На правах рукописи

ЛОГАЧЕВА Елена Сергеевна

ПРОБЛЕМЫ СОПРЯЖЕННОСТИ СЛОВ И ПОДГРУПП В СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ ГРУПП

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого» на кафедре алгебры, математического анализа и геометрии факультета математики, физики и информатики.

Научный руководитель:

Безверхний Владимир Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Глухов Михаил Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, академик-секретарь отделения математических проблем криптографии ФГКНУ «Академия криптографии Российской Федерации»

Азаров Дмитрий Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник кафедры алгебры и математической логики ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный университет»

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Защита состоится 25 декабря 2015 года в 12.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 при ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова» по адресу 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144, ауд. 426.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова» (150003, г. Ярославль, ул. Полушкина роща, 1а), а также на сайте ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова»: *http://www.rd.uniyar.ac.ru/upload/iblock/f8c/logacheva-e.s.-problemy-sopryazhennosti-slov-i-podgrupp-v-svobodnykh-konstruktsiyakh-grupp.pdf*

Автореферат разослан «   » ________ 2015г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат ф.-м. наук, доцент Яблокова Светлана Ивановна

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В настоящее время теория групп − одно из наиболее динамично развивающихся математических направлений. Идеи теории групп уходят своими корнями к работам Э. Галуа, Н. Абеля, Дж. Руффини. Однако на начальных стадиях своего развития она представляла лишь теорию конечных групп. И только в начале XX века под влиянием признания роли теории групп в геометрии и бурного развития топологии начали изучаться группы заданные порождающими и определяющими соотношениями, большое значение среди которых имеют бесконечные дискретные группы. Анализ свойств таких групп приводит к комбинаторным методам, откуда и происходит название комбинаторной теории групп.

Основные алгоритмические проблемы комбинаторной теории групп были сформулированы М. Дэном[1] в 1912 году: проблема равенства, сопряженности в конечно определенных группах и проблема изоморфизма групп.

Говорят, что в группе G разрешима проблема сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов w_1, w_2, из G установить, существует ли элемент $h \in G$ такой, что $h^{-1}w_1h$=w_2.

Значимые результаты при решении этой проблемы были получены Новиковым П. С.[2] В 1955 году им доказана неразрешимость проблемы равенства и сопряженности слов в классе конечно определенных групп. Из результата С. И. Адяна[3] следует, что практически все проблемы, относящиеся к конечно определенным группам, в общем случае неразрешимы. Однако отрицательное решение проблемы Дэна в общем случае явилось причиной ее дальнейшего изучения в определенных классах групп. Выделим наиболее широкие классы групп с разрешимой проблемой сопряженности. В группах с малой мерой сокращения с условиями $C'(\frac{1}{6})$, $C'(\frac{1}{4})$ и T(4), открытых

---

[1] *Dehn, M.* Uber Unendliche diskontinuierliche Gruppen / M. Dehn *// Math. Annal.* – 1912. – V.71. – P. 116-144.
[2] *Новиков, П. С.* Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп / П. С. Новиков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1955. – №44. – С.1-143.
[3] *Адян, С. И.* Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем в теории групп / С. И. Адян // *Труды Московского математического общества*. – 1957. – Т. 6. – С. 231-298.

Гриндлингером М. Д., проблема сопряженности слов решена в 1966 году[4]. Р. Линдоном[5] были введены классы групп с малой мерой налегания C(6), C(4) и T(4), C(3) и T(6), в которых им решена проблема равенства слов, а П. Шуппом, используя кольцевые диаграммы, решена проблема сопряженности слов[6]. Отметим также группы кос, для которых проблему сопряженности решил Ф. Гарсайд[7] в 1969 году, и их обобщение − группы Артина конечного типа, веденные Э. Брискорном и К. Сайто[8], на которые удалось перенести метод Гарсайда и доказать в 1972 году проблему сопряженности слов.

В 1966 году С. Липшуц[9] установил разрешимость проблемы сопряженности слов в свободном произведении двух свободных групп конечного ранга с объединением по циклической подгруппе. Фридманом А. А.[10] была решена проблема сопряженности слов в HNN-расширении свободной группы с ассоциированными циклическими подгруппами. Безверхним В. Н. решена проблема сопряженности и степенной сопряженности слов в группах с одним определяющим соотношением с кручением и в их свободном произведении с циклическим объединением[11,12,13]. Значимым результатом в конце XX века является результат Громова М.Л.[14] Им были определены словарно гиперболические группы и решена для них проблема сопряженности слов.

[4] *Гриндлингер, М. Д.* О проблеме сопряженности и совпадения с антицентром в теории групп / М. Д Гриндлингер // *Сибирский математический журнал.* – 1966. – Т.7. – С. 785-803.

[5] *Lyndon, R.* On Dehn’s algorithm / R. Lyndon // *Math. Annal.* – 1966. – V.166. – P. 208-228.

[6] *Schupp, P.* On Dehn’s algorithm and the conjugacy problem / P. Schupp // *Math. Annal.* – 1968. – V.178. – P. 119-130.

[7] *Гарсайд, Ф.* Группа кос и другие группы / Ф. Гарсайд // *Математика:* Сб. переводов. 1970. - №4. - С. 113-132.

[8] *Брискорн, Э.* Группы Артина и группы Кокстера / Э. Брискорн, К. Сайто // *Математика:* Сб. переводов. 1974. - №6. - С. 56-79.

[9] *Lipschutz, S.* The generalization of Dehn's result on the conjugacy problem / S.Lipschutz // Prog.. Amer. Math. Soc. - 1966. - V. 150. - P. 759-762.

[10] *Фридман, А. А.* Решение проблемы сопряженности в одном классе групп / А. А. Фридман // Труды МИАН. – М: 1973. – Т.133. – С. 233-242.

[11] *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности слов в группах с одним определяющим соотношением с кручением / В. Н. Безверхний // тез. VII Всеросссийсикая конференция по математической логике, Новосибирск, 1984. С.7.

[12] *Безверхний, В. Н.* О проблеме сопряженности слов в некоторых классах групп / В. Н. Безверхний // тез. Международная конференция по алгебре, Новосибирск, 1989. С.19.

[13] *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности слов в некоторых классах групп / В. Н. Безверхний // *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп.* Межвузовский сборник научных трудов. – 1990. – С. 103-152.

[14] *Громов, М. Л.* Гиперболические группы / М. Л. Громов. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.

Обобщением проблемы сопряженности слов служит проблема сопряженности подгрупп.

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1, H_2 из G установить, существует ли элемент $z \in G$ такой, что $z^{-1}H_1z = H_2$.

Впервые проблема сопряженности подгрупп была рассмотрена в 1967 году В. Н. Ремесленниковым[15] в классе конечно порожденных нильпотентных групп. Далее в исследовании проблемы сопряженности подгрупп были получены следующие результаты: Гриндлингером М.Д.[16] указано в каких случаях любые две подгруппы ранга 2 свободной группы сопряжены. Данный результат был обобщен Молдаванским Д.И.[17] на конечно порожденные подгруппы. В 1971 году Безверхним В.Н.[18] и Молдаванским Д.И.[19] независимо друг от друга была решена проблема сопряженности подгрупп для свободного произведения групп при условии, что в сомножителях разрешимы проблемы вхождения и сопряженности подгрупп; в 1977 году Безверхним В.Н.[20] решена проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении двух свободных групп конечного ранга с объединением по циклической подгруппе, в 1983 − в HNN-расширении по изоморфным конечным ассоциированным подгруппам при условии, что в базовой группе разрешимы проблемы вхождения и сопряженности подгрупп[21]. Также в 1975 году Безверхний В.Н.[22] показал, что в

---

[15] *Ремесленников, В. Н.* Сопряженность подгрупп в нильпотентных группах / В. Н. Ремесленников // *Алгебра и логика*. – 1967. – Т.6. №2. – С. 61-76.

[16] *Гриндлингер, М. Д.* Сопряженность подгрупп свободной группы / М. Д Гриндлингер // *Сибирский математический журнал.* – 1970. – Т.11. – С. 1178-1180.

[17] *Молдаванский, Д. И.* Сопряженность подгрупп свободной группы / Д. И. Молдаванский // *Алгебра и логика.* – 1969. – Т.8. №6. – С. 691-694.

[18] *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения групп / В. Н. Безверхний // XXI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. - Кишинев, 1971. – С. 9-10.

[19] *Молдаванский, Д. И.* Решение проблемы сопряженности подгрупп / Д. И. Молдаванский // XXI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. – Кишинев, 1971. – С. 62-63.

[20] *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп. I-II / В. Н. Безверхний // *Современная алгебра.* Межвузовский сборник. – 1977. – Вып. 6. – С.16-32.

[21] *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп / В. Н. Безверхний // *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение.* Межвузовский сборник научных трудов. – 1983. – С. 50-80.

[22] *Безверхний, В. Н.* Неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с объединением / В. Н. Безверхний // *Сборник научных трудов кафедры высшей математики.* Тульский политехнический институт. – 1975. – Вып. 2. – С. 90-95.

свободном произведении двух свободных групп, объединенных по подгруппе ранга 4, проблема сопряженности подгрупп неразрешима.

Степень разработанности темы исследования

В качестве центрального объекта для изучения в данной работе выбраны древесные произведения с объединением и их HNN-расширения. Впервые понятие древесного произведения групп с объединением было рассмотрено в работе Х. Нейман[23] в 1948 г., как обобщение свободного произведения с объединением; в 1949 г. введено HNN-расширение[24].

В настоящей работе рассмотрены следующие конструкции групп: древесное произведение свободных групп с циклическим объединением, древесное произведение циклических групп с объединением и его HNN-расширение.

Как отмечалось ранее, проблему сопряженности слов в свободном произведении двух свободных групп, объединенных по циклической подгруппе, решил С. Липшуц в 1966г. В настоящей работе дается новое доказательство этого результата и его обобщение на древесное произведение конечного числа свободных групп с циклическим объединением, а также на HNN-расширение древесного произведения циклических групп с объединением с ассоциированными циклическими подгруппами как с одной проходной буквой, так и с конечным их числом.

При рассмотрении проблемы сопряженности подгрупп в вышеуказанных группах основополагающими являются работы Безверхнего В.Н.[25,26], которые закладывают основу для дальнейшего исследования. Используя идеи доказательства проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с циклическим объединением, доказана разрешимость данной проблемы для древесного произведения циклических

[23] *Neumann, H.* Generalized free product with amalgamated / H. Neumann // *Amer. J. Math*. – 1948. – 70. – P. 590-625.
[24] *Higman, G*. Embedding theorems for Groups / G. Higman, B. Neumann, H.Neumann // *Journal of the London Mathematical Society*. – 1949. P.247-254.
[25] *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп / В. Н. Безверхний // *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение.* Межвузовский сборник научных трудов. – 1983. – С. 50-80.
[26] *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп. I-II / В. Н. Безверхний // *Современная алгебра.* Межвузовский сборник. – 1977. – Вып. 6. – С.16-32.

групп с циклическим объединением, для HNN-расширения бесконечной циклической группы по ассоциированным циклическим подгруппам и для HNN-расширения древесного произведения циклических групп с объединением с ассоциированными циклическими подгруппами.

Цель работы

Целью диссертационной работы является решение проблемы сопряженности слов и проблемы сопряженности подгрупп в древесных произведениях групп с циклическим объединением и в их HNN-расширении.

Основные положения, выносимые на защиту и научная новизна

Все полученные результаты являются новыми. На защиту выносятся следующие основные положения:

1. В древесном произведении свободных групп с объединением по циклическим подгруппам разрешима проблема сопряженности слов.
2. В HNN-расширении древесного произведения циклических групп с циклическим объединением по ассоциированным циклическим подгруппам разрешима проблема сопряженности слов.
3. В HNN-расширении с конечным числом проходных букв с ассоциированными циклическими подгруппами древесного произведения циклических групп с объединением разрешима проблема сопряженности слов при условии, что элементы не принадлежат ассоциированным подгруппам.
4. В древесном произведении бесконечных циклических групп с объединением разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.
5. В HNN-расширении бесконечной циклической группы с ассоциированными циклическими подгруппами разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.
6. В HNN-расширении по ассоциированным циклическим подгруппам древесного произведения циклических групп с циклическим объединением разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Результаты данной работы могут быть использованы при решении алгоритмических проблем комбинаторной теории групп в свободных конструкциях групп. Многие доказанные в диссертации теоремы могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов.

Методология и методы исследования

Исследования, проводимые в настоящей работе, базируются на комбинаторных методах теории групп. Особое место занимает метод специального множества слов, который был введен Безверхним В.Н. в 1972 году. Обобщения проводятся с использованием метода математической индукции.

Степень достоверности результатов

Степень достоверности результатов данной работы подтверждается полными и подробными математическими доказательствами.

Апробация результатов

Основные результаты работы были изложены:

– на семинаре «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп» под руководством Безверхнего В.Н. (ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2009-2014гг.);

– на Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (ТГУ, 2006 г.);

– на IX Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2012 г.);

– на XII Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2014 г.);

– на VI Международном симпозиуме «Абелевы группы» (МПГУ, 2014 г.);

– на V региональной научно-практической конференции ППС, аспирантов, магистрантов, соискателей ТГПУ им. Л.Н. Толстого «Университет XXI века: исследования в рамках научных школ» (ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2015 г.);

– на XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2015 г., пленарный доклад);

– на семинаре по теории групп под руководством А. Л. Шмелькина (МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014 г.).

Публикации

Все основные результаты, полученные автором в ходе диссертационного исследования, опубликованы в 14 научных работах: 9 статьях, из которых 5 статей опубликованы в журналах, принадлежащих списку ВАК; 5 тезисах докладов на конференциях различного уровня. Некоторые работы написаны в соавторстве с научным руководителем. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[14].

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, 9 параграфов и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 122 страницы. Библиографический список включает 49 наименований.

Основное содержание работы

Во введении изложена предыстория исследуемых объектов, обоснована актуальность исследования и новизна полученных результатов.

Первая глава посвящена построению специального множества слов подгруппы некоторой группы, являющейся свободным произведением с объединением, а также для подгруппы HNN-расширения. Специальное множество слов было введено Безверхним В. Н.[27] в 1972 году, как основной инструмент для изучения свободных конструкций групп. Специальное множество слов подгруппы группы G строится эффективно и позволяет сделать вывод о величине сокращений в произведении некоторого числа сомножителей.

[27] *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы вхождения для одного класса групп / В. Н. Безверхний // *Вопросы теории групп и полугрупп.* ТГПИ им. Л.Н. Толстого. – 1972. – С. 3-86.

В первых двух параграфах Главы 1 определяется структура специального множества.

Основными результатами первой главы можно считать критерии приводимости образующих подгруппы к специальному множеству, порождающему ту же самую подгруппу для свободного произведения с объединением и для HNN-расширения.

Теорема 1.1.[28] *Пусть группа*

$$G = \langle \prod_{s=1}^{n} * \, G_s; relG_1, \dots, relG_n, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \rangle$$

– древесное произведение групп G_s, $1 < s < n$, объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij} < G_i, U_{ji} < G_j$ с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов $\{\varphi_{ij}\}, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. Тогда, если подгруппы $U_{ij}, U_{ji}, i \epsilon I_1, j \epsilon I_2$ обладают условием максимальности и в сомножителях $G_S, 1 \leq s \leq n$, разрешимы:

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения класса смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_s$ с подгруппой U_{sj};

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_s$ с подгруппой U_{sj};

то в группе G разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов группы G в специальное, порождающее подгруппу, совпадающую с подгруппой, порожденной исходным множеством.

Теорема 1.2.[29] *Пусть $G^* = \langle G, t; t^{-1} U_1 t = \varphi(U_1) \rangle$ – HNN-расширение группы G с помощью изоморфных подгрупп U_1, U_{-1} и фиксированного изоморфизма φ. Если подгруппы U_1, U_{-1} обладают условием максимальности и в группе G разрешимы:*

1) проблема вхождения;

---

[28] *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы вхождения для одного класса групп / В. Н. Безверхний // *Вопросы теории групп и полугрупп.* ТГПИ им. Л.Н. Толстого. – 1972. – С. 3-86.

[29] *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп / В. Н. Безверхний // *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение.* Межвузовский сборник научных трудов. – 1983. – С. 50-80.

2) проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ с каждой из подгрупп U_1, U_{-1};

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ с любой из выделенных подгрупп U_1, U_{-1}; то в группе G^* разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов группы G^* в специальное, порождающее подгруппу, совпадающую с подгруппой, порожденной исходным множеством.

В третьем параграфе даются определения и утверждения, касающиеся слов специального множества, а также виды и структура простого слова.

Вторая глава посвящена исследованию проблемы сопряженности слов в группах с древесной структурой и в их HNN-расширениях.

Рассмотрим группу F_Γ, являющуюся древесным произведением свободных групп с циклическим объединением, которая определяется следующим образом:

Пусть Γ – конечное дерево, вершины которого обозначены числами из множества $\{1,2,\dots,n\}$, и пусть каждой вершине i сопоставлена свободная группа F_{m_i} конечного ранга m_i. Предположим, что для каждой пары i и j смежных вершин графа Γ в группах F_{m_i} и F_{m_j} фиксированы неединичные циклические подгруппы, порождаемые элементами $v_{ij}^{p_{ij}}$ и $v_{ji}^{p_{ji}}$ соответственно, причем v_{ij} и v_{ji} не являются истинными степенями в соответствующей группе. Древесным произведением $F_{m_1}, F_{m_2}, \dots, F_{m_n}$ с объединенными подгруппами $\langle v_{ij}^{p_{ij}}\rangle$ и $\langle v_{ji}^{p_{ji}}\rangle$ называется фактор-группа F_Γ свободного произведения групп $F_{m_1}, F_{m_2}, \dots, F_{m_n}$ по нормальному замыканию множества, состоящего из всевозможных элементов вида $v_{ij}^{p_{ij}} v_{ji}^{-p_{ji}}$. Группы $F_{m_1}, F_{m_2}, \dots, F_{m_n}$ вложимы в группу F_Γ естественным образом.[30]

Копредставление группы F_Γ имеет вид:

$$F_\Gamma = \langle \prod_{i=1}^{n} * F_{m_i} | v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{p_{ji}} \rangle, |p_{ij}|, |p_{ji}| \geq 1, \ \ i \in I_1, j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty. \qquad (1)$$

---

[30] *Karras, A.* The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup / A. Karras, D. Solitar // Trans. Amer. Math. Soc. - 1970. - V. 150. - P. 227-255.

Основным результатом параграфа 2.1. является разрешимость проблемы сопряженности слов в группе F_Γ, причем доказательство проведено для всех случаев теоремы Магнуса:

Теорема 2.1.[31] *Пусть* $G = A \underset{H=K}{*} B$. *Тогда каждый элемент группы* G *сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Далее, пусть* g *− циклически несократимый элемент группы* G. *Тогда*

(i) *если* g *сопряжен с элементом* $h \in H$, *то* g *лежит в* A *или в* B *и существует последовательность элементов* $h_1, h_2, \dots, h_l, g$, *где* $h_i \in H$, *соседние члены которой сопряжены в* A *или в* B;

(ii) *если* g *сопряжен с элементом* g', *причем* $g' \in A$ *или* $g' \in B$, *но* g *не лежит в подгруппе, сопряженной с* H, *то* g *и* g' *лежат в одном сомножителе (в* A *или в* B*) и сопряжены в нем;*

(iii) *если* g *сопряжен с элементом* $p_1, p_2, \dots, p_r$, *где* $r \geq 2$, *и* p_i, p_{i+1} *так же как и* p_1, p_r, *не лежат в одном сомножителе, то* g *можно получить, циклически переставляя* $p_1, p_2, \dots, p_r$, *а затем трансформируя полученный элемент подходящим элементом из* H.

Теорема 2.3.[3] *В группе* F_Γ *(1) разрешима проблема сопряженности слов.*

Доказательство проводится по числу сомножителей древесного произведения F_Γ. Базу индукции при $n = 2$ обеспечивает результат С.Липшуца. Пусть $n > 2$. Без потери общности можно считать, что вершина n графа Γ является концевой и что смежной с ней является вершина $(n-1)$. Обозначим через Γ_{n-1} полный подграф графа Γ с вершинами $\{1,2,\dots,n-1\}$ и через $F_{\Gamma_{n-1}}$ соответствующее древесное произведение групп $F_{m_1}, F_{m_2}, \dots, F_{m_{n-1}}$ с теми же объединенными подгруппами. Тогда группа F_Γ является свободным произведением

$$F_\Gamma = F_{\Gamma_{n-1}} \underset{C_n}{*} F_{m_n}$$

[31] *Магнус, В.* Комбинаторная теория групп / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

групп $F_{\Gamma_{n-1}}$ и F_{m_n} с объединенной подгруппой $C_n = \langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \rangle = \langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \rangle$, где $v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \in F_{m_{n-1}}$, $v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \in F_{m_n}$.

Следуя индукции предполагаем, что в группе $F_{\Gamma_{n-1}}$ с меньшим числом сомножителей проблема сопряженности слов разрешима. Также при доказательстве используются следующие утверждения.

Лемма 2.1. [3] *В группе F_Γ (1) разрешимы следующие алгоритмические проблемы: I) алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы $H < F_\Gamma$ и циклической подгруппы $\langle w \rangle < F_{m_i}$, $i = \overline{1,n}$, найти образующие $H \cap \langle w \rangle$;*

II) алгоритм, позволяющий для любого слова $v \in F_\Gamma$ и конечно порожденной подгруппы $H < F_\Gamma$, выяснить пусто или не пусто пересечение $vH \cap \langle w \rangle$, где $\langle w \rangle < F_{m_i}, i = \overline{1,n}$.

Лемма 2.2. [3] *Пусть F_Γ есть древесное произведение свободных групп F_i с циклическими объединениями, имеющая представление*

$$F_\Gamma = \langle \prod_{i=1}^{n} * F_i | v_{ij}^{m_{ij}} = v_{ji}^{s_{ji}} \rangle, n \geq 2, i \in I_1, j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty,$$

где $v_{ij} \in F_i$ и $v_{ji} \in F_j$, i, j − смежные вершины графа Γ. *И пусть*

$$F_\Gamma = F_{\Gamma_{n-1}} \underset{C_n}{*} F_n$$

– свободное произведение группы $F_{\Gamma_{n-1}}$ и F_n с циклическим объединением, $F_{\Gamma_{n-1}} < F_\Gamma$, где $C_n = \langle v_n^{m_n} \rangle = \langle v_{n-1}^{s_n} \rangle$, где $v_{n-1}^{s_n} \in F_{n-1}$, $v_n^{m_n} \in F_n$, $F_{n-1} < F_{\Gamma_{n-1}}$.

Тогда, если $h, \bar{h} \in C_n$ сопряжены элементом $z \in F_{\Gamma_{n-1}}$, то есть $z^{-1} h z = \bar{h}$, то $h = \bar{h}$.

Следствие 2.1. [3] *Существует алгоритм, позволяющий для любых двух элементов h_1 и h_2, принадлежащих соответственно C_i и C_j группы $F_\Gamma = \langle \prod_{i=1}^{n} * F_{m_i} | v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{p_{ji}} \rangle$, выяснить, сопряжены они в G_Γ или нет.*

В параграфе 2.2. аналогично с группой F_Γ (1) рассматривается древесное произведение бесконечных циклических групп с объединением по циклическим подгруппам:

$$G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} {}^{*} \langle a_k \rangle \,|\, a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle,\ |p_{ij}|, |p_{ji}| \geq 1, i \in I_1, j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty. \qquad (2)$$

Обобщением группы G_Γ является HNN-расширение по изоморфным ассоциированным циклическим подгруппам

$$\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1}U_1 t = U_{-1} \rangle, \qquad (3)$$

где $U_1 = \langle a_m^{s_{ml}} \rangle, U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}} \rangle, |s_{ml}|, |s_{lm}| \geq 1, m \in I_1, l \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty$.

Основным результатом данного параграфа является теорема:

Теорема 2.5. [2] *В группе $\bar{G}_\Gamma$ (3) разрешима проблема сопряженности слов.*

Доказательство проводится по слоговой длине элементов $w, v \in \bar{G}_\Gamma$. В доказательстве непосредственно используются следующие леммы 2.5, 2.6, и 2.7.

Лемма 2.5. [2] Пусть $\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1}U_1 t = U_{-1} \rangle$, где $U_1 = \langle a_m^{s_{ml}} \rangle, U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}} \rangle$. *Для любой конечно порожденной подгруппы $H < \bar{G}_\Gamma$ и циклической подгруппы $\langle a_k \rangle, k = \overline{1,n}$, где a_k – образующий группы G_Γ, существует алгоритм, позволяющий выписать образующие пересечения $H \cap \langle a_k \rangle$.*

Лемма 2.6. [2] *Для любого слова $v \in \bar{G}_\Gamma$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < \bar{G}_\Gamma$, существует алгоритм, позволяющий выяснить пусто или непусто пересечение $vH \cap \langle a_k \rangle$, где a_k образующий группы $G_\Gamma, k = \overline{1,n}$.*

Лемма 2.7. *Два элемента $h, \bar{h} \in \bar{G}_\Gamma$, где $h, \bar{h} \in U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, сопряжены в $\bar{G}_\Gamma$ тогда и только тогда, когда существует $m \in \mathbb{Z}$: $t^{-m} h t^{m} = \bar{h}$.*

Параграф 2.3. посвящен обобщению теоремы 2.5. Рассматривается HNN-расширение группы $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} {}^{*} \langle a_k \rangle \,|\, a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$ с помощью конечного числа проходных букв:

$$\bar{G}_\Gamma^{*} = \langle G_\Gamma, \{t_{ik}\} | rel(G_\Gamma), t_{ik}^{-1} U_{ik} t_{ik} = U_{ki} \rangle, \qquad (4)$$

где $U_{ik} = \langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle, U_{ki} = \langle a_{ki}^{s_{ki}} \rangle$ – ассоциированные подгруппы, $\langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle \subset \langle a_i \rangle$, $\langle a_{ki}^{s_{ki}} \rangle \subset \langle a_k \rangle$, $|s_{ik}|, |s_{ki}| \geq 1, i \in I_1, k \in I_2$, количество проходных букв t_{ik} равно m, и доказывается основной результат:

Теорема 2.6. [11] *Пусть* $\bar{G}_\Gamma^{*} = \langle G_\Gamma, \{t_{ik}\} | rel(G_\Gamma), t_{ik}^{-1} U_{ik} t_{ik} = U_{ki} \rangle$, $U_{ik} = \langle a_{i_k}^{s_{ik}} \rangle \subset \langle a_i \rangle, U_{ki} = \langle a_{ki}^{s_{ki}} \rangle \subset \langle a_k \rangle$ *есть HNN-расширение группы*

$G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \,|\, a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$ с помощью конечного числа проходных букв t_{ik} с ассоциированными циклическими подгруппами. Если слова $w, v \in \bar{G}_\Gamma^*$ не сопряжены в $\bar{G}_\Gamma^*$ элементам из ассоциированной подгруппы $\langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle$ для некоторого i, то можно эффективно определить сопряжены они в $\bar{G}_\Gamma^*$ или нет.

Доказательство проводится индукцией по числу проходных букв HNN-расширения.

В главе 3 разработаны алгоритмы для решения проблемы сопряженности конечно порожденных подгрупп в исследуемых группах. Доказательство проводится с использованием специального множества образующих подгруппы исходной группы.

Основным результатом параграфа 3.1 является следующая теорема:

Теорема 3.1. [4] *В группе $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \,|\, a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$ (2) разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

Для доказательства группу G_Γ представляем в виде

$G_\Gamma = G_{\Gamma_1} \underset{a_{n-1}^{p_{n-1}} = a_n^{p_n}}{*} \langle a_n \rangle$, где G_{Γ_1} – группа структуры G_Γ (2) с меньшим числом образующих.

В параграфе 3.2. решена проблема сопряженности подгрупп для группы Баумслага. Основной результат параграфа 3.2.:

Теорема 3.2. [1] *В группе $B = \langle a, t; t^{-1}a^m t = a^n \rangle$, $|m|, |n| > 1$ разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

В параграфе 3.3. дается обобщение теоремы 3.2. на HNN-расширение древесного произведения бесконечных циклических групп с объединением с циклическими ассоциированными подгруппами и, используя специальное множество слов, доказывается теорема

Теорема 3.3. [5] *В группе $\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1}U_1 t = U_{-1} \rangle$ (3) разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

Заключение

В современной теории групп особое внимание уделяется исследованию свойств различных свободных конструкций групп, таких как свободные произведения, свободные произведения с объединением и *HNN*-расширения. Данная работа посвящена изучению разрешимости проблемы сопряженности слов и проблемы сопряженности подгрупп в древесных произведениях некоторых групп с циклическим объединением и в *HNN*-расширениях с ассоциированными циклическими подгруппами. Некоторые из полученных нами результатов являются обобщениями и усилениями известных результатов. Опишем их более подробно.

Проблема сопряженности слов решена в следующих конструкциях: в древесном произведении конечного числа свободных групп с циклическим объединением; в *HNN*-расширении с ассоциированными циклическими подгруппами древесного произведения циклических групп с объединением; в *HNN*-расширении с помощью конечного числа проходных букв по ассоциированным циклическим подгруппам древесного произведения циклических групп с циклическим объединением при условии, что элементы не принадлежат ассоциированным подгруппам.

Проблема сопряженности подгрупп решена в таких группах как: древесное произведение циклических групп с циклическим объединением; *HNN*-расширение циклической группы с ассоциированными циклическими подгруппами; *HNN*-расширение с ассоциированными циклическими подгруппами древесного произведения циклических групп с циклическим объединением, что является обобщением предыдущего результата.

Нерешенной является проблема сопряженности подгрупп для древесного произведения свободных групп с циклическим объединением, для *HNN*-расширения данной группы, а также для *HNN*-расширения с конечным числом проходных букв древесного произведения циклических групп с циклическим объединением.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Безверхнему В.Н., за постановку задач, помощь в работе над диссертацией и поддержку в организационных вопросах.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки России

[1] *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // *Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика.* – 2006. –Т.12. – Вып.1. – С. 83-101.

[2] *Безверхний, В. Н.* Проблема сопряженности слов в HNN-расширении древесного произведения групп с циклическим объединением / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // *Известия ТулГУ. Естественные науки.* – 2014. – Вып. 2. Ч. 1. – С. 30-45.

[3] *Безверхний, В. Н.* Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // *Дискретная математика*. – 2015. – Т.27. – Вып. 4.

[4] *Логачева, Е. С.* Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении бесконечных циклических групп / Е. С. Логачева // *Известия ТулГУ. Естественные науки*. – 2013. – Вып. 2. Ч. 1. – С. 19-39.

[5] *Логачева, Е. С.* Проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп в HNN-расширении древесного произведения циклических групп с циклическим объединением / Е. С. Логачева // *Известия ТулГУ. Естественные науки*. – 2015. – Вып. 2. – С. 13-35.

Другие публикации

[6] *Безверхний, В. Н.* Проблема сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // Современные проблемы математики, механики, информатики. Материалы Междунар. науч. конф., Тула, 28-30 ноября 2006г. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. – С. 19-20.

[7] *Безверхний, В. Н.* Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении циклических групп с объединением / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // *Чебышевский сборник.* – 2012. – Т. 13. – Вып. 1. – С. 20-45.

[8] *Безверхний, В. Н.* Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // *Чебышевский сборник.* − 2014. − Т. 15. − Вып. 1. − С. 43-54.

[9] *Безверхний, В. Н.* О сопряженности слов и подгрупп в некоторых свободных конструкциях групп / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Междунар. конф., Тула, 25-30 мая 2015 г. − Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. − С. 15-19.

[10] *Логачева, Е. С.* Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении бесконечных циклических групп / Е. С. Логачева // *Чебышевский сборник.* − 2013. − Т.14. − Вып. 2. − С. 61-39.

[11] *Логачева, Е. С.* Проблема сопряженности слов в HNN-расширении с конечным числом проходных букв древесного произведения циклических групп с циклическим объединением / Е. С. Логачева // *Чебышевский сборник*. − 2014. − Т. 15. − Вып. 2. − С. 50-65.

[12] *Логачева, Е. С.* Проблема сопряженности в древесном произведении групп / Е. С. Логачева // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, тез. XII Междунар. конф., Тула, 21-25 апреля 2014г.−Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. − С.85-88.

[13] *Логачева, Е. С.* Проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп в HNN-расширении древесного произведения циклических групп с циклическим объединением / Е. С. Логачева // Абелевы группы: Материалы Междунар. симпоз., Москва, 2-6 ноября 2014г. − Москва: МПГУ, 2014. − С. 46-49.

[14] *Логачева, Е. С.* Теорема Магнуса для древесного произведения свободных групп с циклическим объединением / Е. С. Логачева // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Междунар. конф., Тула, 25-30 мая 2015г. − Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. − С. 84-87.