На правах рукописи

Абросимова Альбина Андреевна

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК НА МНОГОМЕРНЫХ ЦВЕТНЫХ ТОРАХ

Специальность 01. 01. 06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль, 2014

Диссертационная работа выполнена на кафедре математического анализа физико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Научный руководитель: **Журавлев Владимир Георгиевич**,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Гриценко Сергей Александрович**,
доктор физико-математических наук, профессор
кафедры «Математика 1» ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

Красильщиков Василий Вячеславович,
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры «Информационные технологии и математика»
Владимирского филиала АНО ВО ЦРФ
«Российский университет кооперации»

Ведущая организация: **ФГБОУ ВПО «Тульский государственный педагогический университе имени Льва Николаевича Толстого»**

Защита диссертации состоится 10 октября 2014 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.002.03, созданного на базе ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова» , по адресу: Российская Федерация, 150008, г. Ярославль, ул. Советская, 144,аудитория 426.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университета имени П. Г. Демидова» (150003, г. Ярославль, Полушкина роща, 1а), а также на сайте ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университета имени П. Г. Демидова»:
http://www.rd.uniyar.ac.ru/upload/iblock/8fc/abrosimova_diss.pdf

Автореферат разослан «9» сентября 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Яблокова Светлана Ивановна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Область исследования диссертации относится к разделу теории чисел, занимающемуся изучением множеств ограниченного остатка. Актуальность для теории чисел изучения множеств ограниченного остатка и их многомерных динамических модификаций обусловлена современной тенденцией перехода от классических арифметических числовых и функциональных структур к нелинейным арифметическим структурам. Динамические системы на множествах ограниченного остатка порождают хорошо сбалансированные слова, аналогичные словам Штурма и Рози. Значимость же сбалансированных слов объясняется их многочисленными применениями в таких областях, как динамические системы, теория кодов, теория коммуникации и задачи оптимизации, теория языков и лингвистика, теория распознавания и статистическая физика (Kawasaki-Ising model) [1].

В 1916 г. Г. Вейль [2] доказал критерий равномерного распределения. Пример последовательности равномерно распределенной по модулю 1 — это последовательность дробных долей $\{i\alpha\}_{i\geq 1}$ при иррациональном α.

Рассмотрим D-мерный тор $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/L$, где L — полная решетка размерности D над множеством действительных чисел $\mathbb{R}$. Пусть на торе $\mathbb{T}^D$ задано преобразование S_α — сдвиг тора на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^D$. Выберем на торе начальную точку x_0, тогда многократный сдвиг тора S_α^j на вектор α порождает на нем орбиту $Orb_{x_0}(\alpha)$ точки x_0. Кроме того, выберем теперь на торе $\mathbb{T}^D$ некоторую область T.

Определение 1. Определим *считающую функцию* $r(i) = \sharp\{j : 0 \leq j < i, S_\alpha^j \in T\}$ как количество попаданий точек орбиты $Orb_{x_0}(\alpha)$ в область $T \in \mathbb{T}^D$.

Определение 2. Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_D)$ иррационален, если его координаты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_D$ и 1 линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Для иррационального вектора α точки орбиты $Orb_{x_0}(\alpha)$ всюду плотно и равномерно заполняют весь тор [3], то есть для $r(i)$ справедлива ассимптотическая формула

$$r(i) = i \operatorname{Vol}(T) + \delta(i), \tag{1}$$

[1]Knuth, D. Ecient balanced codes/ D. Knuth//IEEE Trans. Inf.Theory. — 1986. — V. IT-32. — №. 1. — P. 51-53.

[2]Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene// Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. -1910. -V. 30. -P. 377-407.

[3]Кейперс, Л. Равномерное распределение последовательностей/ Л. Кейперс, Г. Нидеррейтор. — М.: Наука, 1985. — 408 с.

где Vol (T) — объем области T, а $\delta(i) = o(i)$ – остаточный член формулы (1) или отклонение считающей функции $r(i)$ от ожидаемой величины $i \operatorname{Vol}(T)$.

Определение 3. Множество T называется *множеством ограниченного остатка* или *BR-множеством* (bounded remainder set), если существует такая константа C, что выполняется неравенство $|\delta(\alpha, i, T)| \leq C$ для всех i.

В одномерном случае первые примеры таких множеств были построены в 1921 г. Э. Гекке [4]. Это — интервалы $X \subset [0, 1)$ длинны $0 < |b + a\alpha| < 1$, где $a \neq 0$ и $a, b \in \mathbb{Z}$. Гекке доказал, что они будут являтся интервалами ограниченного остатка и получил для них следующую оценку остаточного члена

$$|\delta(\alpha, i, X)| \leq |a|.$$

В 2007 г. В. Г. Журавлев [5] на основе квазипериодических разбиений Фибоначчи построил первое бесконечное семейство интервалов ограниченного остатка, длинны которых стремятся к нулю, а отклонения ограниченны некоторой абсолютной константой.

Более сложной оказалась задача нахождения множеств ограниченного остатка и определения границ отклонений в многомерном случае.

В двумерном случае первый пример BR-множеств был получен в 1954 г. R. Szüsz [6]. Это было семейство параметрических параллелограммов, для которых выполняется оценка $\delta(i) = O(1)$. Анализ конструкции Szüsz привел P.Liardet [7] к открытию возможной редукции от BR-множеств размерности D к аналогичным множествам размерности $D-1$. Другой подход к построению множеств ограниченного остатка обнаружили математики французской школы Ж. Рози [8] и S. Ferenczi [9]. Они связали свойство быть BR-множеством со свойствами отображения первого возвращения. Но получить оценки остаточного члена в двумерном случае так и не удалось. В 2005 г. В. Г. Журавлев получил оценки для фрактальных множеств ограниченного остатка, построенных на основе двумерного разбиения Рози [10].

В 2011 г. В. Г. Журавлев [11] нашел способ построения множеств ограничен-

[4]Hecke, E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins./ E. Hecke// Math. Sem. Hamburg. Univ. — 1921.—V. 5. — P. 54-76.

[5]Журавлев, В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи/В. Г. Журавлев// Изв. РАН. Сер. матем. — 2007. — Т. 71. — Вып. 2. — С. 89–122.

[6]Szüsz, R. Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats/ R. Szüs// Acta Math. Acad. Sci. Hungar. —1954. — №5. — P. 35-39.

[7]Liardet, P. Regularities of distribution/ P. Liardet// Compositio Math. — 1987. — V. 61. — P. 267-293.

[8]Rauzy G. Nombres alge 0 briques et substitutions/ G. Rauzy // Bull. Soc. Math. France. — 1982. — №110. — P. 147-178.

[9]Ferenczi, S. Bounded remainder sets/ S. Ferenczi// Acta Arithmetica. — 1992. — V. 61. — P. 319-326.

[10]Журавлев, В. Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка/В. Г. Журавлев// Записки научных семинаров ПОМИ. — 2005. — Т. 322. — С. 83-106.

[11]Журавлев, В. Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества огранниченного остатка/ В. Г. Журавлев // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2011.— № 392. — С. 95–145.

ного остатка на основе перекладывающихся торических разверток и получил многомерное обобщение теоремы Гекке [12]. Так например, в одномерном случае эта идея реализовывается так: единичный полуинтервал $T^1 = [0, 1)$ может быть разбит на два полуинтервала $T_0^1 = [0, 1 - \alpha)$ и $T_1^1 = [\alpha - 1, 1)$, перекладывание которых соответствует повороту окружности единичной длинны $\mathbb{T}^1$ на угол α. В работе 2012 [13] им описан общий подход к построению множеств ограниченного остатка на основе многогранников Е. С. Федорова [14] для трехмерного случая, параллелоэдров Г. Ф. Вороного [15] для четырехмерного случая, а для размерности $D \geq 5$ с помощью вытягивания многомерного куба. Эта конструкция обобщается на все размерности.

В 2011 г. автору диссертации удалось построить трехпараметрические множества ограниченного остатка на основе перекладывающихся шестиугольных разверток $T^2(c)$ двумерного тора $\mathbb{T}^2$ [16]. В этом случае развертка $T^2(c)$ разбивается на три перекладывающиеся области $T_k^2, k = 0, 12$, являющиеся множествами ограниченного остатка, для которых были получены точные границы и средние значения для отклонений [17]. Также в 2011 г. А. В. Шутов построил одно семейство двумерных множеств ограниченного остатка на основе шестиугольной развертки тора [18]. Множества, описанные в работе автора, включают в себя случаи, рассмотренные Шутовым и Szüsz, как частные.

В работе 2012 г. автора [19] была построена оптимизация границ отклонений для множеств на основе шестиугольных разверток двумерного тора.

Если развертка тора T^D задана оптимальным образом и $k_j = k$, когда $S^j_{\alpha^D}(x_0) \in \mathbb{T}_k$, где x_0 начальная точка орбиты, заданной j сдвигами $S_{\alpha^D}(x_0)$ тора на вектор α^D. Тогда любое бесконечное слово $w(x_0) = k_0 k_1 \ldots k_D$, записанное в алфавите $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, D\}$, является κ-сбалансированным, т.е. у произвольных одинаковой длины факторов (подслов) u, v слова $w(x_0)$ разность вхождений любой буквы $k \in \mathcal{A}$ не превышает κ [20]. Слова $w(x_0)$ пред-

[12] Журавлев, В. Г., Многомерное обобщение теоремы Гекке/В. Г. Журавлев// Алгебра и анализ. — 2012. — Т. 24. — Вып. 1. — С. 1-33.

[13] Журавлев, В. Г. Многогранники ограниченного остатка/В. Г. Журавлев// Труды математического института имени В.А.Стеклова, Современные проблемы математики. — 2012. — Вып. 16. — С. 82-102.

[14] Федоров, Е. С.Начала учения о фигурах./ Е. С. Федоров. — М.: Изд-во АН СССР, 1953. — 409 с.

[15] Вороной, Г. Ф. Собрание сочинений: в 3 т./ Г. Ф. Вороной. — Киев: Изд-во АН Украинско ССР, 1952. — 2 т.

[16] Абросимова, А. А. Множества ограниченного остатка на двумерном торе/ А. А. Абросимова// Чебышевский сборник. — 2011. — Т. 12. — Вып. 4(40). — С. 15–23.

[17] Абросимова, А. А. Средние значения отклонений для распределения точек на торе/ А. А. Абросимова// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. — 2012. — №5(124). — Вып. 26.— С. 5–11.

[18] Шутов, А. В. Об одном семействе двумерных множеств ограниченного остатка/ А. В. Шутов// Чебышевский сборник.— 2011. — Т. 12. — Вып 4(40). — С. 264-271.

[19] Абросимова, А. А. Оптимизация границ отклонений для двумерных множеств ограниченного остатка/ А. А. Абросимова, Д. А. Блинов// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. — 2013. — №26(169). — Вып. 33. — С. 5–13.

[20] Журавлев, В. Г. Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансиро-

ставляют собою естественное обобщение слов Штурма над двухбуквенным алфавитом, являющихся
1-сбалансированными словами и получающихся вращением окружности [21].

В 2013 г. автор описал метод построения трехмерных множеств ограниченного остатка [22] на основе произведения торических разверток, впервые определенного в работах В. Г. Журавлева. В данном случае рассматривалось произведение перекладывающихся единичных интервалов $T^1 = T^1_0 \cup T^1_1$ и шестиугольных разверток $T^2(c)$. Были получены новые перекладывающаяся развертки размерности $D = 3$, геометрически являющиеся шестиугольными призмами Е. С. Федорова. В работе также доказано трехмерное обобщение теоремы Гекке.

Описанный автором подход к построению множеств ограниченного остатка может быть распространен на торы произвольной $\mathbb{T}^D$ размерности D, так как произведение перекладывающихся разверток определено и все необходимые элементы найдены. В этом случае разбиение будет осуществляться на области $\mathbb{T}^D_k$, где $k = 0, 1, \dots D$, каждой из которых для визуализации удобно присвоить не только номер, но и цвет. Так например, произведение двух перекладывающихся гексагональных разверток даст новую перекладывающуюся развертку размерности $D = 4$, разбитую на пять областей, каждая из которых будет множеством огрнаниченного остатка.

В настоящее время активизировался интерес к задачам, связанным с множествами ограниченного остатка, целый ряд отечественных и зарубежных авторов работает в этом направлении: В. Г. Журавлев, А. В. Шутов, А. А. Абросимова, A. Haynes, H. Koivusalo, S. Grepstad, N. Lev.

Цель и задачи работы

Целью работы является построение новых многомерных множеств ограниченного остатка и изучение их свойств, нахождение для них точных границ отклонений и доказательство многомерной теоремы Гекке.

В связи с этим в диссертации решаются следующие задачи: построение двумерных и трехмерных параметрических множеств ограниченного остатка на основе перекладывающихся торических разверток; нахождение точных границ отклонений для этих множеств и доказательство многомерной теоремы Гекке для двумерного и трехмерного тора; вычисление средних значений отклонений и построение оптимизации.

ванные слова/ В. Г. Журавлев// Алгебра и анализ. — 2012. — Т. 24. — Вып. 4. — С. 97 - 136.

[21] Morse, M. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories./ M. Morse, G. A. Hedlund// Amer. J. Math. — 1940. — №62(1). — P. 1–42.

[22] Абросимова, А. А. Произведение торических разверток и построение множеств ограниченного остатка/ А. А. Абросимова// Ученые записки орловского государственного университета. Серия: естественные, технические и медицинские науки. — 2012. — № 6. — Ч.2. — С. 30-37.

Научная новизна работы

Результаты, полученные в работе, являются новыми и состоят в следующем.

1. Построены три семейства трехпараметрических множеств ограниченного остатка на основе гексагональных разверток двумерного тора.

2. Построены четыре семейства четырехпараметрических множествограниченного остатка на основе гексагоналых призм Е. С. Федорова.

3. Для полученных множеств в случаях сдвига тора $\mathbb{T}^D$ на иррациональный вектор α^D, $D = 2, 3$, найдены точные оценки остаточного члена $\delta_k(i, x_0)$, $k = 0, 1, \dots D$. В случае сдвига на вектор $\beta^D = \frac{1}{h}(\alpha^D + d)$, где $h \in \mathbb{N}$, а d вектор из решетки $\mathbb{Z}^2$, получены эффективные оценки границ отклонений $\delta_k(i)$, $k = 0, 1, \dots D$ и доказана многомерная теорема Гекке.

4. Для всех полученых множеств найдены средние значения отклонений $\langle \delta_k(x_0) \rangle$, $k = 0, 1, \dots D$.

5. В двумерном случае построена оптимизация границ отклонени $\delta_k(i)$, $k = 0, 1, 2$ для случая сдвига тора на вектор α^2 и начальной точки $x_0 = (0, 0)$ орбиты $Orb_{x_0}(\alpha^2)$.

Методы исследования

В работе используются следующие основные методы:

Метод построения параметрических многогранников. Позволяет любой точке пространства параметров поставить в соответствие многогранник с заданными свойствами, в случае данного исследования — это многогранник трансляционно заполняющий все пространство. С помощью этого метода в настоящей работе построены выпуклые и невыпуклые гексагональные развертки двумерного тора.

Метод перекладывания. Ставит в соответствие сдвигу D-мерного тора перекладывание $D + 1$ областей его развертки, переводящее развертку саму в себя.

Метод деформаций Журавлева-Абросимовой имеет очень важное и продуктивное достоинство. Он позволяет деформировать некоторые грани вытянутых многогранников так, что деформированный многогранник вновь разбивается на множества ограниченного остатка. При этом удается вычислить новые границы отклонений для деформированных областей.

Метод произведения торических разверток. Впервые описан в работе В. Г. Журавлева. Данный метод позволяет построить множества ограниченного остатка размерности $D = D_1 + D_2$ на основе известных множеств ограниченного остатка размерностей D_1 и D_2. С помощью данного метода в диссертации построены гексагональные призмы Е. С. Федорова, являющиеся развертками трехмерного тора. Данный метод помимо прочего позволяет строить выпуклые и невыпуклые параллелоэдры произвольной размерности.

Положения выносимые на защиту

По результатам исследования на защиту выносятся следующие положения.

— Построение двумерных трехпараметрических и трехмерных четырехпараметрических множеств ограниченного остатка на основе гексагональных разверток тора и гексагональных призм.

— Получение точных оценок остаточного члена для построенных множеств. Многомерное обобщение теоремы Гекке на случай двумерного и трехмерного тора.

— Нахождение средних значений отклонений для построенных множеств.

— Оптимизация границ отклонений для множеств ограниченного остатка на двумерном торе и ее приложение к генерации хорошо сбалансированных слов.

Теоретическая и практическая ценность исследования

Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при решении задач о вложении решеток в квазипериодические разбиения [23], а также при построении сбалансированных слов [24], имеющих широкое применение в теории кодов. Для этих целей необходимо знать точные оценки остаточного члена.

Степень достоверности и апробация диссертации

Достоверность всех результатов исследования обоснована строгими математическими доказательствами.

Работа выполнена в рамках исследований по грантам РФФИ № 11-01-00575-а, № 14-01-0036014-а. Результаты исследования прошли апробацию на следующих международных конференциях:

— VIII Международная конфереция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, посвященная 190-летию П. Л. Чебышева и 120-летию И. М. Виноградова". Саратов, 2011 г.;

— Международная конфереция "Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел". Белгород, 2011 г.;

---

[23]Красильщиков, В. В. Некоторые вопросы вложения решеток в одномерные квазипериодические разбиения/ В. В. Красильщиков, А. В. Шутов// Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2007. — № 7.

[24]Berthé, V. Tijdeman R. Balance properties of multi-dimensional words/ V. Berthé// Theoretical Computer Sciense. — 2002. — V. 273. — P. 197-224.

— IX Международная конфереция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, посвященная 80-летию со дня рождения М.Д.Гриндлингера". Тула, 2012 г.;

— X Международная конфереция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Волгоград, 2012 г.;

— XX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов". Москва, 2013;

— Международная конфереция "Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел". Белгород, 2013 г.;

— XXI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов". Москва, 2014;

— XII Международная конфереция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, посвященная 80-летию профессора В. Н. Латышева". Тула, 2014 г.

Публикации результатов

Результаты исследования опубликованы в цикле работ, состоящем из 6 статей, в том чиселе 4 статьи в журналах из списка рекомендованных ВАК РФ, 6 материалов конференций, 3 тезисов докладов и 2 материалов форума. Две статьи и двое тезисов написаны в соавторстве. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из оглавления, введения, двух глав, содержащих восемь параграфов, заключения и списка литературы из 42 наименований. Текст диссертации изложен на 104 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Содержание главы 1. Первая глава диссертации посвящена определению перекладывающихся торических разверток и построению выпуклых и невыпуклых гексагональных разверток двумерного тора с помощью пространства параметров и трехмерных разверток тора, геометрически представляющих собой призмы Е. С. Федорова, на основе $\otimes_k$-произведения торических разверток, переопределенного для исследуемого случая. Рассмотрены свойства $\otimes_k$-произведения перекладывающихся торических разверток. Доказана эквивалентность сдвига тора и перекладывания областей его развертки, определены критерии иррациональности векторов сдвига.

Для построения двумерных множеств ограниченного остатка юбой точке $c = (c_1, c_2)$ из области $C = \{c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2;\ \mathtt{min}(|c_1|, |c_2|) \leq 1\}$, где

$|\cdot|$ обозначает абсолютную величину, можно поставить в соответсвие шестиугольник $T^2(c)$, трансляционно заполняющий всю плоскость. Причем, шестиугольник будет выпуклым, если $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 \leq 1$, и невыпуклый в остальных случаях. Координаты вершин полученного шестиугольника $(0,0)$, $(1-c_1, -c_2)$, $(1,0)$, $(1-c_1, 1-c_2)$, $(0,1)$, $(-c_1, 1-c_2)$. Сдвигая $T^2(c)$ на векторы квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$, можно разбить всю плоскость — значит шестиугольник $T^2(c)$ является фундаментальной областью для квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$, и соответственно разверткой двумерного тора $\mathbb{T}^2$.

Построим вектор $\alpha^2 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2) = tc$, где ограничения для параметра t, определяются формой развертки, так, например, $0 < t \leq 1$ в случае выпуклого шестиугольника $T^2(c)$. Отложим теперь вектор α^2 от вершин $(1,0), (1 - c_1, 1 - c_2), (0,1)$, соединив концы отложенных векторов, получим разбиение развертки на перекладывающиеся области $T_{k'}^2, k' = 0,1,2$, две из которых будут являться параллелограммами, а область T_0^2 — шестиугольником. Перекладывание областей T_k^2 соответствует сдвигу тора $\mathbb{T}^2$ на вектор α^2 (предложение 1.1). Построенные множества $T_{k'}^2, k' = 0,1,2$ являются множествами ограниченного остатка.

Для построения трехмерных BR-множеств автор использует
$\otimes_k$-произведение торических разверток, в данном случае произведение шестиугольной развертки $T^2(c)$ и единичного перекладывающегося полуинтервала T^1. Как множество, произведение перекладывающихся разверток совпадает с прямым произведением множеств, и в данном случае образует шестиугольную призму Е. С. Федорова, которая трансляционно заполняет все пространство, а значит является разверткой трехмерного тора $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3\ \mathbb{Z}^3$. Но помимо выше сказанного, $\otimes_k$-произведение задает и разбиение новой развертки на множества ограниченного остатка, причем в зависимости от выбора параметра k мы можем получать пять различных видов разбиений. Это произведение не является коммутативным. В случае, когда на первом месте в k-произведении стоит полуинтервал T^1, получим разбиение развертки на две шестиугольные призмы и два параллелепипеда, в противном случае разбиение осуществляется на три парраллелепипеда и шестиугольную призму.

Содержание главы 2. Во вторай главе "Отклонения для считающих функций"рассмотрены вспомогательные понятия, такие как: векторная дробная часть и суммарное векторное отклонение. Определены отклонения $\delta_k(i, x_0)$ считающих функций $r_k(i, x_0)$. Для случая двумерного и трехмерного торов найдены точные границы отклонений в случае сдвига тора на вектор α^D, $D = 2,3$ и многомерное обобщение теоремы Гекке. Для всех отклонений $\delta_k(i, x_0)$ определены и найдены средние значения. Также в двумерном случае для начальной точки $x_0 = (0,0)$ построена оптимизация границ отклонений.

В двумерном случае для выпуклой шестиугольной развертки $T^2(c)$ доказана следующая теорема и следствие из нее.

Теорема 2.2. *Пусть дан сдвиг тора S_{α^2} на вектор α^2, и α^2 - иррациональный, т. е. числа $\alpha_1^2, \alpha_2^2, 1$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$, пусть тор $\mathbb{T}^2$ разбит на области $\mathbb{T}_k^2 : \mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2 \sqcup \mathbb{T}_2^2$, а его развертка $T^2(c)$ задана параметром $c = (c_1, c_2) \in C_{con}$. Тогда для отклонений выполняются точные неравенства:*

$$\begin{array}{lcl} -\sigma(x_0) & \le \delta_0(i, x_0) \le & 2 - \sigma(c) - \sigma(x_0); \\ x_{01} - 1 & \le \delta_1(i, x_0) \le & x_{01} + c_1; \\ x_{02} - 1 & \le \delta_2(i, x_0) \le & x_{02} + c_2, \end{array}$$

где $\sigma(x) = x_1 + x_2$.

Следствие 2.1 (двумерная теорема Гекке). *Если в качестве вектора сдвига выбрать вектор $\beta^2 = \frac{1}{h}(\alpha^2 + l)$, где $h \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{Z}^2$, то все границы отклонений $\delta_k(i, x_0)$ увеличатся в h раз.*

Аналогичные теоремы доказаны для случая двумерной развертки тора, представляющей собой невыпуклый шестиугольник (теорема 2.3, следствие 2.2). Заметим, что границы отклонений определяются лишь формой развертки $T^2(c)$ и выбором начальной точки x_0, в частности в случае теоремы 2.2, если в качестве начальной точки выбрать точку $x_0 = (0, 0)$, то границы отклонения $\delta_1(i, x_0)$ определяются размерами развертки $T^2(c)$ в направлении вектора l_1, границы отклонения $\delta_2(i, x_0)$ — размерами развертки $T^2(c)$ в направлении вектора l_2 и отклонения $\delta_0(i, x_0)$ — в направлении вектора l_0. Таким образом, сами границы развертки не обязательно должны быть прямыми, а могут быть любыми линиями вплоть до фрактальных [25], при этом обязательным условием остается соответствие противоположных сторон.

В трехмерном случае для 0-произведения полуинтервала T^1 и выпуклой шестиугольной развертки $T^2(c)$ получены следующие оценки остаточных членов.

Теорема 2.4. *Пусть задан трехмерный тор $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ с разбиением $T_1^3 \sqcup T_{0,0}^3 \sqcup T_{0,1}^3 \sqcup T_{0,2}^3$, которое задается произведением $T^1 \otimes_0 T^2(c)$. Пусть кроме того задан иррациональный вектор γ^0 сдвига тора $\mathbb{T}^3$, тогда для отклонений $\delta_1(i, x_0), \delta_{0,m}(i, x_0), m = 0, 1, 2$ справедливы точные неравенства.*

$$\begin{array}{lcl} -\sigma(x_0) & \le \delta_{0,0}(i, x_0) \le & 3 - \sigma(c)(t + 1) - \sigma(x_0); \\ x_{01} - 1 & \le \delta_1(i) \le & x_{01}; \\ x_{02} - 1 & \le \delta_{0,1}(i, x_0) \le & x_{02} + \alpha_1^2 + c_1; \\ x_{03} - 1 & \le \delta_{0,2}(i, x_0) \le & x_{03} + \alpha_2^2 + c_2. \end{array}$$

[25] Абросимова, А. А. Фрактальные множества ограниченного остатка/ А. А. Абросимова// Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы Второй Международной конференции молодых ученых. - Нальчик: ООО"Редакция журнала Эльбрус". — 2012. —С. 18–21.

где $\sigma(x) = x_1 + x_2$.

Следствие 2.3 (трехмерное обобщение теоремы Гекке). *Если в качестве вектора сдвига выбрать вектор* $\gamma' = \frac{1}{h}(\gamma^0 + d)$, *где* $h \in \mathbb{N}, d \in L^1 \otimes_0 L^2$ *для произведения* $T^1 \otimes_0 T^2(c)$, *то границы отклонений примут вид:*

$$\begin{array}{rcl} -h\sigma(x_0) & \leq \delta_{0,0}(i, x_0) \leq & h(3 - \sigma(c)(t+1) - \sigma(x_0)); \\ h(x_{01} - 1) & \leq \delta_1(i) \leq & hx_{01}; \\ h(x_{02} - 1) & \leq \delta_{0,1}(i, x_0) \leq & h(x_{02} + \alpha_1^2 + c_1); \\ h(x_{03} - 1) & \leq \delta_{0,2}(i, x_0) \leq & h(x_{03} + \alpha_2^2 + c_2). \end{array}$$

где $\sigma(x) = x_1 + x_2$.

Аналогичные результаты доказаны в главе 2 для 1-произведения полуинтервала T^1 и шестиугольной развертки $T^2(c)$, а также для 0,1,2-произведений шестиугольной развертки $T^2(c)$ и полуинтервала T^1 (теоремы 2.5 — 2.8).

В трехмерном случае полученные границы отклонений не зависят от выбора вектора α^1, то есть вектора сдвига тора для первого множителя 0-произведения, эта тенденция наблюдается в случае всех пяти видов произведений и объясняется тем, что геометрически границы отклонений определяются проекциями афинного образа развертки $T^1 \otimes_0 T^2(c)$ в ортонормированном базисе, а они не зависят от вектора сдвига тора первого множителя, в данном случае вектора α^1.

Для каждого $\delta_k(i, x_0)$ определено среднее отклонение

$$\langle \delta_k(x_0) \rangle = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_k(i, x_0),$$

и найдены его значения.

Теорема 2.9. *Пусть дан сдвиг тора на вектор* α^2. *Пусть вектор* α^2 *иррациональный, т. е. числа* $\alpha_1^2, \alpha_2^2, 1$ *линейно независимы над* $\mathbb{Z}$. *Тогда для любого* $k' = 0, 1, 2$ *существуют средние значения отклонений*

$$\langle \delta_k(x_0) \rangle = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_k(i, x_0),$$

и они соответственно равны

$$\begin{array}{c} \langle \delta_0(x_0) \rangle = 1 - \frac{c_1 + c_2}{2} - x_{01} - x_{02}, \\ \langle \delta_1(x_0) \rangle = x_{01} - \frac{1 - c_1}{2}, \\ \langle \delta_2(x_0) \rangle = x_{02} - \frac{1 - c_2}{2}. \end{array}$$

Теорема 2.10. *Пусть дан сдвиг тора* $\mathbb{T}^3$ *на вектор* γ^0. *Пусть вектор* γ^0 *иррациональный. Тогда для областей* $T_1^3, T_{0,m}^3, m = 0, 1, 2$ *существуют* *средние значения отклонений*

$$\langle \delta_1(x_0)\rangle = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\le i\le N} \delta_1(i, x_0),$$

$$\langle \delta_{0,1}(x_0)\rangle = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\le i\le N} \delta_{0,1}(i, x_0),$$

и они соответственно равны

$$\begin{array}{rcl} \langle \delta_{0,0}(x_0)\rangle & = & \sigma(x) + \frac{\sigma(c)}{2} - \frac{3}{2}, \\ \langle \delta_1(x_0)\rangle & = & \frac{1}{2} - x_{01}, \\ \langle \delta_{0,1}(x_0)\rangle & = & \frac{1-c_1}{2} - x_{02}, \\ \langle \delta_{0,2}(x_0)\rangle & = & \frac{1-c_2}{2} x_{03}. \end{array}$$

Аналогичные результаты получены для 1-произведения полуинтервала на шестиугольник и $0, 1, 2$-произведений шестиугольника и полуинтервала в параграфе 2.4.2 второй главы.

В двумерном случае построена оптимизация границ отклонени $\delta_k(i)$, $k = 0, 1, 2$ для случая сдвига тора на вектор α^2 и начальной точки $x_0 = (0, 0)$ орбиты $Orb_{x_0}(\alpha^2)$.

Возникает естественный вопрос: как сделать границы отклонений как можно меньше? Для достижения этой цели можно изменять параметры c_1 и c_2, но, уменьшая границу одного отклонения, мы неминуемо увеличиваем границу для другого, поэтому необходим параметр, связывающий все три отклонения. Чтобы разрешить эту проблему, будем рассматривать отклонения $\delta_k(i)$ как координаты трехмерного вектора $x = (x_0, x_1, x_2) = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, а в качестве параметра, связывающего все три отклонения, выберем метрику трехмерного пространства $d_\theta(x)$.Будем рассматривать метрики вида $d_\theta(x) = (|x_0|^\theta + |x_1|^\theta + |x_2|^\theta)^{\frac{1}{\theta}}$, где $1 \le \theta \le \infty$.

Назовем $\Delta_\theta(c) = \sup_{i\in\mathbb{N}} d_2(\delta(i))$ верхней границей векторного отклонения $\delta(i)$ в метрике $d_\theta(x)$ при фиксированном c. Тогда $\Delta_\theta = \inf_{c\in C_{con}} \Delta_\theta(c)$ — нижняя граница $\Delta_\theta(c)$ по всем c из области C.

Если выбрать $\theta = 2$, то получим естественную евклидову метрику $d_2(x) = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}$. Относительно величины нижней границы $\Delta_2(c)$ в метрике $d_2(x)$ доказана следующая теорема.

Теорема 2.11. *Пусть отклонения $\delta_k, k = 0, 1, 2$ задают трехмерный вектор x, и пусть его длина $d_2(x)$. Тогда, если $c \in C_{con}$, для Δ_2 справедливо следующее равенство $\Delta_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.*

Полученное равенство достигается при $c = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, а $C_{con} = \{c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2; c_i \ge 0, c_1 + c_2 \le 1\}$ и означает, что рассматривается не вся область C, а только точки, порождающие выпуклые шестиугольники. Аналогичные результаты доказаны для невыпуклых шестиугольников в данной метрике, а также для всех шестиугольников в метриках $d_1(x)$ и $d_\infty(x)$ (теоремы 2.11 - 2.13).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставленные в диссертации задачи были полностью решены автором. Построены параметрические множества ограничененного остатка на двумерном и трехмерном торах. Найдены точные оценки остаточных членов и доказано многомерное обобщение теоремы Гекке для этих множеств, определены средние значения отклонений, а в думерном случае построена еще и оптимизация границ отклонений.

Разработанные методы позволяют решить следующие вопросы близкие к данному исследованию.

— Построение трехмерных множеств ограниченного остатка с использованием пространства параметров, аналогично случаю построения множеств на основе гексагональных разверток тора.

— Оптимизация границ отклонений для трехмерных множеств ограниченного остака, построенных на основе гексагональной призмы Е. С. Федорова и построенных методом, описанным в предыдущем пункте.

— Нахождение точных границ отклонений для двумерных и трехмерных множеств ограниченного остатка в случае сдвига тора на вектор $\beta^D = \frac{1}{h}(\alpha^D + l), D = 1, 2$.

— Построение описанными методами множеств ограниченного остатка размерности 4 и выше и изучение их свойств.

ПУБЛИУАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ
Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ:

[1] Абросимова, А. А. Средние значения отклонений для распределения точек на торе/ А. А. Абросимова// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. — 2012. — №5(124). — Вып. 26. — С. 5–11.

[2] Абросимова, А. А. Произведение торических разверток и построение множеств ограниченного остатка/ А. А. Абросимова// Ученые записки орловского государственного университета. Серия: естественные, технические и медицинские науки. — 2012. — № 6. — Ч.2. — С. 30-37.

[3] Абросимова, А. А. Границы отклонений для трехмерных множеств ограниченного остатка/ А. А. Абросимова// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. — 2013. — №19(162). — Вып. 32. — С. 5–21.

[4] Абросимова, А. А. Оптимизация границ отклонений для двумерных множеств ограниченного остатка/ А. А. Абросимова, Д. А. Блинов// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. — 2013. — №26(169). — Вып. 33. — С. 5–13.

Другие публикации:

[5] Абросимова, А. А. Двумерное обобщение теоремы Гекке и сбалансированные слова/ А. А. Абросимова, В. Г. Журавлев// Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения:тез. докл. VIII Международной конференции, посвященной 190-летию П.Л. Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова (Саратов, 12-17 сентября 2011 г.). Саратов: Изд-во Сарат.ун-та. — 2011. — С.3-4.

[6] Абросимова, А. А. Множества ограниченного остатка на двумерном торе/ А. А. Абросимова// Чебышевский сборник. — 2011. — Т. 12. — Вып. 4(40). — С. 15–23.

[7] Абросимова, А. А. Средние значения от-клонений для распре-деления точек на торе/ А. А. Абросимова// Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел: сб. материалов Международной кон-ференции (Белгород, 17-21окт.2011 г.). — ИПК НИУ "БелГУ". — 2011. — С. 5.

[8] Абросимова, А. А. Фрактальные множества ограниченного остатка/ А. А. Абросимова// Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы Второй Международной конференции молодых ученых. - Нальчик: ООО"Редакция журнала Эльбрус". — 2012. —С. 18–21.

[9] Абросимова, А. А. Произведение ториче-ских разверток/ А. А. Абросимова// Алгебра и теория чи-сел: современные про-блемы и приложения: тез. докл. X Между-нар. конф. Волгоград, 10-16 сент. 2012 г. — Волгоград: Изд-во ВГСПУ "Перемена". — 2012. — С. 3

[10] Абросимова, А. А. Оптимизация границ отклонений для множеств ограниченного остатка на двумерном торе/ А. А. Абросимова, Д. А. Блинов, Т. В. Полякова// Чебышевский сборник. — 2013. — Т. 14. —- Вып. 1(45). — С. 9–17.

[11] Абросимова, А. А. Трехмерное обобщение теоремы Гекке/ А. А. Абросимова// Материалы Международного молодежного научного форума "Ломоносов-2013"/ Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, К.К. Андреев, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, — 2013.

[12] Абросимова, А. А. Границы отклонений для BR-множеств/ А. А. Абросимова, Д. А. Блинов// Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. материалов Международной конференции (Белгород, 26-31 мая 2013 г.). — Белгород: ИПК НИУ "БелГУ— 2013. — С. 8 -9.

[13] Абросимова, А. А. Оптимизация границ отклонений для двумерных BR-множеств/ А. А. Абросимова// Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. материалов Международной конференции (Белгород, 26-31 мая 2013 г.). — Белгород: ИПК НИУ "БелГУ— 2013. — С. 7.

[14] Абросимова, А. А. Многомерные множе-ства ограниченного остатка/ А. А. Абросимова// Алгебра и теория чи-сел: современные проблемы и приложения. Тезисы докладов XI Международной конференции. — Саратов: Издательство Саратов-ского университета. — 2013. — С. 3-4.

[15] Абросимова, А.А. Оптимизация границ отклонений для двумерных BR-множеств/ А. А. Абросимова// Материалы Международного молодежного форума "Ломоносов-2014"/ Отв. ред. А. И. Андреев, Е. А. Антипов. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2014.

[16] Абросимова, А. А. Многомерные множества ограниченного остатка малых размерностей/ А. А. Абросимова// Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Материалы XII Междунар. конф.— Тула: Изд-во ТГПУ, 2014. — С. 267–269.

[17] Абросимова, А. А. Множества ограниченного остатка и многомерная теорема Гекке/ А. А. Абросимова, В. Г. Журавлев// Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Материалы XII Междунар. конф.— Тула: Изд-во ТГПУ, 2014. — С. 272–273.