

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

на правах рукописи

Любимцева Ольга Львовна

ЧИСЛЕННО – АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВИБРОУДАРНЫХ СИ-
СТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ
(физико-математические науки)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ-мат. наук
Баландин Д. В.

Нижний Новгород – 2013

Содержание

Введение.....	3
<u>Глава 1</u> Виброударные системы с неподвижным ограничителем движения.....	9
§1. Базовые динамические модели.....	9
§2. Точечные отображения. Неподвижные точки и их устойчивость.....	12
§3. Постановка задачи исследования конкретной виброударной системы	15
§4. Виброударная система с кусочно-линейной зависимостью коэффициента трения от скорости скольжения.....	18
§5. Структура разбиения фазового пространства на траектории.....	25
§6. Виброударная система с экспоненциальной зависимостью коэффициента трения от скорости скольжения.....	29
<u>Глава 2</u> Динамическая система с вибрирующим ограничителем движения.....	35
§1. Постановка задачи и необходимые теоретические сведения.....	35
§2. Периодические движения без участка совместного «скольжения» тела и ленты.....	39
§3. Периодические движения, включающие участок совместного «скольжения» тела и ленты.....	50
§4. Численное исследование областей существования и устойчивости периодических движений системы.....	55
§5. Бифуркации периодических движений.....	62
<u>Глава 3</u> Программный пакет для численного исследования виброударных систем.....	67
§1. Программное обеспечение для расчета ударно-колебательной системы с неподвижным ограничителем.....	67
§2. Программное обеспечение для расчета ударно-колебательной системы с вибрирующим ограничителем.....	73
Приложения.....	83
Заключение.....	93
Литература.....	94

Введение

Актуальность проблемы. Проблемы динамики и устойчивости виброударных систем сегодня составляет самостоятельный раздел прикладной теории колебаний. Интерес к этим проблемам обусловлен в первую очередь широким использованием в практике машин и технологий, использующих систематические ударные взаимодействия в качестве основы рабочих процессов. Вибромолоты, виброударный инструмент, демпферы ударного действия, дисковые тормоза, машины для виброударных испытаний, устройства вибротранспорта штучных и массовых грузов, вибросепарации, объемной виброобработки – вот далеко не полный перечень, который дает представление о многообразии технологических использований виброударных систем и о круге вопросов, требующих применения теории этих систем.

Исследование вынужденных колебаний систем с одной степенью свободы и ударами об ограничитель получили активное развитие, начиная с середины 20-го века в связи с решением ряда практических задач с виброударными элементами. К их числу относятся известные задачи о вертикальном движении частицы на вибрирующем основании [7], [25], [26], [10], [17], [21] и о линейном осцилляторе, соударяющемся с неподвижным ограничителем [49], [50]. Необходимо также отметить близость рассмотренных в данной работе динамических систем с системой «ползун на движущейся ленте» (см., напр., [24]). Впервые аналогичная система (тормозная колодка) была рассмотрена в [6], а затем она приобрела широкую популярность, что обусловлено сочетанием простоты самой системы со сложностью ее динамики ([51], [20]).

Исследования периодических движений с ударами о неударяющие связи показывают, что для них остаются справедливыми многие результаты в гладких системах [23]. Такая аналогия основана на достаточной гладкости отображения Пуанкаре стробоскопического типа в окрестности неподвижной точки, соответствующей периодическому движению с конечным числом ударов за пе-

риод. Получены явные формулы для построения определяющей матрицы и характеристического уравнения. Корни этого уравнения определяют характер устойчивости и бифуркаций периодических движений. Такой подход в сочетании с исследованиями качественных особенностей динамических систем с ударными взаимодействиями приводят к новым интересным закономерностям и выводам, имеющим важное значение для практики.

Цель работы. Цель настоящей работы состоит в создании единого математического и программного обеспечения для расчета и анализа периодических движений конкретных динамических систем с одной степенью свободы, совершающих вынужденные колебания под действием силы трения и удары об ограничитель.

Задачи работы. На основе сформулированной выше цели были поставлены следующие задачи:

1. Классифицировать движения тела, совершающего одномерные вынужденные колебания с ударами о неподвижный ограничитель под действием силы сухого трения, которая меняется с изменением относительной скорости.
2. Дать удобное описание областей существования и устойчивости периодических движений и структуры фазового пространства вышеуказанной системы.
3. Найти условия существования и устойчивости периодических движений тела, расположенного внутри контейнера, который совершает прямолинейные гармонические колебания. Это приводит к существенному усложнению динамики, причем таким неавтономным системам с одной степенью свободы присущи и некоторые свойства многомерных систем.
4. Создание прикладного программного обеспечения для построения фазовых траекторий движения тела, расчета и анализа устойчивости неподвижных точек отображения Пуанкаре в рассматриваемых задачах.

Методы исследования. Аналитические исследования проводились методами теоретической механики и качественной теории дифференциальных уравнений. Для решения поставленных задач, в частности, был применен метод точечных

отображений, метод линеаризации для движений с ударами, метод линеаризации Айзермана-Гантмахера в системах с трением. При моделировании и численном анализе использовалась система Mathcad14. При построении программного обеспечения использовался компилятор Embarcadero Delphi для языка Object Pascal.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Рассматривается модель: внутри контейнера, совершающего гармонические колебания, находится тело, которое движется под действием силы трения в промежутках между ударами. Указанная модель и ее частные случаи отражают динамику как систем с ударными взаимодействиями, так и систем с трением. В диссертации впервые:

- описана структура фазового пространства системы, совершающей одномерные вынужденные колебания под действием силы трения с ударами о неподвижный ограничитель;
- найдены и исследованы на устойчивость периодические движения виброударного механизма, представляющего собой существенно нелинейную неавтономную систему с одной степенью свободы;
- разработан численный алгоритм, позволяющий определить наличие и характер установившихся движений системы при различных значениях параметров;
- создан программный пакет для численного-аналитического анализа вышеуказанных систем.

Достоверность результатов. Достоверность полученных результатов основана на строгом и обоснованном применении математических методов, на сравнении результатов компьютерного моделирования с теоретическими выводами.

Практическая ценность. Полученные при изучении виброударных систем результаты могут быть использованы при выборе рабочих режимов для процессов виброперемещения, вибросепарации, пневмовибротранспорта и тому подобное. Проводимые в работе теоретические исследования могут быть применены при аналитическом и численном рассмотрении конкретных динамических систем с

ударными взаимодействиями. В частности, рассмотренные в работе схемы, дают возможность реализации рациональных настроек в конструкции дисковых тормозов, которые действуют по принципу фрикционной муфты [2]. Узость областей существования и устойчивости периодических режимов и зависимость их от начальных условий могут существенно снизить эффективность указанных устройств, а поэтому должны надлежащим образом учитываться при их разработке. Созданный на основе этих исследований программный комплекс позволяет без использования сторонних программ численно проследить динамику изучаемых в работе виброударных систем (свидетельство о регистрации электронного ресурса «Пакет программ «Вычисление неподвижных точек отображения Пуанкаре и построение фазовых траекторий различных типов движений виброударной системы»» № ОФЭРНиО:19871, от 10.01.2014).

Апробация полученных результатов. Основные результаты были представлены на следующих научных мероприятиях:

1. X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 24—30 августа 2011 г.
2. XII международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (*конференция Пятницкого*), Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, 5—8 июня 2012 г.
3. IX Всероссийская научная конференция «Нелинейные колебания механических систем» им. Ю.И. Неймарка, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 24—29 сентября 2012 г.

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [29—36, 56], из которых три печатные работы в журналах из перечня ВАК.

Первая глава. В первом параграфе этой главы обсуждается взаимосвязь динамических систем, изучаемых в диссертации, с некоторыми классическими механическими системами. Во втором параграфе, основываясь на работах Неймарка Ю.И., вкратце излагается общий метод нахождения неподвижных точек точечного преобразования и исследования их устойчивости. В третьем параграфе строится математическая модель конкретной виброударной системы с неподвижным ограничителем. Приводится метод секущей Пуанкаре, позволяющий свести изучение автономной динамической системы второго порядка к исследованию некоторого точечного отображения. В §4 вышеупомянутая виброударная система рассматривается в предположении кусочно-линейной зависимости коэффициента трения от скорости скольжения. В результате исследований найдены значения параметров, при которых в системе имеется устойчивый периодический режим движения. В §5 рассматривается разбиение фазового пространства на траектории. Показано, что рассматриваемая динамическая система имеет жесткий режим автоколебаний, представлен бифуркационный портрет точечного преобразования. В §6 поставленная задача решена в предположении, что коэффициент трения зависит от скорости скольжения экспоненциально.

Вторая глава. В §1 этой главы строится математическая модель для виброударной системы, состоящей из подвижного тела, расположенной внутри контейнера, совершающего прямолинейные гармонические колебания. При этом само тело движется горизонтально за счет силы сухого трения, зависящей от относительной скорости тела по кусочно-линейному закону. Данная система имеет ряд особенностей по сравнению с автономным случаем. Поэтому далее приводится модификация определения устойчивости движений таких систем с односторонними связями в соответствии с работой [23]. В §2 для данной системы реализован метод Иванова А.П. «сглаживания» ударных взаимодействий в случае отсутствия участка относительного покоя тела. В результате получено описание одноударных периодических движений системы и их областей устойчивости. В §3 этой главы рассматриваемая виброударная система изучается при наличии

участка нулевой относительной скорости. При анализе устойчивости периодических движений снова использовался упомянутый выше метод и метод линеаризации Айзермана – Гантмахера в системах с трением [24]. В §4 проводится численный анализ результатов, полученных в §2 и §3 второй главы, рассматриваются типовые примеры и графические иллюстрации. В §5 проводится общий анализ бифуркации удвоения периода для одноударных периодических движений.

Третья глава В третьей главе на основе теоретических исследований, проводимых в первой и второй главах, разработан программный комплекс, позволяющий численно изучать динамику рассмотренных виброударных систем. Рассматриваются многочисленные примеры работы комплекса. Последние дают полное представление о типах движения виброударных систем, которые исследовались в диссертации.

Глава 1

Виброударные системы с неподвижным ограничителем движения

§1. Базовые динамические модели

Под базовыми мы будем понимать две динамические системы, для которых уже в достаточно полном объеме развиты методы анализа их динамики и устойчивости. Эти модели близки к изучаемым в работе системам. Первая модель есть одна из наиболее известных виброударных систем с периодическим возбуждением — частица, движущаяся поступательно вдоль вертикали над горизонтальной платформой, высота которой периодически изменяется по гармоническому закону (рис. 1.1). В простейшей постановке влияние ударов на движение платформы и сопротивление среды на движение частицы считаются пренебре-

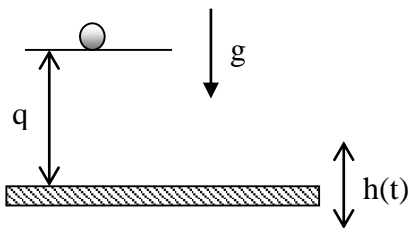


рис. 1.1

жимо малыми, а коэффициент восстановления при ударах постоянен. Исследование данной задачи ведутся с начала 40-х годов 20 века и насчитывают множество работ (см. [40], [11], [25]). Как отмечено в книге [23] неослабевающий интерес ученых к ди-

намике частицы на вибрирующем основании можно объяснить двумя обстоятельствами. Во-первых, данная система может служить базовой моделью различных технических процессов и физических явлений: вибротранспортировка [11], вибротрамбовка ([14], [10]), ускорение Ферми космических лучей [22] и др. Она достаточно проста и ее можно исследовать экспериментально в лабораторных условиях. В [52] описана простейшая установка для проведения студенческих лабораторных работ, аналогичная схема с использованием компьютера приведена в [27]. Во-вторых, в зависимости от параметров задачи и функции $h(t)$, описывающей движение основания, система проявляет различные качественные свойства. Новые результаты дополняют общую картину, но в тоже время показывают богатство возможностей и неисчерпаемость проблемы.

Описание одноударных периодических движений частицы на вибрирующем основании приводится в монографии [23, стр. 224-226], где получены явные формулы для построения определяющей матрицы и характеристического уравнения. Корни этого уравнения определяют характер устойчивости и бифуркаций периодических движений. Кроме того, показано, что при исследовании периодических движений с ударами о неудерживающие связи остаются справедливыми многие результаты, известные в гладких динамических системах. Такая аналогия основана на достаточной гладкости отображения Пуанкаре стробоскопического типа в окрестности неподвижной точки, соответствующей периодическому движению с конечным числом ударов за период. Этот подход реализован в диссертации при исследовании одноударных периодических движений массы m , расположенной внутри контейнера, совершающего прямолинейные гармонические колебания.

Поскольку движение тела массы m осуществляется за счет силы сухого трения, то динамические системы, изучаемые в настоящей работе, близки к классической модели «ползун на движущейся ленте» (рис. 1.2). Заметим при этом, что сила трения является функцией $F(V)$ относительной скорости тела. Поэтому

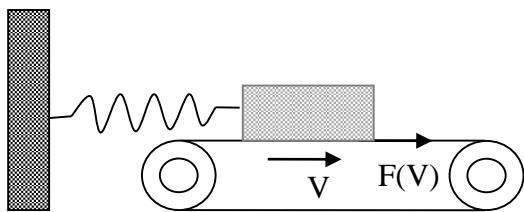


Рис.1.2

упомянутая модель берется в качестве второй базовой. Впервые система, аналогичная модели «ползуна», была рассмотрена в [6] (тормозная колодка), а затем она приобрела широкую популярность, что обусловлено сочетанием самой системы со сложностью ее динамики (см.

[51], [20]). В частности, было установлено, что асимптотически устойчивые периодические орбиты существуют лишь при условии, что функция $F(V)$ в некотором интервале убывает (сравни с результатами диссертации). Периодические движения различных типов системы «ползун на движущейся ленте» обсужда-

ются в монографии [24]. Там же приводится эффективный метод анализа периодических движений в системах с трением — метод линеаризации, обобщение которого на системы с разрывами в производных было получено Айзерманом и Гантмахером. Этот подход был применен в настоящей работе в связи с появлением бифуркации «касание-скольжение». В книге [24, стр. 218-220, 223-228] рассматривается также случай периодического возбуждения ползуна (рис. 1.3). Основное отличие при исследовании периодических движений этой системы связано с движениями, включающими фазу относительного покоя. Именно, в автономных системах такие движения всегда орбитально асимптотически устойчивы (сравни с результатами §4 главы 1 настоящей работы), а в неавтономной системе наличие такой фазы недостаточно для устойчивости (см. §3 главы 2).

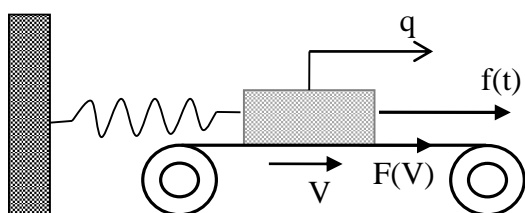


Рис.1.3

Основное отличие при исследовании периодических движений этой системы связано с движениями, включающими фазу относительного покоя. Именно, в автономных системах такие движения всегда орбитально асимптотически устойчивы (сравни с результатами §4 главы 1 настоящей работы), а в неавтономной системе наличие такой фазы недостаточно для устойчивости (см. §3 главы 2).

Из вышесказанного следует, что рассматриваемые в диссертации модели тесно переплетаются с двумя моделями, которые мы назвали базовыми. В частности, имеются такие же типы бифуркаций как и в первой базовой модели («седло-узел», суперкритическая бифуркация (т.е. потеря устойчивости одноударных движений сопровождается рождением пары устойчивых двуударных движений с удвоением периода), как видно из результатов §3 главы 3. Исследование периодических движений тела при наличии участка относительного покоя опирается на работы, в которых описываются периодические движения второй базовой модели с трением. Поэтому при решении поставленных задач применялись идеи и методы двух базовых моделей: «частица на вибрирующем основании» и «ползун на движущейся ленте».

$$T^m(M^*) = M^*. \quad (1.2)$$

Тогда точка M^* называется m -кратной неподвижной точкой преобразования T . Очевидно, что она является простой неподвижной точкой преобразования T^m . Из соотношения (1.2) следует, что одновременно с точкой M^* m -кратными неподвижными точками преобразования T будут и точки

$$T(M^*), T^2(M^*), T^3(M^*), \dots, T^{m-1}(M^*).$$

Эти m точек различны, циклически переставляются при применении к ним преобразования T и образуют так называемый m -кратный цикл преобразования T .

Очевидно, что так же, как и в случае одномерного точечного преобразования, простые неподвижные точки и кратные циклы могут являться пределом итерационной последовательности, порождаемой точечным преобразованием.

Назовем ε -окрестностью точки $M^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ совокупность точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для которых

$$\sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2 + \dots + (x_n - x_n^*)^2} < \varepsilon \quad (1.3)$$

Выражение, стоящее в левой части неравенства (1.3), будем называть расстоянием между точками M и M^* и записывать кратко в виде $\rho(M, M^*)$.

Неподвижную точку M^* будем называть асимптотически устойчивой в малом, если существует пусть очень малая ε -окрестность этой точки ($\varepsilon > 0$), которая при последовательном применении преобразования T стягивается к точке M^* . Точнее, требуется, чтобы для любой точки M из ε -окрестности точки M^* выполнялось неравенство

$$\rho[T^m(M), M^*] < \varepsilon_m,$$

где $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и $\max \varepsilon_m \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Неподвижная точка M^* называется неустойчивой, если в любой сколь угодно малой окрестности есть точки, которые при последовательном приме-

нии преобразования T покидают ε -окрестность точки M^* . Условия устойчивости неподвижной точки M^* преобразования T (1.1) могут быть получены путем линеаризации преобразования T в окрестности неподвижной точки и составления характеристического уравнения

$$\det \|A(M^*) - \lambda E\| = 0 \quad (1.4)$$

где

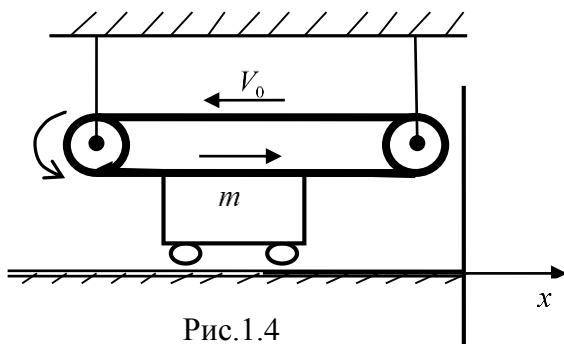
$$A(M^*) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

– матрица устойчивости, в которой значения производных берутся в неподвижной точке $M^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Условие устойчивости неподвижной точки формулируются следующим образом: неподвижная точка M^* точечного преобразования T устойчива, если все корни λ_i характеристического уравнения (1.4) по модулю меньше единицы, и неустойчива, если хотя бы один из корней λ_i имеет модуль, больший единицы. Таким образом, определение устойчивости неподвижной точки сводится к чисто алгебраической задаче о расположении относительно единичного круга корней полинома n -ой степени $P(\lambda) = \det \|A(M^*) - \lambda E\|$, составляемого непосредственно по формулам точечного преобразования (1.1).

§3. Постановка задачи исследования виброударной системы с неподвижным ограничителем

Рассмотрим следующую механическую систему с одной степенью свободы: имеется подвижная масса m , которая движется горизонтально с помощью ленточного механизма за счет силы сухого трения $F(V)$, зависящей от модуля относительной скорости $V = |V_0 - \dot{x}|$, V_0 – постоянная скорость ленты [28, 41, 8]. Движение массы m перемежается ударами о неподвижную твердую стенку. Удары предполагаются мгновенными и характеризуются коэффициентом восстановления R , который может находиться в промежутке $0 \leq R \leq 1$. Математическая модель этой системы описывается дифференциальным уравнением второго порядка с соответствующими граничными условиями:



становления R , который может находиться в промежутке $0 \leq R \leq 1$. Математическая модель этой системы описывается дифференциальным уравнением второго порядка с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F(|V_0 - \dot{x}|)\text{sgn}(V_0 - \dot{x}) & \text{при } x < 0, \dot{x} < V_0 \\ \ddot{x} &= 0 & \text{при } x < 0, \dot{x} = V_0 \\ \dot{x}^+ &= -R\dot{x}^- & \text{при } x = 0 \end{aligned}$$

Здесь x – перемещение тела m , отсчитываемое от ограничителя; \dot{x}^- , \dot{x}^+ – доударные и послеударные значения скорости, соответственно.

В основу последующих исследований положен метод точечных отображений, ведущий свое начало от А. Пуанкаре [44], [45] и Дж. Биркгофа [12], [13]. Этот метод был введен в теорию автоматического регулирования и теорию нелинейных колебаний А.А. Андроновым [4], [5]. Большой вклад в разработку метода точечных отображений применительно к задачам теории нелинейных колебаний внес Ю. И. Неймарк ([42], [43] и др.). Указанный метод в дальнейшем с успехом использовался при исследовании конкретных виброударных систем ([18], [14], [53] и др.).

Задача исследования автономных динамических систем второго порядка сводится к точечным преобразованиям следующим образом [42]. На фазовой плоскости выбирается отрезок без контакта, т.е. отрезок прямой (или простой гладкой кривой), в каждой точке которого фазовые траектории пересекают его, не касаясь (отрезок AB на рис.1.5). Обозначим через x координату некоторой точки этого отрезка и рассмотрим фазовую траекторию, пересекающую отрезок в точке x . Пусть эта траектория пересекает вновь отрезок в точке \bar{x} . Тогда, используя уравнения фазовых траекторий, найдем связь между начальной точкой x и последующей точкой \bar{x} : $\bar{x} = f(x)$. Тем самым, построено точечное преобразование отрезка в себя, определяемое функцией последования $f(x)$. На основании теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий можно утверждать, что если какая-нибудь точка x имеет на этом отрезке последующую точку, не совпадающую с концами отрезка AB , то и все точки, достаточно близкие к точке x , также имеют на этом отрезке последующие точки.

Очевидно, что простые неподвижные точки точечного преобразования, построенного так, как это показано на рис.1.5, соответствуют простым (однооборотным или однопетлевым) периодическим движениям (на рис.1.5 это точка x_*).

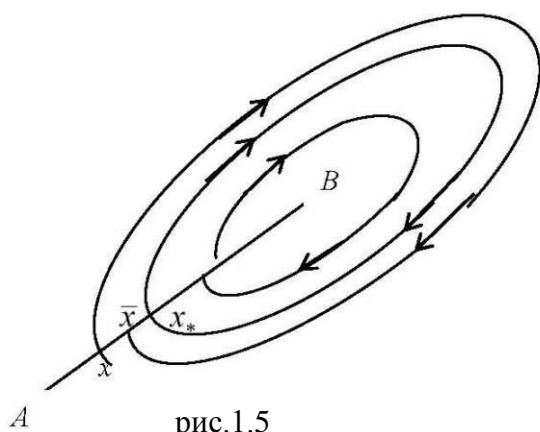


рис.1.5

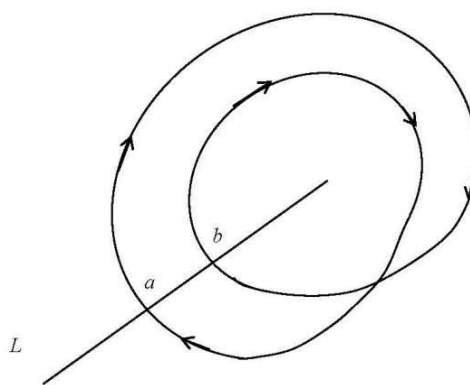


рис.1.6

Кратные циклы этого преобразования соответствуют сложным (многопетлевым) периодическим движениям. На рис.1.6 показано периодическое движение, соответствующее двукратному циклу (точки a и b) точечного преобразования отрезка L в себя.

Простые неподвижные точки точечного преобразования соответствуют простым периодическим движениям, симметричным относительно начала координат фазовой плоскости. Двукратный цикл точечного преобразования соответствует паре простых несимметричных периодических движений, расположенных относительно начала координат симметрично одно по отношению к другому. Циклы более высоких кратностей соответствуют сложным (многопетлевым) периодическим движениям.

§4. Виброударная система с кусочно-линейной зависимостью коэффициента трения от скорости скольжения

Уравнения движения. Будем считать [8], что $F(V)$ определяется выражением (см. также рис.1.7):

$$F(V) = \begin{cases} F_0 - \delta V, & 0 < V \leq V_1 \\ F_0 - \delta V_1, & V > V_1, \end{cases} \quad \delta = \text{const} > 0$$

После удара сила трения $F(V)$ растет до полной остановки тела ($F(V) = F(V_0)$).

При движении тела вправо имеем $F(V) > F(V_0)$. Если тело достигает скорости ленты V_0 , сила трения постоянна и равна F_0 .

Далее, до удара, тело движется с постоянной скоростью V_0 . Введем безразмерные переменные y, τ и параметры μ, η_0 :

$$y = x \frac{F_0 \alpha_0}{m V_0^2}, \quad \tau = t \frac{F_0 \alpha_0}{m V_0}, \quad \mu = \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0}, \quad \eta_0 = \frac{V_0 - V_1}{V_0},$$

где $\alpha_0 = \frac{F(V_0)}{F_0}$; α_0 — характеризует крутизну

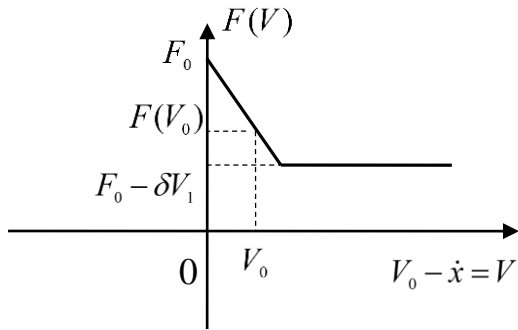


Рис. 1.7

зависимости $F(V)$ при $V = V_0$.

Тогда $y'_\tau = \frac{F_0 \alpha_0}{m V_0^2} x'_t$, $t'_\tau = \frac{x'_t}{V_0}$, откуда $x'_t = V_0 y'_\tau$. Заметим при этом, что скорость

$x'_t = V_0$ соответствует $y'_\tau = 1$. Далее имеем: $y''_{\tau\tau} = \frac{1}{V_0} x''_{tt} t'_\tau = \frac{m}{F_0 \alpha_0} x''_{tt}$, откуда

$x''_{tt} = \frac{F_0 \alpha_0}{m} y''_{\tau\tau}$. Уравнения движения массы m преобразуются к виду (точки означают дифференцирование по τ):

$$\ddot{y} = \frac{1}{F_0 \alpha_0} F(V_0 |1 - \dot{y}|) \text{sgn}(1 - \dot{y}) \quad \text{при } y < 0, \dot{y} \neq 1 \quad (1.5)$$

$$\ddot{y} = 0 \quad \text{при } y < 0, \dot{y} = 1 \quad (1.6)$$

$$\dot{y}^+ = -R \dot{y}^- \quad \text{при } y = 0 \quad (1.7)$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\eta_0 = -1$. Тогда $V_1 = 2V_0$ и рабочим является только падающий участок характеристики силы сухого трения. Кроме того, $\alpha_0 = \frac{F(V_0)}{F_0} = \frac{F_0 - \delta V_0}{F_0} = 1 - \delta \frac{V_0}{F_0}$ и $\delta = \frac{(1 - \alpha_0)F_0}{V_0}$. С учетом вышесказанного и того, что скорость тела не может превысить скорость ленты, имеем:

$$F(V_0|1 - \dot{y}|) = F_0 - \delta V_0(1 - \dot{y}) = F_0(1 - (1 - \alpha_0)(1 - \dot{y})).$$

В этом случае уравнение (1.5) преобразуется к виду

$$\ddot{y} = \frac{1}{\alpha_0}(1 - (1 - \alpha_0)(1 - \dot{y}))$$

или

$$\ddot{y} = 1 + \mu \dot{y} \quad (1.8)$$

Заметим также, что должно выполняться неравенство $F_0 - \delta V_1 \geq 0$. Тогда

$$F_0 - \delta V_1 = F_0 - \frac{(1 - \alpha_0)F_0}{V_0} \cdot 2V_0 = F_0 - (1 - \alpha_0)F_0(1 - \eta_0) \geq 0.$$

Откуда получаем, что

$$\eta_0(1 - \alpha_0) + \alpha_0 \geq 0 \quad \text{и} \quad \eta_0 \mu \geq -1.$$

Значит $\mu \leq 1$, что будет учтено в дальнейших исследованиях.

Точечное отображение. Если при достижении поверхности $y = 0$ значение $\dot{y} > 0$, то в системе происходит ударное взаимодействие по формуле $\dot{y}^+ = -R\dot{y}^-$. Фазовое пространство рассматриваемой системы двумерно (y, \dot{y}) . Область движения изображающей точки ограничена в фазовом пространстве поверхностью ударного взаимодействия $y = 0$. Целесообразно, поэтому, для

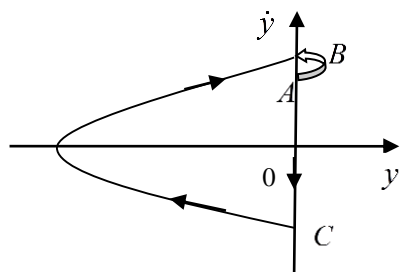


рис. 1.8

изучения решений системы (1.5) – (1.8) исследовать точечные отображения этой поверхности.

Обозначим через $A(0, \dot{y}_0)$ начальную, а через $B(0, \dot{y}_1)$ – конечную точку точечного преобразования T (рис.1.8). Ударными взаимодействиями (1.7) точка A переводится в точку $C(0, -R\dot{y}_0)$, затем точка C

переводится фазовыми траекториями уравнения (1.8) в точку B . Таким образом

$\dot{y} = T(\dot{y}_0)$. Найдем общее решение уравнения (1.8), удовлетворяющее в начальный момент времени условиям $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -R\dot{y}_0$. Путем замены $\dot{y} = z$ уравнение приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = 1 + \mu z \end{cases}$$

Тогда $\frac{dz}{dy} = \frac{1 + \mu z}{z}$. Откуда получим

$$\int_{z(0)}^z \frac{z}{1 + \mu z} dz = \int_{y(0)}^y dy$$

и с учетом начальных условий, находим

$$y = \frac{1}{\mu} \left(\dot{y} + R\dot{y}_0 + \frac{1}{\mu} \ln \frac{1 - R\mu\dot{y}_0}{1 + \mu\dot{y}} \right) \quad (1.9)$$

Положив в (1.9) $y = 0$, получим уравнение отображения $\dot{y} = T(\dot{y}_0)$:

$$\dot{y} + R\dot{y}_0 + \frac{1}{\mu} \ln \frac{1 - R\mu\dot{y}_0}{1 + \mu\dot{y}} = 0 \quad (1.10)$$

Неподвижные точки этого преобразования (рис.1.9) получаются как решения

\dot{y}_0^* уравнения

$$(1 + R)\dot{y}_0 + \frac{1}{\mu} \ln \frac{1 - R\mu\dot{y}_0}{1 + \mu\dot{y}_0} = 0 \quad (1.11).$$

Вычислив значение производной функции (1.10) в неподвижной точке \dot{y}_0^*

$$\frac{d\dot{y}}{d\dot{y}_0}(\dot{y}_0^*) = \frac{R^2(1 + \mu\dot{y}_0^*)}{1 - R\mu\dot{y}_0^*},$$

заметим, что точка \dot{y}_0^* является устойчивой, если

$$\frac{R^2(1 + \mu\dot{y}_0^*)}{1 - R\mu\dot{y}_0^*} < 1 \quad (1.12)$$

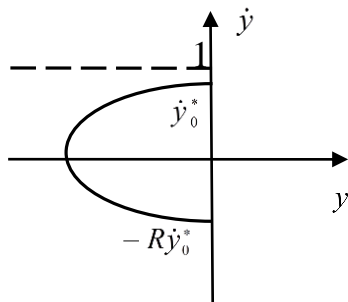


рис.1.9

Поскольку точечное преобразование является монотонно возрастающей функцией \dot{y}_0 (если $\mu \leq 1$), то могут существовать лишь простые неподвижные точки чередующейся устойчивости [16].

Классификация движений системы. Рассмотрим теперь случай, когда скорость тела m достигает скорости ленты до поверхности удара, т.е. $\dot{y}_0 = 1$ (рис.1.10). Имеет место следующее утверждение.

Утверждение. В системе (1.5) – (1.7) существуют устойчивые периодические движения $\dot{y} = T(\dot{y}_0) = \dot{y}_0 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

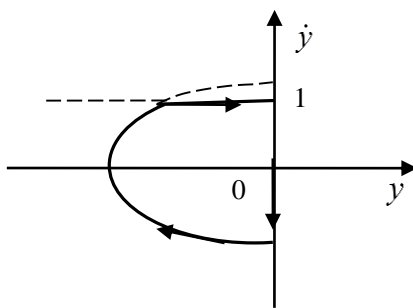


рис.1.10

$$1 + R + \frac{1}{\mu} \ln \frac{1 - \mu R}{1 + \mu} < 0 \quad (1.13)$$

Доказательство. Из уравнения движения (1.9) следует, что если существуют периодические движения $\dot{y} = \dot{y}_0 = 1$, то удовлетворяется неравенство (1.13).

Кроме того эти движения устойчивы, поскольку мультипликатор равен нулю. Обратно, пусть выполнено неравенство (1.13). Заметим, что функция

$$f(\dot{y}) = \dot{y} + R + \frac{1}{\mu} \ln \frac{1 - \mu R}{1 + \mu \dot{y}}$$

является возрастающей функцией от переменной \dot{y} (по условию $\dot{y} > 0$), поскольку $f'(\dot{y}) = 1 - \frac{1}{1 + \mu \dot{y}} > 0$. Тогда, полагая в (1.9) $\dot{y}_0 = 1$, будем иметь

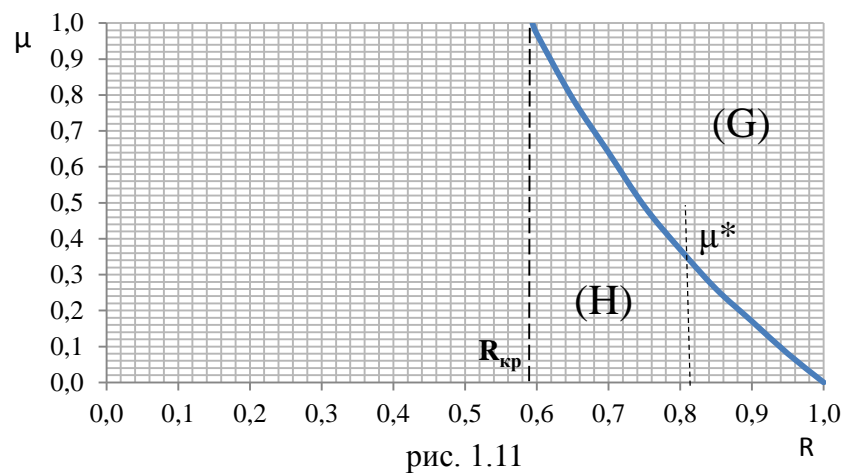
$$y = \frac{1}{\mu} \left(\dot{y} + R + \frac{1}{\mu} \ln \frac{1 - \mu R}{1 + \mu \dot{y}} \right) \leq \frac{1}{\mu} \left(1 + R + \frac{1}{\mu} \ln \frac{1 - \mu R}{1 + \mu} \right) < 0.$$

Последнее неравенство выполняется для всех $0 \leq \dot{y} \leq 1$. Это означает, что начиная с некоторого момента времени (другими словами начиная с некоторого значения $y < 0$), движение тела m подчиняется уравнению (1.6). Таким образом,

имеем $\dot{y} = 1$. Следовательно, в системе имеются устойчивые периодические движения $\dot{y} = \dot{y}_0 = 1$ в том, и только в том случае, если выполняется неравенство (1.13). \square

Решения неравенства (1.13) образуют область (G), указанную на рис.1.11. Для любой пары (R, μ) из этой области существует вышеуказанный тип периодических движений. Точки (R, μ^*) , принадлежащие разделительной кривой, есть решения уравнения

$$1 + R + \frac{1}{\mu} \ln \frac{1 - \mu R}{1 + \mu} = 0 \quad (1.14)$$



Они разбивают пространство параметров (R, μ) на две области и являются бифуркациями этого пространства. Для каждой точки (R, μ^*) имеется полуустойчивый цикл $\dot{y}_0^* = 1$. Заметим, что для значений $R < R_{кр} \approx 0,59$ (рис.1.11) не найдется значения $\mu \leq 1$, при котором в системе имеется предельный цикл, отличный от тривиального устойчивого цикла $\dot{y}_0^* = 0$. Далее предполагаем, что $R > R_{кр}$.

1) Пусть пара (R, μ) не является решением неравенства (1.13) (т.е. $(R, \mu) \in (H)$); точку (R, μ) для определенности будем выбирать на вертикальной прямой, содержащей μ^*). В этом случае $\mu < \mu^*$ и точечное преобразование

$\dot{y} = T(\dot{y}_0)$ имеет только одну неподвижную точку – устойчивую точку $\dot{y}_0^* = 0$. Действительно, так как (1.13) не выполнено, то в системе могут быть лишь непо-

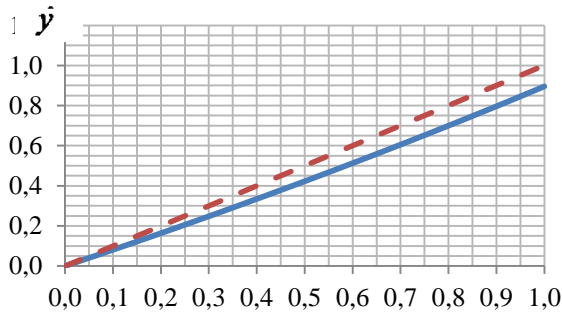


рис. 1.12 \dot{y}_0

движные точки, для которых $\dot{y}_0^* < 1$. Если $\dot{y}_0^* \neq 0$, то из равенства $\mu^* = \mu \dot{y}_0^*$ получим $\dot{y}_0^* > 1$, что невозможно. Характерный вид диаграммы Кенигса-Ламерея (см., например, [55]) для этого случая представлен на рис.1.12 при $R = 0,8; \mu = 0,2$. Заметим, что изображающие точки фазовых траек-

торий стремятся к точке $\dot{y}_0^* = 0$, т. е. имеем затухающие движения. Фазовое пространство системы, смоделированное на ЭВМ (см. главу 3) для значений $R = 0,7; \mu = 0,4$ и начальной скорости $\dot{y}_0 = 0,6$, представлено на рис.3.1.

2) Пусть точка (R, μ) является решением неравенства (1.13) (область (G) на рис.1.11). При этих значениях параметров R и μ точечное преобразование имеет три неподвижные точки, две из которых являются устойчивыми: $\dot{y}_0^* = 0$ и $\dot{y}_{02}^* = 1$, а третья – неустойчивой $0 \neq \dot{y}_{01}^* < 1$. Последнюю точку можно найти из равенства $\mu^* = \mu \dot{y}_0^*$ (в этом случае $\mu^* < \mu$), где μ^* – решение уравнения (1.14). Покажем, что она является неустойчивой. Действительно, если точка y_0^* устойчива, то, согласно (1.11), имеем

$$\frac{R^2(1 + \mu \dot{y}_0^*)}{1 - R\mu \dot{y}_0^*} = \frac{R^2(1 + \mu^*)}{1 - R\mu^*} < 1.$$

Легко показать, что последнее неравенство эквивалентно условию $R < \frac{1}{1 + \mu^*}$.

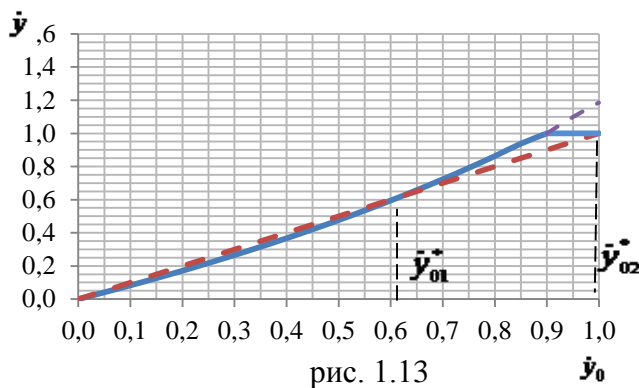
Используя равенство (1.14) вычислим производную R'_μ в точке μ^* :

$$R'_\mu(\mu^*) = -\frac{(1 + R)}{\mu^* R(1 + \mu^*)} (R(1 + \mu^*) - 1).$$

Если $R < \frac{1}{1 + \mu^*}$, то

$$R(1 + \mu^*) - 1 < \frac{1}{1 + \mu^*}(1 + \mu^*) - 1 = 0.$$

Но тогда функция $R(\mu)$ возрастает в точке μ^* , что противоречит убыванию $R(\mu)$ для всех $0 \leq R \leq 1$ (рис.1.11). Следовательно, точка $0 \neq \dot{y}_0^* < 1$ является не-



устойчивой. Соответствующая диаграмма Кенигса-Ламерея приведена на рис.1.13 при $R = 0,8$; $\mu = 0,6$. Заметим, что в этом случае изображающая точка фазовой траектории при $0 < \dot{y}_0 < \dot{y}_{01}^*$ приближается к точке $\dot{y}_0^* = 0$. Если $\dot{y}_{01}^* < \dot{y}_0 < 1$, то изобража-

ющая точка приближается к точке $\dot{y}_{02}^* = 1$. Фазовое пространство системы, смоделированное на ЭВМ для значений $R = 0,8$; $\mu = 0,7$ и начальных скоростях $\dot{y}_0 = 0,5$, $\dot{y}_0 = 0,6$, представлено на рис.3.2 и рис 3.3 (см. главу 3). При построении диаграмм Кенигса-Ламерея использовался математический пакет Mathcad (см., например, [38]).

§5. Структура разбиения фазового пространства на траектории

В рассмотренной динамической системе при некоторых фиксированных значениях параметров μ и R разбиение фазового пространства на траектории имеет вид рис.1.14.

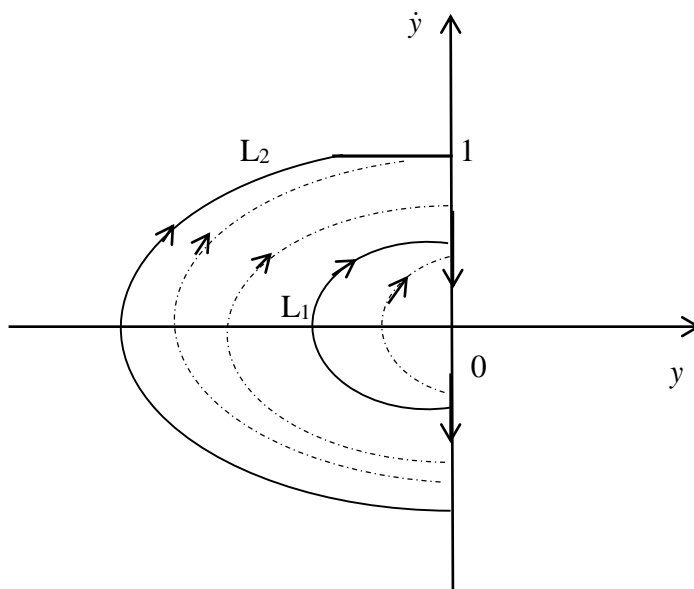


рис.1.14

Таким образом, начало координат – устойчивый фокус и вокруг него два предельных цикла – неустойчивый L_1 и устойчивый L_2 (неустойчивый предельный цикл отделяет состояние равновесия 0 от устойчивого предельного цикла L_2). Очевидно, если начальная точка на фазовой плоскости достаточно близка к 0 (лежит между 0 и L_1), то изображающая точка по соответствующей траектории стремится к устойчивому состоянию равновесия, колебаний не возникает (устанавливается равновесный режим). Для того, чтобы возникли автоколебания, надо начальную точку «забросить» достаточно далеко от начала, т. е. во всяком случае, за неустойчивый цикл L_1 . Очевидно, для всех начальных точек, лежащих вне неустойчивого цикла, изображающая точка стремится к устойчивому предельному циклу L_2 , т.е. возникают автоколебания. Таким образом, динамическая система имеет жесткий режим автоколебаний (см., напр., [9]). Перейдем к опи-

санию жесткого возбуждения колебаний изучаемой динамической системы. Зафиксируем параметр $\mu \neq 0$. Рассмотрим возникновение колебаний при изменении параметра R .

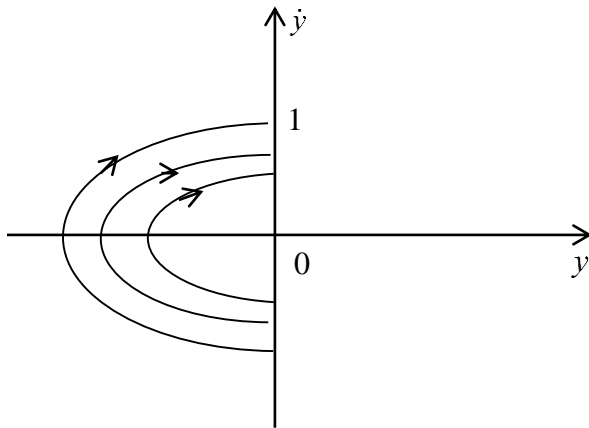


рис.1.15

При значениях $R < R_0$ в системе имеется устойчивый фокус 0 и изображающая точка, находящаяся вблизи него, будет всегда находиться вблизи 0 (рис.1.15). Предельные циклы L_1 и L_2 отсутствуют. Заметим, что значение R_0 для заданного μ может быть найдено из уравнения (1.14). При $R = R_0$ в си-

стеме из уплотнения траекторий появляется двукратный (полуустойчивый) предельный цикл (рис.1.16), который затем при $R_0 < R < 1$ разделяется на два предельных цикла, из которых один устойчивый (рис.1.14). Однако это не касается

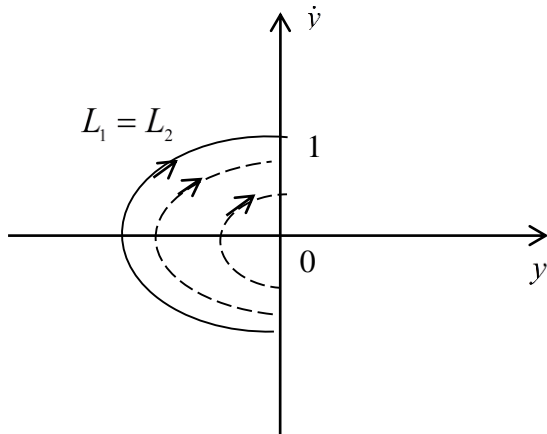


рис.1.16

изображающей точки, если она находится близко к 0 , так как устойчивый характер состояния равновесия не меняется. При увеличении R устойчивый предельный цикл расширяется, а неустойчивый сжимается и при $R=1$ “влипает” в состояние равновесия, которое делается неустойчивым фокусом (рис.1.17). Изображающая точка (кото-

рая до $R=1$ все время находилась вблизи 0) “срывается” при переходе через $R=1$ и “перескакивает”, как ей велят траектории и, следовательно, приходит к устойчивому предельному циклу (амплитуда которого все время возрастала, начиная

с R_0). Последнее утверждение можно проверить аналитически, подставив в уравнение (1.11) значение $R = 1$ (начальную скорость удара \dot{y}_0 обозначим для краткости x):

$$2x + \frac{1}{\mu} \ln \frac{1 - \mu x}{1 + \mu x} = 0.$$

Полученное уравнение (если только $\mu \neq 0$) имеет единственное решение $x = 0$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно разложить в ряд функцию (в окрестности

$|z| < 1$): $\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2z + 2\frac{z^3}{3} + 2\frac{z^5}{5} + \dots$, и положить $z = \mu x$.

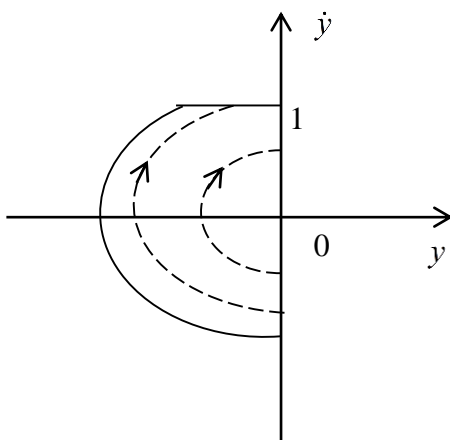


рис.1.17

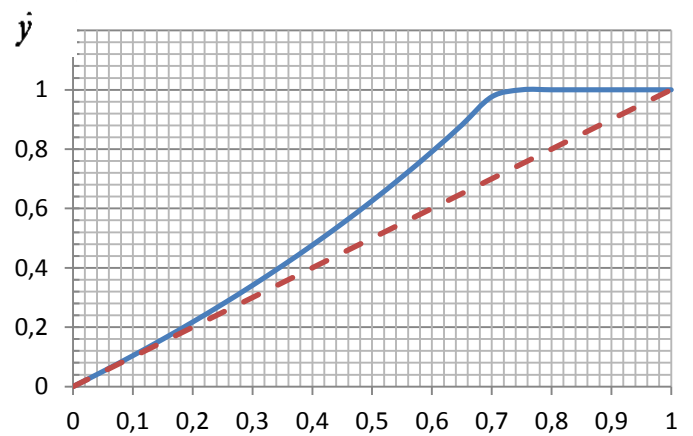


рис.1.18

На рис.1.18 в качестве примера построена диаграмма Кенигса – Ламерея при $\mu = 0,6$; $R = 1$.

Итак, для любого значения $R \in (R_0, 1)$ на фазовой плоскости системы имеем неустойчивый и устойчивый предельный циклы. При увеличении параметра R , начиная с некоторого $R > R_0$ и до значения $R = 1$ наблюдается увеличение размеров устойчивого цикла и уменьшение неустойчивого цикла (при $R = 1$ цикл вырождается в точку с координатами $y = 0, \dot{y} = 1$). При уменьшении параметра R устойчивый и неустойчивый цикл сближаются и при $R = R_0$ сливаются в один полуустойчивый цикл. Таким образом, R_0 – бифуркационное значение параметра R , которое может быть найдено из уравнения (1.14). (Например, если

$\mu = 0,6$, то $R_0 \approx 0,712$). При значениях $R < R_0$ периодические движения в системе исчезают – остается единственное устойчивое состояние равновесия (сравни [8]).

Для полноты картины зависимости точечного преобразования (1.10) от параметра R применим метод параметрической диаграммы или бифуркационный портрет [16]. Неподвижные точки находятся как корни уравнения (1.11). Функция (при фиксированном μ)

$$\psi(\dot{y}_0, R) = (1 + R)\dot{y}_0 + \frac{1}{\mu} \ln \frac{1 - R\mu\dot{y}_0}{1 + \mu\dot{y}_0}$$

и уравнение $\psi(\dot{y}_0, R) = 0$ называется соответственно функцией и уравнением неподвижных точек. Бифуркационный портрет точечного преобразования (1.10)

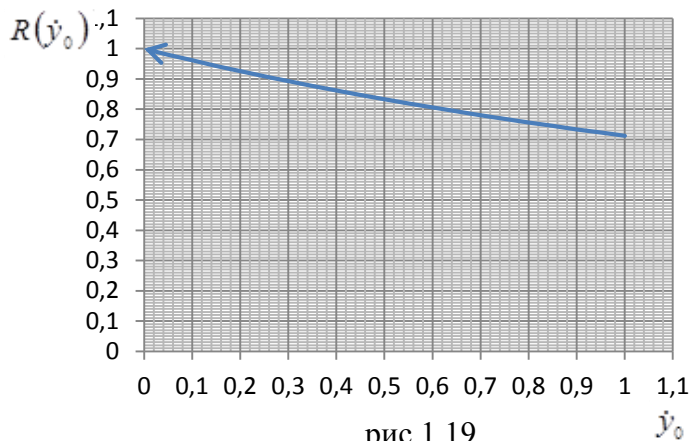


рис.1.19

представляет собой совокупность кривых $\psi(\dot{y}_0, R) = 0$ на плоскости (\dot{y}_0, R) и является наглядной интерпретацией всех изменений, происходящих с неподвижными точками при изменении параметра R . В нашем случае уравнение неподвижных

точек определяет неустойчивые неподвижные точки. Бифуркационный портрет на рис.1.19 дает картину изменения структуры преобразования для $\mu = 0,6$. При $R < R_0$ преобразование не имеет неустойчивых неподвижных точек. При $R = R_0$ в системе появляется полуустойчивый цикл, который при $R > R_0$, как было сказано ранее, разделяется на два предельных цикла, из которых один устойчивый.

§6. Виброударная система с экспоненциальной зависимостью коэффициента трения от скорости скольжения

Уравнения движения. Пусть $F(V) = F_0 e^{-\lambda(V_0 - \dot{x})}$, где F_0, λ – постоянные величины (рис. 1.20).

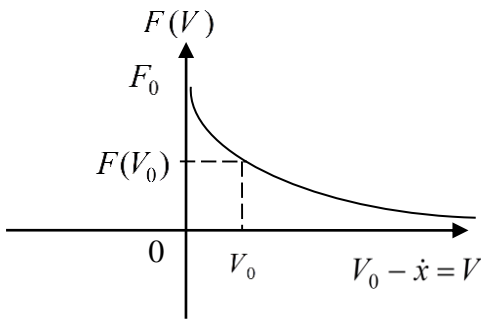


рис. 1.20

Математическая модель системы по-прежнему описывается дифференциальным уравнением второго порядка с соответствующими граничными условиями

$$m\ddot{x} = F(V) \quad \text{при} \quad x < 0, \dot{x} \neq V_0$$

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{при} \quad x < 0, \dot{x} = V_0$$

$$\dot{x}^+ = -R\dot{x}^- \quad \text{при} \quad x = 0$$

Здесь x – перемещение тела m , отсчитываемое от ограничителя. Введем безразмерные переменные y, τ и параметр μ :

$$y = \frac{F_0}{V_0^2 m} x, \quad \tau = \frac{F_0}{V_0 m}, \quad \mu = \lambda V_0.$$

Имеем:

$$y'_\tau = \frac{F_0}{V_0^2 m} x'_t t'_\tau = \frac{x'_t}{V_0}; \quad y''_{\tau\tau} = \left(\frac{x'_t}{V_0} \right)' = \frac{1}{V_0} x''_{tt} \cdot t'_\tau = \frac{m}{F_0} x''_{tt}$$

В этих переменных уравнения движения преобразуются к виду

$$\ddot{y} = e^{-\mu(1-\dot{y})} \quad \text{при} \quad y < 0, \dot{y} \neq 1 \quad (1.15)$$

$$\ddot{y} = 0 \quad \text{при} \quad y < 0, \dot{y} = 1 \quad (1.16)$$

$$\dot{y}^+ = -R\dot{y}^- \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (1.17)$$

Точечное отображение. Найдем общее решение уравнения (1.15), удовлетворяющее в начальный момент времени условиям $y(0) = 0, \dot{y}(0) = -R\dot{y}_0$. С помощью замены $\dot{y} = z$ уравнение приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = e^{-\mu(1-z)} \end{cases}$$

Тогда $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{ze^{\mu(1-z)}}$. Откуда, с учетом начальных условий, находим

$$\int_{z_0}^z ze^{\mu(1-z)} dz = \int_{y_0}^y dy.$$

Вычислив интегралы, находим уравнение движения массы m в промежутке между двумя последовательными ударами:

$$y = -\frac{1}{\mu} \left[\left(\dot{y} + \frac{1}{\mu} \right) e^{\mu(1-\dot{y})} + \left(R\dot{y}_0 - \frac{1}{\mu} \right) e^{\mu(1+R\dot{y}_0)} \right] \quad (1.18)$$

Положив в (1.18) $y = 0$, получим уравнение отображения $\dot{y} = T(\dot{y}_0)$

$$1 - \mu R\dot{y}_0 - (1 + \mu\dot{y}) e^{-\mu(\dot{y} + R\dot{y}_0)} = 0 \quad (1.19)$$

Заметим, что отображение (1.19) определено для значений μ, R, \dot{y}_0 таких, что $1 - \mu R\dot{y}_0 > 0$. В противном случае, как видно из общего решения (1.18), для любых значений \dot{y} имеем $y < 0$. Последнее означает, что сила трения $F(V)$ достаточно мала для того, чтобы тело вернулось к ограничителю за конечное время.

Неподвижные точки точечного отображения получаются как решения \dot{y}_0^* уравнения

$$1 - \mu R\dot{y}_0 - (1 + \mu\dot{y}_0) e^{-\mu\dot{y}_0(1+R)} = 0.$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$1 + \frac{1}{\mu\dot{y}_0} + \left(R - \frac{1}{\mu\dot{y}_0} \right) e^{\mu\dot{y}_0(1+R)} = 0 \quad (1.20)$$

Так как $\frac{d\dot{y}}{d\dot{y}_0} = \frac{R^2\dot{y}_0(1 + \mu\dot{y})}{\dot{y}(1 - R\mu\dot{y}_0)} > 0$, то отображение $\dot{y} = T(\dot{y}_0)$ является монотонно возрастающей функцией и может иметь лишь неподвижные точки чередующейся устойчивости. При этом неподвижная точка \dot{y}_0^* является устойчивой, если выполнено условие

$$\frac{R^2(1 + \mu\dot{y}_0^*)}{1 - R\mu\dot{y}_0^*} < 1 \quad (1.21)$$

Фаза совместного движения тела и ленты. Рассмотрим случай, когда скорость массы m достигает скорости V_0 ленты до удара об ограничитель, т.е. $\dot{y} = 1$ начиная с некоторого $y < 0$. Из уравнений (1.18) и (1.19) следует, что если существуют устойчивые периодические движения $\dot{y} = \dot{y}_0 = 1$, то с необходимостью должны выполняться неравенства

$$1 + \frac{1}{\mu} + \left(R - \frac{1}{\mu}\right) e^{\mu(1+R)} > 0, \quad 1 - \mu R > 0 \quad (1.22)$$

Покажем, что выполнение условий (1.22) достаточно для существования вышеуказанных движений. Для этого заметим сначала, что функция

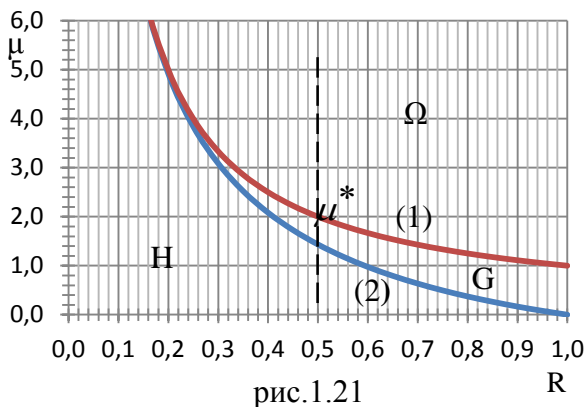
$$f(\dot{y}) = \left(\dot{y} + \frac{1}{\mu}\right) e^{\mu(1-\dot{y})}$$

является убывающей функцией от \dot{y} , т.к.

$$f'(\dot{y}) = -\mu \dot{y} e^{\mu(1-\dot{y})} < 0. \text{ Тогда, полагая в (1.18) } \dot{y}_0 = 1, \text{ имеем}$$

$$y = -\frac{1}{\mu} \left[\left(\dot{y} + \frac{1}{\mu}\right) e^{\mu(1-\dot{y})} + \left(R - \frac{1}{\mu}\right) e^{\mu(1+R)} \right] \leq -\frac{1}{\mu} \left[1 + \frac{1}{\mu} + \left(R - \frac{1}{\mu}\right) e^{\mu(1+R)} \right] < 0.$$

Последнее неравенство выполняется для всех $0 \leq \dot{y} \leq 1$. Это означает, что начиная с некоторого момента времени (другими словами начиная с некоторого значения $y < 0$), движение массы m подчиняется уравнению (1.19). Таким обра-



зом, имеем $\dot{y} = 1$. Следовательно, в системе имеются устойчивые периодические движения $\dot{y} = \dot{y}_0 = 1$, тогда и только тогда, когда выполнены неравенства (1.22). Решения неравенств (1.22) образуют область G , указанную на рис.1.21. Для любой пары (R, μ) из этой области имеется вышеуказанный тип периодических движений. Точки (R, μ^*) , принадлежащие кривым (1) и (2) раз-

бывают пространство параметров (R, μ) на три области и являются бифуркациями этого пространства. При этом кривая (1) есть $\mu = \frac{1}{R}$, а точки кривой (2) являются решениями уравнения

$$1 + \frac{1}{\mu} + \left(R - \frac{1}{\mu}\right) e^{\mu(1+R)} = 0 \quad (1.23)$$

Классификация движений системы. Пусть точка (R, μ) не является решением первого из неравенств (1.22), но выполнено второе неравенство $1 - \mu R > 0$ (область H на рис.1.21; точки (R, μ) для определенности выбираем на вертикальной прямой, содержащей точку μ^*). В этом случае $\mu < \mu^*$ и точечное преобразование $\dot{y} = T(\dot{y}_0)$ имеет только одну неподвижную точку – устойчивую точку $\dot{y}_0^* = 0$. Действительно, так как (1.22) не выполнено, то в системе может быть лишь не-

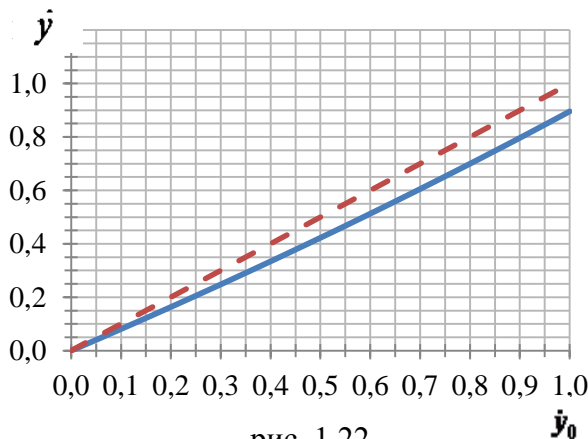


рис. 1.22

подвижные точки, для которых $\dot{y}_0^* < 1$.

Если $\dot{y}_0^* \neq 0$, то из равенства $\mu^* = \mu \dot{y}_0^*$ получим $\dot{y}_0^* > 1$, что невозможно. Характерный вид диаграммы Кенигса-Ламерея для этого случая представлен на рис.1.22 при $R = 0,8$; $\mu = 0,2$. Заметим, что изображающие точки фазовых траекторий стремятся к точке $\dot{y}_0^* = 0$, то

есть имеем затухающие движения.

Пусть точка (R, μ) является решением обоих неравенств (1.22) (область G на рис.1.21). При этих значениях параметров R и μ точечное отображение имеет три неподвижные точки, две из которых устойчивы ($\dot{y}^* = 0$ и $\dot{y}_{02}^* = 1$), а одна – неустойчива ($0 \neq \dot{y}_{01}^* < 1$). Последнюю точку можно найти из равенства $\mu^* = \mu \dot{y}_0^*$ (в этом случае $\mu^* < \mu$), где μ^* – решение уравнения (1.23). Проверим,

что точка \dot{y}_{01}^* – неустойчива. Допустим противное: \dot{y}_{01}^* – устойчива. Тогда выполнено неравенство (1.21), которое принимает вид:

$$\frac{R^2(1 + \mu\dot{y}_{01}^*)}{1 - R\mu\dot{y}_0^*} = \frac{R^2(1 + \mu^*)}{1 - R\mu^*} < 1.$$

Нетрудно видеть, что множество решений этого неравенства совпадает с множеством решений неравенства $R < \frac{1}{1 + \mu^*}$. Используя равенство (1.23) вычислим производную R'_μ в точке μ^* :

$$R'_\mu(\mu^*) = -\frac{(1 + R)}{\mu^* R(1 + \mu^*)} (R(1 + \mu^*) - 1). \text{ Если}$$

$R < \frac{1}{1 + \mu^*}$, то $R(1 + \mu^*) - 1 < \frac{1}{1 + \mu^*} (1 + \mu^*) - 1 = 0$. Но тогда функция $R(\mu)$ возрастает в точке μ^* (кривая (2)), что противоречит убыванию $R(\mu)$ для всех $0 \leq R \leq 1$

(рис.1.21). Следовательно, точка $0 \neq \dot{y}_0^* < 1$ является неустойчивой. Соответствующая диаграмма Кенигса–Ламерея приведена на рис.1.23 при $R=0,8; \mu=0,6$. Заметим, что в этом случае изображающая точка фазовой траектории при $0 < \dot{y}_0 < \dot{y}_{01}^*$ приближается к точке $y_{01}^* = 0$. Если $\dot{y}_{01}^* < \dot{y}_0 < 1$, то изображающая точка приближается к точке $y_{02}^* = 1$.

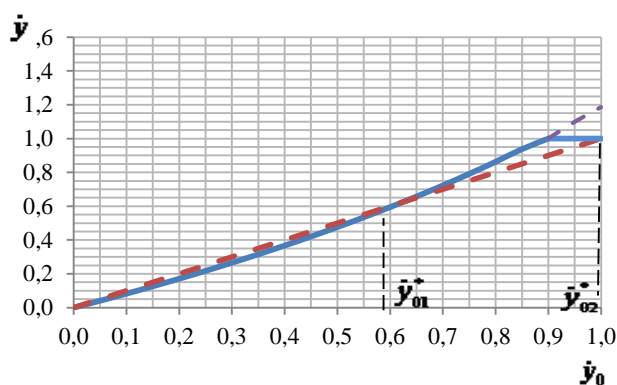


рис. 1.23

(рис.1.21). Следовательно, точка $0 \neq \dot{y}_0^* < 1$ является неустойчивой. Соответствующая диаграмма Кенигса–Ламерея приведена на рис.1.23 при $R=0,8; \mu=0,6$. Заметим, что в этом случае изображающая точка фазовой траектории при $0 < \dot{y}_0 < \dot{y}_{01}^*$ приближается к точке $y_{01}^* = 0$. Если $\dot{y}_{01}^* < \dot{y}_0 < 1$, то изображающая точка приближается к точке $y_{02}^* = 1$.

Пусть $1 - \mu R < 0$ (область Ω на рис.1.21). Тогда точечное отображение имеет неподвижную устойчивую точку $\dot{y}_0^* = 0$ и неподвижную неустойчивую точку $\dot{y}_{01}^* \neq 0$, которая находится из соотношения $\mu^* = \mu\dot{y}_0^*$. Тот факт, что вторая точка неустойчивая доказывается аналогично второму случаю. Заметим также, что в рассматриваемом случае существует значение $\dot{y}_{0кр}$, такое, что для всех $\dot{y}_0 > \dot{y}_{0кр}$

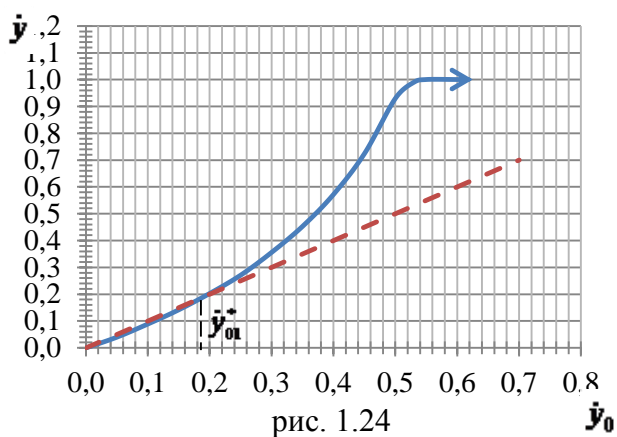


рис. 1.24

имеет место взрывная неустойчивость (см., например, [46]). При этом тело после отскока от ограничителя не может вернуться к нему за конечное время. Характерный вид диаграммы Кенигса–Ламерея приведен на рис.1.24 для $R=0,8; \mu=2$.

Значение $\dot{y}_{0_{кр}}$ находится из соотношения $1 - \mu R \dot{y}_{0_{кр}} = 0$ и при заданных значениях параметров равно примерно 0,625.

Глава 2

Динамическая система с вибрирующим ограничителем движения

§1. Постановка задачи и необходимые теоретические сведения

Принимаемая для исследования модель приведена на рис.2.1. Она состоит из подвижной массы m , расположенной внутри контейнера, которая движется

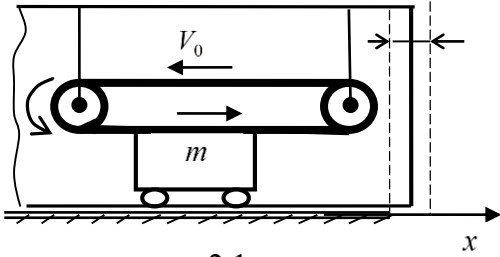


рис.2.1

горизонтально с помощью ленточного механизма за счет силы сухого трения $F(V)$, зависящей от относительной скорости $V = V_0 - \dot{x}$, V_0 – постоянная скорость ленты. Будем считать, что

$$F(V) = \begin{cases} F_0 - \delta V, & 0 < V \leq V_1 \\ F_0 - \delta V_1, & V > V_1 \end{cases}$$

$$\delta = \text{const} > 0.$$

Движение тела перемежается с ударами о правую стенку контейнера, который совершает прямолинейные гармонические колебания. Уравнения движения тела имеют вид (координата x определяется как расстояние от тела до правой стенки):

$$\begin{cases} m(x + A \sin \omega t)' = F(V_0 - \dot{x}), & x < 0, \quad \dot{x} < V_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0, & x < 0, \quad \dot{x} = V_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}^+ = -R\dot{x}^-, & x = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

где R – коэффициент восстановления скорости тела при ударе; \dot{x}^+ и \dot{x}^- – скорость тела после и до удара, соответственно. Для поступательного движения массы m к ограничителю (и от ограничителя, после удара) должно быть выполнено условие $A\omega^2 < F_0$. При этом $\dot{x} \leq V_0$ и $V_1 = 2V_0$. Тогда величина $\mu = \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \leq 1$

(см. главу 1), где $\alpha_0 = \frac{F(V_0)}{F_0}$ характеризует крутизну зависимости $F(V)$ при

$V = V_0$. В этом случае $\delta = \frac{(1 - \alpha_0)F_0}{V_0}$, откуда получим:

$$F(V_0 - \dot{x}) = F_0 - \delta(V_0 - \dot{x}) = F_0 - \frac{(1 - \alpha_0)F_0}{V_0}(V_0 - \dot{x}) = F_0 \left(\alpha_0 + \frac{1 - \alpha_0}{V_0} \dot{x} \right).$$

Нетрудно видеть, что $F(V_0 - \dot{x}) = F_0 \alpha_0 \left(1 + \mu \frac{\dot{x}}{V_0} \right)$. Тогда уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{m}{F_0 \alpha_0} \ddot{x} = 1 + \mu \frac{\dot{x}}{V_0} + \frac{m \omega^2 A}{F_0 \alpha_0} \sin \omega \tau.$$

Введем безразмерные переменные $y = \frac{m \omega^2}{F_0 \alpha_0} x$, $t = \omega \tau$; параметры $\varepsilon = \frac{m \omega^2 A}{F_0 \alpha_0}$;

$\eta = \mu \frac{F_0 \alpha_0}{m \omega V_0}$. Имеем

$$y'_t = \frac{m \omega^2}{F_0 \alpha_0} x'_\tau \tau'_t = \frac{m \omega}{F_0 \alpha_0} x'_\tau,$$

откуда $x'_\tau = \frac{F_0 \alpha_0}{m \omega} y'_t$. Заметим, что если $x'_\tau = V_0$, то $y'_t = \frac{m \omega V_0}{F_0 \alpha_0} = \frac{\mu}{\eta}$. Далее, нахо-

дим: $y''_{tt} = \frac{m}{F_0 \alpha_0} x''_{\tau\tau}$.

Система (2.1) – (2.3) переписется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y} = 1 + \eta \dot{y} + \varepsilon \sin t, \quad y < 0, \quad \dot{y} < \frac{\mu}{\eta} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y} = 0, \quad y < 0, \quad \dot{y} = \frac{\mu}{\eta} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}^+ = -R \dot{y}^-, \quad y = 0 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Изучим в первом приближении устойчивость движений, следуя [23]. Для этого построим линейную часть отображения Пуанкаре в окрестности неподвижной точки, отвечающей данному решению. Приведем сначала необходимые теоретические сведения из монографии [23]. Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), x \in R^k \quad (I)$$

с односторонними связями

$$f_1(x) \geq 0, \dots, f_l(x) \geq 0 \quad (\text{II})$$

Удары происходят в моменты, когда хотя бы для одной из связей выполняются соотношения $f_j = 0, \dot{f}_j < 0$ и описываются равенствами

$$\dot{x}^+ = \dot{x}^- + I(x^-, \dot{x}^-), \quad (\text{III})$$

где $I(x^-, \dot{x}^-)$ - ударный импульс.

Устойчивость решения системы (I) будем понимать в смысле следующих определений [23, стр.218].

Определение 1 Разрывное решение $\tilde{x}(t)$ системы (I) – (III) будем называть устойчивым, если интегральная кривая $\Gamma = (t, \tilde{x}(t))$ в расширенном фазовом пространстве является устойчивым множеством. Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для каждого другого решения $x(t)$, удовлетворяющего условию $d^*((t_0, x(t_0)), \Gamma) < \delta$, имеем $d^*((t, x(t)), \Gamma) < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$. Здесь d^* обозначает расстояние между точками расширенного фазового пространства (в евклидовой метрике).

Определение 2 Разрывное решение $\tilde{x}(t)$ системы (I) – (III) называется притягивающим, если интегральная кривая Γ представляет собой притягивающее множество в расширенном фазовом пространстве. Иными словами, найдется $\delta > 0$, такое, что для каждого другого решения $x(t)$, такого что $d^*((t_0, x(t_0)), \Gamma) < \delta$, имеем $d^*((t, x(t)), \Gamma) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Определение 3 Разрывное решение $\tilde{x}(t)$ системы (I) – (III) называется устойчивым, если оно устойчиво и притягивающее в смысле определений 1 и 2.

Отличие от классических определений Ляпунова [37] состоит в том, что возмущенное $x(t)$, сравнивается со значениями \tilde{x} на некотором малом интервале времени. Тем самым асинхронность ударов не свидетельствует о неустойчивости. Кроме того, в отличие от гладких динамических систем, в разрывном случае из устойчивости неподвижной точки отображения Пуанкаре не следует, вообще

говоря, устойчивости соответствующего периодического движения. Однако имеет место следующее

Предложение 1 ([23, предложение 7.5]) Из устойчивости периодических решений системы (I) – (III) следует устойчивость соответствующей неподвижной точки отображения Пуанкаре. Для решений, включающих лишь простые (некратные) удары, удовлетворяющих условию $f_j(\tilde{x}(t')) = 0$, $\dot{f}_j(\tilde{x}(t')) < 0$, где t' – момент удара. Справедлива и обратная импликация (в момент t_0 все односторонние связи ослаблены).

§2. Периодические движения без участка совместного «скольжения» тела и ленты

Найдем условия существования и устойчивости периодических движений системы. Будем применять метод «сглаживания» ударных взаимодействий [23]. При этом предполагаем, что наложенная на систему неударная связь $y \leq 0$ проявляет себя лишь в моменты соударений. В этом случае условия удара в момент $t = t_0$ таковы: $y(t_0 - 0) = 0$, $\dot{y}(t_0 - 0) = \dot{y}^- > 0$. Будем сопоставлять с периодическим движением пару целых чисел (n, k) , если его период $2\pi n$, и оно испытывает в течение этого времени k ударов. Рассмотрим случай $k = 1$. Пусть сначала $\dot{y}^- < \frac{\mu}{\eta}$, т.е. исключим из рассмотрения фазу относительного покоя тела m . Движение описывается уравнениями (2.4) и (2.6). Полагая $x_1 = y$, перепишем уравнения (2.4) и (2.6) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 1 + \eta x_2 + \varepsilon \sin t, & x_1 < 0 \\ \dot{x}_2^+ = -R\dot{x}_2^-, & x_1 = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Система (2.7) имеет вид (I-III), где $x = (x_1, x_2)$, $F = (F_1, F_2) = (x_2, 1 + \eta x_2 + \varepsilon \sin t)$. Вектор возмущений $\xi(t)$ определяется как разность между данными периодическим и близким к нему решением $\xi = x(t) - \tilde{x}(t)$. На участках безударного движения переменная ξ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\xi} = F(t, \tilde{x}(t) + \xi) - F(t, \tilde{x}(t)) \quad (2.8)$$

Правая часть системы (2.8) равна нулю при $\xi = 0$, поэтому ее можно представить в виде [23]

$$\dot{x} = A(t)x + o(\|x\|), \quad A = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=0}$$

Решение системы (2.8) в случае гладкой системы допускает оценку вида

$$\xi(t) = X(t)\xi_0 + o(\xi_0) \quad (2.9),$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной системы

$$\dot{X} = A(t)X \quad (2.10)$$

Формула (2.10) справедлива до первого момента удара t_0 .

Матрица $A(t)$ в уравнении (2.10) в нашем случае выглядит так:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица решений $X(t)$ определяется условиями $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, $X(0) = E_2$. Хорошо известно (см., напр., [19]), что $X(t)$ вычисляется по формуле $X(t) = e^{A(t)}$, причем

$$e^{A(t)} = S^{-1} \text{diag}(e^{tJ_1(\lambda_1)}, \dots, e^{tJ_m(\lambda_m)}) S,$$

где $e^{tJ_q(\lambda_q)} = e^{\lambda_q t} \sum_{r=0}^{e_q-1} \frac{t^r}{r!} I_r(q)$. Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – собственные значения $A(t)$, отвечающие различным клеткам $J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)$ ее канонической формы Жордана и

e_1, \dots, e_m – порядки этих клеток; $I_r(q)$ – r -ый единичный косоугольный ряд. Нетрудно убедиться, что каноническая форма Жордана матрицы $A(t)$ есть $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$ с собственными значениями $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = \eta$ и матрицей перехода $S = \begin{pmatrix} -\eta & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Кроме того, $e^{tJ_1(\lambda_1)} = 1; e^{tJ_2(\lambda_2)} = e^{\eta t}$. Следовательно,

$$X(t) = S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\eta t} \end{pmatrix} S = -\frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\eta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\eta}(e^{\eta t} - 1) \\ 0 & e^{\eta t} \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующее

Предложение 2 [23, предложение 7.6] Для движения с ударами возмущения описываются формулой (2.9), где $X(t)$ – кусочно-непрерывное решение системы

(2.10). Точки разрыва матрицы $X(t)$ совпадают с моментами ударов для невозмущенного движения, при этом $X^+ = JX^-$, $X^\pm = X(t_0 \pm 0)$, где матрица удара J определяется соотношением

$$J = E_k + I_x + V^{-1}(F^- - F^+) \otimes \text{grad}f + V^{-1}I_x(F^- \otimes \text{grad}f), \quad (2.11)$$

Здесь $F^\pm = F(t_0, \tilde{x}(t_0 \pm 0))$, $V = -(\text{grad}f, F(t_0, \tilde{x}(t_0)))$; знак « \otimes » обозначает внешнее произведение двух векторов $a \otimes b = \|a_i b_j\|$, $i, j = 1, \dots, k$. Найдем матрицу удара

J в рассматриваемом нами случае. Система имеет единственную степень свободы, односторонняя связь выражается неравенством $x_1 \leq 0$, а удар об эту связь

описывается при помощи ньютоновского коэффициента восстановления:

$x_2^+ = -Rx_2^-$. В этом случае $x = (x_1, x_2)^t$, $f(x) = x_1$, $F = (x_2, F_2)^t$, $I = (0, -(1+R)x_2)^t$,

$\text{grad}f = (1, 0)^t$, $I_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1-R \end{pmatrix}$ (сравни [23, пример 1, стр.223]). Учитывая, что

$F(t_0, \tilde{x}(t_0)) = (x_2(t_0), F_2(t_0)) = (x_2^-, F_2(t_0))$, получим

$$V = -((1, 0)^t, (x_2^-, F_2(t_0))) = -x_2^-.$$

Найдем составляющие формулы (2.11):

$$V^{-1}(F^- - F^+) \otimes \text{grad}f = -\frac{1}{x_2^-} \begin{pmatrix} x_2^- - x_2^+ \\ F_2^- - F_2^+ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2^- - x_2^+}{-x_2^-} & 0 \\ \frac{F_2^- - F_2^+}{-x_2^-} & 0 \end{pmatrix};$$

$$V^{-1} \cdot I_x(F^- \otimes \text{grad}f) = -\frac{1}{x_2^-} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1-R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2^- & 0 \\ F_2^- & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{(1+R)F_2^-}{x_2^-} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1-R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x_2^- - x_2^+}{-x_2^-} & 0 \\ \frac{F_2^- - F_2^+}{-x_2^-} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{(1+R)F_2^-}{x_2^-} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{x_2^- - x_2^+}{-x_2^-} & 0 \\ \frac{F_2^- - F_2^+}{-x_2^-} + \frac{(1+R)F_2^-}{x_2^-} & -R \end{pmatrix}.$$

Замечая, что

$$1 + \frac{x_2^- - x_2^+}{-x_2^-} = \frac{-x_2^- + x_2^- - x_2^+}{-x_2^-} = \frac{Rx_2^-}{-x_2^-} = -R,$$

$$\frac{F_2^- - F_2^+}{-x_2^-} + \frac{(1+R)F_2^-}{x_2^-} = \frac{-F_2^- + F_2^+ + F_2^- + RF_2^-}{x_2^-} = \frac{F_2^+ + RF_2^-}{x_2^-},$$

окончательно получим

$$J = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ \frac{F_2^+ + RF_2^-}{x_2^-} & -R \end{pmatrix},$$

где $F_2^\pm = 1 + \eta x_2^\pm + \varepsilon \sin t_0$; t_0 – момент удара.

Согласно [23, стр.224], матрица

$$Z = X(2\pi n) \cdot J = \begin{pmatrix} -R + \frac{(e^{2\pi n \eta} - 1)(F_2^+ + RF_2^-)}{\eta x_2^-} & -\frac{R}{\eta}(e^{2\pi n \eta} - 1) \\ \frac{e^{2\pi n \eta}(F_2^+ + RF_2^-)}{x_2^-} & -e^{2\pi n \eta} R \end{pmatrix}$$

представляет собой линейную часть отображения Пуанкаре в окрестности неподвижной точки. Характеристическое уравнение имеет вид: $\rho^2 - a_1 \rho + a_2 = 0$, где

$$a_1 = \text{tr}Z = -R(e^{2\pi n \eta} + 1) + \frac{(e^{2\pi n \eta} - 1)(F_2^+ + RF_2^-)}{\eta x_2^-}, \quad a_2 = \det Z = R^2 e^{2\pi n \eta}. \quad (2.12)$$

Условие асимптотической устойчивости $|\rho_{1,2}| < 1$ можно записать в виде

$|a_1| < 1 + a_2 < 2$, т.е.

$$\left| -R(e^{2\pi n \eta} + 1) + \frac{(e^{2\pi n \eta} - 1)(F_2^+ + RF_2^-)}{\eta x_2^-} \right| < 1 + R^2 e^{2\pi n \eta} < 2 \quad (2.13)$$

Учитывая, что

$$F_2^+ + RF_2^- = 1 - R\eta x_2^- + \varepsilon \sin t_0 + R(1 + \eta x_2^- + \varepsilon \sin t_0) = (1 + R)(1 + \varepsilon \sin t_0)$$

и раскрыв модуль в соотношении (2.13), приведем его к виду

$$\begin{cases} (1 - R)(Re^{2m\eta} - 1) < \frac{(e^{2m\eta} - 1)(1 + R)(1 + \varepsilon \sin t_0)}{\eta x_2^-} < (1 + R)(1 + Re^{2m\eta}) \\ 1 - R^2 e^{2m\eta} > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Найдем значение скорости x_2^- и момента удара t_0 , при которых существует периодическое движение рассматриваемого типа. Решим уравнение (2.4) с начальными условиями $y(t_0) = 0$, $\dot{y}(t_0) = \dot{y}(t_0 + 0)$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 e^{\eta t}.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = A \cos t + B \sin t + Ct.$$

Находя коэффициенты A , B и C , получим общее решение неоднородного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{\eta t} + \frac{\varepsilon}{1 + \eta^2} (\eta \cos t - \sin t) - \frac{t}{\eta} \quad (2.15)$$

Подставляя начальные условия в (2.15) и опуская громоздкие элементарные выкладки, находим

$$C_1 = -\frac{1}{\eta} \left[\frac{\varepsilon}{1 + \eta^2} (\eta \sin t_0 + \cos t_0) + \frac{1}{\eta} + \dot{y}(t_0 + 0) \right] - \frac{\varepsilon}{1 + \eta^2} (\eta \cos t_0 - \sin t_0) + \frac{t_0}{\eta};$$

$$C_2 = \frac{e^{-\eta t_0}}{\eta} \left[\frac{\varepsilon}{1 + \eta^2} (\eta \sin t_0 + \cos t_0) + \frac{1}{\eta} + \dot{y}(t_0 + 0) \right].$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в уравнение (2.15), и обозначая для краткости $\varepsilon \sin t$ через $h(t)$, получим частное решение уравнения (2.4) с начальными условиями $y(t_0) = 0$, $\dot{y}(t_0) = \dot{y}(t_0 + 0)$:

$$y(t) = \frac{1}{1 + \eta^2} \left(-\eta \dot{h}(t_0) + h(t_0) + \eta \dot{h}(t) - h(t) \right) +$$

$$+ \frac{1}{\eta} \left(\dot{y}(t_0 + 0) + \frac{1}{1 + \eta^2} (\eta h(t_0) + \dot{h}(t_0)) + \frac{1}{\eta} \right) \times (e^{\eta(t-t_0)} - 1) - \frac{1}{\eta} (t - t_0) \quad (2.16)$$

При этом

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\frac{1}{1 + \eta^2} (\eta h(t) + \dot{h}(t)) + \left(\dot{y}(t_0 + 0) + \frac{1}{1 + \eta^2} (\eta h(t_0) + \dot{h}(t_0)) + \frac{1}{\eta} \right) \times \\ & \times e^{\eta(t-t_0)} - \frac{1}{\eta} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для периодического движения с периодом $T = 2\pi n$ имеем:

$$\dot{y}(t_0 + T - 0) = x_2^- = \left(\frac{1}{1 + \eta^2} (\dot{h}(t_0) + \eta h(t_0)) + \frac{1}{\eta} \right) (e^{\eta T} - 1) + e^{\eta T} \dot{y}(t_0 + 0)$$

или

$$x_2^- = \left(\frac{1}{1 + \eta^2} (\dot{h}(t_0) + \eta h(t_0)) + \frac{1}{\eta} \right) (e^{\eta T} - 1) - R x_2^- e^{\eta T}.$$

Тогда

$$x_2^- = \frac{(e^{\eta T} - 1) \left(\frac{1}{1 + \eta^2} (\dot{h}(t_0) + \eta h(t_0)) + \frac{1}{\eta} \right)}{1 + R e^{\eta T}} \quad (2.18)$$

С другой стороны

$$y(t_0 + T) = \left(\frac{1}{1 + \eta^2} (\dot{h}(t_0) + \eta h(t_0)) + \frac{1}{\eta} \right) (e^{\eta T} - 1) + (e^{\eta T} - 1) \dot{y}(t_0 + 0) - T = 0.$$

Откуда

$$\left(\frac{1}{1 + \eta^2} (\dot{h}(t_0) + \eta h(t_0)) + \frac{1}{\eta} \right) (e^{\eta T} - 1) = T + R x_2^- (e^{\eta T} - 1) \quad (2.19)$$

Подставив (2.19) в выражение (2.18), получим

$$x_2^- = \frac{T}{1 + R} = \frac{2\pi n}{1 + R} \quad (2.20)$$

Далее, учитывая (2.20), из (2.19) имеем

$$\frac{1}{1+\eta^2}(\dot{h}(t_0) + \eta h(t_0)) + \frac{1}{\eta} = \frac{2\pi n + \frac{2\pi n R}{1+R}(e^{2\pi n \eta} - 1)}{e^{2\pi n \eta} - 1}$$

или

$$\cos t_0 + \eta \sin t_0 = \frac{(2\pi n \eta \xi_1 - 1)(1 + \eta^2)}{\varepsilon \eta}, \quad (2.21)$$

где $\xi_1 = \frac{1 + Re^{2\pi n \eta}}{(e^{2\pi n \eta} - 1)(1 + R)}$. Из (2.21) находим

$$\sin(\alpha + t_0) = \frac{\sqrt{1 + \eta^2}(2\pi n \eta \xi_1 - 1)}{\varepsilon \eta}, \quad \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}}.$$

Окончательно для момента удара имеем

$$t_0 = \arcsin \frac{\sqrt{1 + \eta^2}(2\pi n \eta \xi_1 - 1)}{\varepsilon \eta} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}}, \quad (2.22)$$

$$t_0 = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{1 + \eta^2}(2\pi n \eta \xi_1 - 1)}{\varepsilon \eta} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}}. \quad (2.23)$$

Известно (см., напр., [42]), что граница области устойчивости неподвижной точки в пространстве параметров системы состоит из трех различных поверхностей N_{+1} , N_{-1} и N_φ . При переходе через эти поверхности среди корней характеристического полинома появляются соответственно, корень $+1$; -1 и два комплексно-сопряженных корня $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$. При этом часть N_{+1} границы области устойчивости, соответствующая единичному корню, совпадает с границей области существования неподвижной точки.

Найдем сначала границу N_{+1} области существования неподвижной точки. Из (2.14) имеем

$$(e^{2\pi n \eta} - 1)(1 + R)(1 + \varepsilon \sin t_0) < (1 + Re^{2\pi n \eta})2\pi n \eta \quad \text{или} \quad \varepsilon < \frac{2\pi n \eta \xi_1 - 1}{\sin t_0} \quad (2.24)$$

Вычислим $\sin t_0$ в точке (2.22):

$$\begin{aligned} \sin t_0 = & \sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{1+\eta^2}(2\pi\eta\xi_1-1)}{\varepsilon\eta}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\right) - \\ & - \cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{1+\eta^2}(2\pi\eta\xi_1-1)}{\varepsilon\eta}\right)\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\right). \end{aligned}$$

Опуская громоздкие вычисления, после упрощений получим:

$$\sin t_0 = \frac{\eta\sqrt{1+\eta^2}(2\pi\eta\xi_1-1) - \sqrt{\varepsilon^2\eta^2 - (1+\eta^2)(2\pi\eta\xi_1-1)^2}}{\varepsilon\eta\sqrt{1+\eta^2}} \quad (2.25)$$

Подставив (2.25) в неравенство (2.24) находим

$$\varepsilon > \frac{\sqrt{1+\eta^2}|2\pi\eta\xi_1-1|}{\eta}.$$

Заметим, что границу N_{+1} существования

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1+\eta^2}|2\pi\eta\xi_1-1|}{\eta} \quad (2.26)$$

можно было найти из уравнения $1 - a_1 + a_2 = 0$ [42], где коэффициенты a_1 и a_2 определены в (2.12). Границу (2.26) также легко получить непосредственно из уравнения (2.21). Далее, при подстановке значения (2.26) в характеристическое уравнение $\rho^2 - a_1\rho + a_2 = 0$ с учетом (2.20) и (2.22) получим корни $\rho_1 = 1$; $\rho_2 = R^2 e^{2\pi\eta}$, что согласуется с общей теорией.

Найдем границу N_{-1} . Из (2.14) имеем

$$1 + \varepsilon \sin t_0 > \frac{2\pi\eta(1-R)(Re^{2\pi\eta}-1)}{(e^{2\pi\eta}-1)(1+R)^2} \quad (2.27)$$

С учетом (2.25) неравенство (2.27) переписывается так:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^2\eta^2 - (1+\eta^2)(2\pi\eta\xi_1-1)^2}}{\eta\sqrt{1+\eta^2}} < 2\pi\eta\xi_1 - \frac{2\pi\eta(1-R)(Re^{2\pi\eta}-1)}{(e^{2\pi\eta}-1)(1+R)^2}$$

Так как $\xi_1 = \frac{1 + Re^{2m\eta}}{(e^{2m\eta} - 1)(1 + R)}$, то последнее неравенство после возведения в квадрат преобразуется к виду:

$$\frac{\varepsilon^2 \eta^2 - (1 + \eta^2)(2\pi\eta\xi_1 - 1)^2}{\eta^2(1 + \eta^2)} < \frac{16\pi^2 n^2 \eta^2 (1 + R^2 e^{2m\eta})^2}{(e^{2m\eta} - 1)^2 (1 + R)^4}.$$

Разрешив его относительно ε , окончательно получим

$$\varepsilon < \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\eta} \sqrt{(2\pi\eta\xi_1 - 1)^2 + 16\pi^2 n^2 \eta^4 \xi_2},$$

где $\xi_2 = \frac{(1 + R^2 e^{2m\eta})^2}{(e^{2m\eta} - 1)^2 (1 + R)^4}$.

Заметим также, что границу N_{-1}

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\eta} \sqrt{(2\pi\eta\xi_1 - 1)^2 + 16\pi^2 n^2 \eta^4 \xi_2} \quad (2.28)$$

можно было найти из уравнения $1 + a_1 + a_2 = 0$ [42], где коэффициенты a_1 и a_2 определены в (2.12).

Наконец, граничная кривая N_φ в параметрическом виде представлена как

$$a_1 = 2\cos\varphi, \quad \varphi \in (0, \pi); \quad a_2 = 1,$$

что согласуется с неравенствами (2.14).

Тот факт, что при переходе через границы N_{+1} , N_{-1} и N_φ появляются корни $+1$; -1 ; $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$ соответственно, проверяется непосредственно. Пусть,

например, $\varepsilon = \frac{\sqrt{1 + \eta^2} |2\pi\eta\xi_1 - 1|}{\eta}$ (N_{+1} -граница). Тогда с учетом равенства

$1 + \varepsilon \sin t_0 = 2\pi\eta\xi_1$, получим характеристическое уравнение

$$\rho^2 - (1 + R^2 e^{2m\eta})\rho + R^2 e^{2m\eta} = 0$$

с корнями $\rho_1 = 1$; $\rho_2 = R^2 e^{2m\eta}$, что согласуется с общей теорией.

Итак, в случае движений, не включающих участок совместного «скольжения» тела и ленты имеем аналитическое описание одноударных периодических движений системы:

Утверждение.

а) вид однократных неподвижных точек отображения Пуанкаре, соответствующих движениям $(1, n)$:

$$x_2^- = \frac{2\pi n}{1+R}; \quad t_0 = \arcsin \frac{\sqrt{1+\eta^2}(2\pi n \eta \xi_1 - 1)}{\varepsilon \eta} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}, \quad (*)$$

$$x_2^- = \frac{2\pi n}{1+R}; \quad t_0 = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{1+\eta^2}(2\pi n \eta \xi_1 - 1)}{\varepsilon \eta} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}, \quad (**)$$

где $\xi_1 = \frac{1 + R e^{2\pi n \eta}}{(e^{2\pi n \eta} - 1)(1 + R)}$; $x_2^- < \frac{\mu}{\eta}$ (т.е. $\mu > \frac{2\pi n \eta}{1 + R}$).

б) вид их N_{+1} - границ существования

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1+\eta^2} |2\pi n \eta \xi_1 - 1|}{\eta} = f(n, R, \eta);$$

в) вид границ устойчивости (N_{-1} и N_φ - границы)

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \sqrt{(2\pi n \eta \xi_1 - 1)^2 + 16\pi^2 n^2 \eta^4 \xi_2} = f_1(n, R, \eta),$$

$$R^2 e^{2\pi n \eta} = 1,$$

где $\xi_2 = \frac{(1 + R^2 e^{2\pi n \eta})^2}{(e^{2\pi n \eta} - 1)^2 (1 + R)^4}$;

г) характеристическое уравнение для неподвижных точек (*) и (**) имеет вид

$$\rho^2 + \left[R(e^{2\pi n \eta} + 1) - \frac{(1 + R)^2 (e^{2\pi n \eta} - 1)(1 + \varepsilon \sin t_0)}{2\pi n \eta} \right] \rho + R^2 e^{2\pi n \eta} = 0. \quad (2.29) \quad \square$$

Заметим также, что если неподвижная точка (**) существует при $\varepsilon > f(n, R, \eta)$, то она является седлом ($\rho_1 > 1$, $0 < \rho_2 < 1$, ρ_1, ρ_2 - корни (2.29)).

Неподвижная точка (*) в области существования вблизи границы $f(n, R, \eta)$ является устойчивым фокусом ($0 < |\rho_{1,2}| < 1$, $\rho_{1,2} \in \mathbb{C}$). При переходе через границу $f_1(n, R, \eta)$ она превращается из устойчивого фокуса в седло ($\rho_1 < -1$, $-1 < \rho_2 < 0$) и, согласно общей теории [42], из нее рождается пара двукратных устойчивых неподвижных точек (суперкритическая бифуркация [23]) или с ней сливается неустойчивая двукратная неподвижная точка (субкритическая бифуркация [23]). Согласно [42], при переходе через N_φ следует ожидать возможности появления многократных неподвижных точек с таким числом m , что $m\varphi$ близко к числу, кратному 2π . Структура разбиения пространства параметров вблизи бифуркационной поверхности N_φ может иметь очень сложный и тонкий характер.

§3. Периодические движения, включающие участок совместного «скольжения» тела и ленты

Если $\mu \leq \frac{2\pi n \eta}{1+R}$ и существует периодическая траектория, то она необходимо включает интервал «скольжения» (т.е. интервал совместного движения тела и ленты). В этом случае неподвижной точкой является пара $\left(x_2^- = \frac{\mu}{\eta}, t_0^*\right)$, где t_0^* – начальная фаза. Тогда, согласно (2.17), должно быть разрешимо уравнение

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{1+\eta^2}(\eta h(t) + \dot{h}(t)) + \left(-R\frac{\mu}{\eta} + \frac{1}{1+\eta^2}(\eta h(t_0) + \dot{h}(t_0)) + \frac{1}{\eta}\right) \times e^{\eta(t-t_0)} - \frac{1}{\eta} = \frac{\mu}{\eta} \quad (2.30)$$

относительно t на интервале $(t_0, t_0 + 2\pi n)$. Если t^* – корень (2.30), то при $t \geq t^*$ скорость тела m постоянна и равна скорости ленты $\frac{\mu}{\eta}$. При этом должно выполняться условие $y(t^*) \leq 0$. Найдем соотношение, из которого находится начальная фаза t_0^* . Если $t_0 < t \leq t^*$, то тело движется согласно (2.16). Далее, при $t^* < t \leq t_0 + 2\pi n$ движение тела описывается уравнением

$$y(t) = (t - t^*)\dot{y}(t^*) + y(t^*)$$

или

$$y(t) = (t - t^*)\frac{\mu}{\eta} + y(t^*).$$

При замыкании траектории имеем

$$y(t_0 + 2\pi n) = (t_0 + 2\pi n - t^*)\frac{\mu}{\eta} + y(t^*) = 0.$$

Откуда получаем

$$y(t^*) = (t^* - t_0 - 2\pi n)\frac{\mu}{\eta}. \quad (2.31)$$

Таким образом, можно найти искомую начальную фазу t_0^* , совместно решая уравнения (2.30) и (2.31) с учетом условия $y(t^*) \leq 0$. При этом выразить в явном виде величины t^* и t_0^* не представляется возможным. Для нахождения условий существования и устойчивости периодических режимов, включающих участок относительного покоя тела m , применим метод линеаризации Айзермана – Гантмахера [1]. Суть метода, позволяющего исследовать по первому приближению периодические движения систем с разрывными правыми частями, заключается в следующем. Рассматривается система

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in R^n \quad (2.32)$$

где вектор-функция $f(t, x)$ имеет разрыв на гладкой поверхности $\varphi(t, x) = 0$, причем f и $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ($j = 1, \dots, n$) непрерывны с обеих сторон этой поверхности вплоть до самой поверхности. Допустим, что решение $x(t)$ системы (2.32) при $t = t^*$ в точке $x^* = x(t^*)$ переходит с одной стороны поверхности $\varphi(t, x) = 0$ на другую, причем в этой точке

$$\varphi_t + \varphi_x f^- \neq 0, \quad \varphi_t + \varphi_x f^+ \neq 0, \quad (2.33)$$

$$\varphi_x = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right), \quad f^\pm = f(t^* \pm 0, x(t^* \pm 0)),$$

то есть пересечение происходит без касания. В формуле (2.33) $\varphi(x)$ – вектор-строка, а f^\pm – вектор-столбцы той же размерности, поэтому произведение их в указанном порядке – скаляры.

Теорема [1]. Вариация решений $h(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ описывается формулой

$$h(t) = X(t)h_0 + o(h_0),$$

где матрица фундаментальных решений $X(t)$ непрерывно дифференцируема вне поверхности разрыва $\varphi(t, x) = 0$ и удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\dot{X}(t) = f_x(t, x(t))X(t); \quad X(t_0) = E_n, \quad \text{а при } t = t^* \text{ имеет скачок}$$

$$X(t^* + 0) - X(t^* - 0) = \frac{(f^+ - f^-)\varphi_x}{\varphi_t + \varphi_x f^-} X(t^* - 0) \quad (2.34)$$

Возвращаясь к нашему случаю, на участке без ударов движение тела удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \begin{cases} 1 + \eta x_2 + \varepsilon \sin t, x_2 < \frac{\mu}{\eta} \\ 0, x_2 = \frac{\mu}{\eta} \end{cases} \\ x_1 < 0 \end{cases}$$

Линия разрыва задается уравнением $\varphi(t, x) = x_2 - \frac{\mu}{\eta}$. Далее

$$\varphi_x = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = (0, 1), \quad f^- = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\eta} \\ 1 + \mu + \varepsilon \sin t^* \end{pmatrix}, \quad f^+ = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\eta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_t = 0.$$

Хотя одно из условий (2.33) нарушается, метод линеаризации здесь также применим. В этом случае наличие фазы совместного скольжения приводит к вырождению матрицы фундаментальных решений [24]. Из (2.34) находим:

$$X(t^* + 0) = \left[\frac{(f^+ - f^-)\varphi_x}{\varphi_t + \varphi_x f^-} + E_2 \right] \cdot X(t^* - 0) = A \cdot X(t^* - 0).$$

Найдем матрицу перехода A . Имеем:

$$(f^+ - f^-) \cdot \varphi_x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 - \mu - \varepsilon \sin t^* \end{pmatrix} \cdot (0 \quad 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 - \mu - \varepsilon \sin t^* \end{pmatrix};$$

$$\varphi_t + \varphi_x f^- = 1 + \mu + \varepsilon \sin t^*.$$

Тогда

$$A = \frac{(f^+ - f^-)\varphi_x}{\varphi_t + \varphi_x f^-} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$X(t^* + 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X(t^* - 0). \quad (2.35)$$

(сравни [24, формула 3.21]).

Включение в движение интервала относительного покоя тела связано с разрывной бифуркацией: в соответствие с формулой (2.35) матрицу $X(2\pi n)$ надо умножить на матрицу перехода, вычисленную в момент смены режима t^* , определяемый условием $x_2(t^*) = \frac{\mu}{\eta}$. Формула (2.35) приводит к такому результату:

$$X^+(2\pi n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\eta}(e^{2\pi n \eta} - 1) \\ 0 & e^{2\pi n \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\eta}(e^{2\pi n \eta} - 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, имеем: $F_2^- = 0$ (скорость тела непосредственно перед ударом постоянна); $x_2^- = \frac{\mu}{\eta}$. Кроме того

$$F_2^+ = 1 + \eta x_2^+ + \varepsilon \sin t_0 = 1 - \eta R x_2^- + \varepsilon \sin t_0 = 1 - R\mu + \varepsilon \sin t_0.$$

Поэтому матрица удара J имеет вид (смотри §2)

$$J = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ \frac{(1 - \mu R + \varepsilon \sin t_0)\eta}{\mu} & -R \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Z = X(2\pi n) \cdot J = \begin{pmatrix} -R + \frac{(e^{2\pi n \eta} - 1)(1 - R\mu + \varepsilon \sin t_0)}{\mu} & -\frac{R}{\eta}(e^{2\pi n \eta} - 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие асимптотической устойчивости записывается в виде

$$|a_1| = \left| -R + \frac{(e^{2\pi n \eta} - 1)(1 - R\mu + \varepsilon \sin t_0)}{\mu} \right| < 1 \quad (2.36)$$

Дальнейшее аналитическое исследование вряд ли целесообразно, и следует обратиться к численным экспериментам. В результате последних (см. §4) было установлено, что если в некоторой области параметров ε , η , μ точное

отображение имеет неподвижные точки, то их две: $\left(\frac{\mu}{\eta}, t_{01}^*\right)$ и $\left(\frac{\mu}{\eta}, t_{02}^*\right)$, одна из которых устойчива, другая – нет. При этом устойчивая точка имеет начальную

фазу $t_{01}^* \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, а неустойчивая $t_{02}^* \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, что вполне согласуется с качественными соображениями (см., например, [26, стр. 37 – 41]).

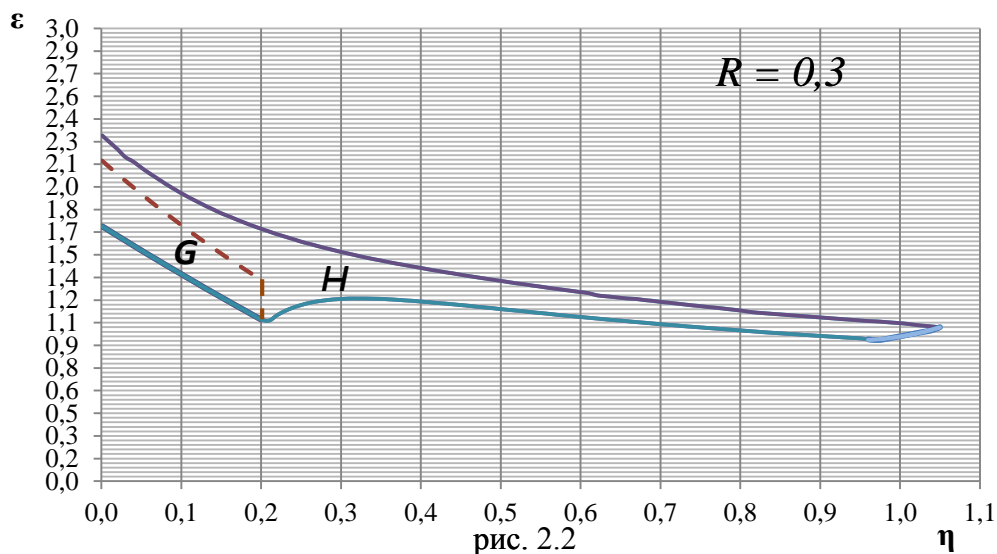
§4. Численное исследование областей существования и устойчивости периодических движений системы

Зафиксируем R и n . Обозначим через G область существования и устойчивости периодических движений, не включающих участок относительного покоя тела m , на плоскости параметров (η, ε) (будем для краткости называть этот режим движения «режим 1»). Выше было доказано, что если точка $(\eta, \varepsilon) \in G$, то для всякого значения $\mu \in [\mu^*; 1]$, где $\mu^* = \frac{2\pi n \eta}{1+R}$, точечное отображение имеет устойчивую неподвижную точку (x_2^-, t_0) . Координаты x_2^- и t_0 вычисляются согласно (2.20) и (2.22). Область G ограничена на плоскости параметров (η, ε) кривыми (2.26), (2.28) и $1 - R^2 e^{2\pi n \eta} = 0$, соответствующим границам N_{+1} , N_{-1} и N_φ . Заметим, однако, что в связи с ограничением $\mu \leq 1$, граница N_φ может не достигаться для значений параметра $R \in (0; R_\varphi)$ для некоторого значения R_φ . Найдем R_φ . Из равенства $1 - R^2 e^{2\pi n \eta} = 0$ находим $\eta_\varphi = \frac{\ln(1/R^2)}{2\pi n}$. Тогда $\mu^* = \frac{2\pi n \eta}{1+R} = \frac{\ln(1/R^2)}{1+R}$. Если $\mu^* > 1$, то должно выполняться неравенство $1 + R + 2 \ln R < 0$. Откуда находим $R_\varphi \approx 0,478$.

Таким образом, для всех $R \in (0; 0,478)$ область G ограничена кривыми N_{+1}, N_{-1} и кривой $\eta_{кр.} = \frac{1+R}{2\pi n} < \eta_\varphi$. Последняя кривая получена из равенства $\mu^* = \frac{2\pi n \eta}{1+R} = 1$. На рис.2.2. область G найдена для $R = 0,3; n = 1$ (верхняя ее граница обозначена пунктиром). В этом случае $\eta_{кр.} = \frac{1+0,3}{2\pi} \approx 0,206$ (для сравнения $\eta_\varphi = \frac{\ln(1/0,09)}{2\pi} \approx 0,383$). Для значений $R > R_\varphi$ область G ограничена кривыми

N_{+1}, N_{-1} и $N_\varphi : \eta = \eta_\varphi$. Например, если $R = 0,6; n = 1$, то имеем

$$\eta_\varphi = \frac{\ln(1/0,36)}{2\pi} \approx 0,163 \quad (\eta_{кр.} = \frac{1+0,6}{2\pi} \approx 0,255).$$



Пусть H – область существования и устойчивости периодических движений, имеющих участок относительного покоя тела m (для краткости назовем этот режим движения «режим 2»). В результате численных экспериментов установлено, что имеет место включение $G \subset H$. Для каждой точки $(\eta, \varepsilon) \in G$ существует интервал (μ_*, μ^*) , такой, что для всякого значения μ из этого интервала точечное отображение имеет устойчивую неподвижную точку $\left(\frac{\mu}{\eta}; t_0^*\right)$, начальная фаза t_0^* находится из системы уравнений (2.30), (2.31). Для нахождения приближенного решения этой системы автор использовал математический пакет Mathcad [38]. Таким образом, для точек из области G при подходящих значениях μ в системе имеются устойчивые периодические движения в обоих режимах 1 и 2. Для точек $(\eta, \varepsilon) \in H \setminus G$ в системе имеются устойчивые периодические движения только в режиме 2. Именно, каждому такому значению η соответствует определенный интервал $(\varepsilon_{\min}(\eta), \varepsilon_{\max}(\eta))$. При подходящих значениях

$\mu \in (\mu_1, \mu_2) \subset (\mu_*, \mu^*)$ для каждого $\varepsilon \in (\varepsilon_{\min}(\eta), \varepsilon_{\max}(\eta))$ существует устойчивая неподвижная точка $\left(\frac{\mu}{\eta}, t_0^*\right)$. При приближении параметра ε к границам интервала $(\varepsilon_{\min}(\eta), \varepsilon_{\max}(\eta))$ интервал (μ_1, μ_2) уменьшается и на границах стягивается в точку (рис.2.4).

Покажем, что границы существования периодических движений в режимах 1 и 2 совпадают, если параметр μ может принимать любые значения. Граница N_{+1} существования в режиме 1 определяется неравенством (2.24). Перепишем его в виде

$$(e^{2m\eta} - 1)(1 + \varepsilon \sin t_0) < \frac{(1 + Re^{2m\eta})2\pi n \eta}{1 + R}, \quad (2.37)$$

Граница N_{+1} существования в режиме 2 определяется неравенством

$$-R + \frac{(e^{2m\eta} - 1)(1 - \mu R + \varepsilon \sin t_0)}{\mu} < 1. \quad (2.38)$$

Преобразуя (2.38), получим

$$(e^{2m\eta} - 1)(1 + \varepsilon \sin t_0) < \mu(1 + Re^{2m\eta}). \quad (2.39)$$

Пусть неравенство (2.37) не выполнено. Если имеет место (2.39), то находим

$$\mu(1 + Re^{2m\eta}) > (e^{2m\eta} - 1)(1 + \varepsilon \sin t_0) > \frac{(1 + Re^{2m\eta})2\pi n \eta}{1 + R}.$$

Откуда следует $\mu > \frac{2\pi n \eta}{1 + R}$. Однако при таких значениях параметра μ в режиме 2 не существует периодических движений. Таким образом, неравенство (2.37) является необходимым условием существования периодических движений в режиме 2.

Обратно, если не выполнено (2.39), то с учетом (2.37), имеем

$$\frac{(1 + Re^{2m\eta})2\pi n \eta}{1 + R} > (e^{2m\eta} - 1)(1 + \varepsilon \sin t_0) > \mu(1 + Re^{2m\eta}).$$

Тогда $\mu < \frac{2\pi n \eta}{1+R}$. Но для таких значений μ не существует периодических движений в режиме 1. Следовательно, неравенство (2.37) является достаточным условием существования периодических движений в режиме 2.

Таким образом, если параметр μ может принимать любые действительные значения, то режимы 1 и 2 имеют общую границу N_{+1} существования периодических движений. Поскольку в данной задаче имеется ограничение $\mu \leq 1$, граница существования в режиме 2 отклоняется от границы существования в режиме 1, определяемой равенством (2.26). Именно, различие имеется для всех $\eta > \eta_{кр.}$, где $\eta_{кр.}$ определялось ранее выражением $\eta_{кр.} = \frac{1+R}{2\pi n}$. В самом деле, если

$\eta > \eta_{кр.}$, то $\mu^* = \frac{2\pi n \eta}{1+R} > 1$. Но по значению μ^* находятся значения $\varepsilon_{\min} \in N_{+1}$. По-

этому, начиная с $\eta_{кр.}$, все величины ε_{\min} определяются исходя из равенства $\mu^* = 1$. Вышесказанное наглядно подтверждается рис.2.2 и рис.2.3. В первом случае $\eta_{кр.} \approx 0,207$; во втором – $\eta_{кр.} \approx 0,255$. До указанных значений границы существования обоих режимов совпадают.

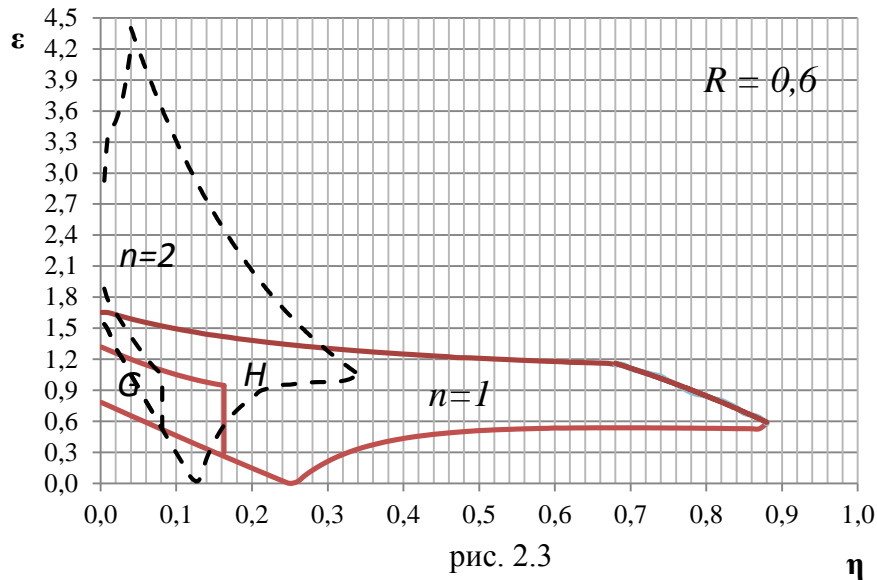
Пример. Пусть $R=0,6; n=1$. Второе из неравенств (2.14) выполнено при $\eta < \eta_{\varphi} \approx 0,163$. Область G находится из условий (2.26), (2.28) (см. рис.2.3). Для всех $\mu \geq \mu^* = \frac{2\pi \eta}{1+0,6}$ точечное отображение имеет устойчивую неподвижную

точку $(x_2^-; t_0^*)$, такую что $x_2^- < \frac{\mu}{\eta}$; $t_0^* \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right)$. Так, для $\eta = 0,12$ имеем:

$0,429 < \varepsilon < 1,031$; $\mu^* = \frac{2\pi \cdot 0,12}{1+0,6} \approx 0,471$. Если $\mu > 0,471$, то, например,

для $\varepsilon = 0,7$ в системе существует устойчивое периодическое движение: $x_2^- \approx 3,927$; $t_0^* \approx 4,229$.

Для нахождения области H (рис.2.3) существования и устойчивости периодических движений в режиме 2 перебирались значения η с шагом 0,01 и вычислялись соответствующие максимальные и минимальные значения ε с точностью



до 0,001. Далее, для различных значений параметра $\mu < \mu^*$ из системы уравнений (2.30), (2.31) находилась начальная фаза t_{01}^* , соответствующая устойчивой неподвижной точке $\left(\frac{\mu}{\eta}; t_{01}^*\right)$. Так для $(\eta, \varepsilon) = (0,12; 0,7) \in G \subset H$ и любого значения

$\mu \in (0,407; 0,471)$ в системе существуют устойчивые периодические движения в

режиме 2. Например, если $\mu = 0,47$, то точка $\left(\frac{\mu}{\eta} = \frac{0,47}{0,12} \approx 3,917; t_{01}^* \approx 4,218\right)$ явля-

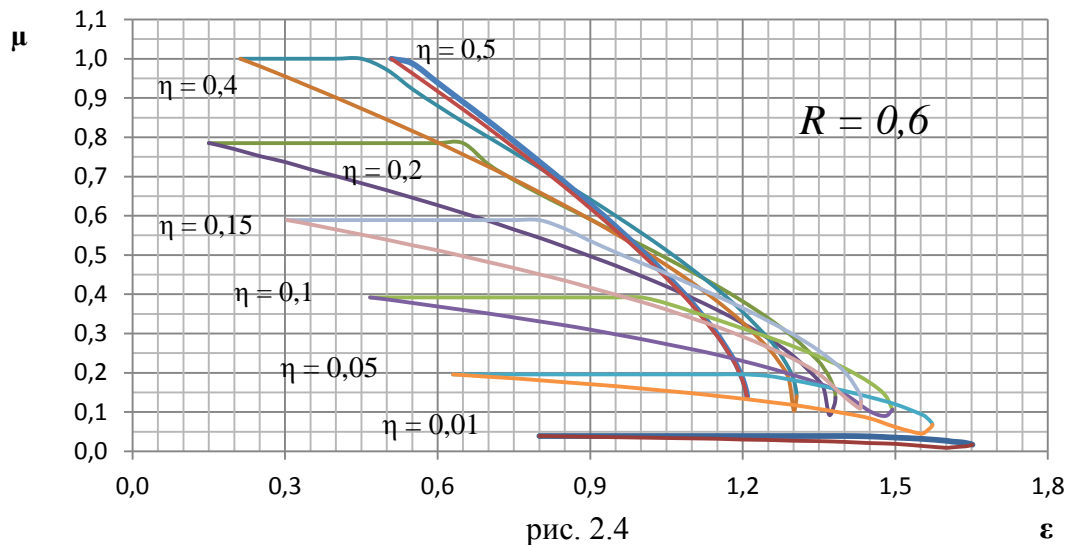
ется устойчивой неподвижной точкой отображения Пуанкаре при движении, включающим участок относительного покоя тела m . При этом выполнено условие асимптотической устойчивости $a_1 = 0,356 < 1$ (см. §3).

Если точка (η, ε) попадает в область $H \setminus G$, то в системе имеются устойчивые периодические движения только в режиме 2. Например, если $(\eta, \varepsilon) = (0,12; 1,3) \in H \setminus G$, то для любого значения $\mu \in (0,215; 0,284)$ в системе имеются устойчивые периодические движения только при наличии «скольжения».

Так, если $\mu = 0,25$, то имеем: $x_2^- = \frac{\mu}{\eta} = \frac{0,25}{0,12} \approx 2,083$, $t_{01}^* \approx 3,809$ ($|a_1| = |-0,396| < 1$)

. Кроме того, как отмечалось ранее (см. §3), для тех же значений параметров существует и неустойчивая неподвижная точка. В данном случае это точка $\left(\frac{\mu}{\eta} \approx 2,083; t_{02}^* \approx 3,006\right)$. Тогда имеем $a_1 = 4,018 > 1$.

Динамика изменения величины интервала параметра μ при изменении параметра ε , для которых в системе существуют устойчивые периодические движения при наличии «скольжения», изображена на рис.2.4.



Начиная с некоторого значения параметра η длины $|\mu_1, \mu_2|$ таких интервалов уменьшаются. В частности, если $R = 0,6; n = 1$, то начиная с $\eta \approx 0,85$ для всех значений ε имеем $|\mu_1, \mu_2| < 0,001$ (на рис.2.3 область H построена именно до этой «границы»).

Заметим, в заключение, что при увеличении значения n уменьшаются значения параметра η_φ ($\eta_{кр.}$). Поэтому уменьшается интервал значений η для которых в системе существует устойчивый периодический режим движения. Одновременно увеличивается соответствующий интервал параметра ε в соответствии с формулами (2.26) и (2.28), определяющими границы N_{+1} и N_{-1} . На рис.2.3 области существования и устойчивости в режимах движения 1 и 2 при $n = 2$ ограничены пунктирной линией.

Области существования и устойчивости периодических движений динамической системы, которая рассматривалась в главе 2, в пространстве параметров η , ε , μ изображены на рис. 2.5. При построении использовалась компьютерная программа SolidWorks ([48], [39]).

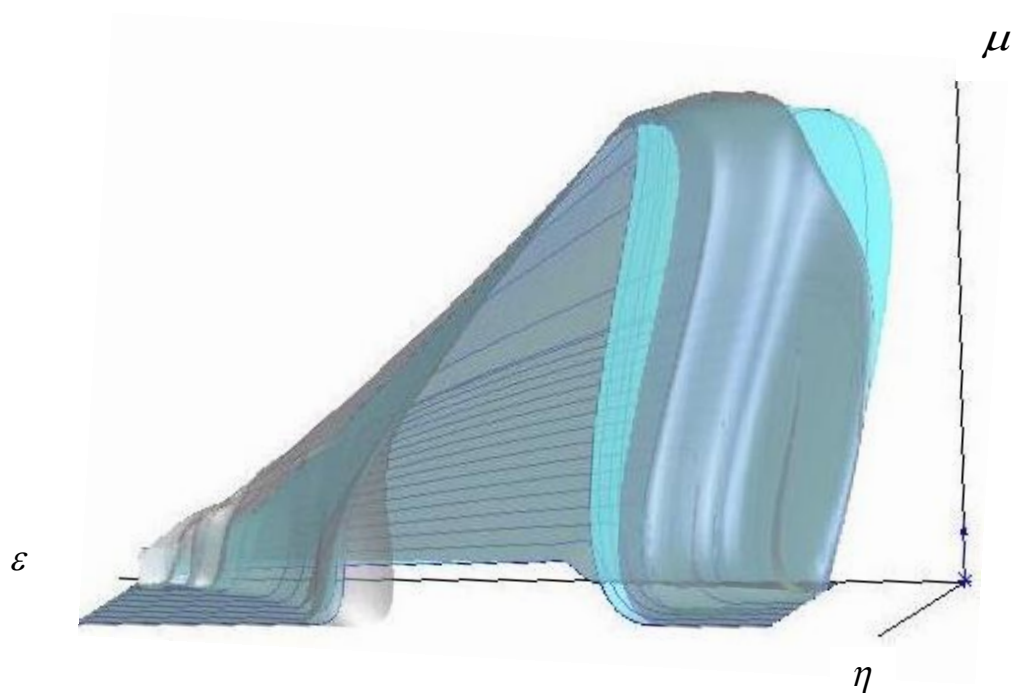


рис. 2.5

§5. Бифуркации периодических движений

Исследуем эволюцию периодических движений с ударами в зависимости от параметра ε (остальные параметры считаем фиксированными). Примем допущение об отсутствии для рассматриваемого периодического движения участков скольжения и касаний ограничителя, т.е. считаем, что $\dot{y}^- < \frac{\mu}{\eta}$ («режим 1»).

Окончательный вывод о характере бифуркаций можно сделать на основе анализа нелинейных членов отображения Пуанкаре в окрестности неподвижной точки. Эти члены можно определить методом, аналогичным построению матрицы монодромии Z , однако получаемые формулы оказываются чересчур громоздкими для анализа. Ввиду этого будем судить о характере бифуркации непосредственно, путем аналитического построения периодических движений, близких к данному. Для периодических движений типа $(1, n)$ выясним поведение на границе области существования и устойчивости (т.е. при переходе параметра ε через N_{+1} и N_{-1} — границы).

Согласно формуле (2.26) $\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{1+\eta^2} |2\pi n \eta \xi_1 - 1|}{\eta}$ есть N_{+1} — граница. В этом

случае корни характеристического уравнения $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = R^2 e^{2\pi m \eta}$. Если параметр ε получает положительное приращение от ε_0 , то уравнение (2.21) имеет два корня. Тогда существуют две неподвижные точки точечного отображения, одна из которых устойчива, а другая нет. При $\varepsilon = \varepsilon_0$ эти точки сливаются в одну, с последующим их исчезновением как только параметр ε получит отрицательное приращение от ε_0 . Такое поведение характеризует бифуркацию «седло-узел» [42].

В случае N_{-1} — границы (формула 2.28) $\varepsilon = \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \sqrt{(2\pi n \eta \xi_1 - 1)^2 + 16\pi^2 n^2 \eta^4 \xi_2}$,

корни характеристического уравнения есть $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = R^2 e^{2\pi m \eta}$, т.е. один из

мультипликаторов равен минус единице. Можно сделать вывод, что при выполнении некоторого условия невырожденности мы имеем бифуркацию удвоения периода ([42], [23]). Тип бифуркации (субкритическая или суперкритическая [23]) выясняется при нижеследующем анализе.

Будем строить движения типа $(2, 2n)$. Также как в [23, стр.230] обозначим моменты ударов $t_0 + \eta_1, t_0 + 2\pi m + \eta_2$, а скорости тела после отскоков

$$\dot{y}(t_0 + \eta_1 + 0) = -Rx_2^- + v_1 = -\frac{2\pi m R}{1+R} + v_1, \quad \dot{y}(t_0 + 2\pi m + \eta_2 + 0) = -\frac{2\pi m R}{1+R} + v_2.$$

Обозначим $h = \varepsilon \sin t_0$, тогда $\dot{h} = \varepsilon \cos t_0$, $\ddot{h} = -\varepsilon \sin t_0 = -h$. Кроме этого положим $h_{1,2} = h(t_0 + \eta_{1,2})$. Уравнения движения в промежутке до первого удара с начальными условиями $y(t_0 + \eta_1) = 0, \dot{y}(t_0 + \eta_1) = \dot{y}(t_0 + \eta_1 + 0)$ согласно (2.16), (2.17) имеют вид

$$y(t) = \frac{1}{1+\eta^2} (-\eta \dot{h}_1 + h_1 + \eta \dot{h}(t) - h(t)) + \frac{1}{\eta} \left(\dot{y}(t_0 + \eta_1 + 0) + \frac{1}{1+\eta^2} (\eta h_1 + \dot{h}_1) + \frac{1}{\eta} \right) \cdot (e^{\eta(t-t_0-\eta_1)} - 1) - \frac{1}{\eta} (t - t_0 - \eta_1), \quad (2.40)$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{1+\eta^2} (\eta \dot{h}(t) + \dot{h}(t)) + \left[\dot{y}(t_0 + \eta_1 + 0) + \frac{1}{1+\eta^2} (\eta h_1 + \dot{h}_1) + \frac{1}{\eta} \right] e^{\eta(t-t_0-\eta_1)} - \frac{1}{\eta},$$

где $h(t) = \varepsilon \sin t$; $\dot{h}(t) = \varepsilon \cos t$. В момент удара

$$y(t_0 + 2\pi m + \eta_2) = 0, \quad \dot{y}(t_0 + 2\pi m + \eta_2 - 0) = -\frac{1}{R} \dot{y}(t_0 + 2\pi m + \eta_2 + 0),$$

откуда при учете (2.40) получаем

$$\frac{\eta}{1+\eta^2} (-\eta(\dot{h}_1 - \dot{h}_2) + (h_1 - h_2)) + \left(\frac{-2\pi m R}{1+R} + v_1 + \frac{1}{1+\eta^2} (\eta h_1 + \dot{h}_1) + \frac{1}{\eta} \right) (e^{\eta(2\pi m + \eta_2 - \eta_1)} - 1) - 2\pi m - \eta_2 + \eta_1 = 0 \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{1+\eta^2} (\eta h_2 + \dot{h}_2) + \left(-\frac{2\pi m R}{1+R} + v_1 + \frac{1}{1+\eta^2} (\eta h_1 + \dot{h}_1) + \frac{1}{\eta} \right) e^{\eta(2\pi m + \eta_2 - \eta_1)} - \frac{1}{\eta} = \\ & = -\frac{1}{R} \left(\frac{-2\pi m R}{1+R} + v_2 \right). \end{aligned}$$

Соотношения (2.41) связывают переменные $\eta_1, \eta_2, \nu_1, \nu_2$. Рассматривая движение тела до второго удара, получим при учете периодичности уравнения, аналогичные (2.41), но с перестановкой индексов (сравни с [23])

$$\begin{aligned} & \frac{\eta}{1+\eta^2}(-\eta(\dot{h}_2 - \dot{h}_1) + (h_2 - h_1)) + \left(\frac{-2\pi m R}{1+R} + \nu_2 + \frac{1}{1+\eta^2}(\eta h_2 + \dot{h}_2) + \frac{1}{\eta} \right) (e^{\eta(2\pi m + \eta_1 - \eta_2)} - 1) - \\ & - 2\pi m - \eta_1 + \eta_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{1+\eta^2}(\eta h_1 + \dot{h}_1) + \left(- \frac{2\pi m R}{1+R} + \nu_2 + \frac{1}{1+\eta^2}(\eta h_2 + \dot{h}_2) + \frac{1}{\eta} \right) e^{\eta(2\pi m + \eta_1 - \eta_2)} - \frac{1}{\eta} = \\ & = - \frac{1}{R} \left(\frac{-2\pi m R}{1+R} + \nu_1 \right). \end{aligned}$$

Поскольку переменные ν_1 и ν_2 входят линейно в уравнения (2.41) и (2.42), то их легко исключить. После элементарных вычислений получим

$$\nu_2 = - \frac{R(\eta_2 - \eta_1 + \dot{h}_1 - \dot{h}_2)}{1-R}, \quad \nu_1 = \frac{R(\eta_2 - \eta_1 + \dot{h}_1 - \dot{h}_2)}{1-R},$$

и два уравнения для определения неизвестных $\eta_{1,2}$:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{1+\eta^2}(\eta h_2 + \dot{h}_2) + \left(- \frac{2\pi m R}{1+R} + \frac{R(\eta_2 - \eta_1 + \dot{h}_1 - \dot{h}_2)}{1-R} + \frac{\eta h_1 + \dot{h}_1}{1+\eta^2} + \frac{1}{\eta} \right) \cdot e^{\eta(2\pi m + \eta_2 - \eta_1)} - \frac{1}{\eta} = \\ & = \frac{2\pi m}{1+R} + \frac{\eta_2 - \eta_1 + \dot{h}_1 - \dot{h}_2}{1-R}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\eta}{1+\eta^2}(-\eta(\dot{h}_2 - \dot{h}_1) + h_2 - h_1) + \left(- \frac{2\pi m R}{1+R} - \frac{R(\eta_2 - \eta_1 + \dot{h}_1 - \dot{h}_2)}{1-R} + \frac{\eta h_2 + \dot{h}_2}{1+\eta^2} + \frac{1}{\eta} \right) \cdot \\ & \cdot (e^{\eta(2\pi m + \eta_1 - \eta_2)} - 1) - 2\pi m - \eta_1 + \eta_2 = 0. \end{aligned}$$

По формуле Тейлора

$$\begin{aligned} h_i &= h(t_0 + \eta_i) = h + \dot{h}\eta_i + \frac{1}{2}\ddot{h}\eta_i^2 + \frac{1}{6}\dddot{h}\eta_i^3 + o(\eta_i^3), \\ \dot{h}_i &= \dot{h}(t_0 + \eta_i) = \dot{h} + \ddot{h}\eta_i + \frac{1}{2}\ddot{h}\eta_i^2 + \frac{1}{6}h^{(4)}\eta_i^3 + o(\eta_i^3), \end{aligned} \quad (2.44)$$

где $i = 1, 2$.

Кроме того,

$$e^{(2\pi i + \eta_2 - \eta_1)} = e^{2\pi i \eta} \cdot e^{\eta \eta_2} \cdot e^{-\eta \eta_1} = e^{2\pi i \eta} \left(1 + \eta \eta_2 + \frac{1}{2} \eta^2 \eta_2^2 + o(\eta_2^2) \right) \cdot \left(1 - \eta \eta_1 + \frac{1}{2} \eta^2 \eta_1^2 + o(\eta_1^2) \right).$$

Пусть $\eta_2 = a_0 + a_1 \eta_1 + a_2 \eta_1^2 + o(\eta_1^2)$. Подставляя (2.44) в первую из формул (2.43), получим

$$\eta_2 = -\eta_1 + a_2 \eta_1^2 + o(\eta_1^2),$$

где
$$a_2 = \frac{1+R}{1+R^2 e^{2\pi i \eta}} \left[\frac{2\eta e^{2\pi i \eta} (1-R)}{e^{2\pi i \eta} - 1} - \frac{(1+R)(e^{2\pi i \eta} - 1)}{4\pi i \eta^2} + \frac{1+R^2 e^{2\pi i \eta}}{2\eta} \right]. \quad (2.45)$$

При расчетах были использованы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \eta h + \dot{h} &= \left(\frac{2\pi i}{e^{2\pi i \eta} - 1} + \frac{2\pi i R}{1+R} - \frac{1}{\eta} \right) (1 + \eta^2), \\ 1 + h &= \frac{2\pi i \eta (1-R)(R e^{2\pi i \eta} - 1)}{(e^{2\pi i \eta} - 1)(1+R)^2}, \\ \eta \dot{h} + \ddot{h} &= \eta \dot{h} - h = \frac{4\pi i \eta (1 + \eta^2)(1 + R^2 e^{2\pi i \eta})}{(e^{2\pi i \eta} - 1)(1+R)^2}. \end{aligned}$$

Первая из этих формул следует из (2.21), вторая из (2.27). Последняя формула является комбинацией первых двух. Кроме того, $\dot{h} = -h$, $\ddot{h} = -h'$, $h^{(4)} = h$.

Если $\eta_1 = \eta_2$, то ввиду (2.45) $\eta_1 = 0$. Второе уравнение (2.43) удовлетворяется при $\eta_1 = \eta_2$. В самом деле, учитывая что $h_1 = h_2$, имеем

$$\left(-\frac{2\pi i R}{1+R} + \frac{\eta h_1 + \dot{h}_1}{1 + \eta^2} + \frac{1}{\eta} \right) \cdot (e^{2\pi i \eta} - 1) - 2\pi i = 0.$$

Последнее соотношение выполнено при $\eta_1 = 0$ в силу (2.18) и (2.20). Значит, построенное движение совпадает с рассматриваемым движением типа (1, n).

Пусть $\eta_1 \neq \eta_2$. Сокращая второе уравнение (2.43) на $(\eta_2 - \eta_1)$ и используя (2.44), (2.45) находим:

$$\left(\frac{A}{1 + \eta^2} - \frac{B \cdot R}{1 - R} \right) \cdot \eta_1^2 - \frac{C \cdot R}{1 - R} \cdot \eta_1 + D = 0, \quad (2.46)$$

где
$$A = \frac{\eta}{2} \left(a_2 (\eta \dot{h} - h) - \frac{1}{3} (\eta h + \dot{h}) \right);$$

$$B = \frac{1}{2} \left(\dot{h} - \frac{1}{3} h \right) (1 - e^{2m\eta}) - \eta e^{2m\eta} (1 + h) \left(\frac{1}{2} \eta (2 - a_2)^2 - a_2 \right);$$

$$C = 2(1 + h)e^{2m\eta};$$

$$D = \frac{R}{1 - R} (1 + h)(1 - e^{2m\eta}) + \frac{\eta}{1 + \eta^2} (\eta h + \dot{h}) + 1.$$

Анализируя области, в которых уравнение (2.46) имеет решение, можно выяснить тип бифуркации. В настоящее время автор проверяет гипотезу о том, что в данной модели возможна лишь суперкритическая бифуркация. Кроме этого планируется получить условия устойчивости движений типа $(2, 2n)$, используя матрицу монодромии для движений с ударами [23, формула 7.54].

Глава 3

Программный пакет для численного исследования рассмотренных виброударных систем

§1. Программное обеспечение для расчета ударно-колебательной системы с неподвижным ограничителем

В §4,5 главы 1 настоящей работы исследовались периодические движения и структура фазового пространства виброударной системы с кусочно-линейной зависимостью коэффициента трения от скорости скольжения. Программный пакет этого параграфа призван помочь рассчитать параметры периодических движений вышеуказанной динамической системы. Кроме того, с его помощью возможно построение различных фазовых траекторий движения (не обязательно периодических), если заданы исходные значения параметров системы и начальная скорость.

Программа создана и скомпилирована в бесплатной среде создания консольных приложений Free Pascal (см., например, [3], [47]). Компилятор программы существует для различных аппаратных и программных платформ: DOS (с использованием Go32v2), FreeBSD версий 6.x, 7.x, 8.x, Linux, Mac OS X, Microsoft Windows. Большинство подключаемых модулей среды работают на всех перечисленных системах. Но заметна тенденция несовместимости драйвера видеокарты и подключаемого модуля работы в графическом режиме данной среды программирования (модуль Graph). Модуль Graph реализует полную библиотеку из более чем 50 графических программ, начиная от высокоуровневых, таких как Set ViewPort, Circle, Bar3D или DrawPoly до бит-ориентированных, таких как Get Image и Put Image. Поддерживаются несколько типов линий и стилей заполнения, существует несколько типов шрифтов, которые можно увеличивать, выравнивать и ориентировать вертикально или горизонтально.

Для того чтобы компилировать программу, которая использует модуль Graph, требуется исходный код, компилятор и доступ к стандартным модулям в

TURBO.TPL и GRAPH.TPU. Для того чтобы выполнить программу, которая использует модуль Graph, необходим один или более графических драйверов (BGI файлы). Кроме того, если программа использует штриховые шрифты, потребуются один или более файлов шрифтов (CHR). Графические драйверы поддерживают следующие графические адаптеры (и полностью совместимые с ними): CGA, MCGA, EGA, VGA, Hercules, AT&T400строк, 3270PC, IBM-8514. Каждый драйвер содержит код и данные, хранящиеся в отдельном файле. Во время выполнения, процедура InitGraph определяет графическое устройство, загружает и инициализирует соответствующий графический драйвер, переводит систему в графический режим и возвращает управление вызывающей программе. Процедура CloseGraph выгружает драйвер из памяти и восстанавливает предыдущий видеорежим. Можно переключиться между графическим и текстовым режимами используя Restore CrtMode и Set Graph Mode. Graph поддерживает конфигурацию с двумя мониторами. Верхний левый угол графического экрана определен как (0,0). Значение x или колонки увеличиваются направо. Значение y или строки увеличиваются вниз.

Побитовый шрифт с матрицей 8×8 и несколько штриховых шрифтов определены для вывода текста в графическом режиме. Символ побитового шрифта определен в матрице 8×8 пикселей (точек). Штриховой шрифт определен серией отрезков, которые говорят графической системе, как рисовать шрифт. Удобство использования штрихового шрифта проявляется, когда необходимо нарисовать большие символы. Поскольку штриховой шрифт определен отрезками, он остается хорошего разрешения и качества при увеличении. Основой программы является процедура Post Roe Nie осуществляющая построение непосредственно траектории тела (см. приложение (1))

Переменные x , y_1 , k являются локальными, т.е. не могут использоваться вне процедуры. Задаём счётчик количества траекторий равным 0 (в дальнейшем функцией inc, это значение будет увеличиваться). Действия выполняем до тех пор, пока $y_0 > 0,08$ и $k < 30$ т.е. пока глобальная переменная y_0 будет больше

указанного значения и количество траекторий будет меньше 30 (в дальнейшем при редактировании программы это число можно изменить). Задаём стартовые значения координат: $x = -1$ (любое отрицательное число), $y = -Ry_0$ (при прохождении цикла, значение y_0 будет изменяться). Процедурой `moveto` устанавливаем маркер на начальную точку. Дальнейшие действия выполняем до тех пор, пока $x < 0$. С каждым прохождением цикла значение y увеличивается (шаг можно в дальнейшем редактировать). Если выполняется условие $y \geq 1$, то программа строит прямую $y = 1$ (на данном участке тело имеет постоянную скорость) и прекращает внутренний цикл (`while x < 0`). Если условие не выполняется, то вычисляем значение переменной x соответствующее данному значению переменной y . Условие $x > 0$ необходимо из-за особенностей цикла `while`. Функция `lineto` соединяет предыдущую точку, где стоял маркер, с данной. Таким образом, при работе цикла `while x < 0` программа построит одну траекторию. Условие $y < 1$ необходимо для досрочного прекращения работы внешнего цикла. Далее, с учётом значений предыдущих построений, внешний цикл заново запустит внутренний и так далее, пока не будут построены все 30 траекторий.

Отдельно программа проверяет наличие нетривиальных предельных циклов, и если таковые присутствуют, то вычисляет неподвижные точки (см. приложение (2)).

При выполнении условия с помощью цикла осуществляется перебор с шагом 0,001 значений переменной id . Если значение выражения $y = (1 + R) \cdot id + \frac{1}{m} \ln \frac{1 - mR \cdot id}{1 + m \cdot id} < 0$, то на экран выводится значения id округлённое до 2 знаков после запятой и точка $V_0 = 1$.

Блок-схема работы программы представлена в приложениях (см. приложение 3, 4).

Проиллюстрируем на примерах результаты работы программы. Будем задавать параметры системы, начальную скорость и проследивать на фазовой плоскости траектории движения тела в принципиально разных случаях.

1) Пусть $R = 0,7$; $\mu = 0,4$ (область (H) на рис.1.11 в §4 главы 1). Начальную скорость тела \dot{y}_0 (т.е. скорость массы m непосредственно перед первым ударом) выберем равной 0,6. В этом случае точечное преобразование $\dot{y} = T(\dot{y}_0)$ имеет только одну неподвижную точку – устойчивую точку $\dot{y}_0^* = 0$ (см. выше). Программа информирует о том, что в системе не существует предельных циклов, отличных от тривиального для заданных значений параметров R и μ . Таким образом, имеем затухающее колебательное движение. Фазовые траектории движения тела изображены на рис.3.1.

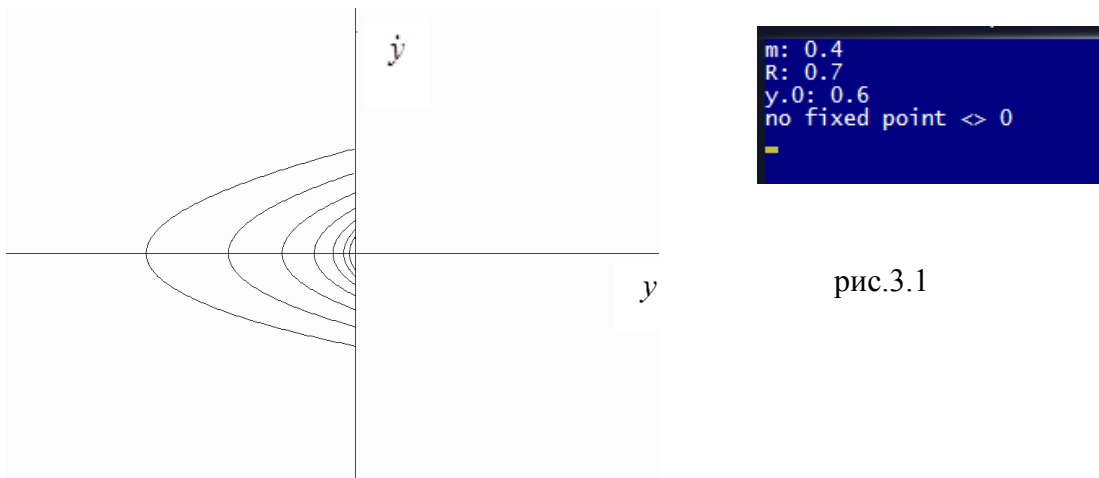


рис.3.1

2) Пусть $R = 0,8$; $\mu = 0,7$ (область (G) на рис.1.11). Построим фазовые траектории движения, если $\dot{y}_0 = 0,5$ (рис.3.2). Так как $0 < \dot{y}_0 < \dot{y}_{01}^* \approx 0,53$ и предельный цикл \dot{y}_{01}^* является отталкивающим, то траектории стягиваются к тривиальному устойчивому предельному циклу.

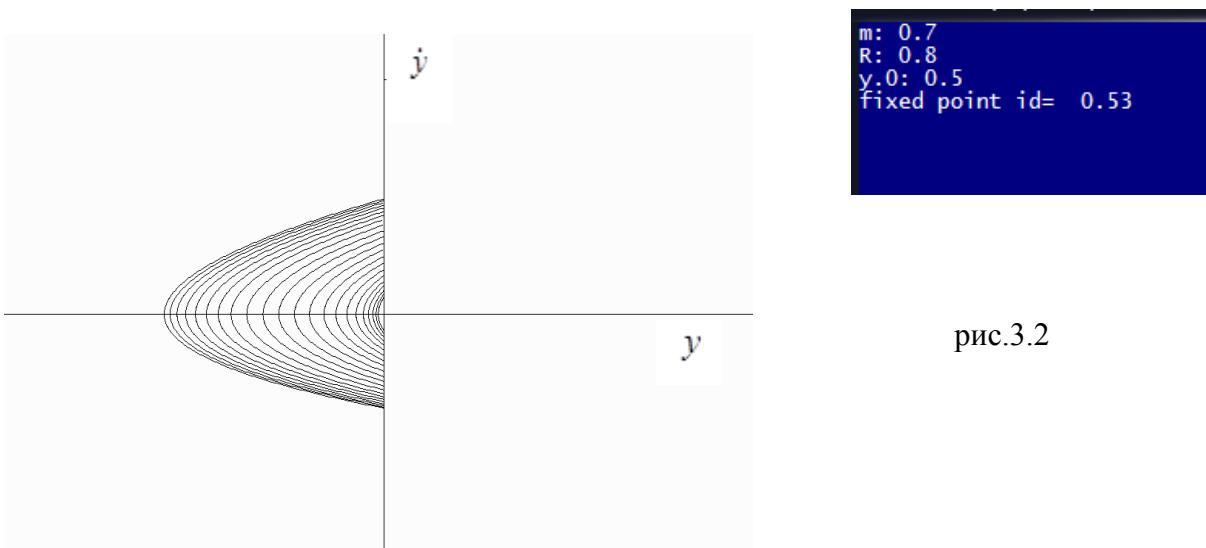
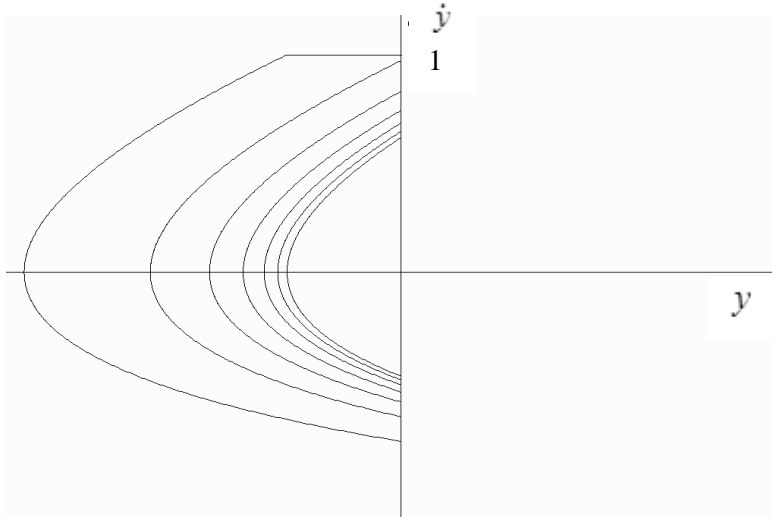


рис.3.2

3) Пусть по-прежнему $R = 0,8$; $\mu = 0,7$. Положим теперь $\dot{y}_0 = 0,6$. Поскольку $\dot{y}_{01}^* < \dot{y}_0 < \dot{y}_{02}^* = 1$ и предельный цикл \dot{y}_{02}^* является притягивающим, то фазовые траектории приближаются к нему с каждой новой итерацией (рис.3.3).

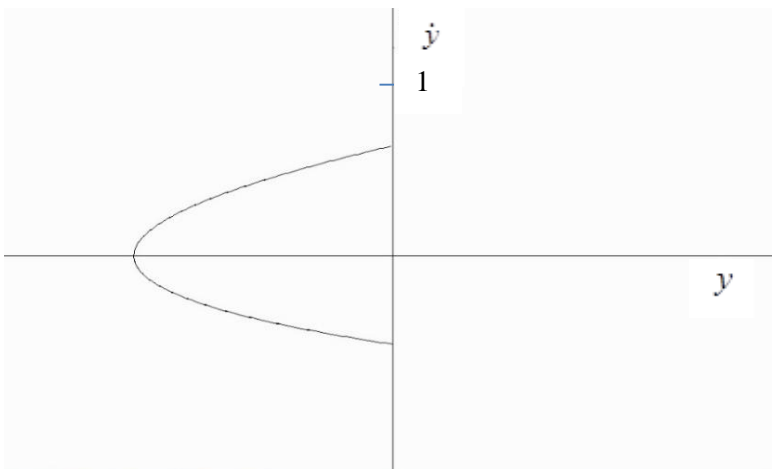
1



```
m: 0.7
R: 0.8
y.0: 0.6
fixed point id= 0.53
```

рис. 3.3

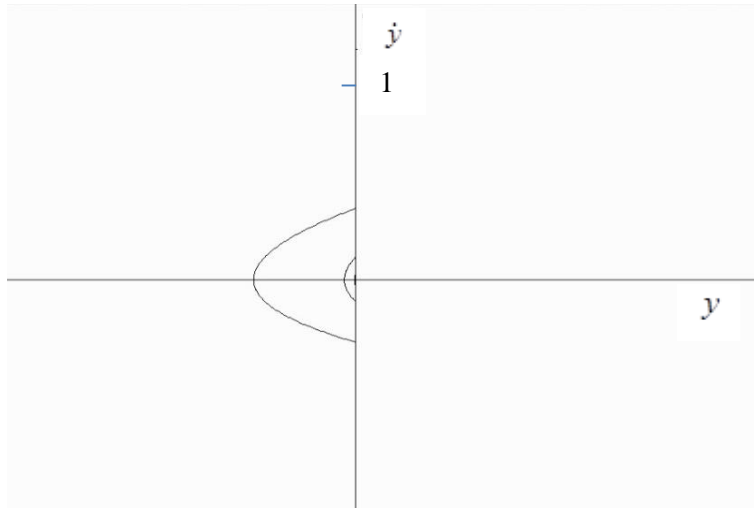
4) На рис.3.4 изображен неустойчивый предельный цикл $\dot{y}_{01}^* \approx 0,53$ (т.е. для значений $R = 0,8$; $\mu = 0,7$ полагаем $\dot{y}_0 = 0,53$).



```
m: 0.7
R: 0.8
y.0: 0.53
fixed point id= 0.53
```

рис. 3.4

5) Если положить $R < R_{кр.} \approx 0,59$, то для любых значений $\mu \leq 1$, $\dot{y}_0 \leq 1$, имеем затухающие движения. Рис.3.5 иллюстрирует эту ситуацию при $R = 0,3$; $\mu = 0,7$; $\dot{y}_0 = 0,9$.



```
m: 0.7  
R: 0.3  
y.0: 0.9  
no fixed point <> 0
```

рис. 3.5

§2. Программное обеспечение для расчета ударно-колебательной системы с вибрирующим ограничителем

В §2,3,4 главы 2 исследовались периодические движения системы с вибрирующим ограничителем. Программный пакет позволяет рассчитывать параметры периодических движений этой системы, строить фазовые траектории для заданных значений параметров: начальной скорости (скорости тела непосредственно перед ударом x_2^-) и начальной фазы (фазы удара t_0). При написании программы использовался язык Delphi.

Delphi – императивный, структурированный, объектно–ориентированный язык (см., например, [15], [54]) диалект Object Pascal. Embarcadero Delphi (ранее назывался CodeGear Delphi и Borland Delphi) – компилятор, который является последователем Borland Pascal и Turbo Pascal. Используется Win16 (Delphi 1), Win32 (Delphi 2 и позже), Win64 (Delphi 16 (XE2) и позже), а также .NET1.x,2.0 (Delphi 8, Delphi 2005 – Delphi 2007). Поддержка .NET, впоследствии выделена в отдельный продукт, известный как Oxygene.

Для окна программы используется форма. В качестве объектов используются кнопки(Button), поля ввода(Edit), метки или поля для вывода текста(Label), специальная кнопка (BitButton). При создании нового проекта, среда сама прописывает все подключаемые модули и структуру программы, поэтому необходимо лишь определять событие, при котором объект ссылается на соответствующую процедуру. В программе присутствуют две процедуры соответствующие событиям OnClick. Процедура Button1 (она же кнопка «Данные принял») выполняет анализ входных данных, необходимые вычисления, вывод необходимых ответов и параметров. В приложении 5 приводится программа (т.к. блок-схема программы имеет очень громоздкий вид, мы ее опускаем).

Для выполнения процедуры, программа задаёт начальные значения переменных g и n , а так же считывает из полей ввода значения переменных h , m , e (соответствуют параметрам η, μ, ε в §2 главы 2). Далее вычисляются значения

переменных q_1 и q_2 (соответствуют ξ_1, ξ_2 в §2 главы 2). При прохождении условий

$$m \geq 2\pi n h / (1+r)$$

(осуществляется выбор режима движения) и

$$e < \sqrt{1+h} \cdot \text{abs}(2\pi n h q_1 - 1) / h$$

(проверка на наличие периодических движений) программа выводит в `vivod1` (label) ‘В системе нет периодических движений’. Иначе происходит ещё одна проверка по условию

$$e \geq \sqrt{1+h} / h \cdot \sqrt{(\sqrt{2\pi n h q_1} + 16\pi^2 n^2 h^2 q_2)^2}$$

(определяет устойчивость периодических движений в режиме 1).

В случае истинности условия, процедура отдаёт фразу ‘В системе существуют только неустойчивые периодические движения без участка относительного покоя тела’ в поле `vivod1`. Далее вычисляется переменная `v1` и для удобства её значение вписывается в поле `edit6`. Это необходимо в будущем для построения траектории. Вычисляются значения переменных `t01` и `t02`. Значение переменной `t02`, так же как и `v1` в поле `edit6`, заносится в поле `edit7`. После ряда следующих действий в переменных `v1`, `t01`, `t02` будут находиться округлённые до трёх знаков после запятой значения. В поле вывода отправляются значения неподвижных неустойчивых точек точечного отображения.

Если условие неверно, то дальнейший алгоритм отличается от предыдущего лишь выводом значений.

Если условие

$$m \geq 2\pi n h / (1+r)$$

ложно, то вновь проверяется истинность условия

$$e < \sqrt{1+h} \cdot \text{abs}(2\pi n h q_1 - 1) / h.$$

Если оно ложно, то после задания стартовых значений начинается цикл (вычисляет начальную фазу периодического движения в режиме 2 и проверяет устойчивость найденной неподвижной точки). В теле цикла осуществляется проверка значения переменной `t0`, а также дальнейшая работа с ним. При истинности

условия проверки (нет нужды переписывать его ввиду объёма данного условия), значение переменной t_0 записывается в переменную t . Затем запускается цикл-перебор с шагом 0,001 на поиск необходимого значения t . Если после нахождения нужного нам t выполняется условие

$$\begin{aligned} & \text{abs}(e/(1+h*h)*(-h*\cos(t_0)+\sin(t_0)+h*\cos(t)-\sin(t))+1/h*(-r*m/h+e/(1+h*h) \\ & *(h*\sin(t_0)+\cos(t_0))+1/h)*(exp(h*(t-t_0))-1)-1/h*(t-t_0)-m/h*(t-t_0-2*pi*n))<0.001, \end{aligned}$$

то осуществляется вывод необходимых значений в поля вывода, а также запись значений t_0 и m/h в поля edit7 и edit6 (используются для построений траектории). После увеличения значения t_0 , цикл выполняется вновь до тех пор, пока $t_0 < 4,8$. Так же внутри цикла осуществляется накопление значения переменной k , которая должна показать наличие периодических движений в системе. Процедуру завершают присваиванием значений true полям объектов, отвечающим за видимость элемента.

Процедура Button 2 (она же кнопка «Построить») выполняет непосредственно построение траектории движения тела (см. приложение 6).

В процедуре используется работа с графикой, поэтому предполагается обращение к канве – свойству Canvas компонентов. Canvas Delphi это холст, который позволяет программисту иметь доступ к каждой своей точке (пикселу), и отображать то, что требуется. Система Delphi предоставляет мощные средства работы с графикой.

Начинается процедура заданием двух меток: кон,нас (конец и начало).

```
form1.Canvas.moveto(350,0);
```

```
form1.Canvas.lineto(350,550);
```

```
form1.canvas.moveto(0,275);
```

```
form1.canvas.lineto(700,275);
```

Эти четыре строки программы осуществляют построение системы координат, относительно которой и будет строиться траектория. Далее программа считывает значения переменных v_0 и t_0 (при определённых условиях эти значения будут

занесены в поля ввода заранее) и округляет их до пяти знаков после запятой. Осуществив задание стартовых значений ряда переменных, начинается цикл относительно параметра k , отвечающего за количество траекторий (можно менять по желанию). Так как стартовые значения уже были заданы, то условие

```
if k>0 then begin
```

```
    v0:=y1;
```

```
    y1:=-y1*r;
```

```
    x1:=0;
```

```
    t0:=t;
```

```
    x3:=0;
```

```
    t1:=0;
```

```
end;
```

не должно выполняться. Далее производится постановка маркера в точку $\text{round}(350+x1*30)$, $\text{round}(275-y1*30)$ (функция `round` необходима, так как элемент `canvas` работает лишь со значениями типа `integer`, то есть целочисленными). Следующая строчка отмечена `pas` (меткой), в будущем к ней будет осуществлён переход из другой части программы. Программа производит вычисление переменных $x1$ и $y1$. Они обозначают координаты следующей точки, которая будет соединена линией с текущей точкой. Если условие $y1 \geq m/h$ оказывается истинным, то в переменную $x3$ заносится первое значение $x1$, при котором условие выполняется; в переменную $t1$ записывается значение переменной t . Если выполняется дальнейшее условие $(t-t1)*m/h+x3 > 0$, то в y записывается m/h и осуществляется переход по ссылке `kon`, иначе, если условие ложно, строится часть линии, которая представляет собой прямую $y=1$. Если условие $y1 \geq m/h$ ложно, то точка $(x1,y1)$ соединяется с текущей и проводится проверка переменной $x1$ на положительность. При $x1 < 0$ осуществляется переход по ссылке `kon`.

Далее увеличивается значение переменной t и происходит переход по ссылке `pas` (в данной программе было отдано предпочтение ссылкам, нежели

циклу while, ввиду необходимости введения лишнего условия $x_1 > 0$). При переходе по ссылке kon, переменная, отвечающая за количество построенных траекторий, увеличивается. В конце процедуры программа выводит сообщение о том, что построение завершено.

Процедура Button3, ранее не упомянутая, осуществляет очистку всех полей ввода, вследствие чего отпадает необходимость каждый раз перезапускать приложение.

```
procedure TForm1.Button3Click(Sender: TObject);
begin
  label9.Visible:=False; label7.Visible:=False; edit6.Visible:=False;
  label8.Visible:=False; edit7.Visible:=False; button2.Visible:=False;
  edit1.Text:="";edit2.Text:="";edit5.text:="";vivod1.Caption:="";vivod2.Caption:="";
  edit7.Text:="";edit6.text:="";
end;
```

Отчистка формы от построенного графика осуществляется путём максимального смещения экрана программы за границы экрана рабочего стола.

Приведем иллюстрации результатов работы программы в принципиально различных ситуациях (см. §2, 3, 4 главы 2). В дальнейшем везде полагаем $R = 0,6$; $n = 1$. Проследить рассматриваемые случаи на плоскости параметров (η, ε) можно по рис.2.3.

1). Пусть $\mu \geq \frac{2\pi\eta}{1+R}$; $\varepsilon < \frac{\sqrt{1+\eta^2} |2\pi\eta\xi_1 - 1|}{\eta} = N_{+1}$, где $\xi_1 = \frac{1 + Re^{2m\eta}}{(e^{2m\eta} - 1)(1 + R)}$. Так как

в системе не выполнено условие существования периодических движений, то результатом работы программы будет ответ: «В системе нет периодических движений». Данная ситуация прослежена на рис.3.6 при $\eta = 0,06$; $\varepsilon = 0,2$; $\mu = 0,5$.

Траектория строится исходя из начальных условий $x_2^- = 5$; $t_0 = 2$ (напомним, что

значение x_2^- не должно превосходить величины $\frac{\mu}{\eta}$, которая в данном случае

равна примерно 8,33).

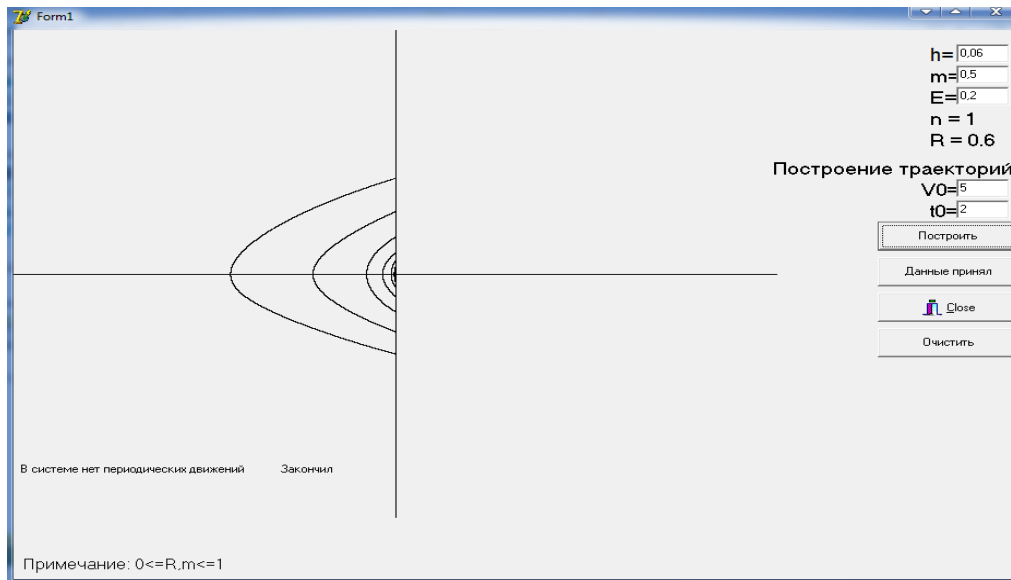


рис.3.6

2) Пусть $\mu \geq \frac{2\pi\eta}{1+R}$; $\varepsilon > N_{+1}$, $\varepsilon > \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \sqrt{(2\pi\eta\xi_1 - 1)^2 + 16\pi^2\eta^4\xi_2} = N_{-1}$, где

$$\xi_2 = \frac{(1 + R^2 e^{2\pi\eta})^2}{(e^{2\pi\eta} - 1)^2 (1 + R)^4}.$$

Поскольку выполнено условие существования периодических движений, но не выполнено условие $\varepsilon < N_{-1}$, то в системе существуют только неустойчивые периодические движения в режиме 1. Рассматриваемый случай имеет место, например, при $\eta = 0,06$; $\varepsilon = 1,4$; $\mu = 0,5$. На рис.3.7 построены фазовые траектории двух движений с разными начальными условиями. Первая траектория движения строится исходя из предположений, что $x_2^- = 4$; $t_0 = 2$. В качестве начальных условий второго движения берутся начальные условия неустойчивого периодического движения $x_2^- = 3,92699$; $t_0 = 2,06537$. Так как погрешности накапливаются с каждой новой итерацией, то фазовая траектория, начиная с некоторого момента времени отклоняется от исходной траектории (фактически изначально задается движение, близкое к неустойчивому периодическому движению).

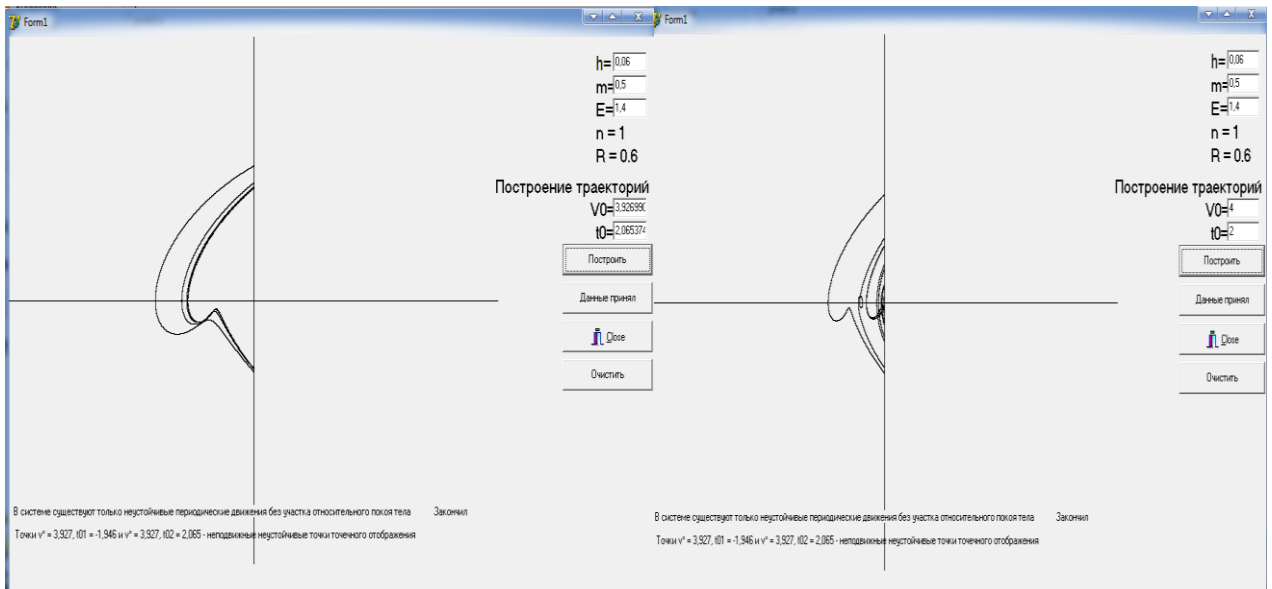


рис.3.7

3) Пусть $\mu \geq \frac{2\pi\eta}{1+R}$; $\varepsilon > N_{+1}$, $\varepsilon < N_{-1}$ (точка $(\eta, \varepsilon) \in G$). Тогда в системе существуют устойчивые периодические движения в режиме 1. На рис.3.8 (слева) построена фазовая траектория, соответствующая устойчивому периодическому движению при $\eta = 0,06$; $\varepsilon = 1$; $\mu = 0,5$ с начальными условиями $x_2^- = 3,927$; $t_0 = -2,141$. Программа вычисляет устойчивую и неустойчивую точки отображения Пуанкаре. На рис.3.8 (справа) фазовая траектория с начальными условиями $x_2^- = 5$; $t_0 = 3$ с каждой новой итерацией приближается к фазовой траектории, соответствующей устойчивому периодическому движению.

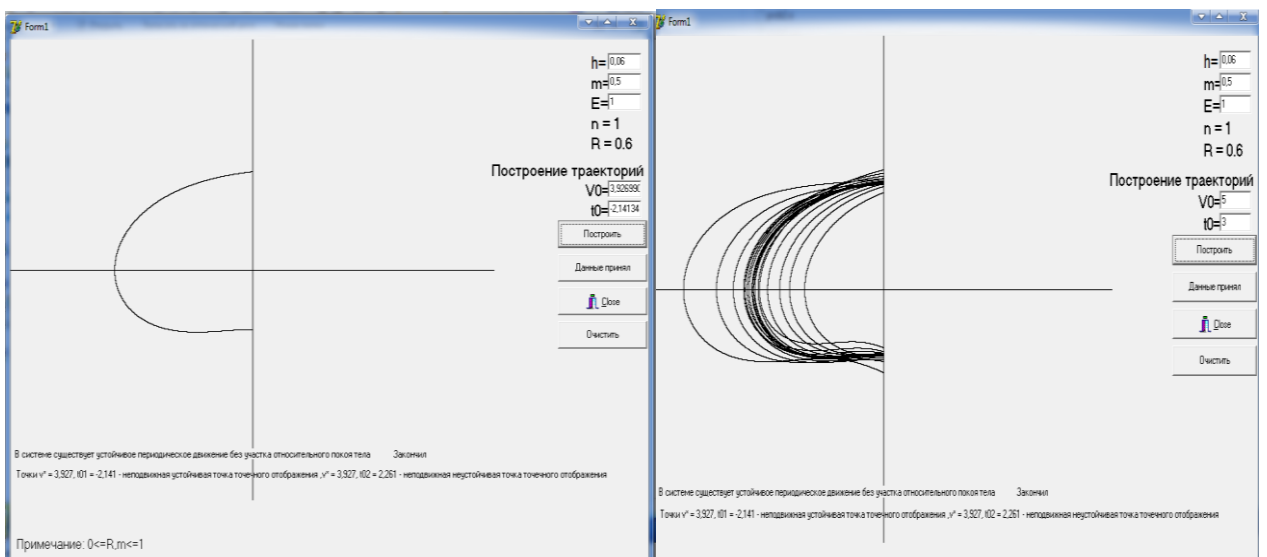


рис.3.8

4). Пусть $\mu < \frac{2\pi\eta}{1+R}$; $\varepsilon < N_{+1}$. Первое неравенство говорит о том, что если существуют периодические движения, то только в режиме 2. Однако ввиду невыполнения условия существования, в системе нет периодических движений (рис.3.9, $\eta = 0,06$; $\varepsilon = 0,2$; $\mu = 0,1$; $x_2^- = 1,66$; $t_0 = 3,2$).

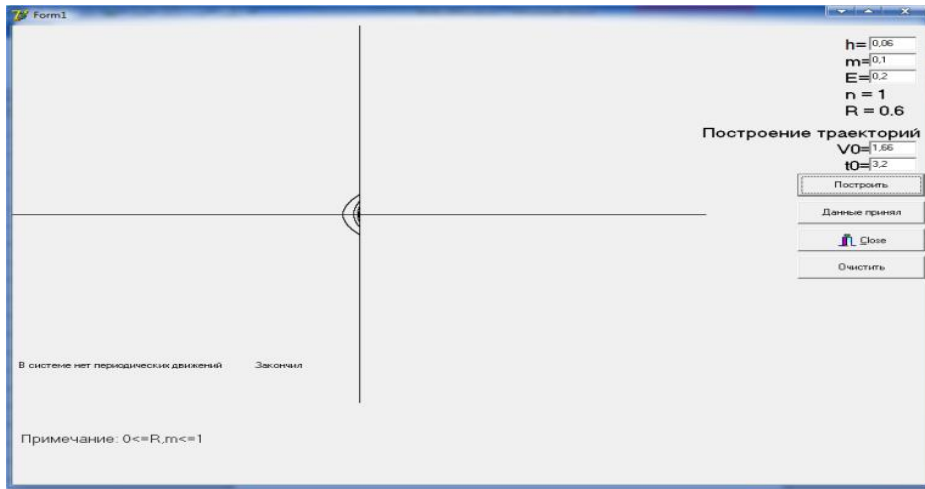


рис.3.9

5) Пусть $\mu < \frac{2\pi\eta}{1+R}$; $\varepsilon < N_{+1}$. Если существуют периодические движения, то только в режиме 2. Для заданного значения μ программа вычисляет величины t^* и t_0^* (см. §3 главы 2).

а). Если система (2.30) – (2.31) неразрешима, то в режиме 2 не существует периодических движений. Данный случай реализуется, например, при значениях $\eta = 0,06$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 0,1$. Фазовая траектория движения на рис.3.10 строится исходя из начальных условий $x_2^- = 1,6$; $t_0 = 3,6$.

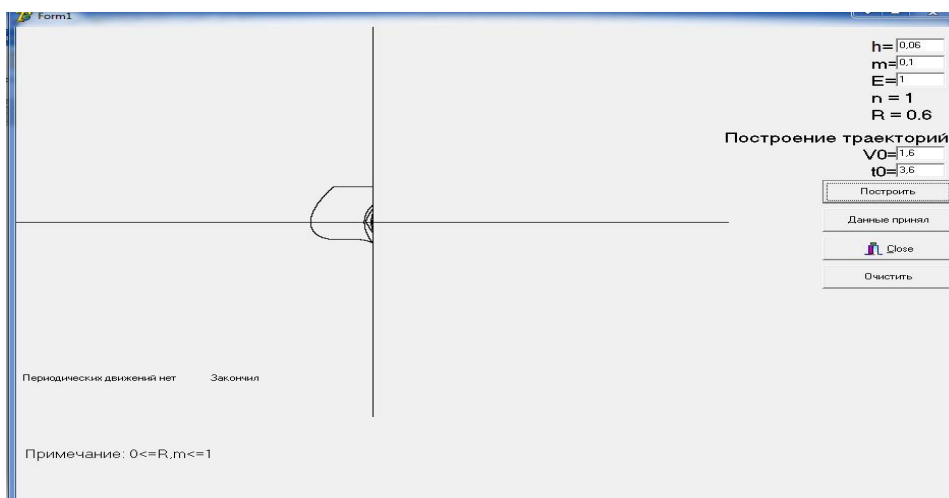


рис.3.10

б). Если система (2.30) – (2.31) разрешима и выполнено условие (2.36), то в режиме 2 имеются устойчивые периодические движения. Указанный случай имеет место, например, при $\eta = 0,06$; $\varepsilon = 1$; $\mu = 0,2$. На рис.3.11 (справа) построена фазовая траектория, соответствующая устойчивому периодическому движению $x_2^- = 3,333$, $t_0 = 3,688$. На рис.3.11 (слева) изображена фазовая траектория с начальными условиями $x_2^- = 3$; $t_0 = 3,5$, которая, с увеличением числа итераций, стремится к вышеуказанной траектории.

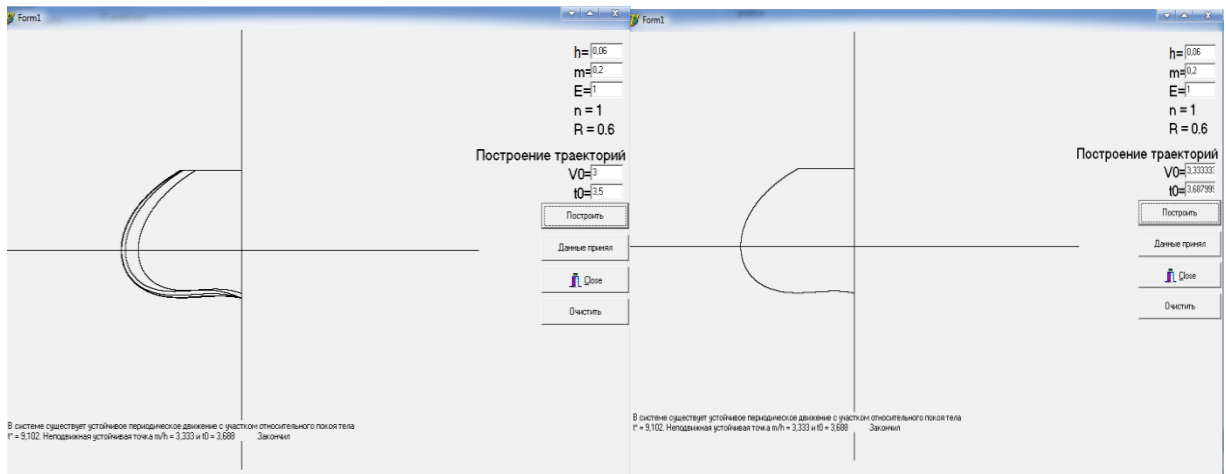


рис. 3.11

в) Наконец, если система уравнений (2.30) – (2.31) разрешима, но не выполнено условие (2.36), то в режиме 2 реализуются периодические движения, которые будут неустойчивы. На рис.3.12 построены фазовые траектории двух движений с разными начальными условиями. Первая траектория движения строится исходя из предположений, что $x_2^- = 2,7$; $t_0 = 2,5$. В качестве начальных условий второго движения берутся начальные условия неустойчивого периодического движения $x_2^- = 1,83333$; $t_0 = 3,27199$. Так как погрешности накапливаются с каждой новой итерацией, то фазовая траектория, начиная с некоторого момента времени отклоняется от исходной траектории (таким образом, изначально задается движение, близкое к неустойчивому периодическому движению).

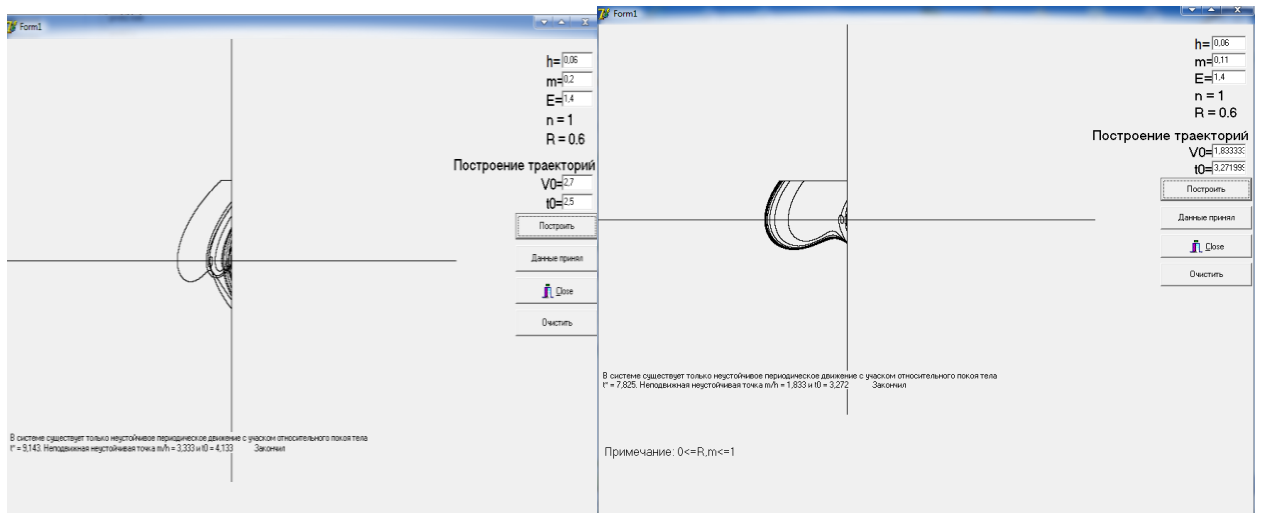


рис.3.12

Приложения

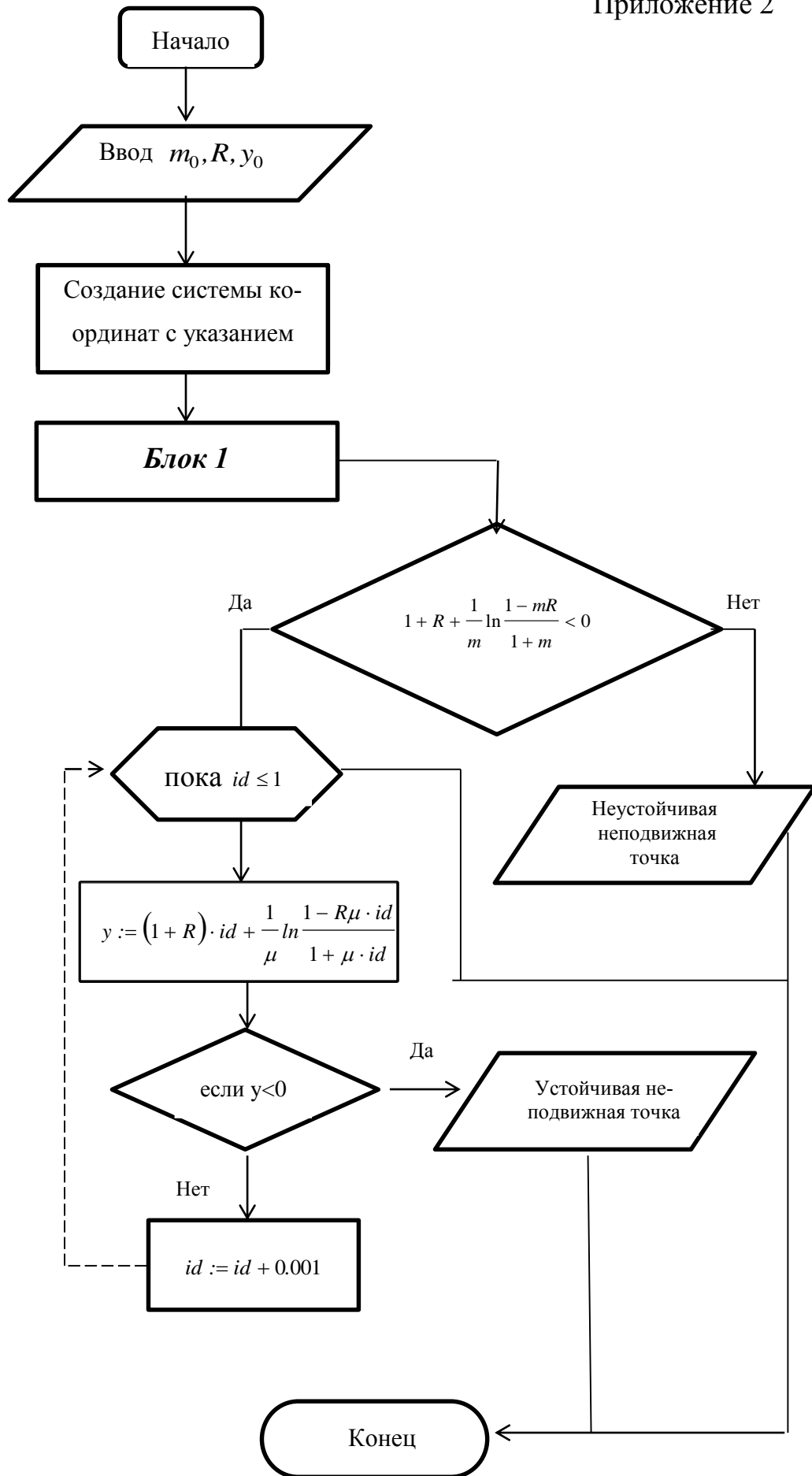
Приложение 1

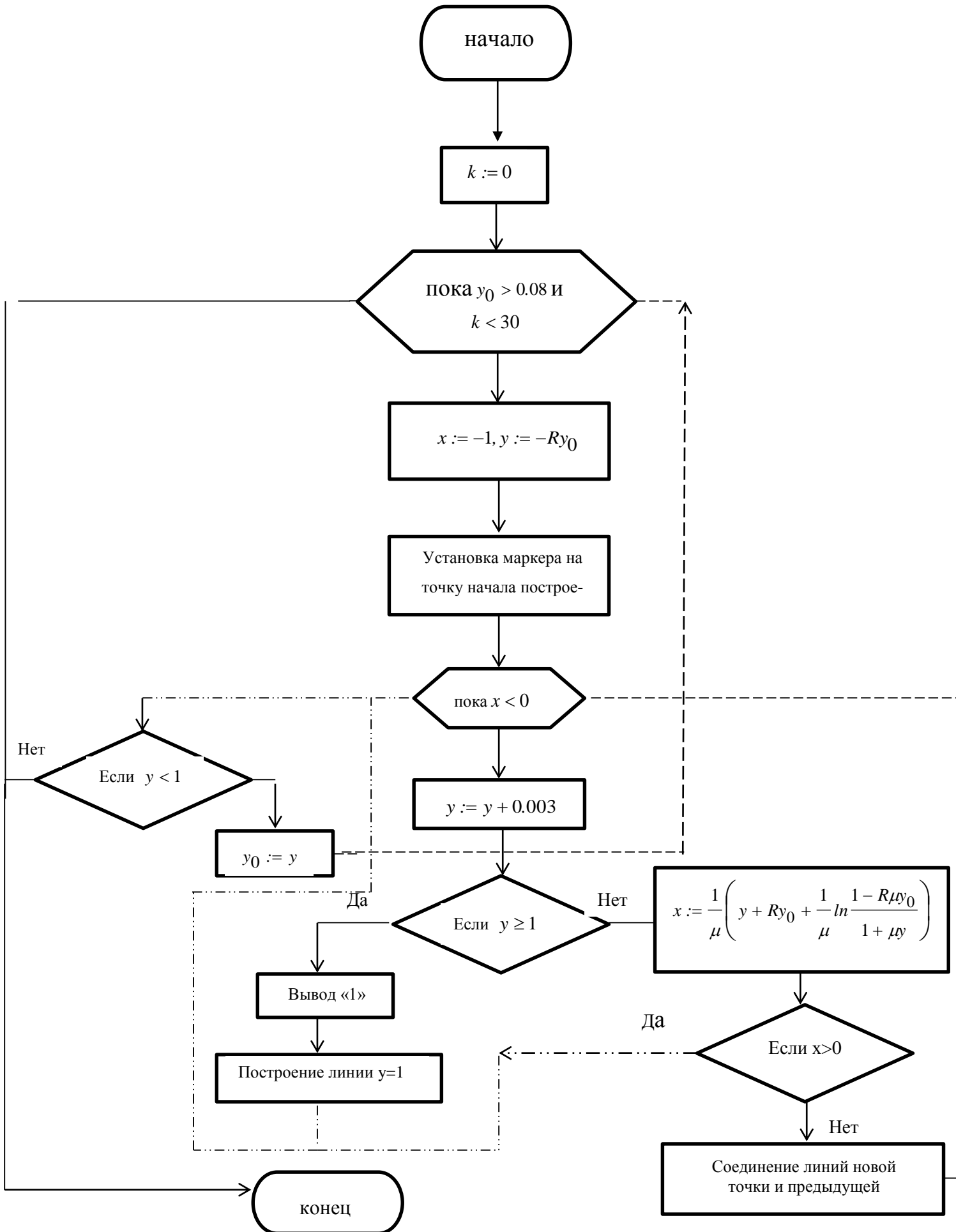
```
uses graph,crt;
var d,n:smallint;
    m,r,y0,y,x,id,c:real;
    a:string;
    z,k:byte;
    i,p:integer;
label 1,2;
function f(x:real):real;
begin
    f:=(1+r)*x+1/m*ln((1-m*r*x)/(1+m*x));
end;
begin
clrscr;
p:=0;
write(output,'m: ');
readln(input,m);
write(output,'R: ');
readln(input,r);
write(output,'y.0: ');
readln(input,y0);
d:=detect;
initgraph(d,n,"");
for i:=1 to 800 do line(0,i,1280,i);
setcolor(black);
line(0,360,1280,360);
line(520,0,520,800);
setttextstyle(defaultfont,horizdir,2);
```

```

outtextxy(950,370,'y');
outtextxy(530,10,'y. ');
while y0>0.08 do begin
    x:=-1;y:=y0*(-r);
    moveto(520,round((-y*300)+360));
    while x<0 do begin
        y:=y+0.003;
        if y>=1 then goto 2;
        x:=(1/m)*(y+r*y0+(1/m)*ln((1-r*m*y0)/(1+m*y)));
        if x>0 then break;
        lineto(round(x*3000+520),round(360-y*300));
    end;
    2:outtextxy(540,60,'1');
    line(round(x*3000+520),60,520,60);
    if y>=1 then break;
    y0:=y;
    if k<100 then inc(k) else break;
end;
if 1+r+1/m*ln((1-m*r)/(1+m))<0 then begin
    x:=0;y:=1;c:=(x+y)/2;
    while abs(x-y)>0.001 do begin
        if f(x)*f(c)<0 then y:=c else x:=c;
        c:=(x+y)/2;
    end;
    id:=(x+y)/2;
    writeln(output,'fixed point id= ',id:0:2);
end else writeln(output,'no fixed point <> 0');
readln;
end.

```





```

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
r:=0.6; n:=1;
h:=strtofloat(edit1.text);
m:=strtofloat(edit2.text);
e:=strtofloat(edit5.text);
q1:=(1+r*exp(2*pi*n*h))/((exp(2*pi*n*h)-1)*(1+r));
q2:=sqr(1+r*r*exp(2*pi*n*h))/sqr(exp(2*pi*n*h-1))/sqr(sqr(1+r));
if m>=2*pi*n*h/(1+r) then begin
  if e<sqr(1+h)*abs(2*pi*n*h*q1-1)/h
  then begin
    vivod1.Caption:='В системе нет периодических движений';
  end else begin
    if e>=sqr(1+h*h)/h*sqr(sqr(2*pi*n*h*q1-1)+16*pi*pi*n*n*h*h*h*h*q2)
    then begin
      vivod1.Caption:='В системе существуют только неустойчивые периодиче-
ские движения без участка относительного покоя тела';
      v1:=2*pi*n/(1+r);edit6.Text:=floattostr(v1);
      t01:=arcsin(sqr(1+h*h)*(2*pi*n*h*q1-1)/e/h)-arcsin(1/sqr(1+h*h));
      t02:=pi-arcsin(sqr(1+h*h)*(2*pi*n*h*q1-1)/e/h)-arcsin(1/sqr(1+h*h));
      edit7.Text:=floattostr(t02);
      v1:=round(v1*1000)/1000;
      t01:=round(t01*1000)/1000;
      t02:=round(t02*1000)/1000;
      vivod2.Caption:='Точки v* = '+floattostr(v1)+' , t01 = '+floattostr(t01)+' и v* =
'+floattostr(v1)+' , t02 = '+floattostr(t02)+' - неподвижные неустойчивые точки то-
чечного отображения';
    end else begin

```

```

vivod1.Caption:='В системе существует устойчивое периодическое движение без участка относительного покоя тела';
v1:=2*pi*n/(1+r);edit6.Text:=floattostr(v1);
t01:=arcsin(sqrt(1+h*h)*(2*pi*n*h*q1-1)/e/h)-arcsin(1/sqrt(1+h*h));
t02:=pi-arcsin(sqrt(1+h*h)*(2*pi*n*h*q1-1)/e/h)-arcsin(1/sqrt(1+h*h));
edit7.Text:=floattostr(t01);
v1:=round(v1*1000)/1000;
t01:=round(t01*1000)/1000;
t02:=round(t02*1000)/1000;
vivod2.Caption:='Точки v* = '+floattostr(v1)+' , t01 = '+floattostr(t01)+' - неподвижная устойчивая точка точечного отображения ,v* = '+floattostr(v1)+' , t02 = '+floattostr(t02)+' - неподвижная неустойчивая точка точечного отображения';
end;
end;
end else begin
if e<sqrt(1+h)*abs(2*pi*n*h*q1-1)/h then vivod1.caption:='В системе нет периодических движений' else begin
t:=0;k:=0;
t0:=3.14;
while t0<4.8 do begin
if ((-e/(1+h*h)*(h*sin(t0)+cos(t0)))+(-r*m/h+e/(1+h*h)*(h*sin(t0)+cos(t0))+1/h)*exp(h*(t0-t0))-(m+1)/h>0)
and (-e/(1+h*h)*(h*sin(t0+2*pi)+cos(t0+2*pi)))+(-r*m/h+e/(1+h*h)*(h*sin(t0+2*pi)+cos(t0+2*pi))+1/h)*exp(h*(t0+2*pi-t0+2*pi))-(m+1)/h<0))
or ((-e/(1+h*h)*(h*sin(t0)+cos(t0)))+(-r*m/h+e/(1+h*h)*(h*sin(t0)+cos(t0))+1/h)*exp(h*(t0-t0))-(m+1)/h<0)

```



```

and (-e/(1+h*h)*(h*sin(t0+2*pi)+cos(t0+2*pi))+(-
r*m/h+e/(1+h*h)*(h*sin(t0+2*pi)+cos(t0+2*pi))+1/h)*exp(h*(t0+2*pi-t0+2*pi))-
(m+1)/h>0))
then begin
    t:=t0;
    while -e/(1+h*h)*(h*sin(t)+cos(t))+(-
r*m/h+e/(1+h*h)*(h*sin(t0)+cos(t0))+1/h)*exp(h*(t-t0))-(m+1)/h<0 do t:=t+0.001;
end;
if abs(e/(1+h*h)*(-h*cos(t0)+sin(t0)+h*cos(t)-sin(t))+1/h*(-
r*m/h+e/(1+h*h)*(h*sin(t0)+cos(t0))+1/h)*(exp(h*(t-t0))-1)-1/h*(t-t0)-m/h*(t-t0-
2*pi*n))<0.001
then begin
    edit7.Text:=floattostr(t0);edit6.Text:=floattostr(m/h);
    if abs(-r+(exp(2*pi*n*h)-1)*(1-r*m+e*sin(t0))/m)<1
    then vivod1.Caption:='В системе существует устойчивое периодическое
движение с участком относительного покоя тела'+#13+'t* =
'+floattostr(round(t*1000)/1000)+'.' '+'Неподвижная устойчивая точка m/h =
'+floattostr(round(m/h*1000)/1000)+' и t0 = '+floattostr(round(t0*1000)/1000)
    else vivod1.Caption:='В системе существует только неустойчивое перио-
дическое движение с участком относительного покоя тела'+#13+'t* =
'+floattostr(round(t*1000)/1000)+'.' '+'Неподвижная неустойчивая точка m/h =
'+floattostr(round(m/h*1000)/1000)+' и t0 = '+floattostr(round(t0*1000)/1000);
        inc(k);
        break;
    end;
    t0:=t0+0.001;
end;
if k=0 then vivod1.caption:='Периодических движений нет';
end;

```

end;

label9.Visible:=True; label7.Visible:=True; edit6.Visible:=True;

label8.Visible:=True; edit7.Visible:=True; button2.Visible:=true;

end;

```

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
label kon,nac;
begin
  form1.Canvas.moveto(350,0);
  form1.Canvas.lineto(350,550);
  form1.canvas.moveto(0,275);
  form1.canvas.lineto(700,275);
  v0:=strtofloat(edit6.text);
  t0:=strtofloat(edit7.Text);
  v0:=round(v0*100000)/100000;
  t0:=round(t0*100000)/100000;
  x1:=0;
  t:=t0;
  y1:=(-e/(1+h*h))*(h*sin(t)+cos(t))+(-
r*v0+e/(1+h*h))*(h*sin(t0)+cos(t0))+1/h)*exp(h*(t-t0))-1/h;
  t:=t+0.0001;
  k:=0;
  while k<20 do begin
    if k>0 then begin
      v0:=y1;
      y1:=-y1*r;
      x1:=0;
      t0:=t;
      x3:=0;
      t1:=0;
    end;
    form1.canvas.moveto(round(350+x1*30),round(275-y1*30));

```

```

    nac: x1:=e/(1+h*h)*((-h)*cos(t0)+sin(t0)+h*cos(t)-sin(t))+1/h*((-
r)*v0+e/(1+h*h)*(h*sin(t0)+cos(t0))+1/h)*(exp(h*(t-t0))-1)-1/h*(t-t0);
    y1:=(-e/(1+h*h))*(h*sin(t)+cos(t))+(-
r*v0+e/(1+h*h)*(h*sin(t0)+cos(t0))+1/h)*exp(h*(t-t0))-1/h;
    if y1>=m/h then begin
        if x3=0 then x3:=x1;
        if t1=0 then t1:=t;
        if (t-t1)*m/h+x3>0 then begin
            y1:=m/h;
            goto kon;
        end else form1.Canvas.LineTo(round(350+((t-
t1)*m/h+x3)*30),round(275-m/h*30));
        end else begin
            form1.canvas.lineto(round(350+x1*30),round(275-y1*30));
            if x1>0 then goto kon;
        end;
        t:=t+0.0001;goto nac;
    kon:inc(k);
end;
vivod1.caption:=vivod1.caption+'      Закончил'
end;

```

Заключение

В данной работе, на основе современных достижений теории динамических систем с ударными взаимодействиями решена задача описания периодических движений в конкретных системах с ударами о неударяющие связи. Это стало возможным благодаря тому, что в таких системах остаются справедливыми многие результаты, известные в гладких динамических системах. Периодические движения с ударами описываются разрывными интегральными кривыми и фазовыми траекториями. Поскольку моменты разрывов для исследуемого и возмущенного движений могут не совпадать, то такие движения неустойчивы в смысле стандартного определения. Тем не менее, движения с ударами могут обладать свойством устойчивости в несколько более широком смысле, и наличие этого свойства позволяет сделать вывод о структуре траекторий в окрестности данного движения. В работах Иванова А.П. получены явные формулы для построения определяющей матрицы и характеристического уравнения указанных движений.

Использование этого подхода, позволило получить соотношение для параметров системы, достаточных для асимптотической устойчивости одноударных периодических движений. Основное отличие от виброударных систем, рассматриваемых ранее, связано с исследованием периодических движений, включающих фазу относительного покоя тела. Эффективным методом анализа периодических движений в таких системах является метод Айзермана – Гантмахера, позволяющий исследовать по первому приближению периодические движения систем с разрывными правыми частями.

На основе полученных теоретических результатов разработан программный пакет, предназначенный для численного анализа, рассмотренных виброударных систем. Описана работа с этим пакетом, иллюстрируются результаты его работы.

Литература

- [1] Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Об устойчивости периодических движений // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 6. С. 750–758.
- [2] Александров М. П., Лысяков А. Г., Федосеев В. Н., Новожилов М. В. Тормозные устройства: Справочник. М.: Машиностроение, 1985. 312 с.
- [3] Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В., Кучер Т. В. Free Pascal и Lazarus: Учебник по программированию. М.: Альт Линукс, ДМК Пресс, 2010. 438 с.
- [4] Андронов А. А. Теория точечных преобразований Пуанкаре – Брауэра – Биркгофа и теория нелинейных колебаний // Вестник АН СССР. № 6. 1944. С. 176–182.
- [5] Андронов А. А. Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний. Доклады VI Съезда русских физиков, 1928. Собрание трудов А. А. Андропова. Изд-во АН СССР. 1956. 540 с.
- [6] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1956. 915 с.
- [7] Бабицкий В. И. Теория виброударных систем: приближенные методы. М.: Наука, 1978. 352 с.
- [8] Баландин Д. В. Фрикционные автоколебания в зазоре // Изв. РАН. Сер. «Механика твердого тела». 1993. № 1. С. 54–60.
- [9] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного анализа динамических систем на плоскости. 2-е изд. М.: Наука, 1990. 486 с.
- [10] Беспалова Л. В. К теории виброударного механизма // Изв. АН. СССР. — 1957. Сер. ОТН. Вып. 5. С. 3–14.
- [11] Блехман И. И., Джанелидзе Г. И. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 410 с.
- [12] Биркгофф Дж. Д. Динамические системы. Гостехиздат, 1940. 406 с.
- [13] Birkhoff G. D. Surface transformations and their dynamical applications // Acta Math. V. 43. 1920. P. 1–119.

- [14] Быховский И. И., Дорохова А. Д., Зарецкий Л. Б., Лукомский С. И. О некоторых периодических движениях и структуре фазового пространства ударно-колебательной системы с постоянной восстанавливающей силой // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. №2. С. 161–165.
- [15] Вальвачев А.Н., Сурков К.А., Сурков Д.А., Четырько Ю.М. Программирование на языке Delphi. Учебное пособие. 2005.
- [16] Гаушус Э. В. Исследование динамических систем методом точечных преобразований. М.: Наука, 1976. 386 с.
- [17] Горбиков С. П., Неймарк Ю. И. Основные режимы движения при вибро-транспортировании с подбрасыванием // Изв. Ан. СССР. 1981. Сер. МТТ, а, №. 4. с. 39–50.
- [18] Горбиков С. П. Установившиеся движения осциллятора без вязкого трения с предварительным натягом и неподвижным ограничителем // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. №2. С. 44–50.
- [19] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
- [20] Di Bernardo M., Feigin M. I., Hogan S. J., and Homer M. E. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise smooth dynamical systems // Chaos, Solitons and Fractals, 1999. V. 10. P.1881–1908.
- [21] Holmes P. J. The Dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table // J. Sound and Vibrations. 1982. V. 84, No 2. P. 173–189.
- [22] Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970. 143 с.
- [23] Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. М: «Международная программа образования», 1997. 336 с.
- [24] Иванов А.П. Основы теории систем с трением. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 304 с.

- [25] Кобринский А. А., Кобринский А. Е. Виброударные системы. М: Наука, 1973. 592 с.
- [26] Кобринский А. А., Кобринский А. Е. Двумерные виброударные системы. М: Наука, 1981. 336 с.
- [27] Kowalik Z. J., Franaszek M., Pieranski P. Self-reanimating chaos in the bouncing-ball system // *Phys. Review A*. 1988. V. 37. No 10. P. 4016–4022.
- [28] Крагельский И. В., Гитис Н. В. Фрикционные автоколебания. М.: Наука, 1987. 183 с.
- [29] Любимцева О. Л. О периодических движениях тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Сборник трудов аспирантов и магистрантов. Технические науки. Нижегород. гос. архитектур.–строит. ун-т. Н. Новгород: ННГАСУ, 2009. С. 200–204.
- [30] Любимцева О. Л. Исследование устойчивости некоторых фрикционных автоколебаний в зазоре методом точечного отображения // Сборник трудов аспирантов и магистрантов. Технические науки. Нижегород. гос. архитектур. – строит. ун-т. Н. Новгород: ННГАСУ, 2010. С. 263–267.
- [31] Любимцева О. Л. Исследование периодических движений и структуры фазового пространства фрикционных автоколебаний методом точечных отображений // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия: Математика. 2011. №4 (1). С. 156–159.
- [32] Любимцева О. Л. Исследование периодических движений и структуры фазового пространства фрикционных автоколебаний методом точечных отображений // X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, тезисы докладов. Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4(2). С. 217–219.
- [33] Любимцева О. Л. Фрикционные автоколебания в виброударной системе с сухим трением // Вестник Чувашского педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Естественные и технические науки, 2011. №4(72). Ч. 1. С. 51–56.

- [34] Любимцева О. Л. Об устойчивости периодических движений системы с вибрирующим ограничителем // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование. Оптимальное управление, 2012. №.2(1). С. 184–189.
- [35] Любимцева О. Л. Периодические движения одной динамической системы с вибрирующим ограничителем // Тезисы докладов XII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Конференция Пятницкого). М.: Изд-во ИПУ РАН, 2012. С. 221–223.
- [36] Любимцева О. Л. Численно-аналитическое исследование одной виброударной системы с подвижным ограничителем // Труды IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижегород, 24–29 сентября 2012 г.) / Под редакцией Д. В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С. Павлова. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2012. С. 636–642.
- [37] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 7–63.
- [38] Макаров Е. Г. Mathcad: Учебный курс (+CD). СПб.: Питер, 2009. 384 с.
- [39] Мюрей Д. SolidWorks . Изд. Лори. 2009. 728 с.
- [40] Нагаев Р. Ф. Периодические режимы вибрационного перемещения. М.: Наука, 1978. 160 с.
- [41] Нагаев Р. Ф., Сарафян Г. С. Фрикционные автоколебания в системе кусочно-линейной характеристики трения // Прикладная механика. 1990. Т. 26. № 10. С. 84–90.
- [42] Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, ч. I, II, III. // Известия высших учебных заведений, серия «Радиофизика». 1958. Т.1. № 1, 2, 5–6.
- [43] Неймарк, Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 472 с.

- [44] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Классики естествознания. ГИТТЛ. 1947. 392 с.
- [45] Poincare H., Les methods nouvelles de la m echanique celeste, I, II, III. Paris. 1892, 1893, 1899.
- [46] Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
- [47] Рапаков Г. Г., Ржеуцкая С. Ю. Программирование на языке Pascal. СПб.: БХВ – Петербург, 2004. 480 с.
- [48] Расширенное моделирование деталей. SolidWorks 2010. Изд. Dassault Systems SolidWorks Corporation. 2009. 341с.
- [49] Русаков И. Г., Харкевич А. А. Вынужденные колебания системы, ударяющейся об ограничитель // ЖТФ. 1942. Т. 12. № 11–12. С. 71–721.
- [50] Senator M. Existence and stability of periodic motions of harmonically forced impacting system // J. Acoustical Soc. of America. 1970. V.47, No 5, part 2. P. 1390–1397.
- [51] Тейфель А., Штайндля А., Трогер Х. Классификация негладких бифуркаций для осциллятора с трением // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. Сб. научных статей, посвященных памяти академика В. В. Румянцева. М.: НПУ РАН, 2009. С. 161–175.
- [52] Tufillaro N. B., Albano A. B. Chaotic dynamics of a bouncing ball // Am. J. Phys. 1986. V. 54, No 10. P. 939–944.
- [53] Фейгин М. И. Резонансные свойства динамической системы с ударными взаимодействиями // Прикладная математика и механика. Вып. 5. 1966. С. 942 – 946.
- [54] Хавьер Пашеку Программирование в Borland Delphi 2006 для профессионалов. М.: «Вильямс», 2006. 944 с.
- [55] Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наук. Думка, 1986. 280 с.

[56] Любимцева О.Л. Пакет программ «Вычисление неподвижных точек отображения Пуанкаре и построение фазовых траекторий различных типов движений виброударной системы». № ОФЭРНиО: 19871.//Хроники объединенного фонда электронных ресурсов «Наука и образование», 2014.№01 (56).