -расширение финитно аппроксимируемой группы не всегда являются финитно аппроксимируемыми группами. Еще реже встречается наследование свободными конструкциями групп свойства аппроксимируемости определенным классом групп.

В 1957 году К. Грюнберг ввел понятие корневого класса групп. Аппроксимируемость произвольным корневым классом обобщает свойства финитной аппроксимируемости, аппроксимируемости конечными  $p$ -группами, аппроксимируемости конечными  $\pi$ -группами, аппроксимируемости разрешимыми группами.

Известно, что для любого корневого класса  $K$  свободное произведение  $K$ -аппроксимируемых групп наследует это свойство. Что касается обобщенного свободного произведения, то Д. Н. Азаровым и Д. Тьеджо получен критерий  $K$ -аппроксимируемости в случае, когда свободные множители изоморфны, а связывающий объединяемые подгруппы изоморфизм совпадает с ограничением на них изоморфизма сомножителей. Д. Тьеджо перечисленные результаты распространены на конструкцию свободного произведения произвольного семейства групп с одной объединенной подгруппой. Кроме того, им установлен критерий аппроксимируемости классом  $K$   $HNN$ -расширения  $K$ -аппроксимируемой группы с совпадающими связанными подгруппами при условии, что связывающий подгруппы изоморфизм является тождественным отображением. Д. В. Гольцовым изучалась аппроксимируемость замкнутым относительно факторизации корневым классом групп  $HNN$ -расширений с тривиально пересекающимися центральными связанными подгруппами. Е. В. Соколовым получены условия аппроксимируемости разрешимыми  $K$ -группами обобщенных свободных произведений двух нильпотентных  $K$ -групп, где  $K$  – замкнутый относительно факторизации корневой класс групп. Перечисленными работами практически исчерпываются все появившиеся к настоящему времени публикации, в которых рассматриваются вопросы аппроксимируемости свободных конструкций произвольными корневыми классами. Таким образом, следует признать, что исследования в данной области только начинаются. С другой стороны, они представляют значительный интерес, так как позволяют оценить с общей точки зрения многие известные результаты об аппроксимируемости конкретными классами групп. Все это позволяет утверждать, что диссертация выполнена на актуальную тему.

Основные научные результаты, полученные в диссертации Е. А. Тумановой.

1. Найдены условия аппроксимируемости замкнутыми относительно факторизации, а также произвольными корневыми классами групп обобщенного свободного произведения двух групп, объединенные подгруппы которого являются нормальными в соответствующих свободных множителях:

достаточное условие  $K$ -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух  $K$ -групп с нормальными объединенными подгруппами, которое дает критерий, если класс  $K$  замкнут относительно факторизации;

критерии аппроксимируемости замкнутым относительно факторизации корневым классом группы  $K$  обобщенного свободного произведения двух  $K$ -аппроксимируемых групп с нормальными объединенными подгруппами при различных дополнительных условиях, накладываемых на эти подгруппы и группы их автоморфизмов.

2. Изучена аппроксимируемость корневыми классами обобщенных свободных произведений групп, когда хотя бы одна из них является ретрактом в соответствующем свободном множителе:

доказано, что свободное произведение произвольного семейства  $K$ -аппроксимируемых групп с одной объединенной подгруппой, являющейся ретрактом в каждом свободном множителе,  $K$ -аппроксимируемо;

получены достаточные условия  $K$ -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух  $K$ -аппроксимируемых групп, объединенная подгруппа которого является ретрактом в одном из сомножителей.

3. Получены необходимые и достаточные условия аппроксимируемости  $HNN$ -расширений, связанные подгруппы которых совпадают, замкнутыми относительно факторизации, а также произвольными корневыми классами групп:

для  $HNN$ -расширения, связанные подгруппы которого совпадают и нормальны в базовой группе – достаточное условие  $K$ -аппроксимируемости в случае, когда базовая группа принадлежит классу  $K$ , и критерии  $K$ -аппроксимируемости в предположениях, что класс  $K$  замкнут относительно факторизации, а базовая группа –  $K$ -аппроксимируема;

достаточное условие  $K$ -аппроксимируемости  $HNN$ -расширения  $K$ -аппроксимируемой группы, связанные подгруппы которого совпадают и являются ретрактами в базовой группе.

Все основные результаты диссертационной работы являются новыми и снабжены подробными доказательствами. Е. А. Тумановой получен ряд обобщений известных результатов: критерия Г. Хигмана аппроксимируемости конечными  $p$ -группами свободного произведения двух конечных  $p$ -групп с нормальными объединенными подгруппами, результата Д. И. Молдаванского и А. Е. Копровой об  $F_\pi$ -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных  $\pi$ -групп с центральными объединенными подгруппами, доказанное Дж. Болером и Б. Эвансом утверждение о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух финитно аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами и полученное П. А. Бобровским и Е. В. Соколовым аналогичное утверждение для аппроксимируемости конечными  $p$ -группами, результата Д. И. Молдаванского и И. А. Варламовой для групп Баумслага-Солитера в части, касающейся аппроксимируемости конечными  $\pi$ -группами, фильтрационных теорем Г. Баумслага для обобщенных свободных произведений двух групп и Б. Баумслага и М. Треткоффа для  $HNN$ -расширений групп.

Существенных замечаний по диссертационной работе нет.

Суммируя сказанное выше, считаю, что совокупность основных результатов дис-

сертации является продвижением в теории аппроксимируемости групповых свободных конструкций.

Результаты Е. А. Тумановой найдут применения в дальнейших исследованиях аппроксимационных свойств свободных конструкций групп, проводимых в научных центрах России и за рубежом.

Автореферат, составленный с соблюдением установленных требований, в достаточной степени отражает содержание диссертации. Основные результаты выполненных исследований опубликованы в 15 научных работах, включая 7 статей, 2 из которых – публикации из перечня ВАК РФ, доложены на IX и XII Международных конференциях "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" (Тула, 2012, 2014 гг.), на научной конференции фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых "Молодая наука в классическом университете" (Иваново, 2013 г.), на научных конференциях "Научно-исследовательская деятельность в классическом университете" (Иваново, 2013, 2014 гг.), на международной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения" (Казань, 2014 г.), на семинаре по теории групп под руководством Д. И. Молдавского (Иваново, 2013, 2014 гг.).

Тематика и содержание диссертации Е. А. Тумановой отвечает паспорту специальности "01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел" по формуле специальности и области исследования.

Диссертационная работа "Аппроксимируемость корневыми классами свободных конструкций групп" Тумановой Елены Александровны является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, что можно квалифицировать как решение задачи, имеющей значение для развития комбинаторной теории групп.

Диссертационная работа соответствует критериям "Положения о порядке присуждения ученых степеней", которым должна удовлетворять диссертация на соискание ученой степени кандидата наук. Ее автор, Туманова Елена Александровна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры алгебры,  
математического анализа и геометрии  
ФГБОУ ВПО "Тулский государственный  
педагогический университет им. Л. Н. Толстого"

И. В. Добрынина

300026, Тула, пр. Ленина 125, учебный  
корпус 4, кафедра алгебры, математического  
анализа и геометрии,  
8(4872)333646,  
e-mail: tgpu@tula.net



*И. В. Добрынина*  
заверяю. Начальник отдела  
делопроизводства и связи

*1.12.14*