

На правах рукописи

Полстьянов Артем Сергеевич

**Асимптотический и численный анализ
периодических решений одного класса моделей
с запаздыванием и диффузией**

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2012

Работа выполнена на кафедре математического моделирования федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова».

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор
Кащенко Сергей Александрович

Официальные оппоненты: **Бутковский Олег Ярославович**
доктор физико-математических наук, профессор
Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых,
профессор кафедры общей и прикладной
физики

Ануфриенко Сергей Евгеньевич
кандидат физико-математических наук, доцент
Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова,
доцент кафедры компьютерных сетей

Ведущая организация — Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Защита состоится «11» мая 2012 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова по адресу: г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан « » апреля 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Глызин С.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Одним из активно развивающихся направлений в настоящее время являются исследования динамики систем с распределенными параметрами. Эти исследования стимулируются появлением большого числа прикладных задач, для моделирования которых используют такие объекты, как дифференциальные уравнения с запаздыванием, уравнения в частных производных или уравнения с распределенными коэффициентами. Уравнения такого типа возникают, например, в лазерной оптике (Gibbs H.M., Hopf F.A., Kaplan D.L., Shoemaker R.L., Ikeda K.), электротехнике (Schwarz W., Moegel A., Kiliass T., Kutzer K.), радиофизике (Дмитриев А.С., Кислов В.Я., Ланда П.С.), медицине (Марчук Г.И., Петров Р.В.), математической экологии (Горяченко В.Д., Колесов Ю.С.), теории нейронных систем (Малинецкий Г.Г., Майоров В.В.), при описании процесса резания металлов (Эльясберг М.Е., Клушин М.И.) и др.

Изучению уравнений с запаздыванием посвящено значительное число публикаций как теоретического, так и прикладного характера. Для многих уравнений, содержащих запаздывание, хорошо зарекомендовали себя классические асимптотические методы, такие как методы усреднения Крылова–Боголюбова¹, методы пограничных функций в случае сингулярных возмущений (Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.²). Тем не менее, развитие аналитических методов для систем с запаздыванием явно недостаточно. В силу принципиальной сложности систем с бесконечномерным фазовым пространством особую значимость как для общетеоретических вопросов, так и для решения конкретных прикладных задач приобретает разработка новых асимптотических методов исследования динамических свойств решений.

Плодотворный подход к исследованию динамики нелинейных систем связан с выделением некоторой совокупности переменных и перехода к универсальным уравнениям, описывающим локальную динамику исходной задачи. Один из примеров реализации этой идеи — метод нормальных форм^{3,4,5}. Методы нормализации являются одними из основных методов анализа поведения решений нелинейных уравнений в окрестности установившегося режима. Подход, связанный с использованием известной

¹Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

²Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

³Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000.

⁴Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.

⁵Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York: Springer-Verlag, 1996.

теории инвариантных интегральных многообразий, позволяет для изучения широкого класса эволюционных уравнений воспользоваться хорошо разработанным для обыкновенных дифференциальных уравнений методом нормальных форм. Такими методами изучаются и параболические краевые задачи.

Цель работы

Основной целью данной диссертационной работы является:

- использование асимптотических методов анализа для исследования периодических режимов уравнений с запаздыванием, параболических уравнений, а также уравнений с пространственным распределением;
- проведение численного анализа исследуемых моделей для иллюстрации полученных аналитических результатов.

Методы исследования

В работе используются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, метод нормальных форм, специальный асимптотический метод большого (малого) параметра, а также методы численного анализа динамических систем.

Научная новизна работы

Исследована нелокальная динамика уравнения с запаздыванием в случае, когда нелинейность является финитной функцией.

Изучены вопросы о существовании, структуре и устойчивости периодических решений параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и уравнений с большими коэффициентами диффузии.

Получены асимптотики пространственно-неоднородных периодических решений сложно-пространственно распределенного уравнения Хатчинсона с периодическими краевыми условиями и показано, что данные режимы наблюдаются в численном эксперименте.

Получены асимптотики пространственно-неоднородных периодических решений пространственно распределенного уравнения Хатчинсона с периодическими краевыми условиями в случаях симметричного и несимметричного насыщения.

Проведены численные исследования, которые подтверждают результаты асимптотического анализа.

Положения, выносимые на защиту

1. Асимптотическими методами исследована нелокальная динамика уравнения с запаздыванием в случае, когда нелинейность является финитной функцией. Описаны условия существования и устойчивости периодических решений. Полученные результаты обобщены на комплексные уравнения.

2. Изучены вопросы о существовании, структуре и устойчивости периодических решений параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и уравнений с большими коэффициентами диффузии.
3. Получены асимптотики пространственно-неоднородных периодических решений сложно-пространственно распределенного уравнения Хатчинсона с периодическими краевыми условиями и показано, что данные режимы наблюдаются в численном эксперименте.
4. Получены асимптотики пространственно-неоднородных периодических решений пространственно распределенного уравнения Хатчинсона с периодическими краевыми условиями в случаях симметричного и несимметричного насыщения. Численными методами анализа упрощенной модели обнаружено явление мультистабильности — сосуществование периодических решений вида бегущих волн.
5. Разработан пакет программ визуального отображения решений пространственно распределенных динамических систем «Simager».

Теоретическая и практическая ценность работы

Полученные в диссертации результаты имеют как теоретическое, так и практическое значение. Они могут быть применены при исследовании динамики дифференциальных уравнений с запаздыванием, а также для изучения прикладных задач, описываемых системами уравнений с распределенными параметрами. Полученные результаты могут использоваться для изучения задач радиофизики, электроники, лазерной оптики, популяционной динамики.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, на семинаре «Моделирование и исследование нейронных сетей» кафедры компьютерных сетей Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, а также обсуждались на научных конференциях:

1. Международная конференция научно-образовательных центров, посвященная 10-летию программы BRNE, октябрь, 2008;
2. Всероссийская выставка научно-технического творчества молодежи (НТТМ–2009), Москва, 2009.

3. XLVIII Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск, 10–14 апреля 2010;
4. Всероссийский конкурс научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук в рамках всероссийского фестиваля науки, РГСУ, Москва, сентябрь, 2011.

Публикации

По теме диссертации автором опубликовано 4 печатные работы, а также получено свидетельство государственной регистрации программы для ЭВМ. Все научные работы выполнены в соавторстве, но в диссертацию включены лишь результаты, полученные автором самостоятельно. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, двух приложений и списка литературы, содержащего 120 наименований. Диссертация содержит 22 рисунка. Общий объем диссертации составляет 81 страницу.

Краткое содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность проводимого исследования, приводятся его цели и задачи. Кроме того, в нем содержится обзор литературы, связанной с тематикой диссертации, а также приводится структура работы.

В **первой главе** асимптотическими методами^{6,7} исследуется нелокальная динамика уравнения с запаздыванием в случае, когда нелинейность является финитной функцией. В п. 1.2 рассматриваются уравнения

$$\dot{x} = [-1 + \lambda F(x(t - T))]x \quad (1)$$

и

$$\dot{x} = \lambda[-1 + F(x(t - T))]x, \quad (2)$$

где $T > 0$, $F(x)$ — финитная функция, т.е. для некоторого $p > 0$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & |x| < p, \\ 0, & |x| \geq p. \end{cases} \quad (3)$$

⁶Кащенко С.А. Асимптотика релаксационных колебаний дифференциально-разностных систем с финитной нелинейностью. I // Диф. уравнения. 1995. Т. 31, №8. С. 1330–1339.

⁷Кащенко С.А. Асимптотика релаксационных колебаний дифференциально-разностных систем с финитной нелинейностью. II // Диф. уравнения. 1995. Т. 31, №10. С. 1968–1976.

Основное предположение состоит в том, что параметр λ достаточно большой:

$$\lambda \gg 1. \quad (4)$$

Исследуется вопрос о динамике (1) и (2) при условиях (3) и (4). Введем в рассмотрение две величины A^+ и A^- по правилу

$$A^\pm = \int_0^T F(\pm p \exp(-t)) \exp(t - T) dt.$$

Основные результаты, полученные в этом разделе, сформулированы в виде двух теорем.

Теорема 1. Пусть $A^+ > 0$ ($A^- > 0$). Тогда при всех достаточно больших λ уравнение (1) имеет положительное (отрицательное) экспоненциально орбитально устойчивое периодическое с периодом $T_+(\lambda)$ ($T_-(\lambda)$) решение $x_+(t, \lambda)$ ($x_-(t, \lambda)$), для которого верны асимптотические при $\lambda \rightarrow \infty$ формулы

$$T_\pm(\lambda) = \lambda A^\pm (1 + o(1)), \quad (5)$$

$$x_\pm(t, \lambda) = \begin{cases} \pm p \exp(-t), & t \in [0, T], \\ \pm p \exp \left[T - t + \lambda \left(\int_0^t f(\pm p \exp(T-s)) ds + o(1) \right) \right], & t \in [T, 2T] \\ \pm \exp[\lambda(A^\pm + o(1)) - t], & t \in [2T, T_\pm(\lambda)]. \end{cases} \quad (6)$$

Теорема 2. Пусть

$$\alpha = f(0) - 1 > 0. \quad (7)$$

Тогда при всех достаточно больших λ уравнение (2) имеет два (положительное и отрицательное) экспоненциально орбитально устойчивых периодических решения $x_\pm(t, \lambda)$ с периодами $T_\pm(\lambda)$, для которых

$$T_\pm(\lambda) = (2 + \alpha + \alpha^{-1})T + o(1), \quad (8)$$

$$x_\pm(t, \lambda) = \begin{cases} \pm p \exp(-\lambda t) + o(1), & t \in [0, T], \\ \pm p \exp \lambda(\alpha(t - 2T) - T + o(1)), & t \in [T, T_1^\pm(\lambda) + T], \\ \pm \exp \lambda(\alpha T + T_1^\pm(\lambda) + T - t + o(1)), & t \in [T_1^\pm(\lambda) + T, T_\pm(\lambda)]. \end{cases} \quad (9)$$

В разделе 1.3. при условиях (3) и (4) исследуются динамические свойства решений скалярного комплексного уравнения

$$\dot{x} = ax + \lambda F(x(t - T)), \quad (10)$$

где $a = -1 + ib$, а также комплексного уравнения (2). Положим

$$A(\varphi) = \int_0^T f(p \exp(i\varphi + as)) \exp a(s - T) ds,$$

и пусть для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$ выполнено неравенство

$$|A(\varphi)| \neq 0. \quad (11)$$

Рассмотрим одномерное (вещественное) отображение окружности в себя

$$\bar{\varphi} = \left[\ln \lambda + \ln |A(\varphi)| - \ln p - i \ln \left(A(\varphi) \cdot |A(\varphi)|^{-1} \right) \right] \Big|_{\text{mod } 2\pi}. \quad (12)$$

Основное утверждение данного раздела состоит в том, что динамика отображения (12) определяет при условии (11) и при всех достаточно больших λ свойства решений уравнения (10). Показано, что для комплексного уравнения (1) при условиях (3) и (4) отображение, аналогичное отображению (12), имеет вид

$$\bar{\varphi} = \varphi + \lambda [\text{Im } A(\varphi) + b \text{Re } A(\varphi)]. \quad (13)$$

Здесь дополнительно предполагаем, что $\text{Re } A(\varphi) > 0$. Для комплексного уравнения (2) соответствующее отображение при условии $f(0) - 1 > 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = \varphi + 2\lambda b T (2 + (\text{Re } f(0) - 1)^{-1}) + \\ + \lambda T (\text{Im } f(0) + b \text{Re } f(0)) (1 + (\text{Re } f(0) - 1)^{-1}). \end{aligned}$$

В завершении первой главы рассматривается комплексное уравнение (10), в котором функция $F(x)$ ($x = x_1 + ix_2$) финитно зависит только от x_2 :

$$F = F(x_1, x_2) = \begin{cases} f(x_1, x_2), & |x_2| < p, \\ 0, & |x_2| \geq p. \end{cases} \quad (14)$$

Как оказывается, в уравнении такого типа может наблюдаться существенно более сложная динамика при больших λ по сравнению с моделями, рассмотренными выше. Основной результат состоит в построении отображения, динамика которого определяет при достаточно больших λ структуру аттракторов уравнения (10).

Во **второй** главе изучаются вопросы о существовании, структуре и устойчивости периодических решений для нелинейных систем автономных

параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и уравнений с большими коэффициентами диффузии. В п. 2.1 изучаются периодические решения автономных параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. На отрезке $0 \leq x \leq 1$ рассматривается параболическая краевая задача

$$\dot{u} = Du'' + F(u, \omega x), \quad (15)$$

$$u'|_{x=0} = u'|_{x=1} = 0, \quad \left(\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (16)$$

где $u \in \mathbb{R}^m$, D — диагональная матрица с положительными элементами на главной диагонали, $F(u, \xi)$ имеет вид

$$F(u, \xi) = \sum_{j=-m_0}^{m_0} F_j(u) e^{i\omega_j \xi}, \quad (0 < m_0 < \infty, \quad F_j(u) = \overline{F_{-j}(u)}, \quad \omega_j = -\omega_{-j}, \quad \omega_0 = 0),$$

где $F_j(u)$ ($j = -m_0, \dots, m_0$) аналитичны по u . Основное предположение состоит в том, что параметр ω является достаточно большим, т.е. $\omega \gg 1$. Ставится вопрос о существовании и устойчивости (при достаточно больших ω) установившихся режимов краевой задачи (15), (16). Введем в рассмотрение еще одну краевую задачу

$$\dot{v} = Dv'' + F_0(v), \quad v'|_{\substack{x=0 \\ x=1}} = 0, \quad (17)$$

в которой

$$F_0(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(u, \xi) d\xi.$$

Естественно предположить, что структура установившихся режимов краевой задачи (15), (16) при достаточно больших ω определяется установившимися режимами более простой краевой задачи (17). Приведем здесь соответствующее утверждение для случая, когда краевая задача (17) имеет периодическое (по t) решение $v_0(t, x)$ периода $T_0 > 0$.

Теорема 3. *Предположим, что только один мультипликатор линеаризованной на $v_0(t, x)$ краевой задачи (17) по модулю равен 1. Тогда найдется такое $\omega_* > 0$, что при $\omega \geq \omega_*$ краевая задача (15), (16) имеет периодическое решение $u_0(t, x, \omega)$ периода $T_0(\omega)$, для которого*

$$\max_{t, x} \|u_0(t, x, \omega) - v_0(\tau, x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq c\omega^{-1},$$

$$\tau = \left(1 + \frac{\alpha_1(\omega)}{\omega} + O(\omega^{-2}) \right) t,$$

$$T_0(\omega) = T_0 \left(1 + \frac{\alpha_1(\omega)}{\omega} + O(\omega^{-2}) \right)^{-1},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от ω , а $\alpha_1(\omega)$ почти периодична по ω . Решения $u_0(t, x, \omega)$ и $v_0(t, x)$ краевых задач (15), (16) и (17) экспоненциально-орбитально устойчивы (в метрике фазового пространства $C(0, 1)$) или неустойчивы одновременно.

Алгоритм построения асимптотики решения $u_0(t, x, \omega)$ также приведен в п. 2.1. В том случае, когда краевая задача (17) имеет состояние равновесия $v_0(x)$, ответ на вопрос о существовании состояния равновесия $u_0(x, \omega)$, близкого (при $\omega \rightarrow \infty$) к $v_0(x)$, дается по спектру оператора L_0 :

$$L_0 z \equiv D z'' + A(x)z, \quad z'|_{x=0} = z'|_{x=1} = 0 \quad (A(x) = F'_0(v_0(x))).$$

Для этого достаточно, чтобы значение $\lambda = 0$ не являлось точкой спектра L_0 . При условии, когда все собственные значения L_0 имеют отрицательные вещественные части, решение $u_0(x, \omega)$ экспоненциально устойчиво (при достаточно больших ω). Если же хотя бы одно собственное значение L_0 имеет положительную вещественную часть, то $u_0(x, \omega)$ неустойчиво. Далее в п. 2.1 рассматривается вопрос о периодических решениях краевой задачи (15), (16) в одном «критическом случае». Предположим, как и выше, что $v_0(x)$ — состояние равновесия (17), и оператор L_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\delta_0$ ($\delta_0 > 0$), которым отвечают собственные функции $a_0(x), \bar{a}_0(x)$, а все остальные собственные значения L_0 имеют отрицательные вещественные части. Известно, что в этом случае краевая задача (17) имеет в окрестности $v_0(x)$ двумерное интегральное инвариантное многообразие V , на котором эту краевую задачу можно записать в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{p} = d_0 p^3 + O(p^5), \quad \dot{\tau} = \delta_0 + O(p^2). \quad (18)$$

Коэффициент d_0 называют первой ляпуновской величиной. Предположим, что

$$d_0 < 0, \quad (19)$$

т.е. состояние равновесия $v_0(x)$ асимптотически устойчиво. Рассмотрим в этом случае вопрос о поведении решений краевой задачи (15), (16) (при достаточно больших ω) в окрестности состояния равновесия $u_0(x, \omega) = v_0(x) + O(\omega^{-1})$. Введем обозначения. Пусть $b_0(x)$ — собственная функция сопряженного к L_0 оператора, отвечающая собственному значению $-i\delta_0$. Можно считать, что

$$\langle a_0(x), b_0(x) \rangle = \int_0^1 (a(x), b(x)) dx = 1.$$

Положим затем

$$v_1(x, \omega) = L_0^{-1} \left(\int_0^\omega (F(v_0(x), \xi) - F_0(v_0(x))) d\xi \right),$$

$$F'_u\left(v_0(x) + \frac{1}{\omega}v_1(x, \omega), \omega x\right) = A_0(x, \omega x) + \omega^{-1}A_1(x, \omega x, \omega) + O(\omega^{-2}),$$

$$A_{00}(x, \omega) = \int_0^\omega \left(A_0(x, \xi) - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_0(x, s) ds \right) d\xi,$$

$$A_{10}(x, \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_1(x, \xi\omega) d\xi,$$

$$\alpha_0(\omega) = \operatorname{Re} \langle (A_{00}(x, \omega) + A_{10}(x, \omega))a_0(x), b_0 \rangle.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. При сделанных выше предположениях найдется такое $\omega_* > 0$, что при $\omega \geq \omega_*$ в некоторой (не зависящей от ω) окрестности $u_0(x, \omega)$ краевая задача (15), (16) имеет экспоненциально устойчивое двумерное инвариантное многообразие $V(\omega)(u_0(x, \omega) \in V(\omega))$, причем на $V(\omega)$ эту краевую задачу можно записать в виде двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{1}{\omega}(\alpha_0(\omega) + O(\omega^{-1}))p + (d_0 + O(\omega^{-1}))p^3 + O(p^5), \\ \dot{t} &= \delta_0 + O(\omega^{-1}) + O(p^2) \end{aligned} \quad (20)$$

(выражения $O(p^5)$ и $O(p^2)$ в (20) выполняются равномерно относительно ω).

Доказательства теорем 3 и 4 приводятся в п. 2.3.

Иллюстрацией изложенной в п. 2.1 теории является пример, рассмотренный в п. 2.2. Здесь изучается уравнение Хатчинсона с диффузией

$$\dot{N} = DN'' + r(\omega x)[1 - a(\omega x)N_{t-h}]N, \quad (21)$$

$$N'|_{x=0} = N'|_{x=1} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (22)$$

В разделе 2.4 изучаются периодические решения параболических уравнений с «большой» диффузией. На отрезке $0 \leq x \leq 1$ рассматривается краевая задача

$$\dot{u} = \lambda Du'' + F(u, x), \quad (23)$$

$$u'|_{x=0} = u'|_{x=1} = 0, \quad (24)$$

где $u \in R^m$, матрица D та же, что и в (15), $F(u, x)$ — достаточно гладкая по каждой переменной. Основное допущение состоит в том, что $\lambda \gg 1$.

Вместе с (23) рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{v} = F_0(v), \quad F_0(v) = \int_0^1 F(v, x) dx. \quad (25)$$

Предположим, что уравнение (25) имеет T_0 -периодическое решение $v_0(t)$. Ставится вопрос о существовании у краевой задачи (23), (24) близкого (при $\lambda \rightarrow \infty$) к $v_0(t)$ периодического решения.

Теорема 5. Пусть один мультипликатор линеаризованного на $v_0(t)$ уравнения (25) по модулю равен 1. Тогда найдется такое λ_0 , что при $\lambda \geq \lambda_0$ краевая задача (23), (24) имеет периодическое решение $u_0(t, x, \lambda)$ и

$$\max_{t,x} \|u_0(t, x, \lambda) - v_0(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} \leq c\lambda^{-1}, \quad \tau = (1 + O(\lambda^{-1}))t$$

($c > 0$ не зависит от λ) и количество мультипликаторов, модули которых больше 1, у линеаризованных на $u_0(t, x, \lambda)$ и $v_0(t)$ краевой задачи (23), (24) и уравнения (25) одно и то же.

Далее в п. 2.4 исследуется случай, когда уравнение (25) имеет состояние равновесия v_0 , причем $A_0 = F'_0(v_0)$ имеет собственные значения $\pm i\delta_0$ ($\delta_0 > 0$), а действительные части всех остальных собственных значений отрицательны. Поведение решений (25) в окрестности v_0 определяется первой ляпуновской величиной d_0 . Пусть $d_0 < 0$, т.е. состояние равновесия v_0 асимптотически устойчиво. Рассмотрим вопрос о поведении решений краевой задачи (23), (24) в окрестности состояния равновесия $u_0(x, \lambda) = v_0 + \lambda^{-1}v_1(x) + O(\lambda^{-2})$. Пусть $A_0a = i\delta_0a$, $A_0^*b = -i\delta_0b$, $(a, b) = 1$, $(a, \bar{b}) = 0$. Для функции $v_1(x)$ имеет место формула

$$v_1(x) = v_{10} + v_{11}(x), \quad v_{11}(x) = -D^{-1} \int_0^x \int_0^s F(v_0, \xi) d\xi ds,$$

$$v_{10} = A_0^{-1} \int_0^1 F'(v_0, x)v_{11}(x) dx,$$

используя которую, находим

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_0^1 F'(v_0 + \xi v_1(x), x) dx \right) \Big|_{\xi=0}, \quad \alpha_0 = \operatorname{Re}(A_1 a, b).$$

Сформулируем результат о поведении решений в рассматриваемом случае.

Теорема 6. При всех достаточно больших значениях λ краевая задача (23), (24) имеет в некоторой (достаточно малой и не зависящей от λ) окрестности состояния равновесия $u_0(x, \lambda)$ экспоненциально устойчивое двумерное инвариантное многообразие $V(\lambda)$ ($u_0(x, \lambda) \in V(\lambda)$). На $V(\lambda)$ краевую задачу (23), (24) можно записать в виде систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \lambda^{-1}(\alpha_0 + O(\lambda^{-1}))p + (d_0 + O(\lambda^{-1}))p^3 + O(p^5), \\ \dot{\tau} &= \delta_0 + O(\lambda^{-1}) + O(p^2) \end{aligned} \quad (26)$$

(последние слагаемые в правых частях (26) имеют указанный порядок равномерно по λ при $\lambda \rightarrow \infty$).

Отметим, что при $\alpha_0 > 0$ (и достаточно больших λ) краевая задача (23), (24) имеет экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение

$$u_0(t, x, \lambda) = v_0 + (-\alpha_0(2d_0)^{-1})^{1/2}(ae^{i\tau} + \bar{a}e^{-i\tau}) + O(\lambda^{-1}),$$

$$\tau = (\delta_0 + O(\lambda^{-1}))t.$$

В п. 2.5 рассматривается система параболических уравнений (23) с большим коэффициентом диффузии ($\lambda \gg 1$) и 1-периодической зависимостью от пространственной переменной: $F(u, x + 1) \equiv F(u, x)$. Вместо краевых условий (24) предполагается, что выполнены периодические краевые условия

$$u(t, x + 1) \equiv u(t, x). \quad (27)$$

Основной результат этого раздела сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 7. Пусть система уравнений (25) имеет периодическое решение $u_0(t)$ и только один мультипликатор линеаризованной на $u_0(t)$ системы равен по модулю единице. Тогда при всех достаточно больших λ краевая задача (23), (27) имеет периодическое решение $u_0(t, x, \lambda)$ той же, что и $u_0(t)$ устойчивости, причем $u_0(t, x, \lambda) = u_0(t) + o(\lambda^{-1})$.

В пункте 2.6 на примере пространственно распределенного уравнения Хатчинсона

$$\frac{\partial N}{\partial t} = d \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + r(x, \varepsilon) [1 - a(x, \varepsilon)N(t - h(x, \varepsilon), x)] N, \quad (28)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad (29)$$

где $r(x, \varepsilon) = r_0 + \varepsilon r_1(x) + \dots$, $h(x, \varepsilon) = h_0 + \varepsilon h_1(x) + \dots$, $a(x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon a_1(x) + \dots$, исследуется краевая задачи с близкими к постоянным коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, x, \varepsilon). \quad (30)$$

В системе (30) $0 < \varepsilon \ll 1$ и $F(u, x) = F_0(u) + \varepsilon F_1(u) + \dots$.

В **третьей** главе получены асимптотики пространственно-неоднородных периодических решений сложно-пространственно распределенного уравнения Хатчинсона с периодическими краевыми условиями и показано, что данные режимы наблюдаются в численном эксперименте. В этой главе исследуется сложно-пространственно распределенное уравнение Хатчинсона

$$\frac{\partial N}{\partial t} = r[1 - N(t - h)]N + \gamma \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(s)N(t, x + s)ds - N \right] + d \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (31)$$

с периодическими краевыми условиями

$$N(t, x + 2\pi) \equiv N(t, x). \quad (32)$$

Параметры γ и d неотрицательны, а функция $F_\alpha(x)$ задана формулой

$$F_\alpha(x) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} \exp[-\sigma(x - \alpha)^2],$$

где $\sigma > 0$ и $0 \leq \alpha < 2\pi$. Отметим, что выполнено условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(x) dx = 1.$$

Основное предположение, при котором изучается краевая задача (31), (32), состоит в том, что выполнено условие

$$rh > \frac{\pi}{2}, \quad (33)$$

и параметры σ^{-1} и d , характеризующие диффузию, являются достаточно малыми. Удобно ввести малый положительный параметр ε : $0 < \varepsilon \ll 1$. В связи со сказанным выше, положим $\sigma^{-1} = \varepsilon\sigma_0^{-1}$, $d = \varepsilon d_0$.

Заметим, что рассматриваемая краевая задача имеет периодическое решение $N_0(t)$, которое является решением уравнения Хатчинсона

$$\frac{dN}{dt} = r[1 - N(t - h)]N \quad (34)$$

при условии (33). Рассмотрим множество 2π -периодических по x функций (T — период $N_0(t)$)

$$N_k(t, x) = N_0\left(t + \frac{kT}{2\pi}x + \varphi(x)\right), \quad (35)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а $\varphi(x)$ — достаточно гладкая и 2π -периодическая. Будем дополнительно предполагать, что для фигурирующего в определении $F_\alpha(x)$ параметра α верно представление $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_0$, а параметр α_0 рационально соизмерим с 2π , т.е. найдутся такие целые взаимно простые числа m_1 и m_2 ($m_i \neq 0$), что

$$\alpha_0 = \frac{m_1}{m_2} 2\pi. \quad (36)$$

Очевидно, что все функции (35) при $k = \pm m_2, \pm 2m_2, \dots$ являются решениями уравнения Хатчинсона (34). Относительно краевой задачи (31),

(32) можно утверждать, что функции (35) являются асимптотическими по невязке решениями с точностью до $O(\varepsilon)$, т.е.

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} - r[1 - N_k(t - h, x)]N_k - \gamma \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(s)N_k(t, x + s)ds - N_k \right] - \varepsilon d_0 \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} = \Phi(t, x, \varepsilon)$$

и для некоторой универсальной постоянной c_k имеет место оценка

$$|\Phi(t, x, \varepsilon)| \leq c_k \varepsilon.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Для каждого $k = \pm m_2, \pm 2m_2, \dots$ и каждого $n = 1, 2, \dots$ найдется такая функция параметра ε $g_{kn}(\varepsilon) = g_{k0} + \varepsilon g_{k1} + \dots + \varepsilon^n g_{kn}$, что краевая задача (31), (32) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^n)$ решение

$$N_{kn}^*(t, x, \varepsilon) = N_0 \left((1 + \varepsilon g_{kn}(\varepsilon))t + \frac{kT}{2\pi}x \right) + \varepsilon N_{k1} \left((1 + \varepsilon g_{kn}(\varepsilon))t + \frac{kT}{2\pi}x \right) + \dots + \varepsilon^n N_{kn} \left((1 + \varepsilon g_{kn}(\varepsilon))t + \frac{kT}{2\pi}x \right). \quad (37)$$

Численный анализ показывает, что режимы вида (37) задачи (31), (32) являются наблюдаемыми. Расчеты проводились путем сведения задачи (31), (32) к системе дифференциальных уравнений с запаздыванием и применением к ней метода шагов на основе метода Рунге — Кутты четвертого порядка с линейной интерполяцией. В численном эксперименте использовались следующие параметры: размерность системы уравнений с запаздыванием, выбранной для разностной аппроксимации задачи (31), (32), равна 300; шаг интегрирования $s = 0.001$; численное интегрирование проводилось на интервале $0 < t \leq 500$; $r = 3$, $h = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma_0 = 1$, $d_0 = 1$.

В качестве истории (начального условия) задачи на отрезке $-1 \leq t \leq 0$ выбирались функции вида $u_0(t, x) = \varphi(t + \frac{kT}{2\pi}x)$, где $\varphi(t)$ — периодическое решение задачи (34), а T — его период. Константы k и α изменялись согласованно с учетом (36), поскольку лишь при выборе α в малой окрестности $2\pi/k$ численное решение остается ограниченным. На рис. 1 — 6 изображены графики решения $u(t, x)$ в момент времени $t = 500$.

Рис. 1 соответствует задаче с параметрами $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 3.141593$, $k = 2$, а рис. 2 при $k = 4$. Рис. 3 отвечает параметрам $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 2.094395$, $k = 3$, рис. 4 соответствует $k = 6$.

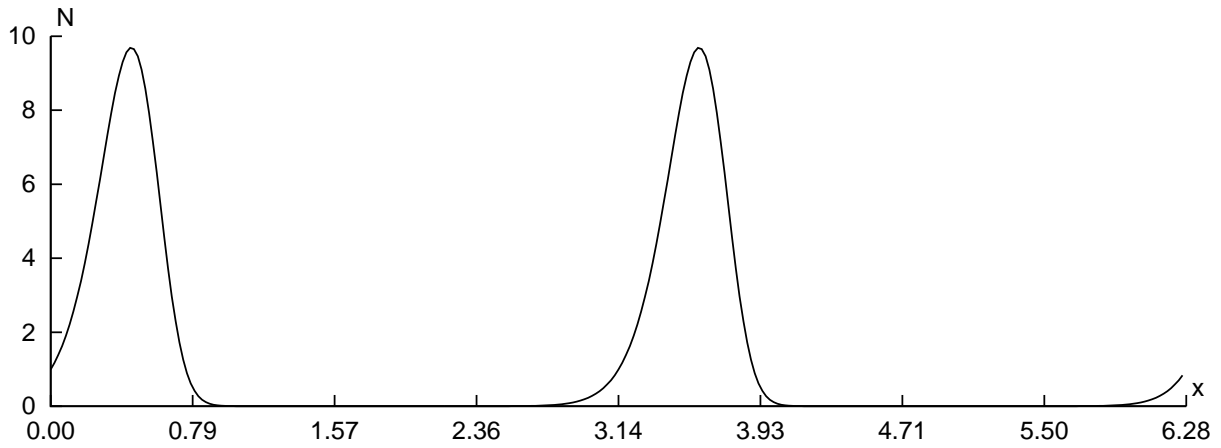


Рис. 1. $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 3.141593$, $k = 2$

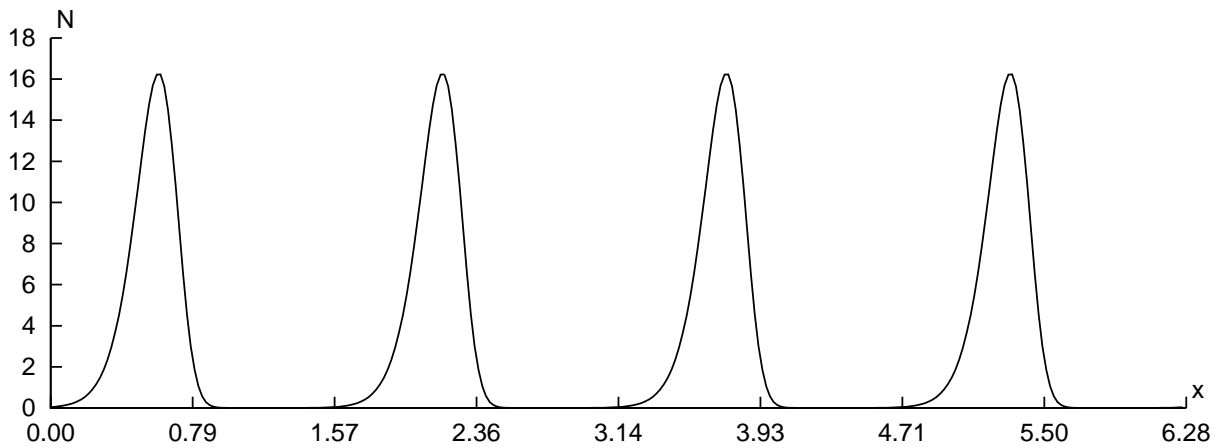


Рис. 2. $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 3.141593$, $k = 4$

С увеличением k наблюдается значительный рост амплитуды колебаний, но при согласованном уменьшении ε можно добиться ее близости к амплитуде функции $\varphi(t)$, что демонстрирует рис. 5, где $\varepsilon = 0.001$, $\alpha = 2.094395$, $k = 6$.

Таким образом, при достаточно малых ε решения в виде бегущих волн, близкие к $\varphi(t + \frac{kT}{2\pi}x)$, наблюдаются в численном эксперименте, а с ростом ε сохраняют структуру волн, демонстрируя рост амплитуды. Отметим, что в каждом случае амплитуда волн, не являясь постоянной, меняется в небольшом диапазоне. Эволюция решения во времени при $t \in [500, 510]$ приведена на рис. 6.

По-видимому, оставаясь по форме близким к периодическому, решение имеет более сложную структуру. Численный эксперимент показал, что при нарушении условия (36) и при достаточно малых ε задача (31), (32) является не диссипативной: решение с начальным условием $\varphi(t + \frac{kT}{2\pi}x)$ неограниченно растет при увеличении t .

Четвертая глава является естественным продолжением третьей главы. В ней получены асимптотики пространственно-неоднородных периодических решений пространственно распределенного уравнения Хатчинсона с

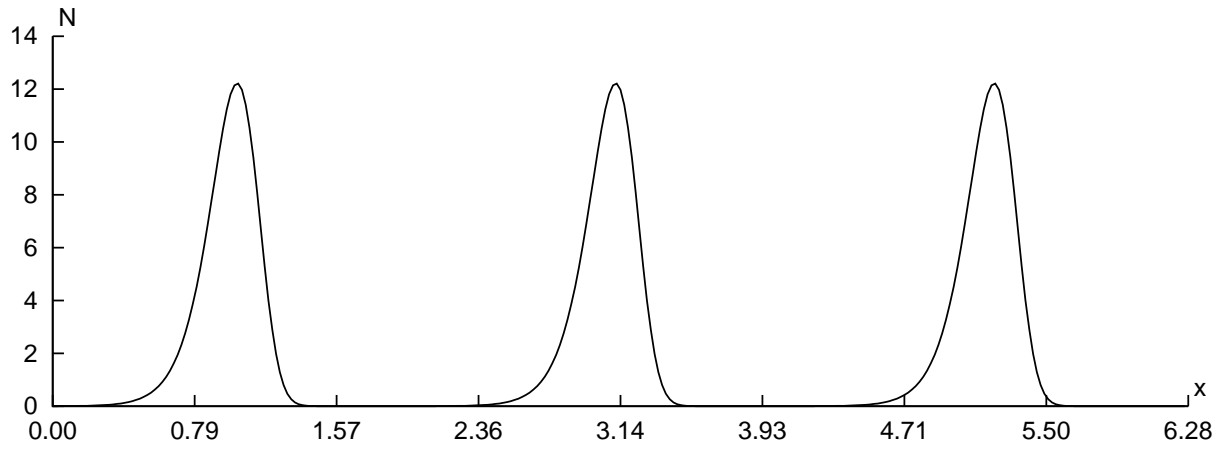


Рис. 3. $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 2.094395$, $k = 3$

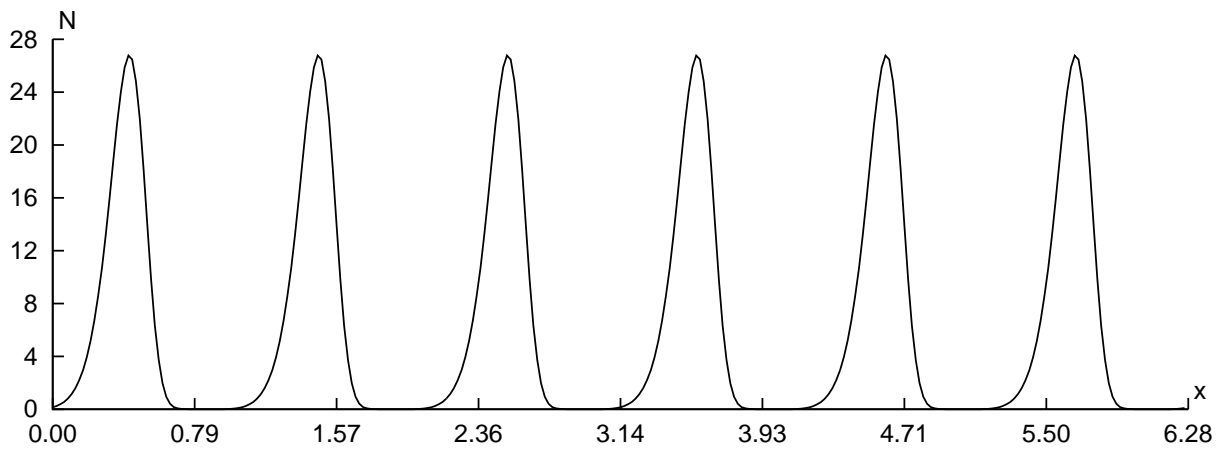


Рис. 4. $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 2.094395$, $k = 6$

периодическими краевыми условиями в случаях симметричного и несимметричного насыщения. Численный анализ упрощенной модели демонстрирует мультистабильность — сосуществование периодических решений вида бегущих волн, среди которых, тем не менее, не наблюдается решений с полученной асимптотикой. В этой главе рассматривается аналогичное (31) распределенное уравнение Хатчинсона

$$\frac{\partial N}{\partial t} = r \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} F(s)N(t-h, x+s)ds \right] N + d \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (38)$$

с периодическими краевыми условиями

$$N(t, x + 2\pi) \equiv N(t, x). \quad (39)$$

Параметры r , h и d в (38) положительны, а функция $F(x)$, характеризующая насыщение, задана формулой

$$F(x) = (\pi\sigma)^{-1/2} \exp(-\sigma^{-1}(x + \alpha)^2), \quad (\sigma > 0). \quad (40)$$

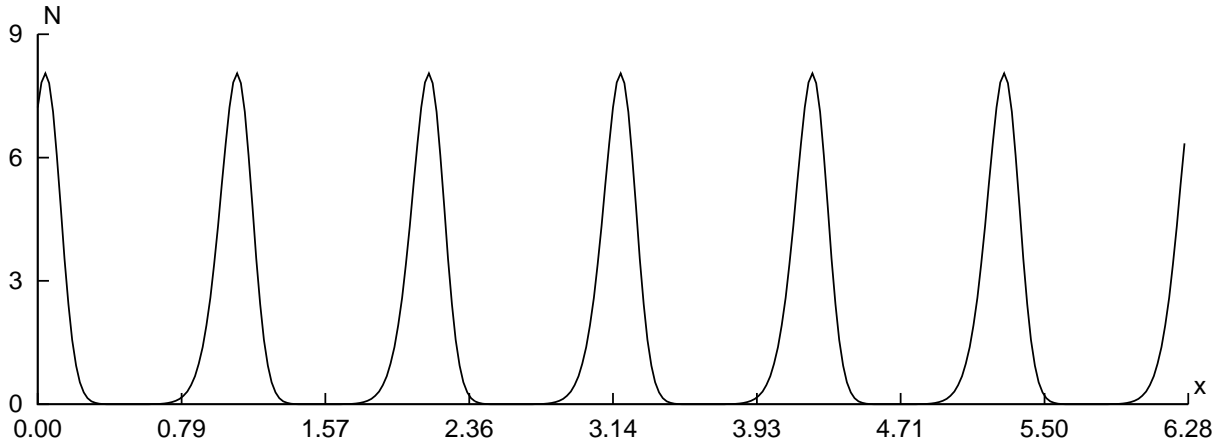


Рис. 5. $\varepsilon = 0.001$, $\alpha = 2.094395$, $k = 6$

Отметим, что $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 1$. В данной главе исследуется вопрос о нелокальных периодических решениях этой краевой задачи. Предполагаем, что диффузия в (38) достаточно мала, т.е. для некоторых фиксированных σ_0 и d_0 имеем

$$\sigma = \varepsilon\sigma_0, \quad d = \varepsilon d_0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (41)$$

Отдельно рассматриваются случаи симметричной $F(x)$ (п. 4.2), когда $\alpha = 0$, и существенно более сложный случай несимметричной $F(x)$ (п. 4.3), когда $\alpha \neq 0$.

Пусть

$$\alpha = 0. \quad (42)$$

При условии (33) уравнение Хатчинсона (34) имеет единственное (с точностью до фазового сдвига) непостоянное орбитально устойчивое периодическое решение $N_0(t)$. Функция $N_0(t)$, очевидно, является однородным периодическим решением и краевой задачи (38), (39). Множество функций вида

$$N_0\left(t + r \frac{kT_0x}{2\pi}\right), \quad (43)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, также является решением уравнения (34). Отсюда и из условий (41) и (42) следует, что каждая из функций (43) удовлетворяет (38) с точностью до $O(\varepsilon)$.

Пусть теперь $\alpha \neq 0$. Для определенности удобно считать, что

$$\alpha > 0.$$

Кроме того, будем предполагать, что выполнено условие (33). Тем самым, уравнение (34) и краевая задача (38), (39) имеют одновременно периодическое решение $N_0(t)$. Введем несколько обозначений. Фиксируем сначала

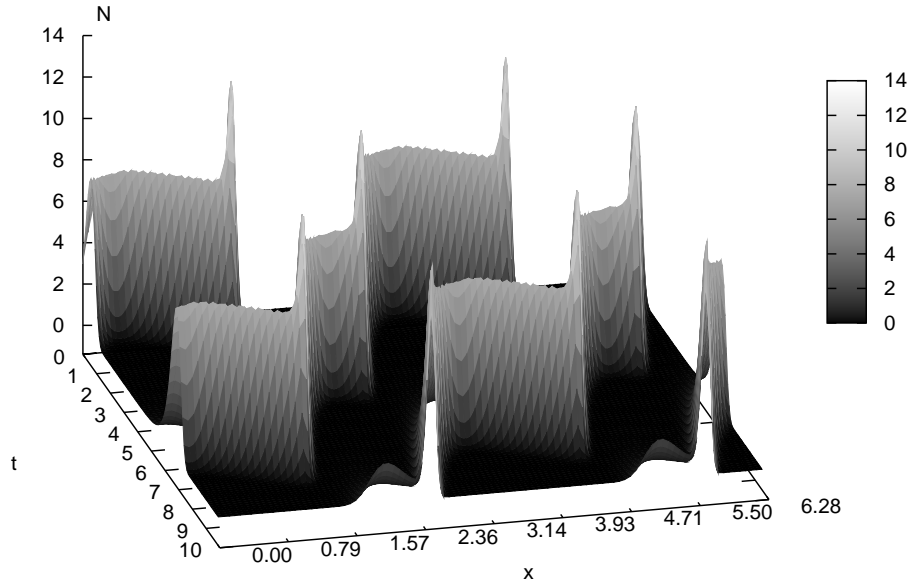


Рис. 6. $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 3.141593$, $k = 2$

произвольно величину $T > 0$ и при всех значениях параметра z из промежутка $z \in (-\infty, \infty)$ рассмотрим семейство уравнений Хатчинсона

$$\dot{N} = r[1 - N(t - h - zT)]N. \quad (44)$$

Как уже отмечалось, это уравнение имеет нетривиальное устойчивое периодическое решение при условии

$$r(h + zT) > \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая (33), заключаем, что уравнение (44) имеет (непостоянное) периодическое решение $N = M_z(t)$ при

$$z > z^-, \quad \text{где } z^- = (\pi - 2rh) \cdot (2rT)^{-1} \quad (z^- < 0).$$

Обозначим через $R(zT)$ период функции $M_z(t)$. Функция $R(zT)$ является монотонно возрастающей, причем

$$\lim_{z \rightarrow z^- + 0} R(zT) = 2\pi(T)^{-1}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} R(zT) = \infty.$$

Известно⁸, что $R(zT)$ имеет следующую асимптотику при $z \rightarrow \infty$:

$$R(zT) = r^{-1} \exp r(h + zT) \cdot (1 + o(1)). \quad (45)$$

⁸Кащенко С.А. Асимптотика периодического решения обобщенного уравнения Хатчинсона // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1981. С. 64–85.

Отметим что формула (45) дает хорошее приближение уже начиная со значений $zT \approx 2r^{-1} - h$.

Далее, при увеличении z , начиная от z^- , найдется такое значение $z = z_0$, что

$$R(z_0T) = T, \quad z_0R'(z_0T) = 1. \quad (46)$$

Можно предположить, что значение z_0 определяется единственным образом. Это проверяется асимптотической формулой (45) и результатами численного счета. Отсюда же получаем, что значение z_0 и корень $T = T_0$ уравнения (46) близки, соответственно к значениям

$$z_0 \approx r^{-1} \exp r(h + r^{-1}), \quad T_0 \approx \exp r(h + r^{-1}).$$

Изложим основную конструкцию. Будем искать периодическое с некоторым периодом T решение краевой задачи (38), (39), зависящее от линейной комбинации переменных t и x . Тем самым T -периодическое решение имеет вид

$$N = N \left(t + \frac{kT}{2\pi} x \right), \quad (47)$$

где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Подставим (47) в (38). При достаточно малых ε функция $N_k(s) = N \left(t + \frac{kT}{2\pi} x \right)$ ($s = t + \frac{kT}{2\pi} x$) удовлетворяет условию

$$\dot{N}_k = r \left[1 + N_k \left(t - h + \frac{k\alpha T}{2\pi} \right) + O(\varepsilon) \right] N + O(\varepsilon).$$

Таким образом, уравнение Хатчинсона (44) при $z = \frac{k\alpha}{2\pi}$ играет роль нулевого приближения для нахождения T -периодического решения $N_k(s)$. В результате приходим к задаче нахождения периодического решения с периодом T для уравнения (44). Отсюда получаем уравнение для определения T :

$$R(k\alpha T(2\pi)^{-1}) = T. \quad (48)$$

Согласно введенным выше обозначениям заключаем, что это уравнение имеет один корень для всех тех целых неположительных k , для которых

$$z^- < \frac{k\alpha}{2\pi} \leq 0, \quad (49)$$

и ровно два корня для положительных целых k , удовлетворяющих неравенству

$$0 < \frac{k\alpha}{2\pi} < z_0. \quad (50)$$

Очевидно, таких значений k тем больше, чем меньше значение отклонения α .

Сформулируем основной результат этой части главы.

Теорема 9. При условии (50) и достаточно малых значениях параметра ε краевая задача (38), (39) имеет асимптотическое по невязке решение

$$N(t, x, \varepsilon) = N_0((1 + o(1))t, rkT_0x/(2\pi)) + o(1).$$

Отметим, что при $\alpha = \alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$ количество периодических решений неограниченно растет и периоды заполняют в пределе всю полуось $(2\pi r^{-1}, \infty)$.

В заключительном разделе четвертой главы приведены результаты численных исследований задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} &= r[1 - N(t, x - \alpha)]N(t, x) + d \frac{\partial^2 N(t, x)}{\partial x^2}, \\ N(t, x + 2\pi) &= N(t, x), \end{aligned} \quad (51)$$

которая представляет собой предельный случай задачи (38), (39) при $\sigma \rightarrow 0$ и при значении запаздывания $h = 0$. Здесь рассмотрен случай $\alpha > 0$. Вернемся к уравнению Хатчинсона (34), в котором будем считать выполненным соотношение (33). Зафиксируем r и обозначим единственное устойчивое периодическое решение этого уравнения $u_h(t)$, а его период — T_h . Отметим, что $u_h(t + cx)$ также является решением уравнения Хатчинсона при любом c . Подставим в задачу (51) $N(t, x) = u_h(t + cx)$, получим:

$$\begin{aligned} \dot{u}_h(t + cx) &= r(1 - u_h(t + cx - c\alpha))u_h(t + cx) + dc^2\ddot{u}_h(t + cx), \\ u_h(t + c(x + 2\pi)) &= u_h(t + cx). \end{aligned} \quad (52)$$

Если положить $d = \varepsilon d_0$, то $u_h(t + cx)$ будет удовлетворять этому уравнению с невязкой $O(\varepsilon)$ при условии, что $c\alpha = h$ и $2\pi c = kT_h$ для некоторого целого k .

Таким образом, если при некоторых значениях параметров k и α уравнение

$$T_h = \frac{2\pi h}{k\alpha} \quad (53)$$

имеет решение, то функция

$$u_h\left(t + \frac{h}{\alpha}x\right) = u_h\left(t + \frac{kT_h}{2\pi}x\right) \quad (54)$$

будет удовлетворять (51) с точностью до порядка ε .

На рис. 7 изображен график зависимости периода решения уравнения Хатчинсона от величины запаздывания и прямые вида $f(h) = \frac{2\pi}{k\alpha}h$ при различных $k\alpha$. Методика численного анализа задачи (51) сводится к следующему: зафиксировав k и α , мы можем найти численно точку пересечения кривой T_h с прямой $f(h) = \frac{2\pi}{k\alpha}h$. Полученное таким образом h мы подставляем в уравнение (34), которое затем решаем методом шагов. Мы вычисляем приближение орбиты $u_h(t)$, то есть такой функции $\bar{u}_h(t)$, $t \in [0, T_h]$, что

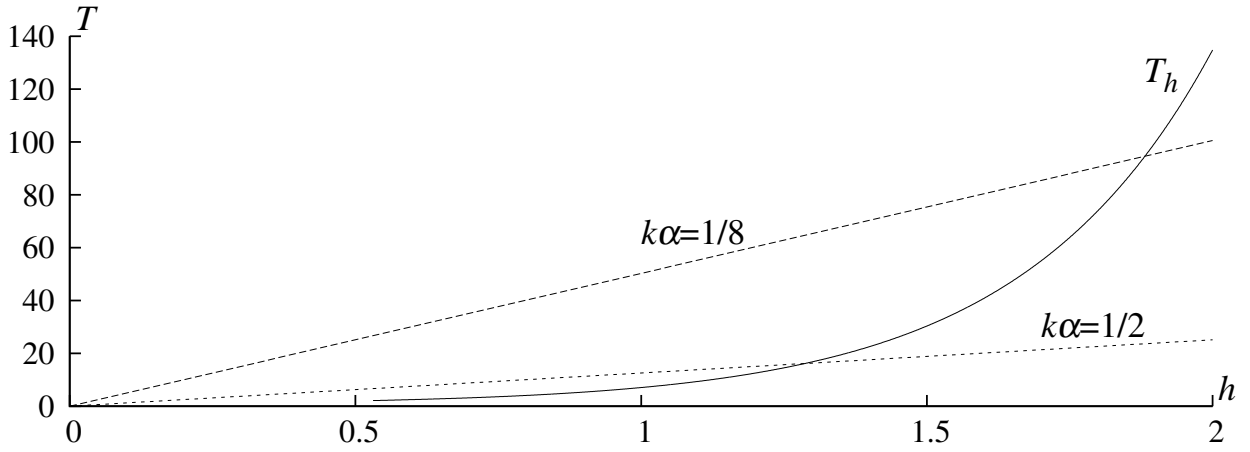


Рис. 7. Зависимость периода решения уравнения Хатчинсона от запаздывания при $r = 3$.

$u_h(t) = \bar{u}_h(t \bmod T_h)$. Отметим, что для любого выбора начальной функции уравнения (34) функция $\bar{u}_h(t)$ будет одной и той же с точностью до фазы.

Теперь в задаче (51) дискретизируем пространственную переменную и перейдем к системе M обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i(t)}{\partial t} = & r(1 - N_{i-p}(t))N_i(t) + \\ & + d \frac{4\pi^2}{M^2} (N_{i+1} - 2N_i(t) + N_{i-1}), \quad i = 0, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (55)$$

где $p = \lceil \frac{\alpha N}{2\pi} \rceil$, а все индексы в правой части берутся по модулю M . В качестве начального условия выберем дискретизацию функции

$$\bar{u}_h \left(\left(\frac{kT_h}{2\pi} x \right) \bmod T_h \right), \quad x \in [0, 2\pi]. \quad (56)$$

Полученная задача решалась методом Дормана–Принса 5(4) с абсолютной погрешностью на шаге, равной 10^{-6} , на промежутке времени $t \in [0, 200]$ при значении $M = 2000$. В зависимости от параметров α и d задача демонстрирует численно наблюдаемые устойчивые пространственно-неоднородные режимы с различным количеством всплесков на пространственном отрезке $[0, 2\pi]$. Типичные графики временных срезов полученного таким образом решения при значениях параметров $\alpha = 0.6$, $d = 0.04$ представлены на рис. 8. Пространственный срез при тех же значениях параметров для $x = \pi$ приводится на рис. 9.

На рис. 10 изображена зависимость количества всплесков в установившемся режиме от α и d . В области I решение стремится к пространственно-однородному стационарному режиму $N(t, x) = 1$. Область II отвечает устойчивости режима с четырьмя всплесками, III — с шестью, IV — с восьмью. В области V притягивающими являются режимы с 10 и более всплесками,

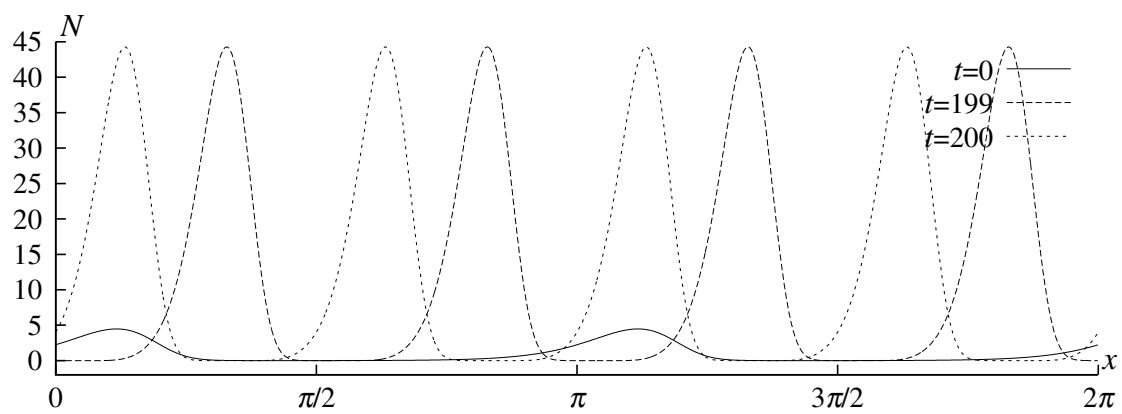


Рис. 8. Временные срезы решения задачи (55), (56) при $\alpha = 0.6$, $d = 0.04$

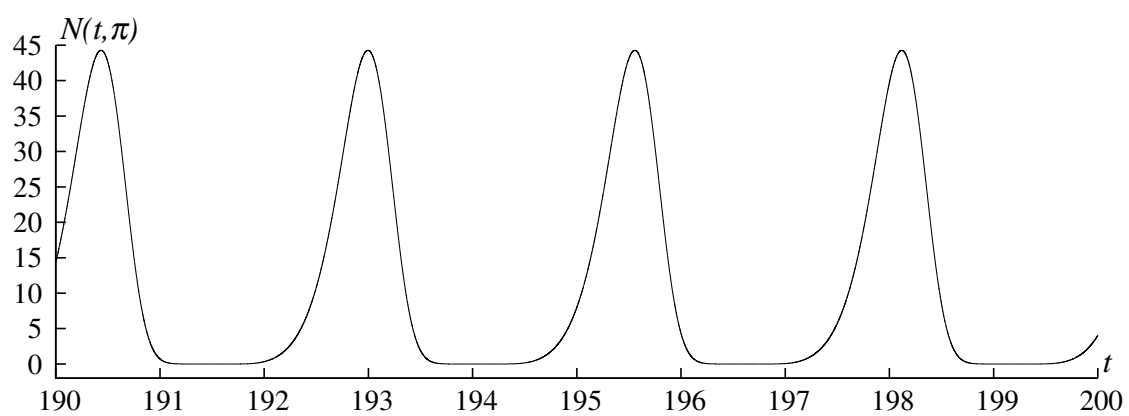


Рис. 9. Пространственный срез решения задачи (55), (56) при $\alpha = 0.6$, $d = 0.04$, $x = \pi$

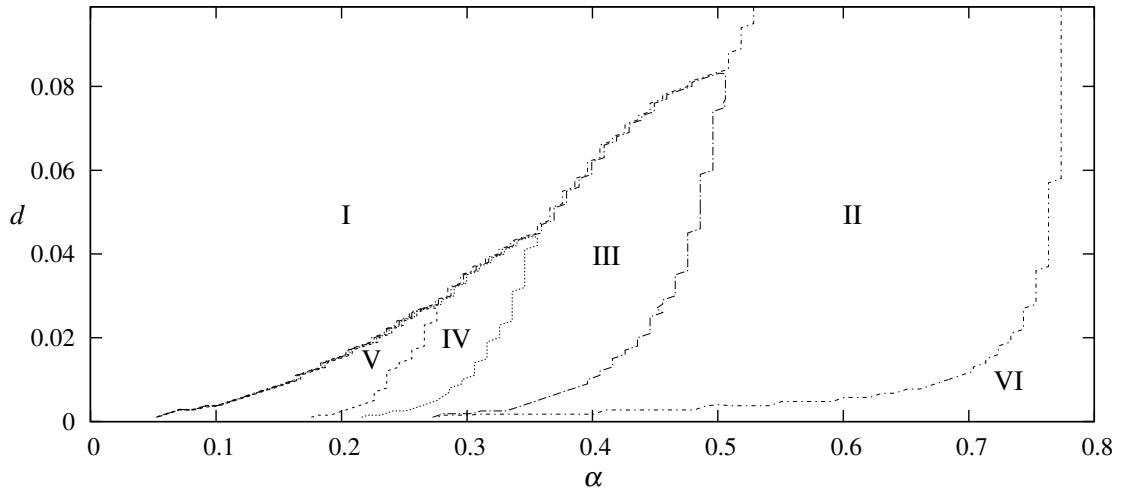


Рис. 10. Характерные области значений параметров при начальном условии с количеством волн $k = 2$

причем это количество растет с уменьшением α . В области VI решения обладают амплитудой более 10^5 , и вычисление количества всплесков в ней не выполнялось. Резкий рост амплитуды при приближении d сверху к границе области VI характерен для всех значений α .

Обнаружить устойчивые решения непосредственно вида (54), то есть с числом всплесков, равным k , в данном численном эксперименте не удалось. При этом задача демонстрирует мультистабильность: на рис. 11 и рис. 12 представлены временные срезы решений задачи с теми же параметрами $\alpha = 0.6$, $d = 0.04$, но различными начальными условиями: в первом случае это функция $N(0, x) = \bar{u}_h(T_h x / (2\pi))$, где h — решение уравнения (53) при $k = 1$, $\alpha = 0.6$, и во втором случае — $N(0, x) = 1.1 + \sin(6x)$. Таким образом, хотя наблюдаются устойчивые режимы с тремя и более волнами, напоминающими по поведению периодические решения уравнения Хатчинсона, они не относятся к классу (54), поскольку при данном α уравнение (53) разрешимо лишь при $k = 1$ или $k = 2$, причем эта ситуация является общей, то есть не удалось найти такое α , при котором бы существовали решения с допустимыми (в смысле уравнения (53)) k .

В **пятой** главе диссертационной работы исследуется динамика нейронных сетей, составленных из формальных нейронов Хатчинсона. Для решения данной задачи был разработан программный комплекс «Simager» для визуального отображения решений пространственно распределенных динамических систем. Его предназначение: демонстрация поведения динамических систем, заданных дифференциальными уравнениями с частными производными, уравнениями с запаздыванием или отображениями. Он может использоваться для классификации решений систем в зависимо-

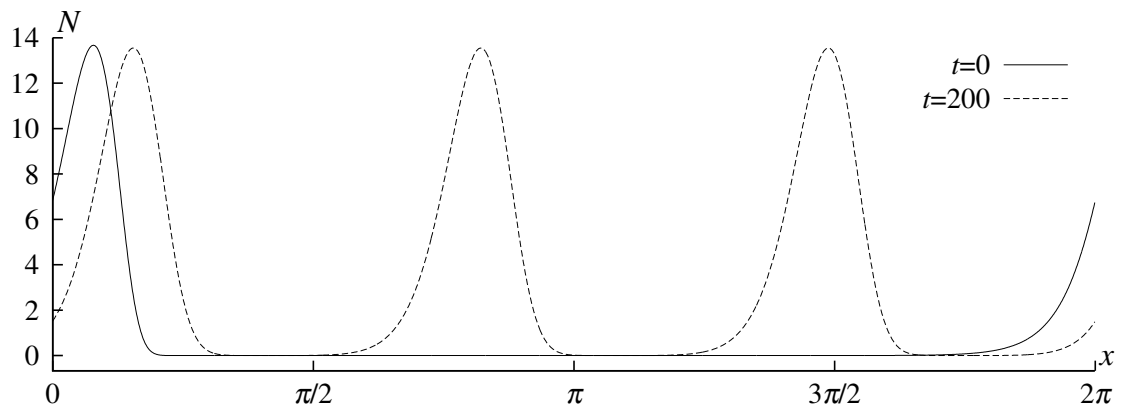


Рис. 11. Временные срезы решения задачи (55), (56) при $\alpha = 0.6$, $d = 0.04$

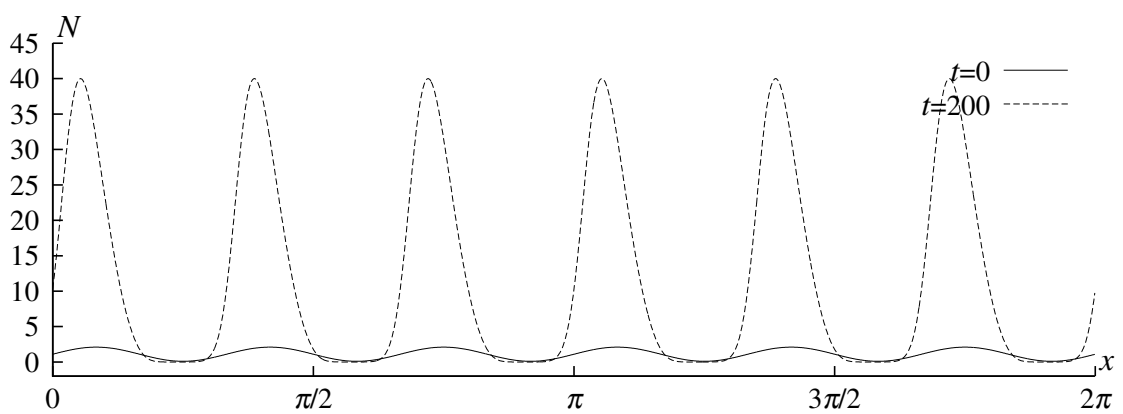


Рис. 12. Временные срезы решения задачи (55), (56) при $\alpha = 0.6$, $d = 0.04$

сти от параметров и начальных условий, предоставлять возможности для изучения поведения динамических систем на плоскости и в трехмерном пространстве.

В **заключении** подводятся основные итоги работы, а также намечаются возможные пути продолжения исследования.

В **приложении А** представлено подробное описание функциональных возможностей программного комплекса «Simager».

В **приложении Б** собран иллюстративный материал, наглядно демонстрирующий основные возможности программного комплекса «Simager».

Список публикаций по теме диссертации

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах и изданиях:

1. *Кащенко, С.А.* Релаксационные колебания в простейших моделях с запаздыванием / С.А. Кащенко, А.С. Полстьянов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2008. — Т. 15, №2. — С. 55–60.
2. *Глызин, Д.С.* Пространственно-неоднородные периодические решения в распределенном уравнении Хатчинсона / Д.С. Глызин, С.А. Кащенко, А.С. Полстьянов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2009. — Т. 16, №4. — С. 77–85.
3. *Глызин, Д.С.* Пространственно-неоднородные периодические решения уравнения Хатчинсона с распределенным насыщением / Д.С. Глызин, С.А. Кащенко, А.С. Полстьянов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2011. — Т. 18, №1. — С. 37–45.
4. *Кащенко, С.А.* Асимптотика периодических решений автономных параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и уравнений с большими коэффициентами диффузии / С.А. Кащенко, А.С. Полстьянов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2012. — Т. 19, №1. — С. 7–23.

Другие публикации:

5. *Полстьянов, А.С.* Пакет программ визуального отображения решений пространственно распределенных динамических систем «Simager» // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. М.: РОСПАТЕНТ, 2008. №2008613362.

Отпечатано на ризографе

Ярославский государственный университет
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.