ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Полякова С.В.
"Конечные группы с малыми кратностями в разложении
квадратов неприводимых представлений",
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.06 –
математическая логика, алгебра и теория чисел.

Теория представления групп с момента своего появления является важным инструментом в изучении свойств групп. Помимо теоретической значимости, теория представлений активно используется в приложениях теории групп в физике, химии, комбинаторике. Накладывая различные ограничения на неприводимые представления группы, получаем классы групп, которые могут быть интересны в приложениях. Одним из примеров такого рода является введенный Ю.Вигнером класс просто приводимых групп (кратко SR-групп). SR-группы естественным образом возникают в физических задачах в связи с простой структурой их коэффициентов Клебша-Гордана. Кроме того, Ю.Вигнер открыл и установил справедливость неожиданного неравенства между числом квадратных корней из элементов группы и порядками централизаторов элементов группы. Позднее Дж.Макки переосмыслил и обобщил неравенство Вигнера. Он показал, что принадлежность к классу SR-групп может быть выражена в терминах симметричных пар Гельфанда.

Другой подход в изучении свойств SR-групп был предложен в работе Л.С.Казарина и В.В.Янишевского, которые исследовали вопросы поставленные в Коуровской тетради независимо С.П.Струнковым и Я.Саклом. Они предложили рассматривать обобщение SR-групп, – класс ASR-групп. Этот класс содержит в себе класс SR-групп. Л.С.Казарин и В.В.Янишевский показали, что степени неприводимых характеров конечных ASR-групп не превосходят классового числа группы. В частности, порядок конечной ASR-группы ограничен кубом ее классового числа. Тогда как в случае класса конечных групп можно говорить лишь об экспоненциальной оценке порядка группы ее классовым числом. Продолжая исследование Л.С.Казарина и В.В.Янишевского в работе Л.С.Казарина и Е.И.Чанкова получен положительный ответ на вопрос о разрешимости конечных SR-групп. Было установлено, что конечные ASR-группы разрешимы.

Классификация разрешимых SR-групп представляется сложной задачей. Ю.Вигнером и А.И.Кострикиным были представлены некоторые примеры таких групп. Л.С.Казариным и Е.И.Чанковым показано, что $2'$- холловы подгруппы конечных сверхразрешимых SR-групп являются абелевыми и нормальными подгруппами. В.В.Янишевский дал описание ряда бипримарных SR-групп. Если рассматривать ASR-группы среди 2-групп, то, по-видимому, таких групп чрезвычайно много. Вычисления произведенные Е.И.Чанковым показывают, что среди 2-групп класса 2 порядка не большего 256, практически все группы оказываются ASR-группами.

Отмечу одну из важных работ данной тематики опубликованную в этом году Т.Цечерини-Зилберштейном, Ф.Скаработти и Ф.Толли. Эти авторы рассматривали сужение класса SR-групп – произведение любой пары неприводимых представлений конечной группы не содержит кратностей в разложении при ограничении на некоторую подгруппу этой группы. Ими получена характеризация таких групп в терминах пар Гельфанда и представлен пример серии групп такого типа – 2-группы Клиффорда.

В работе С.В.Полякова рассматривается обобщение ASR-групп, – вместо условия отсутствия кратностей в разложении квадратов неприводимых характеров группы допускается возможность небольших кратностей. Основные результаты автора получены для групп, в которых указанная кратность не превосходит двух. Актуальность избранной автором тематики не вызывает сомнений.

В диссертации используются методы теории групп и их обыкновенных представлений, теорема классификации простых конечных групп и расчеты в системе вычислительной алгебры GAP.

Диссертация изложена на 102 страницах и состоит из введения, 6 глав, списка литературы , содержащего 41 наименование, и приложений. Автором опубликованы 4 статьи по теме диссертации (все без соавторов), из которых 2 статьи в журнале из списка рекомендованных ВАК РФ и 4 тезисов докладов.

Основные результаты, история вопроса и мотивировка исследования аккуратным образом изложены во введении. Здесь же обоснованы основные методы и этапы работы.

В Главе 1 изложены вспомогательные результаты из теории и групп и их обыкновенных неприводимых представлений. Представлены таблицы с информацией о классовых числах (или их оценках) конечных простых групп и порядков их групп автоморфизмов. Для лиевских групп дополнительно указаны степени их характеров Стейнберга. В параграфе 1.5 дано определение SM-характеристики группы и SM_m -группы. Развивая идеи Л.С.Казарина и В.В.Янишевского, автором сформулированы и доказаны основные свойства SM_m-групп.

Глава 2 посвящена исследованию почти простых SM_2-групп с цоколем, изоморфным группе $L_2(q)$. Доказано, что в этом случае, группа должна быть изоморфна A_5или $PGL_2(q)$. С.В.Поляковым произведен трудоемкий анализ возможных ситуаций, который позволил получить данное утверждение.

В Главе 3 произведено изучение списка простых конечных групп на принадлежность их классу SM_2-групп. Доказано, что такими группами являются лишь группы $L_2(q)$, где $q = 2^t$, $t \geq 2$. Кроме того, для спорадических групп, с помощью системы GAP, вычислены значения их SM-характеристики. Для простых групп лиевского типа получены нижние оценки их SM- характеристики. Эти результаты получены с применением свойств SM_m-групп, определенных автором в Главе 1. Полагаю, что результат этой главы позволил автору увидеть исключительную роль групп $L_2(q)$в классе неразрешимых конечных SM_2-групп. На основе полученной информации автором будут обобщены результаты Главы 2 и проведены аналогии с результатом о разрешимости конечных SM_1 -групп (= ASR-групп).

В Главе 4 решена задача описания почти простые SM_2-группы без ограничения на их цоколь (как в Главе 2). Показано, что это расширение не добавляет новых SM_2

-групп. А именно, пусть G– конечная почти простая SM_2-группа. Тогда G изоморфна A_5или $PGL_2(q)$. Методы доказательства этой теоремы развивают технику использованную в предыдущей главе. Веденное ранее автором параметр *m(G)* равный отношению степени неприводимого характера группы G к ее классовому числу, служит нижней оценкой для SM-характеристики группы. С.В.Поляков использует связь между параметрами *m(L)* и *m(G)*, где *L* – простая неабелева подгруппа группы *G* и проводит исследование поставленной задачи.

Глава 5 содержит разбор возможных простых неабелевых композиционных факторов конечной неразрешимой SM_2-группы. Доказана теорема о том, что простые неабелевы композиционные факторы таких групп исчерпываются группами $L_2(q)$. Автором применяется ранее опробованная им техника, которой однако не всегда достаточно. Тогда С.В.Поляков привлекает методы теории Клиффорда для изучения списка оставшихся исключительных случаев, и полностью доказывает этот важный результат.

В Главе 6, в первом параграфе, приводится теорема об оценке SM-характеристики групп Фробениуса в зависимости от порядков ядра группы и ее дополнительного множителя. Формулируется предположение о SM-характеристике метациклических групп вида $C_p \rtimes C_q$,где p и *q* – простые числа, подкрепленное вычислениями. Далее представлены 3 таблицы с перечислением структуры всех SM_2-групп порядка 32, всех SM_2-групп порядка 64 и всех SM_4-групп порядка 128. Данная информация получена путем вычислений в системе GAP. Параграф 6.4 содержит таблицы, в которых для каждого класса неабелевых групп заданного порядка (не превосходящего 400 и отличного от степени 2) перечислено число неизоморфных групп допустимых SM-характеристик. Для этих целей вновь использовалась система GAP. Все функции написанные автором для этих вычислений приведены в приложениях к диссертации.

Основные достижения, принадлежащие автору диссертации лично, следующие:

1. Доказано, что среди всех конечных почти простых групп SM_2-группами являются только группы $PGL_2(q)$ и знакопеременная группа A_5.

2. Доказано, что неабелевыми композиционными факторами конечных неразрешимых SM_2-групп могут быть только группы, изоморфные группе $L_2(q)$.

Все основные результаты снабжены подробными и корректными доказательствами.

Автореферат правильно и полно отображает содержания диссертации.

Оформление, однако, не лишено недостатков. Имеется ряд неточных моментов в доказательствах:

1. стр. 55 выносная формула. Из неравенства $k(G) \leq k(L) \cdot |G:L|$ не следует неравенство $k(G)-1 \leq (k(L)-1) \cdot |G:L|$, которое используется в выносной формуле.
2. стр. 76, строка 20. Доказательство теоремы ссылается на предложение 1.2.16, в формулировке которого сказано, что группа *G* и ее подгруппа N такие, что *G/N* --- разрешимая факторгруппа. Однако в доказываемом следствии 5.0.6 *G/N* не обязательно является разрешимой.

3. стр. 80, доказательство теоремы 6.1.1. Не указано, чем отличаются характеры θ от характеров ψ_i. В доказательстве без указания причин используются тот факт, подгруппа K абелева.

В диссертации содержится ряд опечаток, например:

1. Автореферат и введение, в формулировке теоремы 5.0.7 пропущено, что группа G является конечной.
2. стр. 32, последняя выносная формула. Перепутан знак, вместо - *ma* должно быть + *ma*.
3. стр. 36 последняя строка. Перепутан знак у суммы, вместо -1 должно быть + 1.
4. стр. 39 предпоследняя строка. Порядок α равен *(q-1)/2=k*, должно быть *(q-1)=2k*.

и некоторые другие опечатки.

Указанные выше недостатки не влияют на полученные результаты, все погрешности легко исправляются,и не снижают общего впечатления от диссертации. Диссертация является значимым вкладом в развитие теории групп.

Резюмируя сказанное, заключаю, что диссертация С.В.Полякова представляет собой законченное, цельное научное исследование на актуальную тему. Результаты диссертации решают важные задачи теории групп и, весьма вероятно, будут использоваться в дальнейших исследованиях.

Выносимые на защиту результаты являются новыми, имеют теоретическое значение и могут быть использованы при дальнейших исследованиях в различных госуниверситетах Российской Федерации и в научных учреждениях Российской академии наук.

Считаю, что диссертация “Конечные группы с малыми кратностями в разложении квадратов неприводимых представлений” удовлетворяет требованиям ВАК РФ, предъявляем к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор Сергей Владимирович Поляков, заслуживает присуждения ему ученой степени физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

10.06.2014 кандидат физико-математических наук,
старший инженер-программист ООО “Конфёрмит”

Чанков

Е.И. Чанков

150014, г. Ярославль,
ул. Лисицына, 56

76 АБ 0790079

В компетентные органы от

гр. Чанкова Евгения Игоревича, 06 марта 1981 года рождения, место рождения: гор. Мелитополь Запорожской обл., гражданство: РФ, пол: мужской, паспорт 78 04 092045, выданный Отделом внутренних дел Заволжского района города Ярославля 16 октября 2003 года, код подразделения 762-006, зарегистрированного по месту жительства по адресу: г. Ярославль, ул. 8 Марта, д. 7, кв. 6.

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Чанков Евгений Игоревич, настоящим подтверждаю образец своей подписи.

Город Ярославль, семнадцатого июня две тысячи четырнадцатого года.

заявитель Чанков Евгений Игоревич

Город Ярославль.

Семнадцатого июня две тысячи четырнадцатого года.

Я, Лазарева Наталия Ивановна, временно исполняющая обязанности нотариуса Ярославского нотариального округа Горяиновой Елены Владимировны, свидетельствую подлинность подписи гр. Чанкова Евгения Игоревича, которая сделана в моем присутствии. Личность подписавшего документ установлена.

Зарегистрировано в реестре за № 3-2038.

Взыскано по тарифу: 200

Врио нотариуса Лазарева Н.И.

НОТАРИУС Е. В. ГОРЯИНОВА