Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тульский государственный педагогический университет
имени Л. Н. Толстого»

На правах рукописи

ЛОГАЧЕВА Елена Сергеевна

ПРОБЛЕМЫ СОПРЯЖЕННОСТИ СЛОВ И ПОДГРУПП В СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ ГРУПП

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Безверхний В. Н.

Тула – 2015

Оглавление

Введение

Актуальность темы

В настоящее время теория групп – одно из наиболее динамично развивающихся математических направлений. Идеи теории групп уходят своими корнями к работам Э. Галуа, Н. Абеля, Дж. Руффини. Однако на начальных стадиях своего развития она представляла лишь теорию конечных групп. И только в начале XX века под влиянием признания роли теории групп в геометрии и бурного развития топологии начали изучаться группы заданные порождающими и определяющими соотношениями, большое значение среди которых имеют бесконечные дискретные группы. Анализ свойств таких групп приводит к комбинаторным методам, откуда и происходит название комбинаторной теории групп.

Основные алгоритмические проблемы комбинаторной теории групп были сформулированы М. Дэном в 1912 году [29]: проблема равенства, сопряженности в конечно определенных группах и проблема изоморфизма групп.

Говорят, что в группе G разрешима проблема сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов w_1, w_2 из G установить, существует ли элемент $h \in G$ такой, что $h^{-1}w_1h=w_2$.

Значимые результаты при решении этой проблемы были получены Новиковым П. С. В 1955 году [25] им доказана неразрешимость проблемы равенства и сопряженности слов в классе конечно определенных групп. Из результата С. И. Адяна [1] следует, что практически все проблемы, относящиеся к конечно определенным группам, в общем случае неразрешимы. Однако отрицательное решение проблемы Дэна в общем случае явилось причиной ее дальнейшего изучения в различных классах групп. Рассмотрим наиболее широкие классы групп с разрешимой проблемой сопряженности. В 1966 году Гриндлингером М. Д. были открыты классы групп с малой мерой сокращения с условиями $C'(\frac{1}{6})$, $C'(\frac{1}{4})$ и $T(4)$, в которых им решены проблемы равенства и сопряженности слов [12,13]. Р. Линдоном были введены классы групп с малой мерой налегания *C(6), C(4)* и *T(4), C(3)* и *T(6)*, в которых им решена проблема равенства слов [33], а П. Шуппом, используя кольцевые диаграммы, решена проблема сопряженности слов [35]. Отметим также группы кос, для которых проблему сопряженности решил Ф. Гарсайд в 1969 году [11], и их обобщение – группы Артина конечного типа, введенные Э. Брискорном и К. Сайто, в которых им удалось решить проблемы равенства и сопряженности слов, перенеся метод Гарсайда на данный класс групп [10].

В 1966 году С. Липшуц установил разрешимость проблемы сопряженности слов в свободном произведении двух свободных групп конечного ранга с объединением по циклической подгруппе $F_m \underset{C}{*} F_n$ [32]. Фридманом А. А. была решена проблема сопряженности слов в HNN-расширении свободной группы с ассоциированными циклическими подгруппами $\langle F_m, t | t^{-1} v^p t = w^q \rangle$, где F_m - свободная группа ранга $m < \infty$, $v, w \in F_m$ [27]. В 1990 году Безверхним В. Н. [5] решена проблема сопряженности и степенной сопряженности слов в группах с одним определяющим соотношением с кручением и в их свободном произведении с циклическим объединением. Значимым результатом в конце XX века является результат Громова М.Л.[15] Им были определены гиперболические группы и решена для них проблема сопряженности слов.

Обобщением проблемы сопряженности слов является проблема сопряженности подгрупп. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1, H_2 из G установить, существует ли элемент $z \in G$ такой, что $z^{-1} H_1 z = H_2$.

Впервые проблема сопряженности подгрупп была рассмотрена в 1967 году В. Н. Ремесленниковым в классе конечно порожденных нильпотентных групп [26]. Далее в исследовании проблемы сопряженности подгрупп были получены следующие результаты: Гриндлингером М.Д. указано в каких случаях любые две подгруппы ранга 2 свободной группы сопряжены [14]. Данный результат был обобщен Молдаванским Д.И. на конечно порожденные подгруппы [23]. В 1971 году Безверхним В.Н. [7] и Молдаванским Д.И. [22] независимо друг от друга была решена проблема сопряженности подгрупп для свободного произведения групп при условии, что в сомножителях разрешимы проблемы вхождения и сопряженности подгрупп; в 1977 году Безверхним В.Н. решена проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении двух свободных групп конечного ранга с объединением по циклической подгруппе [3], в 1983 – в HNN-расширении по изоморфным конечным ассоциированным подгруппам при условии, что в базовой группе разрешимы проблемы вхождения и сопряженности подгрупп [2]. Также в 1975 году Безверхний В.Н. показал, что в свободном произведении двух свободных групп, объединенных по подгруппе ранга 4, проблема сопряженности подгрупп неразрешима [6].

Степень разработанности темы исследования

В качестве центрального объекта для изучения в данной работе выбраны древесные произведения с объединением. Впервые понятие древесного произведения групп с объединением было дано Ханной Нейман в 1948 году как обобщение свободного произведения групп с объединенными подгруппами [34]. Древесное произведение с объединением может быть представлено семейством групп A_i, $i \in \overline{1,n}$, каждой из которых единственным образом поставлена в соответствие вершина некоторого дерево-графа; если смежным вершинам соответствуют группы A_i и A_j, то их связывающему ребру поставлено в соответствие объединение $U_{ij} = \varphi(U_{ji})$, где $U_{ij} < A_i$, $\varphi\big(U_{ji}\big) < A_j$, φ – конструктивный изоморфизм.

В настоящей работе рассмотрены следующие конструкции: древесное произведение свободных групп с циклическим объединением, древесное произведение циклических групп с объединением и его HNN-расширение.

Проблему сопряженности слов в свободном произведении двух свободных групп, объединенных по циклической подгруппе, решил С. Липшуц в 1966г. В настоящей работе дается новое доказательство этого результата и его обобщение на древесное произведение конечного числа свободных групп с циклическим объединением, а также HNN-расширение древесного произведения циклических групп с ассоциированными циклическими подгруппами, как с одной проходной буквой, так и с конечным их числом.

При рассмотрении проблемы сопряженности подгрупп в вышеуказанных группах основополагающими являются работы Безверхнего В.Н. [2; 3], которые закладывают основу для дальнейшего исследования. Используя идеи доказательства проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с циклическим объединением, доказана разрешимость данной проблемы в древесном произведении циклических групп с циклическим объединением, в HNN-расширении бесконечной циклической группы по ассоциированным циклическим подгруппам и в HNN-расширении древесного произведения циклических групп с ассоциированными циклическими подгруппами.

Цель работы

Целью диссертационной работы является решение проблемы сопряженности слов и проблемы сопряженности подгрупп в древесных произведениях групп с циклическим объединением и в их HNN-расширении.

Методология и методы исследования

Исследования, проводимые в настоящей работе, базируются на комбинаторных методах теории групп. Особое место занимает метод специального множества слов, который был введен Безверхним В.Н. в 1972 году. Обобщения проводятся с использованием метода математической индукции.

Научная новизна

В данной диссертационной работе автором получен ряд результатов, касающихся проблемы сопряженности в древесных структурах групп и в их HNN-расширениях.

Основные результаты работы:

1. Решена проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с объединением по циклическим подгруппам.

2. Решена проблема сопряженности слов в HNN-расширении древесного произведения бесконечных циклических групп с объединением по ассоциированным циклическим подгруппам.
3. Решена проблема сопряженности слов в HNN-расширении с конечным числом проходных букв древесного произведения бесконечных циклических групп с объединением по ассоциированным циклическим подгруппам при условии, что элементы не принадлежат ассоциированной подгруппе.
4. Решена проблема сопряженности подгрупп в древесном произведении бесконечных циклических групп с объединением.
5. Решена проблема сопряженности подгрупп в HNN-расширении бесконечной циклической группы с ассоциированными циклическими подгруппами.
6. Решена проблема сопряженности подгрупп в HNN-расширении древесного произведения бесконечных циклических групп с циклическим объединением по ассоциированным циклическим подгруппам.

В процессе исследования основных проблем в указанных выше группах доказаны утверждения, которые представляют самостоятельный интерес:

– алгоритмическая разрешимость пересечения конечно порожденной подгруппы с ассоциированной подгруппой;
– алгоритмическая разрешимость пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с ассоциированной подгруппой.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Результаты данной работы могут быть использованы при решении алгоритмических проблем комбинаторной теории групп в свободных конструкциях групп.

Апробация результатов

Основные результаты работы были изложены:

– на семинаре «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп» под руководством Безверхнего В.Н. (ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2009-2014гг.);

– на Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (ТГУ, 2006 г.);

– на IX Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2012 г.);

– на XII Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2014 г.);

– на VI Международном симпозиуме «Абелевы группы» (МПГУ, 2014 г.);

– на V региональной научно-практической конференции ППС, аспирантов, магистрантов, соискателей ТГПУ им. Л.Н. Толстого «Университет XXI века: исследования в рамках научных школ» (ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2015 г.);

– на XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2015 г.);

– на семинаре по теории групп под руководством А.Л. Шмелькина (МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [36] – [49], в том числе 5 статей изданы в сборниках, рецензируемых ВАК РФ.

Личный вклад

Результаты, изложенные в диссертационной работе, получены соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, 9 параграфов и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 122 страницы. Библиографический список включает 49 наименований.

Во введении изложена предыстория исследуемых объектов, обоснована актуальность исследования и новизна полученных результатов.

Первая глава посвящена построению специального множества слов подгруппы некоторой группы, являющейся свободным произведением с объединением, а также для подгруппы HNN-расширения. Специальное множество слов было введено Безверхним В. Н. в 1972 году в работе [8], как основной инструмент для изучения свободных конструкций групп. Специальное множество слов подгруппы группы G строится эффективно и позволяет сделать вывод о величине сокращений в произведении некоторого числа сомножителей. В первых двух параграфах Главы 1 определяется структура специального множества.

Основными результатами первой главы можно считать критерии приводимости образующих подгруппы к специальному множеству, порождающему ту же самую подгруппу для свободного произведения с объединением и для HNN-расширения.

Теорема 1.1. [8] *Пусть группа*

$$G = \langle \prod_{s=1}^{n} * \, G_s; relG_1, \dots, relG_n, \varphi_{ji}\big(U_{ij}\big) = U_{ji} \rangle$$

− древесное произведение групп G_s, $1 < s < n$, *объединенных по изоморфным подгруппам* $U_{ij} < G_i, U_{ji} < G_j$ *с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов* $\{\varphi_{ij}\}, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. *Тогда, если подгруппы* $U_{ij}, U_{ji}, i \epsilon I_1, j \epsilon I_2$ *обладают условием максимальности и в сомножителях* $G_S, 1 \leq s \leq n$, *разрешимы:*

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения класса смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_s$ *с подгруппой* U_{sj}*;*

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_s$ с подгруппой U_{sj};

то в группе G разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов группы G в специальное, порождающее подгруппу, совпадающую с подгруппой, порожденной исходным множеством.

Теорема 1.2. [2] *Пусть $G^* = \langle G, t; t^{-1}U_1 t = \varphi(U_1)\rangle$ – HNN-расширение группы G с помощью изоморфных подгрупп U_1, U_{-1} и фиксированного изоморфизма φ. Если подгруппы U_1, U_{-1} обладают условием максимальности и в группе G разрешимы:*

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ с каждой из подгрупп U_1, U_{-1};

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ с любой из выделенных подгрупп U_1, U_{-1}; то в группе G^* разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов группы G^* в специальное, порождающее подгруппу, совпадающую с подгруппой, порожденной исходным множеством.

В третьем параграфе первой главы даются определения и утверждения, касающиеся слов специального множества, а также виды и структура простого слова.

Вторая глава посвящена исследованию проблемы сопряженности слов в группах с древесной структурой и в их HNN-расширениях.

Рассмотрим древесное произведение свободных групп с циклическим объединением

$$F_\Gamma = \left\langle \prod_{i=1}^{n}{}^{*} F_{m_i} \middle| v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{p_{ji}} \right\rangle, |p_{ij}|, |p_{ji}| \geq 1, i \in I_1, j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty. \quad (1)$$

Основным результатом параграфа 2.1. является следующая теорема:

Теорема 2.3. [42] *В группе* F_Γ *разрешима проблема сопряженности слов.*

Доказательство проводится по индукции. Для применения этого метода необходимо выделить конечную вершину v_n графа Г группы F_Γ и представить группу следующим образом: $F_\Gamma = F_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$, где $C_n: \langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \rangle = \langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \rangle$, $F_{\Gamma_{n-1}}$ – группа структуры F_Γ, имеющая $(n-1)$ сомножителей, F_{m_n} – свободная группа, соответствующая концевой вершине v_n графа Г. Базой индукции служит известный результат С. Липшуца [32] для свободного произведения двух свободных групп, объединенных по циклической подгруппе. Также при доказательстве используются следующие утверждения.

Лемма 2.1. [42] *В группе* F_Γ *разрешимы следующие алгоритмические проблемы: I) алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы* $H < F_\Gamma$ *и* $\langle w \rangle < F_{m_i}$, $i = \overline{1,n}$, *найти образующие* $H \cap \langle w \rangle$*;*

II) алгоритм, позволяющий для любого слова $v \in F_\Gamma$ *и конечно порожденной подгруппы* $H < F_\Gamma$*, выяснить пусто или непусто пересечение* $vH \cap \langle w \rangle$*, где* $\langle w \rangle < F_{m_i}, i = \overline{1,n}$.

В параграфе 2.2. аналогично с группой F_Γ рассматривается древесное произведение бесконечных циклических групп с объединением по циклическим подгруппам:

$$G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \,|\, a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle, |p_{ij}|, |p_{ji}| \geq 1, i \in I_1, j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty. \tag{2}$$

Обобщением группы G_Γ является HNN-расширение по изоморфным ассоциированным циклическим подгруппам

$$\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1} U_1 t = U_{-1} \rangle, \tag{3}$$

где $U_1 = \langle a_m^{s_{ml}} \rangle, U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}} \rangle, |s_{ml}|, |s_{lm}| \geq 1, m \in I_1, l \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty$.

Основным результатом данного параграфа является теорема:

Теорема 2.5. [40] *В группе* $\bar{G}_\Gamma$ *разрешима проблема сопряженности слов.*

Доказательство проводится по числу слогов в словах $w, v \in \bar{G}_\Gamma$. На каждом шаге необходимо решать алгоритмические проблемы, доказанные в леммах 2.5. и 2.6.

Лемма 2.5. [40] *Для любой конечно порожденной подгруппы* $H < \bar{G}_\Gamma$ *и циклической подгруппы* $\langle a_k \rangle, k = \overline{1,n}$, *где* a_k *– образующий группы* G_Γ, *существует алгоритм, позволяющий выписать образующие пересечения* $H \cap \langle a_k \rangle$.

Лемма 2.6. [40] *Для любого слова* $v \in \bar{G}_\Gamma$ *и любой конечно порожденной подгруппы* $H < \bar{G}_\Gamma$, *существует алгоритм, позволяющий выяснить пусто или непусто пересечение* $vH \cap \langle a_k \rangle$, *где* a_k *образующий группы* G_Γ .

Параграф 2.3. посвящен обобщению теоремы 2.5. Рассматривается HNN-расширение группы $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \, | a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$ с помощью конечного числа проходных букв:

$$\bar{G}_\Gamma^* = \langle G_\Gamma, \{t_{ik}\} | rel(G_\Gamma), t_{ik}^{-1} U_{ik} t_{ik} = U_{ki} \rangle, \quad (4)$$

где $U_{ik} = \langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle, U_{ki} = \langle a_{ki}^{s_{ki}} \rangle$ – ассоциированные подгруппы, $\langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle \subset \langle a_i \rangle$, $\langle a_{ki}^{s_{ki}} \rangle \subset \langle a_k \rangle$, $|s_{ik}|, |s_{ki}| \geq 1, i \in I_1, k \in I_2$, количество проходных букв t_{ik} равно m, и доказывается основной результат:

Теорема 2.6. [45] *Пусть* $\bar{G}_\Gamma^* = \langle G_\Gamma, \{t_{ik}\} | rel(G_\Gamma), t_{ik}^{-1} U_{ik} t_{ik} = U_{ki} \rangle$, $U_{ik} = \langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle \subset \langle a_i \rangle, U_{ki} = \langle a_{ki}^{s_{ki}} \rangle \subset \langle a_k \rangle$ *есть HNN-расширение группы* $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \, | a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$ *с помощью конечного числа проходных букв* t_{ik} *с ассоциированными циклическими подгруппами. Если слова* $w, v \in \bar{G}_\Gamma^*$ *не сопряжены в* $\bar{G}_\Gamma^*$ *элементам из ассоциированной подгруппы* $\langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle$ *для некоторого* i, *то можно эффективно определить сопряжены они в* $\bar{G}_\Gamma^*$ *или нет.*

Для доказательства группу $\bar{G}_\Gamma^*$ представляем в виде

$$\bar{G}_\Gamma^* = \langle \bar{G}_{\Gamma_{m-1}}^*, t_{i_0 k_0} | t_{i_0 k_0}^{-1} U_{i_0} t_{i_0 k_0} = U_{k_0} \rangle,$$

где $U_{i_0} = \langle a_{i_0}^{s_{ik}} \rangle$, $U_{j_0} = \langle a_{k_0}^{s_{ki}} \rangle$, $\bar{G}_{\Gamma_{m-1}}^* = \langle G_\Gamma, \{t_{ik}\} \backslash t_{i_0 k_0} | rel(G_\Gamma), t_{ik}^{-1} U_{ik} t_{ik} = U_{ki} \rangle$, $U_{ik} = \langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle, U_{ki} = \langle a_{ki}^{s_{ki}} \rangle$, $\bar{G}_{\Gamma_{m-1}}^* -$ группа вида $\bar{G}_\Gamma^*$, имеющая $(m-1)$ проходных букв. Доказательство проводится методом индукции по числу проходных букв. Базой индукции является утверждение теоремы 2.5. Предполагаем, что утверждение теоремы справедливо для группы структуры $\bar{G}_\Gamma^*$ с меньшим числом проходных букв и доказываем для числа проходных букв группы $\bar{G}_\Gamma^*$. Так же как и в предыдущем случае, на каждом шаге решаем проблему пересечения конечно порожденной подгруппы группы $\bar{G}_\Gamma^*$ с циклической из сомножителя и проблему пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы группы $\bar{G}_\Gamma^*$ с циклической подгруппой из сомножителя группы G_Γ.

В главе 3 разработаны алгоритмы для решения проблемы сопряженности конечно порожденных подгрупп в исследуемых группах. Доказательство проводится с использованием специального множества слов подгруппы исходной группы.

Основным результатом параграфа 3.1 является следующая теорема:

Теорема 3.1. [43] *В группе* $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \,|\, a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$, $|p_{ij}|, |p_{ji}| \geq 1$, $i \in I_1, j \in I_2$, *разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

Для доказательства группу G_Γ представляем в виде $G_\Gamma = G_{\Gamma_1} \underset{a_{n-1}^{p_{n-1}} = a_n^{p_n}}{*} \langle a_n \rangle$, где G_{Γ_1} – группа структуры G_Γ с меньшим числом образующих. Тогда образующие конечно порожденной подгруппы H группы G_Γ можно привести к специальному множеству, порождающему ту же самую подгруппу. С помощью специального множества доказываются вспомогательные утверждения: лемма 3.2., лемма 3.3., лемма 3.4., лемма 3.5., а затем непосредственно разрабатывается алгоритм решения проблемы сопряженности подгрупп в группе G_Γ.

В параграфе 3.2. решена проблема сопряженности подгрупп для группы Баумслага. Основной результат параграфа 3.2.:

Теорема 3.2. [36] *В группе* $B = \langle a, t; t^{-1} a^m t = a^n \rangle$, $|m|, |n| > 1$, *разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

В параграфе 3.3. дается обобщение теоремы 3.2. на HNN-расширение древесного произведения бесконечных циклических групп с объединением с циклическими ассоциированными подгруппами и, используя специальное множество слов, доказывается теорема

Теорема 3.3. [48] *В группе* $\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1} U_1 t = U_{-1} \rangle$, где $U_1 = \langle a_m^{s_{ml}} \rangle, U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}} \rangle$, *разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

Глава 1. Метод специального множества для решения некоторых алгоритмических проблем в свободных структурах групп

1.1. Построение специального множества слов для свободного произведения групп с объединением

Пусть даны группы G_1 и G_2, выделим в них изоморфные подгруппы $A < G_1$ и $B < G_2$; зафиксируем эффективный изоморфизм $\varphi: A \to B$. Тогда группа

$$G = \langle G_1 * G_2 | a = \varphi(a), a \in A \rangle$$

– является свободным произведением групп G_1 и G_2 с объединением A и B.

Известно [18], что каждый элемент свободного произведения $g \in G$ может быть единственным образом представлен в каноническом виде:

$$g = hg_1g_2 \dots g_k, \tag{1.1}$$

где $h \in A$ или $h \in B$, g_i – представители правых смежных классов группы G_1 по подгруппе A либо группы G_2 по подгруппе B; каждое $g_i \neq 1$ и рядом стоящие g_i и g_{i+1} содержатся в разных сомножителях группы G. Элемент $g_1g_2 \dots g_k$ является нормальной формой и называется словом группы G; g_i называются слогами слова (1.1).

Определение 1.1. [8] *Длиной (слоговой длиной) слова* $g = hg_1g_2 \dots g_k$ *называется число слогов* g_i *и обозначается* $l(g)$, *то есть* $l(g) = k$.

Рассмотрим слово $g^{-1} = g_k^{-1}g_{k-1}^{-1} \dots g_1^{-1}$, в котором g_i^{-1} – содержатся в левых смежных классах группы G_1 по подгруппе A либо группы G_2 по подгруппе B. Обозначим X – множество представителей правых классов смежности G_1 по A, а Y – множество представителей правых классов смежности G_2 по B, тогда X^{-1} – множество представителей левых классов смежности G_1 по A, а Y^{-1} – множество представителей левых классов смежности G_2 по B.

В связи с вышеизложенным, каждый элемент группы G может быть единственным образом представлен в виде:

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} K_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{1.2}$$

где r_{ig}, l_{ig}^{-1} – представители правых классов смежности групп G_1 и G_2 по объединяемым подгруппам, причем r_{ig}, $r_{i+1,g}$($l_{ig}, l_{i+1,g}$) принадлежат разным сомножителям группы G. Слог K_g – называется ядром. Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе $A = B$, то слоги l_{ng} и r_{ng} одновременно принадлежат либо G_1, либо G_2. Слоговая длина слова (1.2) равна $l(g) = 2n + 1$.

Определение 1.2. [8] *Слово (1.2), в котором* $r_{ng} \dots r_{1g} = \left(l_{1g} \dots l_{ng}\right)^{-1}$, *то есть слово*

$$g = r_{lg}^{-1} \dots r_{ng}^{-1} K_g r_{ng} \dots r_{1g} \tag{1.3}$$

называется трансформой. Подслово $r_{ng} \dots r_{1g}$ *(*$r_{lg}^{-1} \dots r_{ng}^{-1}$*) называется крылом трансформы.*

Если K_g принадлежит объединяемой подгруппе, то в (1.2) l_{ng} и r_{ng} принадлежат разным сомножителям группы G и длина слова

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} h_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{1.4}$$

где $h_g = K_g$, равна $l(g) = 2n$.

Определение 1.3. [8] *Слова вида* $l_{1g} \dots l_{ng} K_g r_{ng} \dots r_{1g}$ *или* $l_{1g} \dots l_{ng} h_g r_{ng} \dots r_{1g}$ *называются нетрансформами, причем слова вида (1.2) – нетрансформы нечетной длины, слова вида (1.4) – нетрансформы четной длины.*

Подслова $l_{1g} \dots l_{ng}$ – называются левой половиной слов (1.2), (1.4).

Рассмотрим конечное множество слов $W = \left\{w_{i},_{i=\overline{1,N}}\right\}$ группы G, каждое из которых приведено к виду (1.2), (1.3) или (1.4).

Определение 1.4. [8] *В множестве* $\left\{w_{i},_{i=\overline{1,N}}\right\}$ *левая (правая) половина некоторого слова* $w_i = l_{1w_i} \dots l_{mw_i} K_{w_i} r_{mw_i} \dots r_{1w_i}$ *называется изолированной, если ни у одного из слов* $w_j^{\varepsilon} (\varepsilon = \pm 1)$ *множества* $\left\{\left\{w_{i},_{i=\overline{1,N}}\right\} \backslash w_i\right\} \cup \left\{\left\{w_i^{-1},_{i=\overline{1,N}}\right\} \backslash w_i^{-1}\right\}$ *нельзя выделить* $l_{1w_i} \dots l_{mw_i} (r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$ *в качестве начального (конечного) подслова, то есть* $w_j^{\varepsilon} \neq l_{1w_i} \dots l_{mw_i} l_{m+1,w_j} w_{jn}^{\varepsilon}(w_j^{\varepsilon} \neq w_{jn}^{\varepsilon} r_{m+1,w_j} r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$, *где* $l_{mw_i} l_{m+1,w_j} (r_{m+1,w_j} r_{mw_i})$ *принадлежат разным сомножителям группы* G.

Определение 1.5. [8] *Назовем конечное множество* $W = \{w_i, _{i=\overline{1,N}}\}$ *слов группы* G *специальным, если оно удовлетворяет условиям:*

1) левая половина нетрансформы из множества $\{w_i, _{i=\overline{1,N}}\}$ *изолирована в нем; если нетрансформа есть слово четной длины, то изолированы и левая, и правая половины;*

2) длину нетрансформы w_{i_0}*, имеющей четную длину, нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством* $\{\{w_i, _{i=\overline{1,N}}\} \backslash w_{i_0}\}$*; длину произвольного элемента* $w_{i_0} \in \{w_i, _{i=\overline{1,N}}\}$ *нельзя уменьшить, умножая на слово* w *длины меньше* $l(w_{i_0})$ *принадлежащее подгруппе* $\langle\{w_i, _{i=\overline{1,N}}\}\rangle$*;*

3) пусть $w_{i_0}^{\varepsilon} = l_{1w_0} \dots l_{nw_0} K_{w_0} r_{nw_0} \dots r_{j+1,w_0} r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$, $\varepsilon = \pm 1$, $j < n$ *– нетрансформа из множества* $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ *и*

$$\left\{w_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} = l_{1w_{\alpha_i}} \dots l_{n_i w_{\alpha_i}} K_{\alpha_i} r_{n_i w_{\alpha_i}} \dots r_{j+1,w_{\alpha_i}} r_{jw_0} \dots r_{1w_0}\right\}_{i=\overline{1,N}}, \varepsilon_i = \pm 1,$$

– подмножество нетрансформ из множества $\{\{w_i, _{i=\overline{1,N}}\} \backslash w_i\} \cup \{\{w_i^{-1}, _{i=\overline{1,N}}\} \backslash w_i^{-1}\}$*, правая половина которых оканчивается подсловом* $r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$*, тогда, если подгруппа* $\langle\{w_i, _{i=\overline{1,N}}\}\rangle \cap r_{1w_0}^{-1} \dots r_{jw_0}^{-1} D r_{jw_0} \dots r_{1w_0} = H$*, где*

$$D \in \begin{cases} G_1, \text{когда } r_{j+1,w_0} \in G_2 \\ G_2, \text{когда } r_{j+1,w_0} \in G_1 \end{cases},$$

и D *не единична, то* $l(w_{i_0} u) \geq l(w_{i_0})$*, где* $u \in H, l(w_{i_0} u w_{\alpha_i}^{-\varepsilon_i}) \geq l(w_{i_0})$*;*

4) пусть $w_i = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l_{s+1,w_i} \dots l_{nw_i} K_{w_i} r_{mw_i} \dots r_{s+1,w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i}$

$$w_j = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l_{s+1,w_j} \dots l_{nw_j} K_{w_j} r_{mw_j} \dots r_{s+1,w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$$

– слова из $\{w_i, _{i=\overline{1,N}}\}$*, не обязательно различные,* $m \leq n, s \leq m,$ *тогда не существует слова* $g \neq 1$ *длины меньше* $2s$ *из подгруппы* $\langle\{w_i, _{i=\overline{1,N}}\},\rangle$ *такого, что если* $l_{1w_i} \dots l_{sw_i} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$*, то*

$$gw_i = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l'_{s+1,w_i} \dots l'_{nw_i} K'_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{s+1,w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i},$$

либо, если $r_{sw_i} \dots r_{1w_i} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, *то*

$$w_i g = l_{1w_i} \dots l_{nw_i} K'_{w_i} r'_{nw_i} \dots r'_{s+1,w_i} r_{iw_j} \dots r_{1w_j},$$

либо, если $r_{1w_i}^{-1} \dots r_{sw_i}^{-1} \neq l_{nw_j} \dots l_{sw_j}$, *то*

$$g w_i^{-1} = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} \left(r'_{s+1,w_i}\right)^{-1} \dots \left(r'_{nw_i}\right)^{-1} \left(K'_{w_i}\right)^{-1} l_{nw_i}{}^{-1} \dots l_{1w_i}{}^{-1},$$

либо, если $l_{sw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, *то*

$$w_i^{-1} g = r_{1w_i}^{-1} \dots r_{nw_i}^{-1} \left(K'_{w_i}\right)^{-1} \left(l'_{nw_i}\right)^{-1} \dots \left(l'_{s+1,w_i}\right)^{-1} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}.$$

Представим множество $\{w_{i},_{i=\overline{1,N}}\}$, следующим образом: разобьем все слова специального множества слов на множество нетрансформ M_0 и множества M_i – трансформ одного типа, содержащихся в одной подгруппе, сопряженной некоторой подгруппе из G_1 или G_2. Каждое из этих подмножеств порождает подгруппу (M_i). Для $i = \overline{1,k}$ подгруппа (M_i) имеет вид

$$(M_i) = r_{1i}^{-1} \dots r_{ni}^{-1} A_i r_{ni} \dots r_{1i},$$

здесь A_i – подгруппы из G_1 или G_2, порожденные ядрами трансформ. Подгруппы, порожденные трансформами, упорядочиваем по длинам крыльев их трансформ, получаем ряд:

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \dots \leq (M_k). \qquad (1.5)$$

Лемма 1.1. [8] *Ряд (1.5) можно преобразовать в ряд (1.6)*

$$(M'_1) < (M'_2) \dots < (M'_k) \qquad (1.6)$$

со следующими свойствами:

1) $gp(M_0, (M_1), \dots, (M_k)) = gp(M'_0, (M'_1), \dots, (M'_{k'}))$;

2) если подгруппе $\left(M'_j\right) = r_{1x}^{-1} \dots r_{nx}^{-1} A'_j r_{nx} \dots r_{1x}$, $1 \leq j' \leq k'$, *ряда (1.6) принадлежит трансформа* $u = r_{1x}^{-1} \dots r_{nx}^{-1} h r_{nx} \dots r_{1x}$, *где* h *принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда (1.6) имеется подгруппа* $(M'_i) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n-1,x}^{-1} A'_i r_{n-1,x} \dots r_{1x}$, *содержащая* u;

3) если для некоторой трансформы $u = r_{1x}^{-1} \dots r_{nx}^{-1} K_x r_{nx} \dots r_{1x}$; *принадлежащей подгруппе* $\left(M'_j\right) = r_{1x}^{-1} \dots r_{nx}^{-1} A'_j r_{nx} \dots r_{1x}$ *и нетрансформы из множества* M_0: $y = l_{1y} \dots l_{n_1 y} K_y r_{n_1 y} \dots r_{1y}, n_1 \geq n$, *(левая половина* y *изолирована)* *выполняется соотношение* $l(y^{-1}uy) \leq l(y)$, *то существует подгруппа* (M'_s) *ряда (1.6), содержащая трансформу* $y^{-1}(r_{1x}^{-1} \dots r_{nx}^{-1} K_x r_{nx} \dots r_{1x})y$, *если* $l(yuy^{-1}) < l(y)$, *то существует подгруппа* (M'_s), *содержащая трансформу* yuy^{-1};

4) если $(M'_j) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} A'_j r_{n_1x} \dots r_{1x}$,

$$(M'_s) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,y}^{-1} \dots r_{n_2y}^{-1} A'_s r_{n_2y} \dots r_{1x}$$

– подгруппы ряда (1.6), $n_2 > n_1$, *и подгруппа* (M'_j) *содержит трансформу* $u = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} h r_{n_1x} \dots r_{1x}$ *либо* $u' = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} K r_{n_1x} \dots r_{1x}$, *где* $K = r_{n_1+1,y}^{-1} h r_{n_1+1,y}$, *то существует подгруппа ряда (1.6):*

$$(M'_k) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,y}^{-1} A'_k r_{n_1+1,y} \dots r_{1x},$$

содержащая в первом случае трансформу u, *во втором –* u';

5) если $(M'_s) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} A'_s r_{n_1x} \dots r_{1x}$ *– подгруппа из ряда (1.6) и* y^{ε} *– элемент специального множества:*

$$y^{\varepsilon} = l_{1y} \dots l_{n_2y} K r_{n_2y} \dots r_{n_1+1,y} r_{n_1x} \dots r_{1x}, \ \varepsilon = \pm 1,$$

причем подслово $r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,y}^{-1}$ *не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы* w^{ε} $(\varepsilon = \pm 1)$ *и если подгруппа* (M'_s) *содержит трансформу* $r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} h r_{n_1x} \dots r_{1x}$, *либо трансформу* $r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} K r_{n_1x} \dots r_{1x}$, *где* $K = r_{n_1+1,y}^{-1} h r_{n_1+1,y}$, *то существует в ряде (1.6) подгруппа*

$$(M'_j) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,y}^{-1} A'_j r_{n_1+1,y} r_{n_1x} \dots r_{1x}$$

содержащая эту трансформу.

Лемма 1.2. [8] *Подгруппа* (M_0), *порожденная нетрансформами специального множества, свободна и не содержит трансформ.*

Подгруппу, порожденную специальным множеством $\{w_i, _{i=\overline{1,N}}\}$, будем обозначать $gp(M_0, S)$. Она представляет собой HNN – группу с основой S, являющуюся древесным произведением подгрупп ряда (1.6), правильной системой проходных букв которой служат элементы из M_0. Подгруппы (M_0) и (M_j), $j = \overline{1,k}$, из ряда (1.6) будем называть порождающими подгруппами подгруппы $\langle w_1, \dots, w_N \rangle = gp(M_0, S)$.

Лемма 1.3. [8] *Пусть* $w_j = l_{1j}^{-1} \ldots l_{kj}^{-1} l_{k+1,j}^{-1} \ldots l_{nj}^{-1} K_j l_{nj} \ldots l_{k+1,j} l_{kj} \ldots l_{1j}$ *слово из множества* $\{w_{i,i=\overline{1,N}}\} \cup \{w_i^{-1}{}_{,i=\overline{1,N}}\}$, *где* $v_j = l_{1j}^{-1} \ldots l_{kj}^{-1}$ *неизолирован в специальном множестве* $\{w_{i,i=\overline{1,N}}\} \cup \{w_i^{-1}{}_{,i=\overline{1,N}}\}$, *тогда если* $v_j^{-1} G_i v_j \cap gp(M_0, S) \neq \mathrm{E}$, *то существует подгруппа* $(M_i) = v_j^{-1} A_i v_j$ *принадлежащая ряду (1.6), причем* $G_i = \begin{cases} G_1, \text{если } l_{kj} \in G_2; \\ G_2, \text{если } l_{kj} \in G_1. \end{cases}$

Теорема 1.1. [8] *Пусть группа* $G = \langle \prod_{s=1}^{n} {}^* G_s; relG_1, \ldots, relG_n, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \rangle$ – *древесное произведение групп* G_s, $1 < s < n$, *объединенных по изоморфным подгруппам* $U_{ij} < G_i, U_{ji} < G_j$ *с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов* $\{\varphi_{ij}\}, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. *Тогда, если подгруппы* $U_{ij}, U_{ji}, i \epsilon I_1, j \epsilon I_2$ *обладают условием максимальности и в сомножителях* $G_S, 1 \leq s \leq n$, *разрешимы:*

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения класса смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_s$ *с подгруппой* U_{sj};

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_s$ *с подгруппой* U_{sj};

то существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов группы G *в специальное, порождающее подгруппу, совпадающую с подгруппой, порожденной исходным множеством и в группе* G *разрешима проблема вхождения.*

1.2. Построение специального множества слов для HNN-расширения

Пусть G – некоторая группа, выделим две изоморфные подгруппы U_1 и U_{-1} группы G, причем $\varphi: U_1 \to U_{-1}$ – изоморфизм подгрупп. Пусть $t \notin G$, тогда

$$G^* = \langle G, t; t^{-1}U_1 t = \varphi(U_1)\rangle$$

– называется HNN-расширением группы G относительно U_1, U_{-1} и φ. Группа G называется базой HNN-расширения, t – проходной буквой, U_1 и U_{-1} – ассоциированными подгруппами.

Известно [18], что каждый элемент $g \in G^*$ может быть представлен единственным образом в канонической форме:

$$g = B_1 t^{\varepsilon_1} B_2 t^{\varepsilon_2} \dots B_k t^{\varepsilon_k} B_{k+1}, \qquad (1.7)$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = \overline{1,k}$; слоги $B_j, j = \overline{1,k},$ являются представителями левого класса смежности G по подгруппе U_1, если $\varepsilon_j = 1$, и по подгруппе U_{-1}, если $\varepsilon_j = -1$: причем $B_s, s = \overline{1, k+1}$, будем называть слогами слова (1.7).

Пусть X – множество представителей левых смежных классов группы G по подгруппе U_1, аналогично Y – множество представителей левых смежных классов G по подгруппе U_{-1}. Тогда $\mathrm{X}^{-1} = \{x^{-1} | x \in X\}$ – множество представителей правых смежных классов группы G по U_1, $Y^{-1} = \{y^{-1} | y \in Y\}$ – множество представителей правых смежных классов группы G по U_{-1}.

Будем обозначать буквой l с индексом внизу элементы из $X \cup Y$, буквой r с индексом внизу – элементы из $X^{-1} \cup Y^{-1}$, тогда несократимое слово (1.7), имеющее нечетное число слогов, можно представить в виде:

$$g = t^{\alpha} l_{1_g} t^{\varepsilon_1} l_{2_g} t^{\varepsilon_2} \dots l_{s_g} t^{\varepsilon_s} K_g t^{\varepsilon'_s} r_{s_g} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1_g} t^{\beta} \qquad (1.8)$$

где $\alpha = 0, \pm 1, \beta = 0, \pm 1$, $\varepsilon_i = \pm 1, \varepsilon'_i = \pm 1$, $i = \overline{1,s}$, K_g – ядро слова g, причем, если $K_g \in U_{-1}$ и $\varepsilon'_s = -1$, то $\varepsilon_s \neq 1$, если $K_g \in U_1$ и $\varepsilon'_s = 1$, то $\varepsilon_s \neq -1$.

Несократимое слово, имеющее четное число слогов, может быть представлено в виде:

$$g = t^{\alpha} l_{1_g} t^{\varepsilon_1} l_{2_g} t^{\varepsilon_2} \dots l_{s_g} t^{\varepsilon_s} h r_{s_g} t^{\varepsilon'_{s-1}} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1_g} t^{\beta} \qquad (1.9)$$

где $\alpha = 0, \pm 1, \beta = 0, \pm 1$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = \overline{1, s}$, $\varepsilon'_j = \pm 1$, $j = \overline{1, s-1}$; $h \in U_1$, если $\varepsilon_s = -1$, и $h \in U_{-1}$, если $\varepsilon_s = 1$.

Под длиной слова g будем понимать число слогов несократимого равного ему слова g'. Длина слова (1.8) нечетная, равная $l(g) = 2s + 1$, длина слова (1.9) – четная: $l(g) = 2s$. Представление слова из HNN-расширения G^* в несократимой форме (1.8) или (1.9) будем называть каноническим представлением.

Определение 1.6. [2] *Слова, у которых* $t^{\alpha} l_{1_g} t^{\varepsilon_1} l_{2_g} t^{\varepsilon_2} \dots l_{s_g} t^{\varepsilon_s} = (t^{\varepsilon'_s} r_{s_g} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1_g} t^{\beta})^{-1}$,*то есть слова вида*

$$t^{\alpha} l_{1_g} t^{\varepsilon_1} l_{2_g} t^{\varepsilon_2} \dots l_{s_g} t^{\varepsilon_s} K_g t^{-\varepsilon_s} l_{s_g}^{-1} \dots t^{-\varepsilon_1} l_{1_g}^{-1} t^{-\alpha} \quad (1.10)$$

назовем трансформами. Подслова $t^{\alpha} l_{1_g} t^{\varepsilon_1} l_{2_g} t^{\varepsilon_2} \dots l_{s_g}$ *и* $t^{-\varepsilon_s} l_{s_g}^{-1} \dots t^{-\varepsilon_1} l_{1_g}^{-1} t^{-\alpha}$ *– крыльями трансформы.*

Определение 1.7. [2] *Если в слове* $t^{\alpha} l_{1_g} t^{\varepsilon_1} l_{2_g} t^{\varepsilon_2} \dots l_{s_g} t^{\varepsilon_s} \neq \neq (t^{\varepsilon'_s} r_{s_g} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1_g} t^{\beta})^{-1}$, *то оно называется нетрансформой, причем нетрансформы типа (1.8) – нетрансформы нечетной длины, а типа (1.9) – нетрансформы четной длины.*

В слове (1.8) начальный отрезок $t^{\alpha} l_{1_g} t^{\varepsilon_1} l_{2_g} t^{\varepsilon_2} \dots l_{s_g} t^{\varepsilon_s}$ назовем закрытой левой половиной, а конечный отрезок $t^{\varepsilon'_s} r_{s_g} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1_g} t^{\beta}$ назовем закрытой правой половиной; отрезок $t^{\alpha} l_{1_g} t^{\varepsilon_1} l_{2_g} t^{\varepsilon_2} \dots l_{s_g} t^{\varepsilon_s} K_g t^{\varepsilon'_s}$ – закрытым большим начальным отрезком, отрезок $t^{\varepsilon_s} K_g t^{\varepsilon'_s} r_{s_g} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1_g} t^{\beta}$ – закрытым большим конечным отрезком.

В слове $g = t^{\alpha} B_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_{i-1}} B_i t^{\varepsilon_i} \dots B_k t^{\varepsilon_k} B_{k+1} t^{\beta}$, где $\alpha = 0, \pm 1, \beta = 0, \pm 1$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = \overline{1, k}$, отрезок $t^{\alpha} B_1 t^{\varepsilon_1} B_2 t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_{i-1}} B_i$ назовем начальным открытым отрезком, а $t^{\alpha} B_1 t^{\varepsilon_1} B_2 t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_{i-1}} B_i t^{\varepsilon_i}$ – начальным закрытым отрезком. Аналогичные понятия вводятся для конечных отрезков.

Пусть $W = \{w_{i}, _{i=\overline{1,N}}\}$ – конечное множество слов подгруппы G^*, каждое из которых приведено к виду (1.8), (1.9) либо (1.10).

Определение 1.8. [2] *Будем говорить, что у слова* $w_j^{\varepsilon} = t^{\alpha_j} B_1 t^{\varepsilon_1} \dots B_k t^{\varepsilon_k} B_{k+1} t^{\beta_j}$, *где* $\alpha_j = 0, \pm 1, \beta_j = 0, \pm 1, \varepsilon = \pm 1, \varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1,k}$, $w_j \in W$, *закрытый начальный отрезок изолирован в* W, *если он не является начальным отрезком ни у какого* w_i^{η}, $\eta = \pm 1$, $w_i \in (W \backslash w_j)$.

Определение 1.9. [2] *Назовем конечное множество слов* $W = \{w_{i, i=\overline{1,N}}\}$ *группы* G^* *специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1) закрытая левая половина слова $w_i \in W$, *являющегося нетрансформой, изолирована в* W; *если* w_i *– нетрансформа четной длины, то ее закрытая левая половина и закрытая правая половина изолированы в* W;

2) длину слова $w_i \in W$ *нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слово* $v \in \langle\{w_{i, i=\overline{1,N}}\}\rangle$, $l(v) < l(w_j)$;

3) пусть $w_j^{\varepsilon} = t^{\alpha} l_{1_{w_j}} t^{\varepsilon_1} \dots l_{s_{w_j}} t^{\varepsilon_s} K_{w_j} t^{\varepsilon'_s} r_{s_{w_j}} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1_{w_j}} t^{\beta}$, *где* $\alpha = 0, \pm 1, \beta = 0, \pm 1, \varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1,s}$, w_j *– нетрансформа вида (1.8) из* W *либо*

$$w'^{\varepsilon}_j = t^{\alpha} l_{1_{w_j}} t^{\varepsilon_1} \dots l_{s_{w_j}} h t^{\varepsilon'_s} r_{s_{w_j}} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1_{w_j}} t^{\beta},$$

где w'_j *– нетрансформа вида (1.9) из* W *и*

$$\left\{w_y^{\eta_y} = t^{\alpha_y} l_{1_{w_y}} t^{\varepsilon_{1y}} \dots l_{s_{w_y}} t^{\varepsilon_{sy}} \dots r_{i+1, w_j} t^{\varepsilon'_i} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1_{w_j}} t^{\beta}\right\},$$

где $\eta_y = \pm 1$, $\alpha_y = 0, \pm 1$; *подмножество нетрансформ из* $\left\{\{w_{i, i=\overline{1,N}}\} \backslash w_j\right\} \cup \left\{\{w_i^{-1}, {}_{i=\overline{1,N}}\} \backslash w_j^{-1}\right\}$, *закрытая правая половина которых оканчивается на* $t^{\varepsilon'_i} r_{i_{w_j}} t^{\beta} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1_{w_j}} t^{\beta}$, *тогда если подгруппа*

$$H = \langle\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}\rangle \cap t^{-\beta} r_{1_{w_j}}^{-1} t^{-\varepsilon'_1} \dots r_{i_{w_j}}^{-1} t^{-\varepsilon'_i} G t^{\varepsilon'_i} r_{i_{w_j}} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1_{w_j}} t^{\beta} \neq E$$

*(*E *– единичная подгруппа), то* $l(w_j u) \geq l(w_j)$, $l(w_j u w_x) \geq l(w_j)$, *где* $u \in H$, $w_x \in \{W \cup W^{-1}\}$;

4) пусть $w_i^{\varepsilon} = t^{\alpha_1} l_{1_{w_i}} t^{\varepsilon_1} \dots l_{p_{w_i}} t^{\varepsilon_p} \dots t^{\varepsilon'_s} r_{s_{w_i}} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1_{w_i}} t^{\beta_1}$,

$w_j^{\eta} = t^{\alpha_2} l_{1_{w_j}} t^{\eta_1} \dots l_{p_{w_j}} t^{\eta_p} \dots t^{\eta'_i} r_{i_{w_j}} \dots t^{\eta'_1} r_{1_{w_j}} t^{\beta_2}$,

$\alpha_t = 0, \pm 1, \beta_t = 0, \pm 1, \quad t = 1,2, \ \varepsilon_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1$ – *слова из множества* $\{w_{i,i=\overline{1,N}}\} \cup \{w_i^{-1}{}_{,i=\overline{1,N}}\}$, *не обязательно различные,* $t^{\alpha_1} l_{1_{w_i}} t^{\varepsilon_1} \ldots l_{p_{w_i}} t^{\varepsilon_p}$ – *начальное подслово левой половины* w_i^{ε}, $t^{\alpha_2} l_{1_{w_j}} t^{\eta_1} \ldots l_{p_{w_j}} t^{\eta_p}$ *– начальное подслово левой половины* w_j^{η}, *если* $t^{\alpha_1} l_{1_{w_i}} t^{\varepsilon_1} \ldots l_{p_{w_i}} t^{\varepsilon_p} \neq t^{\alpha_2} l_{1_{w_j}} t^{\eta_1} \ldots l_{p_{w_j}} t^{\eta_p}$, *то не существует слова* $w \neq 1, l(w) < 2p, w \in \langle \{w_{i,i=\overline{1,N}}\} \rangle$ *такого, что*

$$w w_j^{\eta} = t^{\alpha_1} l_{1_{w_i}} t^{\varepsilon_1} \ldots t^{\varepsilon_{p-1}} \, l_{p_{w_i}} t^{\eta_p} l'_{p+1, w_j} \ldots t^{\eta'_i} r_{i_{w_j}} \ldots t^{\eta'_1} r_{1_{w_j}} t^{\beta_2}.$$

Разобьем множество $\{w_{i,i=\overline{1,N}}\}$ на подмножества: трансформы с одинаковыми крыльями объединим в подмножество M_i, $1 \leq i \leq k$, все нетрансформы из $\{w_{i,i=\overline{1,N}}\}$ объединим в множество M_0. Каждое множество $M_i, 1 \leq i \leq k$, порождает подгруппу:

$$(M_i) = t^{-\alpha_i} r_{1i}^{-1} t^{-\varepsilon_{1i}} \ldots r_{ni}^{-1} t^{-\varepsilon_{n,i}} A_i h t^{\varepsilon_{n,i}} r_{ni} \ldots t^{\varepsilon_{1i}} r_{1i} \, t^{\alpha_i},$$

где $\alpha_i = 0, \pm 1, \varepsilon_{ij} = \pm 1$, $\quad A_i$ – подгруппа группы G, порожденная ядрами трансформ с крыльями $t^{-\alpha_i} r_{1i}^{-1} t^{-\varepsilon_{1i}} \ldots r_{n,i}^{-1} t^{-\varepsilon_{n,i}}$. Упорядочиваем множество подгрупп (M_i) по длине крыльев трансформ:

$$(M_{i_1}) \leq (M_{i_2}) \leq \cdots \leq (M_{i_k}). \tag{1.11}$$

Лемма 1.4. [2] *Существует алгоритм преобразующий ряд (1.11) в ряд (1.12)*

$$(M'_{i_1}) \leq (M'_{i_2}) \leq \cdots \leq (M'_{i_{k'}}), \tag{1.12}$$

обладающий свойствами:

1) $gp\left((M_0), (M_{i_1}), \ldots, (M_{i_k})\right) = gp\left((M'_0), (M'_{i_1}), \ldots, (M'_{i_{k'}})\right)$;

2) если подгруппе $(M'_j) = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\varepsilon_{1j}} \ldots r_{n_j,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n_j,j}} A'_j t^{\varepsilon_{n_j,j}} r_{n_j,j} \ldots t^{\varepsilon_{1j}} r_{1j} t^{\alpha_j}$, *где* $\alpha_j = 0, \pm 1$ *ряда (1.12) принадлежит трансформа*

$$w = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\varepsilon_{1j}} \ldots r_{n_j,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n_j,j}} h t^{\varepsilon_{n_j,j}} r_{n_j,j} \ldots t^{\varepsilon_{1j}} r_{1j} t^{\alpha_j},$$

где $h \in U_1$, *если* $\varepsilon_{n_j,j} = 1$ *и* $h \in U_{-1}$, *если* $\varepsilon_{n_j,j} = -1$, *то среди подгрупп ряда (1.12) содержится подгруппа*

$$(M'_{i_s}) = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\varepsilon_{1j}} \ldots r_{n_j-1,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n_j-1,j}} A'_{i_s} t^{\varepsilon_{n_j-1,j}} r_{n_j-1,j} \ldots r_{1j} t^{\alpha_j},$$

которая содержит w;

3) пусть для некоторой трансформы $w \in (M'_j)$ *и некоторой нетрансформы* $Y \in M_0$ *при* $l(Y) = 2m + 1$, $l(w) \leq l(Y)$, *(левая закрытая половина* Y *изолирована) и* $l(Y^{-1}wY) \leq l(Y)$ *существует подгруппа* (M'_{i_s}) *ряда (1.12), содержащая* $Y^{-1}wY$, *а при* $l(Y^{\epsilon}wY^{-\varepsilon}) < l(Y)$ *и* $l(Y) = 2m + 1$ *либо* $l(Y) = 2m$, $l(w) < l(Y)$, *существует* (M'_{i_s}) *из (1.12), содержащая* $Y^{\epsilon}wY^{-\varepsilon}$;

4) пусть $(M'_{ij}) = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\varepsilon_{1j}} \dots r_{n_j,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n_j,j}} A'_j t^{\varepsilon_{n_j,j}} r_{n_j,j} \dots r_{1j} t^{\alpha_j}$ *– подгруппа ряда (1.12) и* $v = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\varepsilon_{1j}} \dots r_{n_j,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n_j,j}} l_{n_j+1, w_i^{\varepsilon}} t^{\varepsilon_{n_j+1}}$ *– подслово левой половины* w_i^{ε} *в специальном множестве* $\{w_{i},_{i=\overline{1,N}}\}$, *тогда если подгруппе* (M'_{ij}) *принадлежит трансформа* $w \in vGv^{-1}$ *, то ряду (1.12) принадлежит подгруппа* $(M'_{i_s}) = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\varepsilon_{1j}} \dots r_{n_j,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n_j,j}} l_{n_j+1, w_i^{\varepsilon}} t^{\varepsilon_{n_j+1}} A'_{i_s} t^{-\varepsilon_{n_j+1}} \dots r_{1j} t^{\alpha_j}$ *и* $w \in (M'_{i_s})$.

На основании леммы 1.4., подгруппа, порожденная специальным множеством $\langle\{w_{i},_{i=\overline{1,N}}\}\rangle$, совпадает с подгруппой $gp(M_0, S)$, где M_0 – множество нетрансформ $\langle\{w_{i},_{i=\overline{1,N}}\}\rangle$, S – подгруппа, порожденная подгруппами $\{(M_j),_{j=\overline{1,N}}\}$. Назовем S основой группы $gp(M_0, S)$, а подгруппы $(M_0), \{(M_j),_{j=\overline{1,N}}\}$ – порождающими подгруппами.

Лемма 1.5. [2] *Пусть* $(M_{ij}) = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\varepsilon_{1j}} \dots r_{n_j,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n_j,j}} A_j t^{\varepsilon_{n_j,j}} r_{n_j,j} \dots r_{1j} t^{\alpha_j}$ *– порождающая подгруппа* $gp(M_0, S)$, *принадлежащая ряду (1.12), тогда*

$$v^{-1}Gv \cap gp(M_0, S) = (M_{ij}),$$

где $v^{-1} = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\varepsilon_{1j}} \dots r_{n_j,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n_j,j}}$.

Теорема 1.2. [2] *Пусть* $G^* = \langle G, t; t^{-1}U_1 t = \varphi(U_1)\rangle$ *– HNN-расширение группы* G *с помощью изоморфных подгрупп* U_1, U_{-1} *и фиксированного изоморфизма* φ. *Если подгруппы* U_1, U_{-1} *обладают условием максимальности и в группе* G *разрешимы:*

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ *с каждой из подгрупп* U_1, U_{-1};

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ *с любой из выделенных подгрупп* U_1, U_{-1} *; то существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов группы* G^* *в специальное, порождающее подгруппу, совпадающую с подгруппой, порожденной исходным множеством, а также в группе* G^* *разрешима проблема вхождения.*

1.3. Свойства специального множества

Пусть образующие некоторой подгруппы H группы G_Γ (2) или F_Γ (1) (аналогично для $H < \bar{G}_\Gamma$ (3) и $H < \bar{G}_\Gamma^*$ (4)) можно переписать в виде специального множества, то есть $H = \langle w_1, \dots, w_N \rangle = gp(M_0, S)$, где M_0 – множество нетрансформ, множество S порождено подгруппами ряда

$$\left(M_1\ \right) < \left(M_2\ \right) \dots < (M_k\ ), \tag{1.13}$$

удовлетворяющих свойствам лемм 1.1. и 1.4.

Определение 1.10. [2;8] *Произведение $u_1 u_2 \dots u_k$ назовем словом подгруппы $\langle w_1, \dots, w_N \rangle = gp(M_0, S)$ группы H, если:*

1) $u_i \neq 1$;

2) $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, либо u_i принадлежит некоторой подгруппе из ряда (1.13);

3) $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$;

4) $u_i; u_{i+1}$ – не содержатся в одной подгруппе ряда (1.13);

5) в $u_1 u_2 \dots u_k$ нет произведения $u_i u_{i+1} u_{i+2}$, где $u_i = (u_{i+2})^{-1}$, $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, $u_{i+1} \in \left(M_j\right)$ и $u_i u_{i+1} u_{i+2} \in (M_s)$, где $\left(M_j\right), (M_s)$ подгруппы из ряда (1.13).

Лемма 1.6. [2;8] *Всякое произведение $w_{i_1}^{\varepsilon_1} w_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots w_{i_n}^{\varepsilon_n}, \varepsilon_j = \pm 1$, где w_{i_j} – образующие подгруппы $\langle \{ w_{i}, _{i=\overline{1,N}} \} \rangle$, через конечное число шагов можно привести к слову $u_{i_1} \dots u_{i_k}$, $k \leq n$, подгруппы $gp(M_0, S)$.*

Определение 1.11. [2;8] *Будем говорить, что между словами v_1 и v_2 имеет место касание первого, второго или третьего рода, если длина произведения $v_1 v_2$ соответственно больше, равна или меньше $max\{l(v_1), l(v_2)\}$.*

Определение 1.12. [2;8] *Слово $u_1 u_2 \dots u_k$ является простым, если $l(u_1 u_2 \dots u_k) = max\{l(u_1), l(u_2), \dots, l(u_k)\}$.*

Лемма 1.7. [8] Если $u_1 u_2 \dots u_n$ – слово подгруппы $gp(M_0, S)$, то $l(u_1 u_2 \dots u_n) \geq l(u_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Следствие 1.1. [8] *Если в слове* $u_1u_2\dots u_n$ *выполнить сокращения, то в нем сокращение не затронет, по крайней мере, левую половину* u_1.

Следствие 1.2. [8] *Всякое слово подгруппы* $gp(M_0, S)$ *может быть представлено в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода.*

Следствие 1.3. [8] *Простое слово* $u_1u_2\dots u_n$ *подгруппы* $gp(M_0, S)$ *может быть одного из следующих видов:*

a) $u_1u_2\dots u_n$ *содержит нетрансформу максимальной длины, то есть* $l(u_i) > l(u_j), 1 \le j \le i-1, i+1 \le j \le k$;

b) слово $u_1u_2\dots u_n$ *содержит нетрансформу* u_i *и трансформу* u_{i+1} *максимальной длины, то есть* $l(u_i) = l(u_{i+1}) = l(u_iu_{i+1})$, $l(u_i) > l(u_j)$, $1 \le j \le i-1, i+2 \le j \le k$;

c) слово $u_1u_2\dots u_n$ *содержит нетрансформы* u_i, u_{i+2} *и трансформу* u_{i+1} *со свойствами* $l(u_i) = l(u_{i+2})$, $l(u_i) = l(u_iu_{i+2}) = l(u_iu_{i+1}u_{i+2})$, $l(u_i) > l(u_j)$, $1 \le j \le i-1, i+3 \le j \le k$; *причем длина слова* u_{i+1} *может оказаться меньше длины* u_i;

d) слово $u_1u_2\dots u_n$ *содержит трансформу* u_i *максимальной длины.*

Пусть $u_1u_2\dots u_n$ – простое слово одного из видов a) $- d)$; подслово его, начинающееся и заканчивающееся символами максимальной длины, обозначим w. Тогда $u_1u_2\dots u_n = u_1\dots u_{i-1}wu_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_r}$.

В [2] показано, что простое слово $u_1u_2\dots u_n$ разбивается на подслова:

$$u_1\dots u_{i_{k_1}}, u_{i_{k_1}+1}\dots u_{i_{k_2}}, \dots, u_{i_{k_s}+1}\dots u_{i-t-1}, t = 0 \text{ или } t = 1 \quad (1.14)$$

$$u_{i_1+p}\dots u_{i_{t_1}}, u_{i_{t_1}+1}\dots u_{i_{t_2}}, \dots, u_{i_{t_m}+1}\dots u_n \quad (1.15)$$

где *p=0* либо *p=1*, со следующими свойствами слов (1.14): $l(u_1) \le l(u_2) \le \dots \le l\left(u_{i_{k_1}}\right), l\left(u_{i_{k_1}+1}\right) \le \dots \le l(u_{i-t-1})$. Причем для любой пары рядом стоящих подслов $u_{i_{k_\alpha}-1}\dots u_{i_{k_\alpha}}$ и $u_{i_{k_\alpha}+1}\dots u_{i_{k_\alpha}}$, $u_{i_{k_\alpha}}$ – нетрансформа, $u_{i_{k_\alpha}+1}$– трансформа, $l\left(u_{i_{k_\alpha}+1}\right) < l\left(u_{i_{k_\alpha}}\right) < l\left(u_{i_{k_\alpha}+2}\right)$; $l\left(u_{i_{k_\alpha}}\right) = l\left(u_{i_{k_\alpha}}u_{i_{k_\alpha}+1}\right)$. Для подслов (1.15) выполняются симметрические соотношения.

Глава 2. Проблема сопряженности слов в древесных конструкциях групп

2.1. Разрешимость проблемы сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с объединением по циклическим подгруппам

2.1.1. Постановка задачи

Пусть Г – конечное дерево, вершины которого обозначены числами из множества $\{1,2,\dots,n\}$, и пусть каждой вершине i сопоставлена свободная группа F_{m_i} конечного ранга m_i. Предположим, что для каждой пары i и j смежных вершин графа Г в группах F_{m_i} и F_{m_j} фиксированы неединичные циклические подгруппы, порождаемые элементами $v_{ij}^{p_{ij}}$ и $v_{ji}^{p_{ji}}$ соответственно, причем v_{ij} и v_{ji} не являются истинными степенями в соответствующей группе. Древесным произведением $F_{m_1}, F_{m_2}, \dots, F_{m_n}$ с объединенными подгруппами $\langle v_{ij}^{p_{ij}} \rangle$ и $\langle v_{ji}^{p_{ji}} \rangle$ называется фактор группа F_Γ свободного произведения групп $F_{m_1}, F_{m_2}, \dots, F_{m_n}$ по нормальному замыканию множества, состоящего из всевозможных элементов вида $v_{ij}^{p_{ij}} v_{ji}^{-p_{ji}}$. В работе [31] показано, что группы $F_{m_1}, F_{m_2}, \dots, F_{m_n}$ вложимы в группу F_Γ естественным образом.

Копредставление группы F_Γ имеет вид:

$$F_\Gamma = \langle \prod_{i=1}^{n} * F_{m_i} | v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{p_{ji}} \rangle, n \geq 2, |p_{ij}|, |p_{ji}| \geq 1, \ \ i \in I_1, j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty.$$

Основным результатом параграфа 2.1. является решение проблемы сопряженности слов для древесного произведения свободных групп с циклическим объединением.

Доказательство будем проводить по числу сомножителей древесного произведения F_Γ. Базу индукции при $n = 2$ обеспечивает результат С.Липшуца. Пусть $n > 2$. Без потери общности можно считать, что вершина n графа Г является концевой и что смежной с ней является вершина $(n-1)$. Обозначим через Γ_{n-1} полный подграф графа Γ с вершинами $\{1,2,\dots,n-1\}$ и через $F_{\Gamma_{n-1}}$ соответствующее древесное произведение групп $F_{m_1}, F_{m_2}, \dots, F_{m_{n-1}}$ с теми же объединенными подгруппами. В соответствии с [31] группа F_{Γ} является свободным произведением

$$F_{\Gamma} = F_{\Gamma_{n-1}} \underset{C_n}{*} F_{m_n}$$

групп $F_{\Gamma_{n-1}}$ и F_{m_n} с объединенной подгруппой $C_n = \langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \rangle = \langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \rangle$, где $v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \in F_{m_{n-1}}$, $v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \in F_{m_n}$.

Следуя индукции предполагаем, что в группе $F_{\Gamma_{n-1}}$ с меньшим числом сомножителей проблема сопряженности слов разрешима. Для доказательства проблемы сопряженности в группе F_{Γ} рассмотрим следующие утверждения:

2.1.2. Вспомогательные утверждения

Лемма 2.1. [42] *В группе F_{Γ} разрешимы следующие алгоритмические проблемы:*

I) алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы $H < F_{\Gamma}$ и циклической подгруппы $\langle w \rangle < F_{m_i}$, $i = \overline{1,n}$, найти образующие $H \cap \langle w \rangle$;

II) алгоритм, позволяющий для любого слова $v \in F_{\Gamma}$ и конечно порожденной подгруппы $H < F_{\Gamma}$, выяснить пусто или не пусто пересечение $vH \cap \langle w \rangle$, где $\langle w \rangle < F_{m_i}$, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции.

Известно [8], что существует алгоритм, позволяющий в свободной группе выписывать образующие пересечения двух конечно порожденных подгрупп. Докажем базу индукции для существования алгоритмов, позволяющих решить проблемы I и II в группе

$$G = F_m \underset{C}{*} F_n ,$$

где $F_m,$ F_n – свободные группы конечного ранга, C – циклическая подгруппа. Пусть $H < G$ – конечно порожденная подгруппа. Пусть слово $w \in F_m$, $w \neq 1$ и докажем, что существует алгоритм, выписывающий образующие $H \cap \langle w \rangle$.

Приводим образующие подгруппы H к специальным образующим, тогда $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \ldots \leq (M_k). \qquad (2.1)$$

Выясняем, существует ли среди подгрупп ряда (2.1) подгруппа, содержащаяся в F_m. Допустим $(M_1) < F_m$, подгруппа (M_1) находится в начале ряда (2.1) и состоит из трансформ с крыльями равными 1. Тогда в силу леммы 1.3. и в силу [4] определяем пересечение $(M_1) \cap \langle w \rangle = H \cap \langle w \rangle$.

В [8] указан алгоритм, позволяющий установить пусто ли пересечение $vH \cap \langle w \rangle$, где H и $\langle w \rangle$ подгруппы свободной группы. Докажем базу индукции: существование алгоритма, позволяющего в группе $G = F_m *_C F_n$ для любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ и произвольного слова $v \in G$, $v \notin H$ и $w \in F_m$ выяснить пусто или непусто пересечение $vH \cap \langle w \rangle$. Пусть $u \in H$, $u = u_1 u_2 \ldots u_n$. В произведении vu будут проходить сокращения в следующих случаях:

а) если u_1 – трансформа, то выделим в слове v справа подслово $v_П$ максимальной длины: $v = v_Л v_П = v'_Л K_0 v_П$, в котором $v_П$ совпадает с крыльями одной из подгрупп ряда (2.1): $(M_i) = v_П^{-1} A_i v_П$. Выясняем: существует ли среди трансформ подгруппы (M_i) такая $v_П^{-1} K_1 v_П$, что произведение $K_0 K_1$ принадлежит объединяемой подгруппе C. Так как $K_1 \in (A_i)$, то $K_0 K_1 \in C$, тогда случай сводится к пересечению $K_0 (A_i) \cap C$.

б) если u_1 – нетрансформа с неизолированной левой половиной: $u_1 = v_П^{-1} K_2 v'$, где $v_П$ является крылом одной из трансформ ряда (2.1): $(M_i) = v_П^{-1} A_i v_П$. Выясняем: существует ли среди трансформ подгруппы (M_i) такая $v_П^{-1} K_1 v_П$, что произведение $K_0 K_1 K_2 \in C$. Случай сводится к пересечению $K_0 K_2 (K_2^{-1} (A_i) K_2) \cap C$.

в) если u_1 – нетрансформа с изолированной левой половиной: u_1=$v_{\Pi}^{-1}Kv'$, v_{Π}^{-1} – изолирована и среди подгрупп ряда (2.1) содержится подгруппа $\left(M_j\right) = v'^{-1}A_jv'$, а так же среди нетрансформ содержится u_2=$v'^{-1}K_2v''$. Выясняем: существует ли среди трансформ подгруппы (M_j) такая $v'^{-1}K_1v'$, что произведения $K_0K_1K_2$ или $K_0KK_1K_2$ принадлежат объединяемой подгруппе C. Случай сводится к пересечению $K_0K(A_i)\ \cap C$ или $K_0KK_2(K_2^{-1}(A_i)K_2) \cap C$;

г) если пункты а, б, в не выполняются, то выясняем, возможно ли подслово K_0v_{Π} перевести в подслово некоторого образующего подгруппы $gp(M_0, S)$ умножением на слово длины $(2l(v_{\Pi}) + 1)$. При этом используем рассуждения аналогичные пунктам а, б.

Через конечное число шагов построим приведенное слово vu.

В том случае, если $l(vu) > 1$, то пересечение $vH \cap \langle w\rangle$ пусто. Если $l(vu) = 1$, выясняем существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1}A_ig_i$ ряда (2.1) подгруппа состоящая из трансформ с крыльями равными единице: $\left(M_{s_1}\right) = A_{s_1} < F_m$ и рассматриваем пересечение $vu\left(M_{s_1}\right) \cap \langle w\rangle$.

Возможно, что подгруппа $\langle w\rangle$ принадлежит объединяемой подгруппе. В таком случае, при $vu\left(M_{s_1}\right) \cap \langle w\rangle = E$, аналогичные рассуждения нужно провести для $\langle w\rangle < F_n$.

Имея базу индукции, предполагаем, что утверждение леммы справедливо для группы структуры F_Γ, имеющей меньше n сомножителей, и докажем для n сомножителей.

В дереве Г группы F_Γ зафиксируем произвольную вершину i и выберем некоторое ребро e_i, выходящее из нее. Пусть ребро e_i связывает вершины i и j, которым соответствуют свободные группы F_{m_i} и F_{m_j} соответственно, а ребру e_i соответствует объединяемая подгруппа $C_{ij} = \langle v_{ij}^{p_{ij}}\rangle = \langle v_{ji}^{p_{ji}}\rangle$. Если удалить ребро e_i, то граф Г распадается на два подграфа Γ_i и Γ_j, а группу F_Γ можно представить в виде свободного произведения с циклическим объединением $F_\Gamma\ = F_{\Gamma_i} *_{C_{ij}} F_{\Gamma_j}$, где F_{Γ_i} и F_{Γ_j} есть древесные произведения свободных групп с циклическими объединениями.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа, такая что

$$H < F_{\Gamma} = F_{\Gamma_i} \underset{C_{ij}}{*} F_{\Gamma_j}.$$

Для подгрупп F_{Γ_i} и F_{Γ_j} выполняются все условия теоремы 1.1., а следовательно образующие подгруппы H можно привести к специальным образующим, а подгруппу Н к виду $H = gp(M_0, S)$, где S порождена подгруппами ряда

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \ldots \leq (M_k). \qquad (2.2)$$

Выберем слово $w \in F_{\Gamma_i}, w \neq 1$, $w \in F_{m_i}$ и докажем существование алгоритма, выписывающего пересечение $H \cap \langle w \rangle$. Выясняем, существует ли в S подгруппа (M_{s_1}), состоящая из трансформ длины 1, которая содержится в F_{Γ_i}. Используя индуктивное предположение, определяем пересечение $(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle$. Таким образом $(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle = H \cap \langle w \rangle$.

Пусть $w \in F_{\Gamma}$, докажем существование алгоритма, определяющего пусто или непусто $vH \cap \langle w \rangle$. Пусть слово $u = u_1 u_2 \ldots u_n \in H$, рассмотрим в каких случаях в произведении vu будут проходить сокращения: а)-г), как в случае группы $G = F_m \underset{C}{*} F_n$.

В результате через конечное число шагов построим слово vu. Пусть получили $l(vu) = 1$. Тогда выясняем существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1} A_i g_i$ ряда (2.2) подгруппа $(M_{s_1}) = A_{s_1}$ и рассматриваем $vu(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle$.

Проблемы I) и II) решены, если $\langle w \rangle \nless C_{ij} = \langle v_{ij}^{p_{ij}} \rangle = \langle v_{ji}^{p_{ji}} \rangle$, если же $\langle w \rangle < C_{ij}$, то подобные рассуждения нужно провести для $w \in F_{\Gamma_j}$.

Лемма доказана.

Теорема 2.1. [19] *Пусть* $G = A \underset{H=K}{*} B$. *Тогда каждый элемент группы* G *сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Далее, пусть* g − *циклически несократимый элемент группы* G. *Тогда*

(i) *если* g *сопряжен с элементом* $h \in H$, *то* g *лежит в* A *или в* B *и существует последовательность элементов* $h_1, h_2, \dots, h_l, g$, *где* $h_i \in H$, *соседние члены которой сопряжены в* A *или в* B;

(ii) *если* g *сопряжен с элементом* g', *причем* $g' \in A$ *или* $g' \in B$, *но* g *не лежит в подгруппе, сопряженной с* H, *то* g *и* g' *лежат в одном сомножителе (в* A *или в* B*) и сопряжены в нем;*

(iii) *если* g *сопряжен с элементом* $p_1, p_2, \dots, p_r$, *где* $r \geq 2$, *и* p_i, p_{i+1} *так же как и* p_1, p_r, *не лежат в одном сомножителе, то* g *можно получить, циклически переставляя* $p_1, p_2, \dots, p_r$, *а затем трансформируя полученный элемент подходящим элементом из* H.

Утверждение 2.1. *Пусть* F_{m_n} *свободная группа,* $C_n < F_{m_n}$ − *циклическая подгруппа,* $C_n = \langle v^p \rangle$, *где* $v \in F_{m_n}$ *и* v *не является истинной степенью ни одного элемента из* F_{m_n}.

Пусть $g \in F_{m_n}$ *такой, что* $g^{-1}hg = h'$, $h, h' \in C_n$, *тогда* $h = h'$.

Доказательство. По условию имеем $g^{-1}hg = h'$, $h, h' \in C_n = \langle v^p \rangle$. Предположим, что $h \neq h'$. Пусть $h = v^{pr_1}$ и $h' = v^{pr_2}$. Тогда

$$g^{-1}v^{pr_1}\, g = v^{pr_2} \tag{2.3}$$

Рассмотрим подгруппу $A = \langle g, v | g^{-1}v^{pr_1}\, g = v^{pr_2} \rangle$, $A < F_{m_n}$. Как известно подгруппа свободной группы свободна [18]. Учитывая тот факт, что v не является истинной степенью элементов из F_{m_n} имеем, что g и v являются степенями одного и того же элемента. Пусть например $g = v^t$, где $1 < t < p$. Тогда равенство (2.3) возможно лишь в случае $r_1 = r_2$, следовательно $h = h'$, и утверждение справедливо.

Приведем новое доказательство теоремы С. Липшуца о сопряженности слов.

Теорема 2.2. *Пусть* $G = F_m *_C F_n$ *− есть свободное произведение двух свободных групп конечного ранга с объединением по циклической подгруппе* $C = \langle v^p \rangle = \langle w^q \rangle$, $v \in F_m$, $w \in F_n$; $u_1, u_2 \in G$ *− два циклически приведенных элемента равной длины и* $h \in C$. *Тогда существует алгоритм, позволяющий установить, сопряжены* u_1, u_2 *в группе* G *или нет.*

Доказательство.

1) Пусть $u_1 = h \in C = \langle v^p \rangle = \langle w^q \rangle$, $u_2 \in G$ − циклически несократимый элемент, u_1, u_2 сопряжены в G, то есть существует $z \in G$: $z^{-1}hz = u_2$.

Пусть $z = g_1 g_2 \dots g_k$ − нормальная форма z в G, $g_i \notin C$, $i = \overline{1,k}$; g_i, g_{i+1} принадлежат разным сомножителям группы G.

Рассмотрим $g_k^{-1} \dots g_2^{-1} g_1^{-1} h g_1 g_2 \dots g_k$. При $k = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $k > 1$. Тогда $g_1^{-1} h g_1 \in C$, то есть $g_1^{-1} h g_1 = h_1$. Из утверждения 2.1 следует, что $h = h_1$. Далее $g_2^{-1} h_1 g_2 \in C$, то есть $g_2^{-1} h_1 g_2 = h_2$ и т.д. Тогда имеем $h = h_1 = h_2 = \dots = h_{k-1}$, $g_k^{-1} h_{k-1} g_k = u_2$.

2) Пусть u_1, u_2 − циклически несократимы в G и не сопряжены элементам из объединяемой подгруппы C. Пусть u_1, u_2 принадлежат одному сомножителю группы G, например F_m, тогда если они сопряжены в G, то они сопряжены в F_m.

3) Пусть $u_1, u_2 \in G$ − циклически несократимые слова, представленные в нормальной форме, и пусть: $u_1 = g_1 g_2 \dots g_k$. Рассмотрим некоторую циклическую перестановку элемента u_2: $u_2' = g_1' g_2' \dots g_k'$, такую что g_1 и g_1' принадлежат одному сомножителю в группе G, допустим $g_1, g_1' \in F_m$.

Если все g_i являются степенями v и w, то рассматриваем равенство $u_1 = u_2$. Пусть g_1 и g_1' не являются степенями v и w. Тогда, если u_1 и u_2' сопряжены, то существует такое $h \in C$, что $h u_1 h^{-1} = u_2'$ [18]. Тогда должно выполняться равенство

$$h g_1 g_2 \dots g_k h^{-1} = g_1' g_2' \dots g_k'. \tag{2.4}$$

Для того чтобы выполнялось равенство (2.4), должно существовать такое $h' \in C$, что

$$h g_1 = g_1' h'. \tag{2.5}$$

Из соотношения (2.5) получаем:

$$g_1^{-1} h g_1 = g_1^{-1} g_1' h'. \qquad (2.6)$$

Задача сводится к разрешимой проблеме пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической подгруппой, принадлежащей одному из сомножителей группы G: $g_1^{-1} C g_1 \cap g_1^{-1} g_1' C$.

Покажем, что если h существует, то оно единственно. Допустим противное, т.е. существуют $\tilde{h}$ и $\tilde{h}'$, такие что

$$g_1^{-1} \tilde{h} g_1 = g_1^{-1} g_1' \tilde{h}'. \qquad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) имеем:

$$g_1^{-1} \tilde{h}^{-1} h g_1 = \left(\tilde{h}'\right)^{-1} h'.$$

Получили соотношение $g_1^{-1} h_0 g_1 = h_0'$, где $h_0 = \tilde{h}^{-1} h \in C$ и $h_0' = \left(\tilde{h}'\right)^{-1} h' \in C$ являются степенями v^p. Из доказательства утверждения 1 следует, что $g_1 = v^t$. Получили противоречие предположению, что g_1 не является степенью v или w. Тем самым теорема доказана.

Лемма 2.2. [42] *Пусть F_Γ есть древесное произведение свободных групп F_i с циклическими объединениями, имеющая представление*

$$F_\Gamma = \langle \prod_{i=1}^{n} {}^{*} F_i | v_{ij}^{m_{ij}} = v_{ji}^{s_{ji}} \rangle, n \geq 2, i \in I_1, j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty,$$

где $v_{ij} \in F_i$ *и* $v_{ji} \in F_j$, i, j *– смежные вершины графа* Γ. *И пусть*

$$F_\Gamma = F_{\Gamma_{n-1}} \underset{C_n}{*} F_n$$

– свободное произведение группы $F_{\Gamma_{n-1}}$ и F_n с циклическим объединением, $F_{\Gamma_{n-1}} < F_\Gamma$, где $C_n = \langle v_n^{m_n} \rangle = \langle v_{n-1}^{s_n} \rangle$, где $v_{n-1}^{s_n} \in F_{n-1}$, $v_n^{m_n} \in F_n$, $F_{n-1} < F_{\Gamma_{n-1}}$.

Тогда, если $h, \bar{h} \in C_n$ сопряжены элементом $z \in F_{\Gamma_{n-1}}$, то есть $z^{-1} h z = \bar{h}$, то $h = \bar{h}$.

Доказательство. Пусть $z \in F_{\Gamma_{n-1}}$ и пусть подгруппа

$$A = \langle \prod_{i=1}^{k} {}^{*} F_{n-i} | v_{n-i}^{m_i} = v_{n-i-1}^{s_i} \rangle < F_{\Gamma_{n-1}}$$

– минимальная подгруппа содержащая z и

$B = A \underset{C_n}{*} F_n < F_\Gamma$. Пусть группе B в графе Γ соответствует цепь с вершинами $n, n-1, n-2, \dots, n-k,$ которым соответствуют группы $F_{n-i}, i = \overline{0,k}$, а ребру, соединяющему $(n-i)$-ю вершину с $(n-i-1)$-ой соответствует объединяемая подгруппа C_{n-i}: $\langle v_{n-i}^{m_i} \rangle = \langle v_{n-i-1}^{s_i} \rangle$, то есть соотношение $v_{n-i}^{m_i} = v_{n-i-1}^{s_i}$.

Причем подгруппа B имеет следующей вид:

$$B = F_n \underset{C_n}{*} F_{n-1} \underset{C_{n-1}}{*} F_{n-2} \underset{C_{n-2}}{*} \dots \underset{C_{n-k+2}}{*} F_{n-k+1} \underset{C_{n-k+1}}{*} F_{n-k}.$$

Пусть $z = g_1 g_2 \dots g_t$, где каждое g_i принадлежит сомножителю группы A.

Случай 1. Допустим, что в B изоморфно вложима группа B_1, являющаяся древесным произведением циклических групп $\langle v_{n-i} \rangle$, $i = \overline{0,k}$, с объединением по подгруппам C_{n-i}, имеющая копредставление $B_1 = \langle \prod_{i=1}^{k} {}^{*} \langle v_{n-i} \rangle | v_{n-i}^{m_i} = v_{n-i-1}^{s_i} \rangle, i = \overline{0,k}$ и с подгруппой B_1 также связана цепь в графе Γ, то есть подгруппа B_1 имеет представление:

$$B_1 = \langle v_n \rangle \underset{C_n}{*} \langle v_{n-1} \rangle \underset{C_{n-1}}{*} \dots \underset{C_{n-k+1}}{*} \langle v_{n-k} \rangle.$$

Пусть для любого i в слове $z = g_1 g_2 \dots g_t \in A$: $g_i \in F_{n-j}, j = \overline{1,k}$.

Если $t = 1$ и $g_1 \in F_{n-1}$, то имеем: $g_1^{-1} h g_1 = \bar{h}$, где $\bar{h} \in C_n$, тогда по утверждению 2.1.: $g_1 = v_n^{p_1}$, $0 < p_1 < m$ и $h = \bar{h}$.

Пусть $t = 1$ и $g_1 \in F_{n-i}$. Для того чтобы имело место равенство $g_1^{-1} h g_1 = \bar{h}$, необходимо чтобы $h \in F_{n-i}$, то есть имеют место равенства: $h_{i-1} = h_{i-2} = \dots = h$, где $h_{i-1} \in C_{n-i}$, ..., $h \in C_{n-1}$ и так как $g_1^{-1} h_{i-1} g_1 \in C_{n-i}$, то на основании утверждения 2.1.: $g_1^{-1} h_{i-1} g_1 = h_{i-1}$. Откуда следует, что $h = \bar{h}$.

Пусть t>1 и $g_2 \in F_{n-2}$. Так как слово

$$g_t^{-1} \dots g_2^{-1} g_1^{-1} h g_1 g_2 \dots g_t = \bar{h} \qquad (2.8)$$

– циклически несократимо, то $g_1^{-1}h_1g_1 = h_2, h = h_1$, $h_2 \in \langle v_{n-1}^{s_1} \rangle < F_{n-1}$ и $g_1 = v_{n-1}^{p}$, $|p| < |s_1|$. При $t > 2$ необходимо чтобы $h_2 = h'_2 \in \langle v_{n-2}^{m_2} \rangle$, $h_3 = g_2^{-1}h'_2g_2 \in \langle v_{n-2}^{m_2} \rangle = \langle v_{n-2}^{s_2} \rangle$, поэтому $g_2 = v_{n-2}^{p_2}$, $|p_2| < |m_2|$, то есть $h_1 = h_2 = h_3$.

Если $g_2 \in F_{n-i}$, где $i > 2$, необходимо чтобы в группе B $g_2^{-1}h_2\, g_2$ принадлежал объединяемой подгруппе C_{n-i}, в противном случае, при $t > i$ слово (2.8) циклически сократимо, поэтому $h_1 = h_2 = \dots = h_{n-i}$, $h_{n-i} \in C_{n-i}$. Так как $h_{n-i} \in C_{n-i}$ и $g_2 \in F_{n-i}$ получим случай аналогичный случаю, когда $t = 1$.

Таким образом мы видим, что в результате сопряжения элемент h перемещается по графу, соответствующему подгруппе B, причем может перемещаться как влево, так и вправо. Если, например, h перешел в вершину $(n - p_1)$, в этом случае мы имеем систему равенств в B: $h = h_1 = h_2 = \dots = h_{p_1}$, а затем переместился налево в вершину $(n - p_2)$, где $p_2 < p_1$, то путь из вершины $(n - p_2)$ в $(n - p_1)$ и обратно в $(n - p_2)$ можно удалить и рассматривать сопряжение оставшейся частью слова z элемента h_{p_2}. То есть вместо слова $z = g_1g_2 \dots g_{n-p_2}g_{n-p_2-1} \dots g_{n-p_1}g_{n-p_1-1} \dots g_t$ можно рассматривать слово $z = g_1g_2 \dots g_{n-p_2}g_{n-p_1-1} \dots g_t$. Поэтому в силу указанных преобразований слово z должно иметь наименьшую длину из всех слов, удовлетворяющих соотношению (2.8).

Пусть через конечное число шагов сопряжения элемент h словом z переведен в вершину t_1, где $t_1 \leq k$. Тогда получаем, $h = h_1 = h_2 = \dots = h_{t_1}$ и $h = \bar{h}$, то есть $h_{t_1} = \bar{h}$. Для данного случая лемма справедлива.

Случай 2. Пусть в группу B не вкладывается изоморфно подгруппа B_1. Рассмотрим $g_1^{-1}h_1g_1 = h_2$, $h_1 \in \langle v_{n-1}^{s_1} \rangle$, $h_2 \in \langle {v'}_{n-1}^{m_1} \rangle < F_{n-1}$, ${v'}_{n-1}^{m_1} = v_{n-2}^{s_1}$, $v_{n-2} \in F_{n-2}$. При сопряжении h_1 элементом g_1 показатель степени элемента h_1 будет равен показателю элемента h_2, так как сопряжение является внутренним автоморфизмом группы F_{n-1}; $h_2 = h'_2$, где $h'_2 \in \langle v_{n-2}^{s_1} \rangle$. Сопрягаем теперь h'_2

элементом $g_2 \in F_{n-2}$. Имеем $F_{n-2} \underset{C_{n-2}}{*} F_{n-3}$ и подгруппа C_{n-2} есть $\langle {v'}_{n-2}^{m_2} \rangle = \langle v_{n-3}^{s_2} \rangle, v_{n-3} \in F_{n-3}$.

Для того чтобы было выполнено условие леммы необходимо выполнение условия: $g_2^{-1} h_2' g_2 \in \langle {v'}_{n-2}^{m_2} \rangle$, то есть $g_2^{-1} h_2' g_2 = h_3 \in \langle {v'}_{n-2}^{m_2} \rangle$. Так как $h'_{2,} g_2, h_3 \in F_{n-2}$, то показатели степеней h_2' и h_3 будут равны.

Допустим, что $g_2 \in F_{n-i}$, где $i > 2$, то, для выполнения условия (2.8) в подгруппу

$$F_{n-2} \underset{C_{n-2}}{*} F_{n-3} \underset{C_{n-3}}{*} F_{n-4} \underset{C_{n-4}}{*} \dots \underset{C_{n-i+1}}{*} F_{n-i}$$

должна вкладываться изоморфно группа, являющаяся древесным произведением циклических групп $\langle v_{n-p} \rangle$, $2 \leq p \leq i$. Поэтому как и в случае 1 имеем $h = h_1 = \dots = h_i$, где $h_i \in F_{n-i}$. Получаем случай аналогичный случаю, когда $k = 1$.

Пусть через конечное число шагов перевели сопряжением элемент h в элемент $h_t \in F_{n-t}$, и так как в подгруппу

$$F_n \underset{C_n}{*} F_{n-1} \underset{C_{n-1}}{*} \dots \underset{C_{n-t}}{*} F_{n-t}$$

не вкладывается изоморфно подгруппа, являющаяся древесным произведением циклических групп с объединением, то $h_t \neq h$ в группе B. В противном случае в графе Г сущетсвовал бы путь из вершины $(n-1)$ в вершину $(n-t)$ и в группу G_Γ изоморфно вкладывалось древесное произведение циклических групп, аналогично случаю 1. Однако, это невозможно, так как Г – дерево-граф. Поэтому, чтобы выполнялось соотношение (2.8), необходимо элемент h_t перевести в элемент h, проходя путь в обратном направлении. В результате получаем $\bar{h} = h$. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 2.2. непосредственно получаем:

Следствие 2.1. [42] *Существует алгоритм, позволяющий для любых двух элементов h_1 и h_2, принадлежащих соответственно C_i и C_j группы $F_\Gamma = \langle \prod_{i=1}^{n} * F_{m_i} | v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{p_{ji}} \rangle$, выяснить, сопряжены они в G_Γ или нет.*

Доказательство. Выделяем в графе Г путь соединяющий свободные группы F_{m_i} и F_{m_j} и соответствующее ему древесное произведение

$$T = F_{m_i} \underset{C_i}{*} F_{m_i+1} \underset{C_{i+1}}{*} \dots \underset{C_j}{*} F_{m_j},$$

где $C_i : \langle v_{i,i+1}^{p_{i,i+1}} \rangle = \langle v_{i+1,i}^{p_{i+1,i}} \rangle$.

Если в T изоморфно вложима группа являющаяся древесным произведением циклических групп $\langle v_k \rangle$, $k = i, \dots, j$, с объединением $v_{p_{k,k+1}}^{p_{k,k+1}} = v_{p_{k+1,k}}^{p_{k+1,k}}, k = i, \dots, j,$ то в группе T определяем $h_1 = h_i = \dots = h_j = h_2$. Если $h_i \neq h_j$, то h_i, h_j не сопряжены.

Пусть в группу T не вкладывается изоморфно указанное ранее древесное произведение циклических групп с объединением.

Обозначим $h = h_i$. Так как $h_i \in F_{m_i}$ и $h_i \in C_i$, то в силу $F_{m_i} \underset{C_i}{*} F_{m_i+1}$, имеем $h_i = h_i'$, где $h_i' \in C_i$ и $h_i' \in F_{m_i+1}$. Если в подгруппе C_{i+1} имеется элемент $h_{i+1} \in F_{m_i+1}$, показатель которого совпадает с показателем h'_i, то выясняем, существует ли $g_1 \in F_{m_i+1}$ такой что: $g_1^{-1} h_1' g_1 = h_{i+1}$. Далее $h_{i+1} = h_{i+1}'$, где $h_{i+1}' \in F_{m_i+2}$, аналогично определяем содержится ли в C_{i+2} элемент $h_{i+2} \in F_{m_i+2}$ с показателем равным показателю h_{i+1}', выясняем существует ли g_2: $g_2^{-1} h_{i+1}' g_2 = h_{i+2}$ и так далее.

В результате через конечное число шагов выясняем сопряжены ли h_1 и h_2 в группе F_Γ или нет.

2.1.3. Доказательство основной теоремы

Теорема 2.3. [42] *В группе* $F_\Gamma = F_{\Gamma_{n-1}} \underset{C_n}{*} F_{m_n}$, $C_n = \langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \rangle = \langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \rangle$, $F_{\Gamma_{n-1}} = \langle \prod_{i=1}^{n-1} * F_{m_i} | v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{p_{ji}} \rangle$, *разрешима проблема сопряженности слов.*

Доказательство. Следуя теореме 2.1 рассмотрим следующие случаи:

(i) Пусть $u_1 \in F_\Gamma$ − циклически несократимый элемент, сопряженный с элементом $h \in C_n$, то есть по условию имеем

$$g_t^{-1} \dots g_2^{-1} g_1^{-1} h g_1 g_2 \dots g_t = u_1. \tag{2.9}$$

$z = g_1 g_2 \dots g_t$ – нормальная форма в группе $F_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$.

Пусть $g_1 \in F_{m_n}$, тогда по утверждению 2.1. имеем: $g_1^{-1} h g_1 = h_1$, где $h = h_1$.

Если $g_1 \in F_{\Gamma_{n-1}}$, учитывая лемму 2.2.: $g_1^{-1} h g_1 = h_1$, где $h = h_1$.

Тогда равенство (2.9) перепишем в виде $g_t^{-1} \dots g_2^{-1} h_1 g_2 \dots g_t = u_1$. Подобным образом поступаем со всеми g_i, $i = \overline{2, t-1}$. На конечном шаге имеем $g_t^{-1} h_{t-1} g_t = u_1$ и $h = h_1 = h_2 = \dots = h_{t-1}$.

Таким образом, если циклически несократимый элемент $u_1 \in F_\Gamma$ сопряжен с элементом $h \in C_n$, то $u_1 \in F_{m_n}$ или $u_1 \in F_{\Gamma_{n-1}}$, то существует последовательность $h, h_1, h_2, \dots, h_{t-1}, u_1$ в которой все элементы попарно сопряжены, такая что $h = h_1 = h_2 = \dots = h_{t-1}$ и $g_t^{-1} h g_t = u_1$.

(ii) Пусть $u_1, u_2 \in F_{\Gamma_{n-1}}$ и u_1, u_2 не сопряжены с элементом из объединяемой подгруппы, тогда u_1 и u_2 сопряжены в F_Γ только тогда, когда они сопряжены в $F_{\Gamma_{n-1}}$.

Пусть u_1 − циклически несократим и пусть $z \in F_\Gamma$, $z = g_1 g_2 \dots g_k$ − нормальная форма элемента z в группе $F_\Gamma = F_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$.

Пусть $l(z) = 1$, то есть $z = g_1$, тогда $g_1^{-1} u_1 g_1 = u_2$ возможно лишь в том случае, если u_1, u_2 принадлежат одному сомножителю группы $F_{\Gamma_{n-1}}$.

Пусть $l(z) > 1$. Рассмотрим произведение

$$g_k^{-1} \dots g_2^{-1} g_1^{-1} u_1 g_1 g_2 \dots g_t. \tag{2.10}$$

Так как u_1 не сопряжен с элементом из C_n, то $g_1^{-1}u_1g_1$ не принадлежит C_n, и элемент (2.10) является циклически сократимым, то есть случай невозможен.

(iii) Пусть $u_1, u_2 \in F_\Gamma$ – циклически несократимые слова длины больше единицы и u_1, u_2 сопряжены в F_Γ. Рассмотрим некоторую циклическую перестановку u_2' слова u_2, такую что $hu_1h^{-1} = u_2'$, где $h \in C_n$.

Запишем $u_1 = g_1g_2 \dots g_{2k}$, $u_2' = g_1'g_2' \dots g_{2k}'$ – нормальные формы элементов u_1, u_2' в группе F_Γ, причем u_1, u_2' – циклически несократимы.

Доказательство теоремы будем проводить по индукции. Базу индукции обеспечивает результат С. Липшуца о разрешимости проблемы сопряженности слов в группе $G = F_m *_C F_n$ [32]. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для древесного произведения свободных конечно порожденных групп с циклическим объединением для числа сомножителей меньше n, в группе $F_{\Gamma_{n-1}}$ и докажем для F_Γ.

Рассмотрим существование такого слова $h \in C_n$, которое удовлетворяет равенству:

$$hu_1 = u_2'h \tag{2.11}$$

Построим слово h, удовлетворяющее равенству (2.11).

I. Пусть $u_1 = g_1, u_2' = g_1'$, причем g_1, g_1' принадлежат одному сомножителю группы F_Γ: либо $F_{\Gamma_{n-1}}$, либо F_n.

1. Пусть g_1, $g_1' \in F_{\Gamma_{n-1}}$. Возможны случаи:

а) g_1, g_1' не сопряжены одновременно элементу из объединяемой подгруппы – рассмотрено ранее.

б) g_1, g_1' сопряжены элементу из объединяемой подгруппы, тогда $g_1 = a^{-1}ha$, $g_1' = b^{-1}h'b$. Случай сводится к сопряжению h и h' в группе F_Γ. Покажем, что h и h' сопряжены в группе $F_{\Gamma_{n-1}}$.

Пусть элементы h и h' сопряжены элементом $z \in F_\Gamma$: $zhz^{-1} = h'$ и пусть $z = b_1b_2 \dots b_k$ – нормальная форма, тогда

$$b_1 b_2 \dots b_k h b_k^{-1} \dots b_1^{-1} = h' \qquad (2.12)$$

Для выполнения равенства (2.12), нужно чтобы слева сокращения дошли до длины равной 1. Значит, если $b_k \in F_{m_n}$, то $b_k = v_{n-1,n}^s$, следовательно

$$b_k h b_k^{-1} = h_0 \in C_n.$$

Поэтому предположим, что $b_k \in F_{\Gamma_{n-1}}$, тогда, чтобы прошли сокращения, также должно выполняться равенство $b_k h b_k^{-1} \in C_n$.

Далее $b_{k-1} \in F_{m_n}$, следовательно: $b_{k-1} = v_{n-1,n}^{s_1}$, $b_{k-2} \in F_{\Gamma_{n-1}}$ и т.д.

Таким образом, слоги из сомножителя F_{m_n} можно выбросить и рассматривать только сопряжение слогами из $F_{\Gamma_{n-1}}$. Если $h, h' \in C_n$, то $h = h'$ (лемма 2.2); если h, h' принадлежат разным объединяемым подгруппам, то из следствия 2.1. можно установить, сопряжены они в $F_{\Gamma_{n-1}}$ или нет.

2. Пусть g_1, $g_1' \in F_{m_n}$. Возможны случаи:

а) g_1, g_1' не сопряжены одновременно элементу из объединяемой подгруппы, тогда случай сводится к сопряженности в свободной группе.

б) g_1, g_1' сопряжены одновременно элементу из объединяемой подгруппы. Случай аналогичен 1б.

II. Пусть $u_1 = g_1 g_2$, $u_2' = g_1' g_2'$. Пусть g_1, $g_1' \in F_{\Gamma_{n-1}}$, g_2, $g_2' \in F_{m_n}$. Найдем элемент $h_1 \in C_n$, который слог g_1 переводит в g_1'. При этом должны выполняться равенства:

$$h_1 u_1 = h_1 g_1 g_2 = g_1' h_1' g_2 = g_1' \tilde{g}_2, \text{где } \tilde{g}_2 = h_1' g_2. \qquad (2.13)$$

Равенство (2.13) справедливо, если

$$h_1 g_1 = g_1' h_1' \qquad (2.14)$$

т.е. $g_1^{-1} h_1 g_1 = g_1^{-1} g_1' h_1'$. Таким образом, справедливость равенства (2.14) следует из разрешимой проблемы пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической в группе $F_{\Gamma_{n-1}}$ (см. лемму 2.1.):

$$g_1^{-1} C_n g_1 \cap g_1^{-1} g_1' C_n.$$

1. В случае, если $g_1' C_n (g_1')^{-1} \cap C_n = E$, то найденное h_1 единственно. Для него проверяем равенство (2.11).

2. В случае, если $g_1' C_n (g_1')^{-1} \cap C_n \neq E$, т.е. $g_1' C_n (g_1')^{-1} \cap C_n = \langle \left(v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}}\right)^{k_1} \rangle = C_n' < C_n$ и для любого $h \in C_n'$, выполняется $hg_1' = g_1' h'$, где $h' \in \bar{C}_n' = \langle \left(v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}}\right)^{k_2} \rangle$. Возможны случаи:

а) $\tilde{g}_2 = h_1' g_2$ и $\tilde{g}_2' = g_2' h_1$ не являются степенями $v_{n,n-1}$, тогда выясняем, существует ли элемент $h_0 \in C_n'$, такой что

$$h_0 \tilde{g}_2 = \tilde{g}_2' h_0' \tag{2.15}$$

Равенство (2.15) должно выполняться только для единственного h_0, в противном случае $\tilde{g}_2, \tilde{g}_2'$ являются степенями w_n.

б) $\tilde{g}_2 = v_{n,n-1}^{r_1}$ и $\tilde{g}'_2 = v_{n,n-1}^{r_2}$, $r_1 \neq r_2$. В этом случае проверяем существование такого $y \in \mathbb{Z}$, что

$$\left(\left(v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}}\right)^{k_1}\right)^y g_1' \tilde{g}_2 = g_1' \tilde{g}_2' \left(\left(v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}}\right)^{k_1}\right)^y,$$
$$g_1' \left(\left(v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}}\right)^{k_2}\right)^y v_{n,n-1}^{r_1} = g_1' v_{n,n-1}^{r_2} \left(\left(v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}}\right)^{k_1}\right)^y. \tag{2.16}$$

Равенство (2.16) будет иметь место вследствие разрешимости уравнения в целых числах:

$$k_2 p_{n,n-1} y + r_1 = r_2 + k_1 p_{n,n-1} y.$$

III. Пусть теперь $u_1 = g_1 g_2 \dots g_{2k}$, $u_2' = g_1' g_2' \dots g_{2k}'$. Будем считать, что $g_1, g_1' \in F_{\Gamma_{n-1}}$. Тогда $g_{2i} \in F_{m_n}$, $g_{2i-1} \in F_{\Gamma_{n-1}}$, $i = \overline{1,k}$. Предполагаем, что все слоги g_{2i} и g_{2i}' являются степенями $v_{n,n-1}$. В противном случае h определяется единственным образом.

Пусть $g_{2i} = v_{n,n-1}^{s_i}$, $1 \leq s_i < p_{n,n-1}$, $g_{2i}' = v_{n,n-1}^{t_i}$,, $1 \leq t_i < p_{n,n-1}$. Как указано выше слог g_1 переведен в g_1' одновременным умножением элемента u_1 слева на $h_1 \in C_n$ и элемента u_2' справа на элемент h_1, вследствие чего определена подгруппа $C_n' = \langle \left(v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}}\right)^{k_1} \rangle < C_n$. Причем любое $h \in C_n$ удовлетворяет соотношению

$$hg_1' = g_1' h', \text{ где } h' \in \bar{C}_n' = \langle \left(v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}}\right)^{k_2} \rangle.$$

Затем, умножая слово

$$h_1u_1 = g_1'g_2\tilde{g}_3g_4 \dots g_{2k}, \text{ где } h_1g_1 = g_1'h_1' \text{ и } \tilde{g}_3 = h_1'g_3,$$

слева на $h_2 \in C_n'$, а также умножая $u_2'h_1$ на h_2 справа, слог $\tilde{g}_3$ переводим в g_3', т.е. выясняем выполнимость равенства $h_2\tilde{g}_3 = g_3'h_2'$. Элементы h_2 и h_2' определяем из соотношения $\tilde{g}_3^{-1}C_n'\tilde{g}_3 \cap \tilde{g}_3^{-1}g_3'C_n'$.

Далее, если $g_3'C_n'(g_3')^{-1} \cap C_n' \neq E$, то вычисляем $C_n'' = g_3'C_n'(g_3')^{-1} \cap C_n'$.

Очевидно, что $g_2 = g_2'$, как представители смежных классов, в противном случае u_1 и u_2' не сопряжены.

Рассмотрим теперь слова $u_1' = gg_4\tilde{g}_5g_6 \dots g_{2k}$ и $u_2'' = gg_4'g_5' \dots g_{2k}'h_1h_2$, где $g = g_1'g_3'$, $\tilde{g}_5 = h_2'g_5$. Так как слоговая длина u_1' и u_2'' соответственно меньше u_1 и u_2', то по индукции можно эффективно выяснить, существует ли $h \in C_n''$, такое что $hu_1 = u_2'h$.

Если для данной циклической перестановки u_2' не найдено подходящее h, то рассматриваем другие циклические перестановки слова u_2.

Основная теорема доказана.

2.2. Разрешимость проблемы сопряженности слов в HNN-расширении древесного произведения бесконечных циклических групп с объединением с ассоциированными циклическими подгруппами

2.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим конечный дерево-граф Г, каждой его вершине v_i соответствует бесконечная циклическая группа $\langle a_i\rangle$, причем, если вершинам некоторого ребра e графа Г соответствуют образующие a_i и a_j, то самому ребру соответствуют объединяемые подгруппы $\langle a_i^{p_{ij}}\rangle = \langle a_j^{p_{ji}}\rangle$. Тогда группа G_Γ, соответствующая графу Г, называется древесным произведением циклических групп с объединением.

Копредставление группы G_Γ имеет вид:

$$G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k\rangle \,|\, a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}}\rangle, |p_{ij}|, |p_{ji}| \geq 1, i \in I_1, j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty,$$

где $\langle a_i^{p_{ij}}\rangle$ и $\langle a_j^{p_{ji}}\rangle$ – объединяемые подгруппы.

Очевидно, что в группе G_Γ разрешима проблема сопряженности слов.

Рассмотрим *HNN*-расширение группы G_Γ с помощью правильной проходной буквы t:

$$\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1}U_1 t = U_{-1}\rangle,$$

где $U_1 = \langle a_m^{s_{ml}}\rangle, U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}}\rangle, |s_{ml}|, |s_{lm}| \geq 1, m \in I_1, l \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty$.

Основным результатом параграфа 2.2. является доказательство разрешимости проблемы сопряженности слов в *HNN*-расширении древесного произведения циклических групп с объединением с ассоциированными циклическими подгруппами.

2.2.2. Вспомогательные утверждения

Здесь мы докажем, что образующие конечно порожденной подгруппы группы $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k\rangle \,|\, a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}}\rangle$ можно привести к специальному множеству, порождающему ту же самую подгруппу. Подобное утверждение справедливо для группы $\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1}U_1 t = U_{-1}\rangle, U_1 = \langle a_m^{s_{ml}}\rangle$, $U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}}\rangle$.

Так как древесное произведение циклическим групп с объединением $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \,|a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$ является частным случаем древесного произведения свободных групп с циклическим объединением $F_\Gamma = \left\langle \prod_{i=1}^{n} * \ F_{m_i} \middle| v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{p_{ji}} \right\rangle$, то справедливы следующие утверждения:

Лемма 2.3. [40] *Для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_\Gamma$ и циклической подгруппы $\langle a_k \rangle$, где a_k − образующий группы G_Γ, $k = \overline{1,n}$, существует алгоритм, позволяющий выписать образующие пересечения $H \cap \langle a_k \rangle$.*

Лемма 2.4. [40] *Для любого слова $v \in G_\Gamma$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < G_\Gamma$ существует алгоритм, позволяющий выяснить пусто или не пусто пересечение смежного класса vH с циклической подгруппой из сомножителя $\langle a_k \rangle$, а именно $vH \cap \langle a_k \rangle$, где $k = \overline{1,n}$.*

Тем самым для группы G_Γ справедливы условия теоремы 1.1 и образующие конечно порожденной подгруппы группы $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \,|a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$ можно привести к специальному множеству, порождающему ту же самую подгруппу.

Лемма 2.5. [40] Пусть $\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1} U_1 t = U_{-1} \rangle$, где $U_1 = \langle a_m^{s_{ml}} \rangle, U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}} \rangle$. *Для любой конечно порожденной подгруппы $H < \bar{G}_\Gamma$ и циклической подгруппы $\langle a_k \rangle, k = \overline{1,n}$, где a_k − образующий группы G_Γ, существует алгоритм, позволяющий выписать образующие пересечения $H \cap \langle a_k \rangle$.*

Доказательство. Пусть H − конечно порожденная подгруппа, $H < \bar{G}_\Gamma$, выберем образующий $a_k \in G_\Gamma$, $k = \overline{1,n}$. Группа $\bar{G}_\Gamma$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2., следовательно образующие подгруппы H приводим к специальным образующим: $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда:

$$(M_1) \le (M_2) \le \cdots \le (M_k). \tag{2.17}$$

Выясняем существует ли среди подгрупп (2.17) подгруппа $(M_{s_1}) < \bar{G}_\Gamma$, состоящая из трансформ длины 1. Далее определяем пересечение $(M_{s_1}) \cap \langle a_k \rangle$. Таким образом, $(M_{s_1}) \cap \langle a_k \rangle = H \cap \langle a_k \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 2.6. [40] *Для любого слова* $v \in \bar{G}_\Gamma$ *и любой конечно порожденной подгруппы* $H < \bar{G}_\Gamma$, *существует алгоритм, позволяющий выяснить пусто или непусто пересечение* $vH \cap \langle a_k \rangle$, *где* a_k *образующий группы* $G_\Gamma, k = \overline{1,n}$.

Доказательство. Пусть подгруппа $H < \bar{G}_\Gamma$ и слово $v \in \bar{G}_\Gamma$, причем $v \notin H$. Запишем слово v в образующих группы $\bar{G}_\Gamma$: $v = t^{\alpha_1} r_n t^{\varepsilon_{n-1}} r_{n-1} t^{\varepsilon_{n-2}} \dots t^{\varepsilon_i} r_i \dots t^{\varepsilon_1} r_1$, где $r_i \in G_\Gamma$, $\alpha_1 = 0, \pm 1$, $\varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1, n-1}$. Найдем пересечение $vH \cap \langle a_k \rangle$. Перепишем образующие подгруппы H в виде специального множества: $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда (2.17).

Рассмотрим произвольное слово $u \in H$, пусть $u = u_1 u_2 \dots u_n$. Для положительного решения проблемы пересечения смежного класса подгруппы H с циклической подгруппой, необходимо чтобы $l(vu) = 1$. Поэтому выясняем, в каких случаях в произведении vu будут проходить сокращения:

а) Пусть слог u_1 является трансформой. Выделим в слове v справа подслово $v_\Pi = t^{\varepsilon_i} r_i \dots t^{\varepsilon_1} r_1$ максимальной длины, которое совпадает с крыльями одной из подгрупп ряда (2.17): $(M_i) = v_\Pi^{-1} A_i v_\Pi$. Тогда в слове

$$v = t^{\alpha_1} r_n t^{\varepsilon_{n-1}} r_{n-1} t^{\varepsilon_{n-2}} \dots t^{\varepsilon_i} r_i \dots t^{\varepsilon_1} r_1,$$

обозначив $r_{i+1} = K_0$, получим $v = v_Л K_0 v_\Pi$. Определяем, существует ли среди трансформ подгруппы (M_i) трансформа $v_\Pi^{-1} K_1 v_\Pi$, что

$$vu = v_Л K_0 v_\Pi v_\Pi^{-1} K_1 v_\Pi u_2 \dots u_n = v_Л (K_0 K_1) v_\Pi u_2 \dots u_n,$$

т.е. $vu = t^{\alpha_1} r_n t^{\varepsilon_{n-1}} r_{n-1} t^{\varepsilon_{n-2}} \dots t^{\varepsilon_{i+1}} (K_0 K_1) t^{\varepsilon_i} r_i \dots t^{\varepsilon_1} r_1 u_2 \dots u_n$.

Выясняем, принадлежит ли произведение $K_0 K_1$ ассоциированной подгруппе, т.е. $K_0 K_1 \in U_1$, если $\varepsilon_{i+1} = -1$ и $\varepsilon_i = 1$, либо $K_0 K_1 \in U_{-1}$, если $\varepsilon_{i+1} = 1$ и $\varepsilon_i = -1$. Случай сводится к пересечению $K_0 (A_i) \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$.

б) Пусть u_1 – нетрансформа с неизолированной левой половиной: $u_1 = v_\Pi^{-1} K_2 v'$, где $v' = t^{\varepsilon_i'} r_i' \dots t^{\varepsilon_1'} r_1'$, а подслово v_Π^{-1} является крылом одной из трансформ ряда (2.17): $(M_i) = v_\Pi^{-1} A_i v_\Pi$. Выясняем: существует ли среди трансформ подгруппы (M_i) такая $v_\Pi^{-1} K_1 v_\Pi$, что произведение $K_0 K_1 K_2 \in U_1$, если $\varepsilon_{i+1} = -1$ и $\varepsilon_i' = 1$, либо $K_0 K_1 K_2 \in U_{-1}$, если $\varepsilon_{i+1} = 1$ и $\varepsilon_i' = -1$. Случай сводится к пересечению $K_0 K_2 (K_2^{-1} (A_i) K_2) \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$.

в) Если u_1 – нетрансформа с изолированной левой половиной: $u_1 = v_\Pi^{-1} K v'$, v_Π^{-1} – изолирована и среди подгрупп ряда (2.17) содержится подгруппа $(M_j) = v'^{-1} A_j v'$, а так же среди нетрансформ содержится $u_2 = v'^{-1} K_2 v''$, $v'' = t^{\varepsilon_i''} r_i'' \dots t^{\varepsilon_1''} r_1''$. Выясняем, существует ли среди трансформ подгруппы (M_j) такая $v'^{-1} K_1 v'$, что произведения $K_0 K K_1 \in U_1$ или $K_0 K K_1 K_2 \in U_1$, если $\varepsilon_{i+1} = -1$ и $\varepsilon_i'' = 1$, либо $K_0 K K_1 \in U_{-1}$ или $K_0 K K_1 K_2 \in U_{-1}$, если $\varepsilon_{i+1} = 1$ и $\varepsilon_i'' = -1$. Случай сводится к пересечению $K_0 K (A_i) \cap U_\varepsilon$ или $K_0 K K_2 (K_2^{-1} (A_i) K_2) \cap U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$.

г) Если пункты а, б, в не выполняются, то выясняем, возможно ли подслово $t^{\varepsilon_{i+1}} K_0 v_\Pi$ перевести в подслово некоторого образующего подгруппы $gp(M_0, S)$ умножением на слово длины $(2l(v_\Pi) + 1)$.

В результате через конечное число шагов построим приведенное слово vu. Если слово vu не содержит t и $l(vu) = 1,$ то выясняем, существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1} A_i g$ ряда (2.17) подгруппа с единичными крыльями $(M_{s_1}) = A_{s_1}$ и рассматриваем $vu(M_{s_1}) \cap \langle a_k \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Два элемента* $h, \bar{h} \in \bar{G}_\Gamma$, *где* $h, \bar{h} \in U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, *сопряжены в* $\bar{G}_\Gamma$ *тогда и только тогда, когда существует* $m \in \mathbb{Z}$: $t^{-m} h t^m = \bar{h}$.

Доказательство. По условию h и $\bar{h}$ сопряжены, следовательно существует $z \in \bar{G}_\Gamma$, такой что $z^{-1} h z = \bar{h}$.

$$g_{k+1}^{-1} t^{-\varepsilon_k} g_k^{-1} \dots t^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} t^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} h g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \dots g_k t^{\varepsilon_k} g_{k+1} = \bar{h}, \tag{2.18}$$

где $z = g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \dots g_k t^{\varepsilon_k} g_{k+1}$ – нормальная форма элемента z в группе $\bar{G}_\Gamma$.

Рассмотрим произведение $g_1^{-1} h g_1$.

Так как $g_1 \in G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} {}^* \langle a_k \rangle \,|\, a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$, то $g_1 = c_1 c_2 \dots c_l$, каждое c_i, $i = \overline{1, l}$, является степенью соответствующего сомножителя группы G_Γ.

Будем полагать, что $h \in U_1 = \langle a_m^{s_{ml}} \rangle$, так как для $h \in U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}} \rangle$ рассуждения аналогичны. Тогда $h = (a_m^{s_{ml}})^p$. Если $c_1 \in \langle a_m \rangle$, то получаем $c_1^{-1} h c_1 = a_m^{-b} h a_m^b = h'$ и $h = h'$, то есть элемент h остается прежним.

Пусть $c_1 \in \langle a_k \rangle$, $k \neq m$, $k = \overline{1,n}$, тогда в группе G_Γ выделяем цепь, соединяющую вершины с образующими a_m и a_k, для которых в группе G_Γ выполняется соотношение $\left(a_m^{p_{mk}}\right)^M = \left(a_k^{p_{km}}\right)^N$, $M, N \in \mathbb{Z}$. В соотношении $c_1^{-1}hc_1 = a_k^{-b}\left(a_m^{s_{ml}}\right)^p a_k^b$ сокращения пройдут том случае, если элемент $\left(a_m^{s_{ml}}\right)^p$ будет переведен в подгруппу $\langle a_k \rangle$. В этом случае должно выполняться следующее: $s_{ml}p \,\vdots\, p_{mk}M$, то есть показатель $s_{ml}p = (p_{mk}M)q$.

Тогда

$$c_1^{-1}hc_1 = a_k^{-b}a_m^{s_{ml}p}a_k^b = a_k^{-b}a_m^{(p_{mk}M)q}a_k^b = a_k^{-b}a_k^{(p_{km}N)q}a_k^b = a_k^{(p_{km}N)q} = h'.$$

Из чего имеем $h' = a_k^{(p_{km}N)q} = \left(a_m^{p_{mk}M}\right)^q = h$.

Проводя аналогичные рассуждения имеем $c_2^{-1}h'c_2 = c_2^{-1}hc_2 = h''$, где $h = h' = h''$. Через конечное число шагов получим $c_l^{-1}h^{(l-1)}c_l = h^{(l)}$, и $h = h' = h'' = \cdots = h^{(l-1)} = h^{(l)}$. Таким образом $g_1^{-1}hg_1 = h^{(l)} = h$.

Равенство (2.18) перепишем в виде

$$g_{k+1}^{-1}t^{-\varepsilon_k}g_k^{-1} \ldots t^{-\varepsilon_2}g_2^{-1}t^{-\varepsilon_1}ht^{\varepsilon_1}g_2t^{\varepsilon_2} \ldots g_kt^{\varepsilon_k}g_{k+1} = \bar{h},$$

В том случае если $\varepsilon_1 = 1$, то соотношение $t^{-\varepsilon_1}ht^{\varepsilon_1} = h_1$, где $h_1 \in U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}} \rangle$, $h_1 = \left(a_l^{s_{lm}}\right)^p$ и рассматриваем $g_2^{-1}h_1g_2$ и т.д.

Мы показали, что элементы $g_i, i = \overline{1, k+1}$, не изменяют h, и можно рассматривать соотношение:

$$t^{-\varepsilon_k} \ldots t^{-\varepsilon_2}t^{-\varepsilon_1}ht^{\varepsilon_1}t^{\varepsilon_2} \ldots t^{\varepsilon_k} = \bar{h},$$

$$t^{-(\varepsilon_k + \cdots + \varepsilon_2 + \varepsilon_1)}ht^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_k} = \bar{h}, t^{-m}ht^m = \bar{h},$$

где $m = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_k = \sigma(z) -$ сумма показателей степеней вхождения проходной буквы. Лемма доказана.

Теорема 2.4. [18] (Коллинза) *Пусть* $G^* = \langle G, t; t^{-1}At = B, \varphi \rangle$ *– некоторое HNN-расширение. Пусть* $u = g_0t^{\varepsilon_1}g_1 \ldots t^{\varepsilon_n}$ *и* v *– сопряженные циклически приведенные элементы из* G^*. *Тогда длины* $l(u) = l(v)$ *и элемент* u *можно получить из* v, *беря подходящую циклическую перестановку элемента* v, *оканчивающуюся на* t^{ε_n}, *и сопрягая затем элементом* $z \in A$, *если* $\varepsilon_n = -1$, *и* $z \in B$, *если* $\varepsilon_n = 1$.

2.2.3. Доказательство основной теоремы

Теорема 2.5. [40] *В группе* $\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1}U_1 t = U_{-1}\rangle$, $U_1 = \langle a_m^{s_{ml}}\rangle, U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}}\rangle$, *разрешима проблема сопряженности слов.*

Доказательство. Пусть $w, v \in \bar{G}_\Gamma$ – сопряженные циклически несократимые слова. Возможны случаи:

(i) Пусть $w, v \in U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$; $w = h, v = h'$ Тогда существует $z = g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \dots g_k t^{\varepsilon_k} g_{k+1} \in \bar{G}_\Gamma$, такое что

$$g_{k+1}^{-1} t^{-\varepsilon_k} g_k^{-1} \dots t^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} t^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} h g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \dots g_k t^{\varepsilon_k} g_{k+1} = h', \qquad (2.19)$$

Учитывая лемму 2.7. равенство (2.19) перепишем в виде

$$t^{-m} h t^m = h',$$

где $m = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k = \sigma(z)$ – сумма показателей степеней вхождения проходной буквы элемента z.

(ii) Пусть $w, v \in G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} {}^{*} \langle a_k \rangle \,| a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$, т.е. w, v слова из базовой группы HNN-расширения $\bar{G}_\Gamma$, причем w, v не сопряжены ассоциированной подгруппе, тогда w, v сопряжены в $\bar{G}_\Gamma$ тогда и только тогда, когда они сопряжены в группе G_Γ.

Пусть $z = g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \dots g_k t^{\varepsilon_k} g_{k+1} \in \bar{G}_\Gamma$ – нормальная форма элемента z в группе $\bar{G}_\Gamma$. Рассмотрим произведение $z^{-1} w z$:

$$g_{k+1}^{-1} t^{-\varepsilon_k} g_k^{-1} \dots t^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} t^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} w g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \dots g_k t^{\varepsilon_k} g_{k+1}.$$

Так как w не сопряжен с элементом из ассоциированной подгруппы, то $g_1^{-1} w g_1 \notin U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, и $l(z^{-1} w z) > l(v)$. Следовательно случай невозможен.

(iii) Пусть теперь w, v – сопряженные циклически несократимые слова группы $\bar{G}_\Gamma$, причем $w, v \notin G_\Gamma$, такие что $l(w) = l(v) > 1$. В соответствии с теоремой 2.4 Коллинза слово w может быть получено из некоторой циклической перестановки v^* слова v сопряжением элементом h из ассоциированной подгруппы, $h \in U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, т.е. $h w h^{-1} = v^*$. Пусть $w = t^{\varepsilon_1} B_1 t^{\varepsilon_2} B_2 \dots t^{\varepsilon_k} B_k$ и $v^* = t^{\eta_1} A_1 t^{\eta_2} A_2 \dots t^{\eta_k} A_k$ – нормальные формы слов w, v^*, такие что $\varepsilon_i = \pm 1$, $\eta_i = \pm 1$, $A_i, B_i \in G_\Gamma$, $i = \overline{1, k}$. Следует отметить, что для положительного решения проблемы сопряженности необходимо, чтобы $\varepsilon_i = \eta_i,\ i = \overline{1,k}$. Таким образом $v^* = t^{\varepsilon_1} A_1 t^{\varepsilon_2} A_2 \dots t^{\varepsilon_k} A_k$. Причем,

если $\varepsilon_i = -1$ и $\varepsilon_{i+1} = 1$, то $A_i, B_i \notin U_1$;

если $\varepsilon_i = 1$ и $\varepsilon_{i+1} = -1$, то $A_i, B_i \notin U_{-1}$.

Рассмотрим существование слова $h \in U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, такого что

$$hw = v^* h \tag{2.20}$$

Слово h будем строить последовательно из $h_1, h_2, \dots, h_k$, таких что каждое принадлежит ассоциированной подгруппе, причем h_1 переводит B_1 в A_1, h_2 переводит B_2 в A_2 и A_1 оставляет без изменения и т.д.

1) Пусть $h_1 \in U_{\varepsilon_1}$, и так как с помощью элемента h_1 слог B_1 переходит в A_1, то должно выполняться равенство:

$$h_1 t^{\varepsilon_1} B_1 = t^{\varepsilon_1} A_1 \bar{h}_1 \tag{2.21}$$

где $\bar{h}_1 \in U_{\varepsilon_2}$. Из разрешимости проблемы пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической в группе $\bar{G}_\Gamma$ в соответствии с леммой 2.6. выясняем справедливо ли равенство (2.21):

$$B_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} U_{\varepsilon_1} t^{\varepsilon_1} B_1 \cap B_1^{-1} A_1 U_{\varepsilon_2}.$$

Из пересечения находим подходящее h_1. Если существует $h_1' \in U_{\varepsilon_1}$, такое что и для него выполняется равенство (2.21):

$$h'_1 t^{\varepsilon_1} B_1 = t^{\varepsilon_1} A_1 \overline{h'}_1, \text{ то } t^{\varepsilon_1} A_1 \bar{h}_1 \left(\overline{h'}_1\right)^{-1} A_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} = h_1 \overline{h'}_1.$$

Решая проблему пересечения конечно порожденной подгруппы с циклической из сомножителя, как указано в лемме 2.5., находим пересечение

$$t^{\varepsilon_1} A_1 U_{\varepsilon_2} A_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} \cap U_{\varepsilon_1}. \tag{2.22}$$

Если пересечение (2.22) равно единичной подгруппе, то h_1 единственно, проверяем для него равенство (2.20); в противном случае, так как

$$t^{\varepsilon_1} A_1 \tilde{h}_0 A_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} = h_0 \in U_{\varepsilon_1}^{(1)} \subset U_{\varepsilon_1}, h_0 = h_1 \overline{h'}_1, \tilde{h}_0 = \bar{h}_1 \left(\overline{h'}_1\right)^{-1}$$

определяем подгруппу $U_{\varepsilon_1}^{(1)} = t^{\varepsilon_1} A_1 U_{\varepsilon_2} A_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} \cap U_{\varepsilon_1}$.

2) После преобразований имеем слово $w = t^{\varepsilon_1} A_1 t^{\varepsilon_2} \tilde{B}_2 \dots t^{\varepsilon_k} B_k$, где $\tilde{B}_2 = \bar{h}_{-1} B_2$; $\bar{h}_{-1} \in U_{-\varepsilon_1}$. Все элементы подгруппы $U_{\varepsilon_1}^{(1)}$ переходят через слог A_1 и

оставляют его без изменения. Рассмотрим элемент $h_2 \in U_{\varepsilon_1}^{(1)}$, который слог $\tilde{B}_2$ переводит в A_2. Тогда должно выполняться равенство $h_2 t^{\varepsilon_1} A_1 t^{\varepsilon_2} \tilde{B}_2 = t^{\varepsilon_1} A_1 t^{\varepsilon_2} A_2 \bar{h}_2$, где $\bar{h}_2 \in U_{\varepsilon_3}$. Решая проблему пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической:

$$(\tilde{B}_2^{-1} t^{-\varepsilon_2} B_1^{-1} t^{-\varepsilon_1}) U_{\varepsilon_1} (t^{\varepsilon_1} B_1 t^{\varepsilon_2} \tilde{B}_2) \cap \tilde{B}_2^{-1} A_2 U_{\varepsilon_3}$$

находим подходящий элемент h_2.

Если $(t^{\varepsilon_1} A_1 t^{\varepsilon_2} A_2) U_{\varepsilon_3} (A_2^{-1} t^{-\varepsilon_2} A_1^{-1} t^{-\varepsilon_1}) \cap U_{\varepsilon_1} = E$, то h_2 – единственный, проверяем равенство (2.20) для элемента $h_2 h_1$, в противном случае находим подгруппу

$$U_{\varepsilon_1}^{(2)} = (t^{\varepsilon_1} A_1 t^{\varepsilon_2} A_2) U_{\varepsilon_3} (A_2^{-1} t^{-\varepsilon_2} A_1^{-1} t^{-\varepsilon_1}) \cap U_{\varepsilon_1},$$

все элементы которой оставляют без изменения слоги A_1 и A_2.

3) Продолжая этот процесс, на $(k-1)$ шаге получим слово $w = t^{\varepsilon_1} A_1 t^{\varepsilon_2} A_2 t^{\varepsilon_3} A_3 \dots t^{\varepsilon_k} \tilde{B}_k$, где $\tilde{B}_k = \bar{h}_{-k+1} B_k$ и определена подгруппа $U_{\varepsilon_1}^{(k-1)}$, элементы которой оставляют без изменения слоги $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{k-1}$. Рассмотрим $h_k \in U_{\varepsilon_1}^{(k-1)}$, так как h_k переводит $\tilde{B}_k$ в A_k, то должно выполняться равенство

$$h_k w = h_k t^{\varepsilon_1} A_1 \dots t^{\varepsilon_k} \tilde{B}_k = t^{\varepsilon_1} A_1 \dots t^{\varepsilon_k} A_k \bar{\bar{h}},$$

которое, как показано выше, алгоритмически разрешимо, причем $\bar{\bar{h}} \in U_{\varepsilon_1}$.

Таким образом, мы построили слово $h_k h_{k-1} \dots h_1$, которое слово w переводит в v^*. Далее определяем подгруппу

$$(t^{\varepsilon_1} A_1 \dots t^{\varepsilon_k} A_k) U_{\varepsilon_1} (A_k^{-1} t^{-\varepsilon_k} \dots \dots A_1^{-1} t^{-\varepsilon_1}) \cap U_{\varepsilon_1}^{(k-1)} = U_{\varepsilon_1}^{(k)}.$$

Если $U_{\varepsilon_1}^{(k)} = E$, то проверяем равенство (2.20) для элемента $h_k h_{k-1} \dots h_1$. В противном случае подбираем такую степень элемента a_m, который уравняет левую и правую части равенства (2.20) следующим образом: из вышеизложенного следует, что существует минимальная степень r, такая что

$$a_m^{r p_{ml}} v^* = v^* a_m^{q p_{ml}}, \tag{2.23}$$

где $a_m^{r p_{ml}} \in U_{\varepsilon_1}^{(k)}$.

Тогда подбираем такую степень X, чтобы с одной стороны

$$a_m^{rp_{ml}X} v^* a_m^{p_0} = v^* a_m^{p_0} a_m^{qp_{ml}X}, \tag{2.24}$$

а с другой должно выполняться равенство

$$a_m^{rp_{ml}X} v^* a_m^{p_0} = v^* a_m^{q_0} a_m^{rp_{ml}X}, \tag{2.25}$$

Из (2.24) и (2.25) имеем:

$$v^* a_m^{p_0} a_m^{qp_{ml}X} = v^* a_m^{q_0} a_m^{rp_{ml}X}. \tag{2.26}$$

Справедливость равенства (2.26) следует из разрешимости уравнения

$$p_0 + qp_{ml}X = q_0 + rp_{ml}X$$

в целых числах.

Теорема доказана.

2.3. Разрешимость проблемы сопряженности слов в HNN-расширении с конечным числом проходных букв древесного произведения циклических групп с объединением с ассоциированными циклическими подгруппами

2.3.1. Постановка задачи

Пусть группа

$$G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \,|\, a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle, |p_{ij}|, |p_{ji}| \geq 1, i \in I_1, j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty,$$

– есть древесное произведение бесконечных циклических групп с объединением: $\langle a_i^{p_{ij}} \rangle = \langle a_j^{p_{ji}} \rangle$.

Рассмотрим HNN-расширение группы G_Γ с помощью конечного числа проходных букв:

$$\bar{G}_\Gamma^* = \langle G_\Gamma, \{t_{ik}\} | rel(G_\Gamma), t_{ik}^{-1} U_{ik} t_{ik} = U_{ki} \rangle \bar{G}_\Gamma^* = \langle G_\Gamma, \{t_{ij}\} | rel(G_\Gamma), t_{ij}^{-1} U_{ij} t_{ij} = U_{ji} \rangle,$$

где $U_{ik} = \langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle, U_{ki} = \langle a_{ki}^{s_{ki}} \rangle$ – ассоциированные подгруппы, $\langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle \subset \langle a_i \rangle, \langle a_{ki}^{s_{ki}} \rangle \subset \langle a_k \rangle$, $|s_{ik}|, |s_{ki}| \geq 1, i \in I_1, k \in I_2$, количество проходных букв t_{ik} равно m.

Для дальнейших рассуждений представим группу $\bar{G}_\Gamma^*$, в виде HNN-расширения с одной проходной буквой, тогда группа $\bar{G}_\Gamma^*$ будет иметь представление:

$$\bar{G}_\Gamma^* = \langle \bar{G}_{\Gamma_{m-1}}^*, t_{i_0 k_0} | t_{i_0 k_0}^{-1} U_{i_0} t_{i_0 k_0} = U_{k_0} \rangle$$

где $U_{i_0} = \langle a_{i_0}^{s_{ik}} \rangle$, $U_{j_0} = \langle a_{k_0}^{s_{ki}} \rangle$, $\bar{G}_{\Gamma_{m-1}}^* = \langle G_\Gamma, \{t_{ik}\} \backslash t_{i_0 k_0} | rel(G_\Gamma), t_{ik}^{-1} U_{ik} t_{ik} = U_{ki} \rangle$, $U_{ik} = \langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle, U_{ki} = \langle a_{ki}^{s_{ki}} \rangle -$ ассоциированные подгруппы.

Основной результат параграфа 2.3 – доказательство разрешимости проблемы сопряженности слов в группе $\bar{G}_\Gamma^*$.

Доказательство разрешимости проблемы сопряженности слов для группы $\bar{G}_\Gamma^*$ будем проводить индукцией по количеству проходных букв. Базу индукции обеспечивает тот факт, что в группе $\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1} U_1 t = U_{-1} \rangle$ разрешима проблема сопряженности слов. Предположим, что для группы с меньшим числом проходных букв, а именно для группы $\bar{G}^*_{\Gamma_{m-1}}$, проблема сопряженности слов разрешима, а также алгоритмически разрешимы:

1. проблема пересечения конечно порожденной подгруппы группы $\bar{G}^*_{\Gamma_{m-1}}$ с циклической подгруппой $\langle a_k \rangle$ из сомножителя группы G_Γ;
2. проблема пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы группы $\bar{G}^*_{\Gamma_{m-1}}$ с циклической подгруппой $\langle a_k \rangle$ из сомножителя группы G_Γ.

Тогда по индуктивному предположению группа $\bar{G}^*_{\Gamma_{m-1}}$ удовлетворяет утверждениям теоремы 1.2., а следовательно образующие конечно порожденной подгруппы $H < \bar{G}^*_{\Gamma_{m-1}}$ можно привести к специальным образующим, порождающим ту же самую подгруппу.

Докажем подобные утверждения для группы $\bar{G}^*_\Gamma$. Для удобства дальнейших рассуждений в группе $\bar{G}^*_\Gamma$ проходную букву $t_{i_0k_0}$ обозначим t_m.

2.3.2. Вспомогательные утверждения

Лемма 2.8. [45] *Пусть* $\bar{G}^*_\Gamma = \langle \bar{G}^*_{\Gamma_{m-1}}, t_m | t_m^{-1} U_{i_0} t_m = U_{k_0} \rangle$, *где* $U_{i_0} = \langle a_{i_0}^{s_{i_0k_0}} \rangle$, $U_{k_0} = \langle a_{k_0}^{s_{k_0i_0}} \rangle$, $\bar{G}^*_{\Gamma_{m-1}} = \langle G_\Gamma, \{t_{ik}\} \backslash t_m | rel(G_\Gamma), t_{ik}^{-1} U_{ik} t_{ik} = U_{ki} \rangle$, $U_{ik} = \langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle$, $U_{ki} = \langle a_{ki}^{s_{ki}} \rangle$ *– ассоциированные подгруппы. Существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы* $H < \bar{G}^*_\Gamma$ *и циклической подгруппы* $\langle a_j \rangle, j = \overline{1, n}$, *где* a_j *– образующий группы* G_Γ, *выписать образующие пересечения* $H \cap \langle a_j \rangle$.

Доказательство. Пусть H – конечно порожденная подгруппа, $H < \bar{G}^*_\Gamma$, выберем образующий $a_j \in G_\Gamma$, $j = \overline{1, n}$, и рассмотрим пересечение $H \cap \langle a_j \rangle$.

В базовой группе $\bar{G}^*_{\Gamma_{m-1}}$ по индуктивному предположению образующие конечно порожденной подгруппы можно привести к специальному множеству, справедливы алгоритмы 1) и 2), а также ассоциированные подгруппы U_{i_0}, U_{k_0} обладают условием максимальности. Следовательно образующие любой конечно порожденной подгруппы группы $\bar{G}^*_\Gamma$ можно переписать в виде специального множества.

Тогда $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда:

$$(M_1) \le (M_2) \le \dots \le (M_p). \qquad (2.27)$$

Если в S существует подгруппа (M_{s_1}), состоящая из трансформ длины 1, то определяем $(M_{s_1}) \cap \langle a_j \rangle$. Из чего следует $H \cap \langle a_j \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 2.9. [45] *Для любого слова $v \in \bar{G}_\Gamma^*$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < \bar{G}_\Gamma^*$, существует алгоритм, позволяющий выяснить пусто или не пусто пересечение $vH \cap \langle a_j \rangle$, где a_j образующий группы G_Γ, $j = \overline{1, n}$.*

Доказательство. Пусть подгруппа $H < \bar{G}_\Gamma^*$ и слово $v \in \bar{G}_\Gamma^*$, причем $v \notin H$. Запишем слово v в нормальной форме группы $\bar{G}_\Gamma^*$:

$$v = t_m^{\alpha} r_n \dots t_m^{\varepsilon_{s+1}} r_{s+1} t_m^{\varepsilon_s} r_s \dots t_m^{\varepsilon_1} r_1 t_m^{\beta},$$

где $r_i \in \bar{G}_{\Gamma_{m-1}}^*$, $\varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1, n}$; $\alpha, \beta = 0, \pm 1$. Найдем пересечение $vH \cap \langle a_k \rangle$. Приведем множество образующих подгруппы H к специальному множеству. Тогда $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда (2.27): $(M_1) \le (M_2) \le \dots \le (M_p)$.

Пусть $u = u_1 u_2 \dots u_n \in H$. Выясняем, будет ли длина произведения $l(vu)$ равна 1 причем в vu все проходные буквы t_m должны сократиться. Для этого выполняем сокращения, как показано в лемме 2.6. Пусть $vu = w \in \bar{G}_{\Gamma_{m-1}}^*$. Тогда выясняем, существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1} A_i g$ ряда (2.27) подгруппа с единичными крыльями $(M_{s_1}) = A_{s_1}$ и рассматриваем $w(M_{s_1}) \cap \langle a_j \rangle = vH \cap \langle a_j \rangle$. Лемма доказана.

2.3.3. Доказательство основной теоремы

Теорема 2.6. [45] *Пусть* $\bar{G}_\Gamma^* = \langle G_\Gamma, \{t_{ik}\} | rel(G_\Gamma), t_{ik}^{-1} U_{ik} t_{ik} = U_{ki} \rangle$, $U_{ik} = \langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle \subset \langle a_i \rangle, U_{ki} = \langle a_{ki}^{s_{ki}} \rangle \subset \langle a_k \rangle$ *есть HNN-расширение группы* $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \,| a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$ *с помощью конечного числа проходных букв* t_{ik} *с ассоциированными циклическими подгруппами. Если слова* $w, v \in \bar{G}_\Gamma^*$ *не сопряжены в* $\bar{G}_\Gamma^*$ *элементам из ассоциированной подгруппы* $\langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle$ *для некоторого* i, *то можно эффективно определить сопряжены они в* $\bar{G}_\Gamma^*$ *или нет.*

Доказательство. Представим группу $\bar{G}_\Gamma^*$ следующим образом:

$$\bar{G}_\Gamma^* = \langle \bar{G}_{\Gamma_{m-1}}^*, t_m | t_m^{-1} U_{i_0} t_m = U_{k_0} \rangle,$$

где $U_{i_0} = \langle a_{i_0}^{s_{ik}} \rangle$, $U_{j_0} = \langle a_{k_0}^{s_{ki}} \rangle$, $\bar{G}_{\Gamma_{m-1}}^* = \langle G_\Gamma, \{t_{ik}\} \backslash t_m | rel(G_\Gamma), t_{ik}^{-1} U_{ik} t_{ik} = U_{ki} \rangle$, $U_{ik} = \langle a_{ik}^{s_{ik}} \rangle, U_{ki} = \langle a_{ki}^{s_{ki}} \rangle$.

Известно, что в группе $\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | t^{-1} U_1 t = U_{-1} \rangle$, проблема сопряженности слов разрешима. Сделаем предположение, что в группе $\bar{G}_{\Gamma_{m-1}}^*$ проблема сопряженности слов разрешима и докажем это утверждение для группы $\bar{G}_\Gamma^*$ с конечным числом m проходных букв.

Пусть $w, v \in \bar{G}_{\Gamma_{m-1}}^*$ не сопряжены с элементами из U_{i_0} и из U_{k_0}, тогда слова w, v сопряжены в $\bar{G}_\Gamma^*$ тогда, когда они сопряжены в группе $\bar{G}_{\Gamma_{m-1}}^*$.

Пусть теперь $w, v \in \bar{G}_\Gamma^*$ – циклически несократимые слова: $w = t_m^{\varepsilon_1} B_1 t_m^{\varepsilon_2} B_2 \dots t_m^{\varepsilon_k} B_l$, $v = t_m^{\eta_1} A_1 t_m^{\eta_2} A_2 \dots t_m^{\eta_k} A_l$ – нормальные формы слов w, v, $A_i, B_i \in \bar{G}_{\Gamma_{m-1}}^*$, $i = \overline{1,k}$. Существует $h \in U_{\varepsilon_1}$, где $U_{\varepsilon_1} = U_{i_0}$, либо $U_{\varepsilon_1} = U_{k_0}$, такое что $hwh^{-1} = v'$, где v' – циклическая перестановка слова v, причем $l(w) = l(\, v')$ и все степени элемента t_m на одноименных местах слов w, v' совпадают. Тогда $v' = t_m^{\varepsilon_1} A_1' t_m^{\varepsilon_2} A_2' \dots t_m^{\varepsilon_k} A_l'$.

Построим слово $h = h_k \dots h_2 \, h_1 \in U_{\varepsilon_1}, \varepsilon_1 = \pm 1$, такое что

$$hw = v'h, \tag{2.28}$$

в котором h_1 переводит B_1 в A_1', h_2 переводит B_2 в A_2' и A_1' оставляет без изменения и т.д.

1) Пусть $h_1 \in U_{\varepsilon_1}$ и должно выполняться равенство:

$$h_1 t_m^{\varepsilon_1} B_1 = t_m^{\varepsilon_1} A_1' \bar{h}_1$$

где $\bar{h}_1 \in U_{\varepsilon_2}$. Из пересечения:

$$B_1^{-1} t_m^{-\varepsilon_1} U_{\varepsilon_1} t_m^{\varepsilon_1} B_1 \cap B_1^{-1} A_1' U_{\varepsilon_2}.$$

находим подходящие h_1 и $\bar{h}_1$. Если

$$t_m^{\varepsilon_1} A_1' U_{\varepsilon_2} (A_1')^{-1} t_m^{-\varepsilon_1} \cap U_{\varepsilon_1} = \mathrm{E},$$

то h_1 единственно, проверяем для него равенство (2.28); в противном случае определяем подгруппу

$$U_{\varepsilon_1}^{(1)} = t_m^{\varepsilon_1} A_1' U_{\varepsilon_2} (A_1')^{-1} t_m^{-\varepsilon_1} \cap U_{\varepsilon_1}.$$

2) После преобразований имеем слово $h_1 w = t_m^{\varepsilon_1} A_1' t_m^{\varepsilon_2} \tilde{B}_2 \dots t_m^{\varepsilon_k} B_l$, где $\tilde{B}_2 = \bar{h}_{-1} B_2$. Все элементы подгруппы $U_{\varepsilon_1}^{(1)}$ переходят через слог A_1' и оставляют его без изменения. Рассмотрим элемент $h_2 \in U_{\varepsilon_1}^{(1)}$, который слог $\tilde{B}_2$ переводит в A_2'. Тогда должно выполняться равенство $h_2 t_m^{\varepsilon_1} A_1' t_m^{\varepsilon_2} \tilde{B}_2 = t_m^{\varepsilon_1} A_1' t_m^{\varepsilon_2} A_2' \bar{h}_2$, где $\bar{h}_2 \in U_{\varepsilon_3}$. Из пересечения:

$$(\tilde{B}_2^{-1} t_m^{-\varepsilon_2} B_1^{-1} t_m^{-\varepsilon_1}) U_{\varepsilon_1} (t_m^{\varepsilon_1} B_1 t_m^{\varepsilon_2} \tilde{B}_2) \cap \tilde{B}_2^{-1} A_2' U_{\varepsilon_3}$$

находим h_2.

Если $\left(t_m^{\varepsilon_1} A_1' t^{\varepsilon_2} A_2'\right) U_{\varepsilon_3} \left((A_2')^{-1} t^{-\varepsilon_2} (A_1')^{-1} t_m^{-\varepsilon_1}\right) \cap U_{\varepsilon_1} = E$, то h_2 – единственный, проверяем равенство (2.28) для элемента $h_2 h_1$, в противном случае находим подгруппу

$$U_{\varepsilon_1}^{(2)} = \left(t_m^{\varepsilon_1} A_1' t^{\varepsilon_2} A_2'\right) U_{\varepsilon_3} \left((A_2')^{-1} t^{-\varepsilon_2} (A_1')^{-1} t_m^{-\varepsilon_1}\right) \cap U_{\varepsilon_1},$$

все элементы которой оставляют без изменения слоги A_1' и A_2'.

3) Продолжая этот процесс, на $(l-1)$ шаге получим слово $(h_{l-1} \dots h_2 h_1) w = t_m^{\varepsilon_1} A_1' t_m^{\varepsilon_2} A_2' \dots t_m^{\varepsilon_k} \tilde{B}_l$, где $\tilde{B}_l = \bar{h}_{-l+1} B_l$ и определена подгруппа $U_{\varepsilon_1}^{(l-1)}$, элементы которой оставляют без изменения слоги $A_1', A_2', \dots, A_{k-1}'$. Рассмотрим $h_l \in U_{\varepsilon_1}^{(l-1)}$ и пусть h_l переводит $\tilde{B}_l$ в A_l', то должно выполняться равенство

$$h_l (h_{l-1} \dots h_2 h_1) w = h_l t_m^{\varepsilon_1} A_1' t_m^{\varepsilon_2} A_2' \dots t_m^{\varepsilon_k} \tilde{B}_l = t_m^{\varepsilon_1} A_1' t_m^{\varepsilon_2} A_2' \dots t_m^{\varepsilon_k} A'_l \bar{\bar{h}}.$$

Определение h_l, как показано выше, алгоритмически разрешимо, причем $\bar{\bar{h}} \in U_{\varepsilon_1}$.

Таким образом, мы построили слово $h_l h_{l-1} \dots h_1$, которое w переводит в $v'\bar{\bar{h}}$. Далее определяем подгруппу

$$\left(t_m^{\varepsilon_1} A_1' \dots t_m^{\varepsilon_k} A'_l\right) U_{\varepsilon_1} \left((A_l')^{-1} t_m^{-\varepsilon_k} \dots (A_1')^{-1} t_m^{-\varepsilon_1}\right) \cap U_{\varepsilon_1}^{(l-1)} = U_{\varepsilon_1}^{(l)}.$$

Если $U_{\varepsilon_1}^{(l)} = E$, то проверяем равенство (2.28) для элемента $h_l h_{l-1} \dots h_1$. В противном случае подбираем такую степень элемента a_{i_0}, которая уравняет левую и правую части равенства (2.28). Будем предполагать, что $U_{\varepsilon_1} = U_{i_0}$.

Из вышеизложенного следует, что существует минимальная степень r элемента $a_{i_0}^{r s_{i_0 k_0}} \in U_{\varepsilon_1}^{(l)}$, такая что

$$a_{i_0}^{r s_{i_0 k_0}} v' = v' a_{i_0}^{q s_{i_0 k_0}}.$$

Тогда подбираем такую степень X, чтобы с одной стороны

$$a_{i_0}^{r s_{i_0 k_0} X} v' a_{i_0}^{p_0} = v' a_{i_0}^{p_0} a_{i_0}^{q s_{i_0 k_0} X}, \tag{2.29}$$

а с другой должно выполняться равенство

$$a_{i_0}^{r s_{i_0 k_0} X} v' a_{i_0}^{p_0} = v' a_{i_0}^{q_0} a_{i_0}^{r s_{i_0 k_0} X}, \tag{2.30}$$

В равенствах (2.29) и (2.30) левая часть одинаковая, значит должно выполняться следующее равенство:

$$v' a_{i_0}^{p_0} a_{i_0}^{q s_{i_0 k_0} X} = v' a_{i_0}^{q_0} a_{i_0}^{r s_{i_0 k_0} X},$$

справедливость которого следует из разрешимости в целых числах уравнения

$$p_0 + q s_{i_0 k_0} X = q_0 + r s_{i_0 k_0} X.$$

Теорема доказана.

Глава 3. Проблема сопряженности подгрупп в древесных конструкциях групп

3.1. Разрешимость проблемы сопряженности подгрупп в древесном произведении бесконечных циклических групп с объединением по циклической подгруппе

3.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим группу

$$G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \,|\, a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle, |p_{ij}|, |p_{ji}| \geq 1, i \in I_1, j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty,$$

являющуюся древесным произведением бесконечных циклических групп, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам $\langle a_i^{p_{ij}} \rangle$ и $\langle a_j^{p_{ji}} \rangle$, причем вершины, соответствующие группам $\langle a_i \rangle$ и $\langle a_j \rangle$, соединены ребром в дерево-графе группы G_Γ.

В пункте 2.1. настоящей работы доказана разрешимость проблемы сопряженности слов в группе $F_\Gamma = \langle \prod_{i=1}^{n} * F_{m_i} | \, v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{p_{ji}} \rangle$, являющейся древесным произведением свободных групп с объединением по циклической подгруппе. Как следствие получаем разрешимость проблемы сопряженности слов в группе G_Γ.

В дальнейшем речь будем вести о разрешимости проблемы сопряженности конечно порожденных подгрупп в группе G_Γ. Доказательство будем вести методом математической индукции.

В работе [3] Безверхним В.Н. было доказано, что в классе групп $F_m \underset{C}{*} F_n$, где F_m и F_n − свободные группы рангов m и n, C – циклическая подгруппа, разрешима проблема сопряженности подгрупп. Таким образом, для группы вида G_Γ, имеющей два сомножителя, утверждение теоремы справедливо. Допустим, что для группы вида G_Γ, имеющей $(n-1)$ сомножителей, проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп также разрешима. Докажем для n сомножителей. Выделим в дереве группы G_Γ концевую вершину v_n с соответствующей ей группой $\langle a_n \rangle$ и представим G_Γ в виде свободного произведения:

$$G_\Gamma = G_{\Gamma_1} \underset{a_{n-1}^{p_{n-1}} = a_n^{p_n}}{*} \langle a_n \rangle,$$

где $G_{\Gamma_1} = \langle \prod_{k=1}^{n-1} * \langle a_k \rangle | a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$; $|p_{ij}|, |p_{ji}| > 1, i \neq j, i \in I'_1, j \in I'_2$, и группе G_{Γ_1} соответствует граф Γ_1 с $(n-1)$ вершиной, $\Gamma_1 \subset \Gamma$ (см. пункт 2.1.1.). Из утверждений теоремы 1.1., леммы 2.3. и леммы 2.4. следует, что образующие любой конечно порожденной подгруппы группы G_Γ можно привести к специальному множеству, порождающему ту же самую подгруппу.

3.1.2. Вспомогательные утверждения

Лемма 3.1. *Пусть $H_1 < G_{\Gamma_1}, H_2 < G_{\Gamma_1}$, причем $H_1 \nless C(G_\Gamma)$ ($C(G_\Gamma)$ – центр группы G_Γ). Подгруппы H_1 и H_2 сопряжены в группе G_Γ тогда и только тогда, когда они сопряжены в группе G_{Γ_1}.*

Доказательство. Пусть подгруппы $H_1, H_2 < G_{\Gamma_1}$ сопряжены в группе G_Γ.

Возьмем $z \in G_\Gamma$, такой что $z = a_n^{k_1} z_1 a_n^{k_2} z_2 \dots z_p a_n^{k_{p+1}}$, где $z_1, z_2, \dots, z_p$ – подслова с образующими из G_{Γ_1}. И пусть $w_1 \in H_1$, $w_2 \in H_2$, где w_1 – циклически несократим, причем w_1 не сопряжен с элементам из $C(G_\Gamma)$. В произведении $z^{-1} w_1 z$ сокращения не затронут слог $a_n^{k_i}, i = \overline{1, p+1}$, в слове z. Тогда $l(z^{-1} w_1 z) \neq l(w_2)$, где $l(w)$ – слоговая длина в группе G_Γ.

Обратное утверждение очевидно и лемма доказана.

Лемма 3.2.[43] *Пусть $H = gp(M_0, S)$ – конечно порожденная подгруппа группы G_Γ, где S – порождена подгруппами ряда*

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \dots \leq (M_k). \tag{3.1}$$

Всякое простое слово w подгруппы $gp(M_0, S)$ группы $G_\Gamma = G_{\Gamma_1} \underset{a_{n-1}^{p_{n-1}} = a_n^{p_n}}{*} \langle a_n \rangle$, имеющее своей несократимой записью трансформу $w = gag^{-1}$, где $a \in G_{\Gamma_1}$ или $a \in \langle a_n \rangle$, может быть приведено к виду $gag^{-1} = u_1 u_2 \dots u_n u_0 u_n^{-1} \dots u_1^{-1}$, где u_0 –

трансформа, принадлежащая одной из подгрупп $(M_i), i=\overline{1,k}$, *ряда (3.1),* $u_i \in (M_0)$, *либо* $u_i \in (M_i)$ *ряда (3.1),* $u_1 u_2 \dots u_n u_0 u_n^{-1} \dots u_1^{-1}$ *– простое слово подгруппы* $gp(M_0, S)$.

Доказательство. Так как $w \in gp(M_0, S)$, перепишем слово $w = gag^{-1}$ в u-символах:

$$gag^{-1} = u_1 u_2 \dots u_m. \tag{3.2}$$

Рассмотрим, все возможные случаи строения простого слова, указанные в следствии 1.3.

а) Пусть w – слово вида d. Тогда существует трансформа $u_i = g_i K_i g_i{}^{-1}$, имеющая максимальную слоговую длину в $u_1 u_2 \dots u_m$. Доказательство проведем по числу m символов в слове $u_1 u_2 \dots u_m$. Если $m = 1$, утверждение леммы справедливо. Допустим, что утверждение леммы справедливо, когда число сомножителей в слове (3.2) меньше m. Докажем для m сомножителей. Тогда:

$$gag^{-1} = u_1 u_2 \dots u_{i-1} (g_i K_i g_i{}^{-1}) u_{i+1} \dots u_m.$$

Начальное $u_1 u_2 \dots u_{i-1}$ и конечное $u_{i+1} \dots u_m$ подслова могут состоять только из трансформ, а могут содержать нетрансформы.

1. Рассмотрим случай, когда $u_1 u_2 \dots u_{i-1}$, $u_{i+1} \dots u_m$ не содержат нетрансформ, тогда, так как слово w простое, то длина максимального слога равна длине всего слова, то есть $l(g_i K_i g_i{}^{-1}) = l(gag^{-1})$, $l(u_j) < l(gag^{-1})$, $1 \le j \le i-1, i+1 \le j \le m$, и на основании строения простого слова:

$$l(u_1) < l(u_2) < \dots < l(u_{i-1}), l(u_m) < l(u_{m-1}) < \dots < l(u_{i+1}).$$

Из условия 4 определения 1.5 следует, что либо $u_1 = u_m^{-1}$, либо трансформы u_1, u_m содержатся в одной подгруппе (M_i) ряда (3.1), в противном случае длина одного больше длины другого и сокращения не дойдут до ядра.

Сопрягая трансформу $gag^{-1} = u_1 u_2 \dots u_{i-1} (g_i K_i g_i{}^{-1}) u_{i+1} \dots u_m$ элементом u_m, получим:

$$u_m (gag^{-1}) u_m^{-1} = u_m u_1 u_2 \dots u_{i-1} (g_i K_i g_i{}^{-1}) u_{i+1} \dots u_m u_m^{-1}.$$

Тогда $u_m (gag^{-1}) u_m^{-1} = u_1' u_2 \dots u_{i-1} (g_i K_i g_i{}^{-1}) u_{i+1} \dots u_{m-1}$, где $u_m u_1 = u_1'$, причем либо $u_1' = 1$, либо u_1' содержится в одной подгруппе (M_j) ряда (3.1) с u_2, в противном случае получаем противоречие с условием 4 определения 1.5. Слово $u_2' \dots u_{i-1}\,(g_i K_i {g_i}^{-1}) u_{i+1}\ \dots u_{m-1}$ – простое ($u_2' = u_1' u_2$ и $l(u_2') = l(u_1' u_2)$) и число сомножителей в слове $u_2' \dots u_{i-1}\,(g_i K_i {g_i}^{-1}) u_{i+1} \dots u_{m-1}$ меньше m. Таким образом, по индуктивному предположению, для данного случая лемма доказана.

2. Пусть подслова $u_1 u_2 \dots u_{i-1}$, $u_{i+1} \dots u_m$ содержат нетрансформы. Выделим в слове $u_1 u_2 \dots u_{i-1}$ первую слева: $u_j = g_j' K_j g_j$, $1 \le j \le i-1$, а в слове $u_{i+1} \dots u_m$ первую справа нетрансформу: $u_s = g_s K_s g_s', i+1 \le s \le m$. Причем левая половина g_j' нетрансформы u_j и правая половина g_s' нетрансформы u_s в силу строения простого слова являются изолированными. Можно показать, что $u_s = u_j^{-1}$.

2.1. Случай, когда $s = m, j = 1$ аналогичен случаю 1.

2.2. Пусть $s = m$, $j = 2$. Следовательно в слове $u_1 u_2 u_3 \dots u_{m-1} u_m$ трансформа – u_1, нетрансформы – u_2, u_m. Если предположить, что $u_2 \neq u_m^{-1}$, то изолированный конец u_2 можно перевести в изолированный конец u_m, что противоречит условию 4 определения 1.5. Следовательно $u_2 = u_m^{-1}$.

Сопрягая слово (gag^{-1}) с помощью u_2 получим:

$$u_2^{-1}(gag^{-1})u_2 = u_2^{-1} u_1 u_2 u_3 \dots u_{m-1} u_m u_2 =$$
$$= u_2^{-1} u_1 u_2 u_3 \dots u_{m-1} u_2^{-1} u_2 = u_2^{-1} u_1 u_2 u_3 \dots u_{m-1}.$$

По определению 1.5. $(u_2^{-1} u_1 u_2)$ – трансформа, следовательно число сомножителей в слове $(u_2^{-1} u_1 u_2) u_3 \dots u_{m-1}$ меньше m и по индуктивному предположению для данного случая лемма справедлива.

2.3. Пусть $1 \le j \le i-1$ и $i+1 \le s \le m$. Тогда $gag^{-1} = u_1 u_2 \dots u_{j-1} u_j u_{j+1} \dots u_{i-1}\,(g_i K_i {g_i}^{-1}) u_{i+1}\ \dots u_{s-1} u_s u_{s+1} \dots u_m$; причем $l(u_s) > l(u_{s+1}) > \dots > l(u_m\,)$, с другой стороны $l(u_j) > l(u_{j-1}) > \dots > l(u_1\,)$.

Слова $u_{j-1}^{-1} \dots u_1^{-1}$ и $u_{s+1} \dots u_m$ простые, как подслова простого слова. Предположим, что $l(u_s) \le l(u_j)$ (случай $l(u_s) \ge l(u_j)$ симметричен и доказательство аналогично).

Сопрягаем трансформу gag^{-1} словом $u_1 u_2 \dots u_{j-1}$:

$$g'a(g')^{-1} = u_j u_{j+1} \dots u_{i-1}\,(g_i K_i g_i^{-1}) u_{i+1}\, \dots u_{s-1} u_s u_{s+1} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_{j-1},$$

отсюда $l(u_s u_{s+1} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_{j-1}) = l(u_s)$. Если предположить противное: $l(u_s u_{s+1} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_{j-1}) > l(u_s)$, возможны следующие случаи:

– либо слово $u_s u_{s+1} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_{j-1}$ не является простым, что противоречит условию, так как подслово простого слова есть простое;

– либо если $u_s u_{s+1} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_{j-1}$ простое, то изолированную правую половину u_s можно перевести в правую половину трансформы u_{j-1}, что противоречит определению 1.5.

Кроме u_s наибольшую длину имеют u_{s+1} и u_{j-1}. При этом $l(u_{s+1}) \geq l(u_{j-1})$ или наоборот $l(u_{s+1}) \leq l(u_{j-1})$ и сокращения проходят до ядра минимального. Причем, в случае, если $l(u_{s+1}) < l(u_{j-1})$, то $l(u_{j-1}) < l(u_s)$, в чем можно легко убедиться, так как в противном случае слово $u_s u_{s+1} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_{j-1}$ не является простым словом, либо изолированную правую половину u_s можно перевести в правую половину u_{j-1}.

Таким образом, для произведения $u_{s+1} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_{j-1}$ имеем $l(u_{s+1} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_{j-1}) < l(u_s) \leq l(u_j)$. Следовательно, правую половину u_s можно перевести в левую половину u_j, что невозможно. Поэтому $l(u_{s+1}) = l(u_{j-1})$ и можно показать, что трансформы u_{s+1} и u_{j-1} лежат в одной подгруппе (M_j) ряда (3.1). Тогда $u_{s+1} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_{j-1} = u$ есть трансформа, принадлежащая подгруппе (M_j). Получили случай аналогичный 2.2.

б) Слово w содержит нетрансформы u_{i-1}, u_{i+1} и трансформу u_i со свойствами $l(u_{i-1}) = l(u_{i+1}) = l(u_{i-1} u_{i+1}) = l(u_{i-1} u_i u_{i+1}), l(u_{i-1}) > l(u_j)$, $1 \leq j \leq i-2, i+2 \leq j \leq m$ и $l(u_i) \leq l(u_{i-1})$, то есть w – слово вида c.

Так как $l(u_{i-1}) = l(u_{i-1} u_i u_{i+1})$, то, обозначив $u_{i-1} = u_{i_Л} K_{i-1} u_{i_П}$, имеем $u_i = u_{i_П}^{-1} K_i u_{i_П}$ и $u_{i+1} = u_{i_П}^{-1} K_{i+1} u'_{i_П}$. Известно [8], что левая половина $u_{i_Л}$ нетрансформы u_{i-1} изолирована и правая половина $u'_{i_П}$ нетрансформы u_{i+1} также изолирована. Пусть трансформа $u_i \in (M_i)$ ряда (3.1). Тогда

$$gag^{-1} = u_1 u_2 \dots u_{i-2}\,(u_{i_Л} K_{i-1} u_{i_П})(g_i K_i g_i{}^{-1})(u_{i_П}^{-1} K_{i+1} u'_{i_П}) u_{i+2} \dots u_m,$$

$$gag^{-1} = u_1 u_2 \dots u_{i-2}\, u_{i_Л}\,(K_{i-1} K_i K_{i+1}) u'_{i_П} u_{i+2} \dots u_m$$

Длина начального куска $l(u_1 u_2 \dots u_{i-2}\, u_{i_Л})$ меньше $l(u_{i-1})$.

Если $u_{i-1} \neq u_{i+1}^{-1}$, то с помощью подслова $u_1 u_2 \dots u_{i-2}$ изолированную левую половину $u_{i_Л}$ нетрансформы u_{i-1} мы можем перевести в изолированную правую половину $u'_{i_П}$ нетрансформы u_{i+1}. Это невозможно, следовательно $u_{i-1} = (u_{i+1})^{-1}$. Используя рассуждения предыдущего случая можно показать справедливость данного случая.

в) Пусть нетрансформа u_i слова $w = u_1 u_2 \dots u_m$ имеет максимальную длину, то есть $l(u_i) > l(u_j)$, $1 \leq j \leq i-1$, $i+1 \leq j \leq m$, и w есть слово вида a. Так как длина слова gag^{-1} нечетна, то $l(gag^{-1}) = l(u_1 u_2 \dots u_m) = l(u_i)$, где $l(u_i)$ – нечетна. Получаем, что умножением слева на слово $u_{i+1} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_{i-1}$ левую половину нетрансформы u_i можно перевести в левую половину нетрансформы u_i^{-1} умножением на слово меньшей длины, т.к. $l(u_{i+1} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_{i-1}) < l(u_i)$. Что невозможно по определению специального множества.

г) Слово $w = u_1 \dots u_m$ содержит нетрансформу u_i и трансформу u_{i+1} максимальной длины, то есть $l(u_i) = l(u_{i+1}) = l(u_i u_{i+1})$, $l(u_i) > l\big(u_j\big)$, $1 \leq j \leq i-1$, $i+2 \leq j \leq m$, то есть w – слово вида b. По аналогичным рассуждениям этот случай невозможен.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть* H *– конечно порожденная подгруппа группы* $G_\Gamma = G_{\Gamma_1} \underset{a_{n-1}^{p_{n-1}} = a_n^{p_n}}{*} \langle a_n \rangle$ *и* H *порождена двумя различными специальными множествами:* $H = gp(M_0, S)$ *и* $H = gp(M'_0, S')$*, где* S *– подгруппа, порожденная подгруппами ряда*

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \dots \leq (M_k), \tag{3.3}$$

S' *– подгруппа, порожденная подгруппами ряда*

$$(M'_1) \leq (M'_2) \leq \dots \leq \big(M'_{k'}\big), \tag{3.4}$$

$(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$, $\left(M_j'\right) = g_j^{-1} C_j' g_j$, где каждая из подгрупп C_i и C_j' одновременно принадлежит либо сомножителю $G_{\Gamma_1} = \langle \prod_{k=1}^{n-1} * \langle a_k \rangle | a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$, либо сомножителю $\langle a_n \rangle$ группы G_Γ.

Тогда для каждой подгруппы $(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$ ряда (3.3) существует $\left(M_j'\right)$ из (3.4) и слово $w_{ij} \in H$, такое что $(M_i) \subseteq w_{ij}^{-1} \left(M_j'\right) w_{ij}$.

Доказательство. Если подгруппа (M_i) из ряда (3.3) содержит трансформы единичной длины, то некоторая подгруппа $\left(M_j'\right)$ ряда (3.4) также содержит трансформы единичной длины, и тогда слово $w_{ij} = 1$.

Пусть $v_i^{-1} K_1 v_i,\ v_i^{-1} K_2 v_i,\ \dots,\ v_i^{-1} K_m v_i$ образующие некоторой подгруппы $(M_i) = v_i^{-1} A_i v_i$ из ряда (3.3) где $v_i^{-1} = g_1' a_n^{\mu_1'} \dots g_{k_i}' a_n^{\mu_{k_i}'}$, $g_j' \in G_{\Gamma_1}, a_n^{\mu_j'} \in \langle a_n \rangle$, $j = \overline{1, k_\iota}$, $k_i > 1$, – левая половина трансформ. Полагаем, что среди трансформ $v_i^{-1} K_j v_i$ существует такая, что ядро K_j не сопряжено объединяемой подгруппе. Так как $v_i^{-1} K_j v_i \in gp(M_0', S')$, то в соответствии с леммой 3.2. имеем:

$$v_i^{-1} K_j v_i = u_{1j}^{-1} \dots u_{nj}^{-1} u_{0j} u_{nj} \dots u_{1j}, \tag{3.5}$$

где $1 \le j \le m$, $u_{1j}^{-1} \dots u_{nj}^{-1} u_{0j} u_{nj} \dots u_{1j}$ – простое слово, u_{0j} – трансформа из некоторой подгруппы $\left(M_j'\right)$ ряда (3.4).

Покажем теперь, что для любого j трансформы u_{0j} принадлежат одной подгруппе (M_s') ряда 3.4. Пусть $v_i^{-1} K_{j_1} v_i = u_{1j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1} u_{0j_1} u_{nj_1} \dots u_{1j_1}$ – слово вида c, а слово $v_i^{-1} K_{j_2} v_i = u_{1j_2}^{-1} \dots u_{nj_2}^{-1} u_{0j_2} u_{nj_2} \dots u_{1j_2}$ – слово вида d. Тогда $l\left(u_{nj_1}\right) > l\left(u_{sj_1}\right)$, где $s \ne n$, $l\left(u_{0j_1}\right) \le l\left(u_{nj_1}\right)$, $u_{n,j_1} -$ нетрансформа с изолированной правой половиной, $l\left(u_{1j_1}^{-1} \dots u_{n-1j_1}^{-1}\right) < l\left(u_{nj_1}^{-1}\right)$. Трансформа u_{0j_2} удовлетворяет условию: $l\left(u_{0j_2}\right) > l\left(u_{s,j_2}\right)$ при $s \ne 0$, $l\left(u_{1j_2}^{-1} \dots u_{nj_2}^{-1}\right) < l\left(u_{0j_2}\right)$ и так как подслова $u_{1j_1}^{-1} \dots u_{n-1j_1}^{-1}$ и $u_{1j_2}^{-1} \dots u_{nj_2}^{-1}$ одновременно принадлежат подгруппе $gp(M_0\ , S)$ и имеют длину меньше $2k_i + 1$, то после сопряжения этими элементами трансформ $v_i^{-1} K_j v_i$, их длина не изменится. Поэтому изолированную левую половину u_{n,j_1}

умножением можно перевести в левую половину u_{0j_2}, что противоречит определению специального множества.

Предположим, что все слова вида (3.5) есть слова вида c. Тогда в силу строения простого слова имеем: $u_{s,j_1} = u_{s,j_2}$ для $s = \overline{1,n}$. Трансформы u_{0j} принадлежат одной подгруппе $\left(M'_j\right)$ ряда (3.4), причем, если $u_{n_j} = (g')^{-1} K_j g''$, где $(g')^{-1}$ – неизолированная левая половина, то $(M'_s) = (g')^{-1} A_s g'$.

Каждое слово $u_{1j_s}^{-1} \dots u_{n-1,j_s}^{-1} u_{nj_s}^{-1} = v_i^{-1} K'_s g'$. Поэтому, сопрягая левую и правую половину равенства (3.5) словом $u_{1j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1}$, получим

$$u_{nj_1} \dots u_{1j_1}\left(v_i^{-1} K_{j_1} v_i\right) u_{1j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1} = g'^{-1} \widetilde{K}_{j_1} g', 1 \leq j \leq m\ ,\ g'^{-1} \widetilde{K}_{j_1} g' = u_{0j_1},$$

$$g'^{-1} \widetilde{K}_{j_1} g' = u_{nj_1} \dots u_{1j_1} u_{1j_s}^{-1} u_{2j_s}^{-1} \dots u_{nj_s}^{-1} u_{0j_s} u_{1j_s} u_{2j_s} \dots u_{nj_s} u_{nj_1}^{-1} \dots u_{1j_1}^{-1},\ 1 \leq j \leq m,$$

$$u_{nj_1} \dots u_{1j_1} u_{1j_s}^{-1} u_{2j_s}^{-1} \dots u_{nj_s}^{-1} = (g')^{-1} K''_s g', \text{ где } (g')^{-1} K''_s g' \in (M'_s).$$

Отсюда $u_{1j_s}^{-1} u_{2j_s}^{-1} \dots u_{nj_s}^{-1} = u_{1j_1}^{-1} u_{2j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1} ((g')^{-1} K''_s g')$.

В результате, используя рассмотренные выше равенства и заменяя в равенстве (3.5) подслова $u_{1j_s}^{-1} u_{2j_s}^{-1} \dots u_{nj_s}^{-1}$ соответственно равным словом $u_{1j_1}^{-1} u_{2j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1} ((g')^{-1} K''_s g')$, получим

$$v_i^{-1} K_s v_i = u_{1j_1}^{-1} u_{2j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1} u'_{0j_s} u_{1j_1} u_{2j_1} \dots u_{nj_1},$$

где $u'_{0j_s} = ((g')^{-1} K''_s g_1) u'_{0j_s} (g_1^{-1} (K''_s)^{-1} g') \in (M'_s)$.

Пусть все слова (3.5) являются словами вида d. Тогда $l\left(u_{1j}^{-1} \dots u_{nj}^{-1}\right) < l(u_{0j})$ для $1 \leq j \leq m$, и допустим, что трансформа u_{0j} имеет вид $u_{0j} = (g'_1)^{-1} a_n^{-\mu'_1} \dots \left(g'_{k_i}\right)^{-1} a_n^{-\mu'_{k_i}} K_j a_n^{\mu'_{k_i}} g'_{k_i} \dots a_n^{\mu'_1} g'_1$. Рассмотрим произведение:

$$u_{0_1} u_{n_1} \dots u_{1_1} \cdot u_{1_j}^{-1} \dots u_{n_j}^{-1} u_{0_j},\ 1 \leq j \leq m.$$

Так как в словах $u_{0_1} u_{n_1} \dots u_{1_1}$ и $u_{1_j}^{-1} \dots u_{n_j}^{-1} u_{0_j}$ максимальные длины имеют u_{0_1} и u_{0_j} соответственно, причем $l\left(u_{0_1}\right) = l(u_{0_j})$, то

$$u_{0_1} u_{n_1} \dots u_{1_1} \cdot u_{1_j}^{-1} \dots u_{n_j}^{-1} u_{0_j} = (g'_1)^{-1} a_n^{-\mu'_1} \dots \left(g'_{k_i}\right)^{-1} a_n^{-\mu'_{k_i}} h_j a_n^{\mu'_{k_i}} g'_{k_i} \dots a_n^{\mu'_1} g'_1,$$

где h_j принадлежит объединяемой подгруппе, тогда $u_{1j}^{-1} \dots u_{nj}^{-1} = u_{1_1}^{-1} \dots u_{n_1}^{-1} u'_{0_j}$, где $u'_{0_j} \in (M'_s)$, $l\left(u'_{0_j}\right) < 2k_i + 1$. Но тогда трансформы $v_i^{-1} K_1 v_i$ и $v_i^{-1} K_j v_i$ примут следующий вид:

$$v_i^{-1} K_1 v_i = u_{1_1}^{-1} u_{2_1}^{-1} \dots u_{n_1}^{-1} u_{0_1} u_{n_1} u_{n-1,_1} \dots u_{1_1},$$

$$v_i^{-1} K_j v_i = u_{1_1}^{-1} u_{2_1}^{-1} \dots u_{n_1}^{-1} u''_{0j} u_{n_1} u_{n-1,_1} \dots u_{1_1},$$

где $1 \leq j \leq m$, $u''_{0j} = u'_{0_j} u_{0_j} (u'_{0_j})^{-1} \in (M'_s)$.

Таким образом, мы показали, что для каждой подгруппы (M_i) ряда (3.3) существует подгруппа ряда (3.4) и слова $w_{ij} \in H$ такие, что $(M_i) \subseteq w_{ij}^{-1}(M'_j) w_{ij}$.

Лемма 3.4. [43] *Пусть подгруппа H порождена двумя различными специальными множествами $H = gp(M_0, S)$ и $H = gp(M'_0, S')$, где S – древесное произведение подгрупп ряда (3.3), а S' – древесное произведение подгрупп ряда (3.4). Тогда существует подгруппа $(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$, из ряда (3.3), существует $\left(M'_j\right)$ из ряда (3.4) и слово $w_{ij} \in H$, такое что $(M_i) = w_{ij}^{-1}\left(M'_j\right) w_{ij}$.*

Доказательство. Для каждой подгруппы (M_i) ряда (3.3) на основании леммы 3.3 существует подгруппа (M_i) ряда (3.4) и слово w_{ij}, удовлетворяющие условию

$$(M_i) \subseteq w_{ij}^{-1}\left(M'_j\right) w_{ij} \tag{3.6}$$

Аналогично для подгрупп ряда (3.4):

$$\left(M'_j\right) \subseteq w_{ji}^{-1}(M_{i'}) w_{ji} \tag{3.7}$$

С помощью соотношений (3.6) и (3.7) можно построить цепочку вложенных подгрупп, имеющих наименьшую длину:

$$w_1^{-1}\left(M_{p_1}\right) w_1 \subseteq w'^{-1}_1\left(M'_{q_1}\right) w'_1 \subseteq w_2^{-1}\left(M_{p_2}\right) w_2 \subseteq \dots \subseteq \tag{3.8}$$

$$\subseteq w'^{-1}_k\left(M'_{q_k}\right) w'_k \subseteq \left(M_{p_1}\right),$$

где $w_i, w'_i \in H$, $\left(M_{p_i}\right)$ – подгруппа ряда (3.3), $\left(M'_{q_j}\right)$ – подгруппа ряда (3.4). Следовательно $w_1^{-1}\left(M_{p_1}\right) w_1 \subseteq \left(M_{p_1}\right)$.

Подгруппа $\left(M_{p_1}\right) = v_{p_1}^{-1} C_{p_1} v_{p_1}$ – бесконечная. Возможно следующее:

1) Пусть C_{p_1} не сопряжена объединяемой подгруппе, тогда (M_{p_1}) содержит трансформу $v_{p_1}^{-1}Kv_{p_1}$, в которой ядро K не сопряжено ни одному элементу из объединяемой подгруппы. Так как слово w_1 из H, его можно записать в u-символах $w_1^{-1} = u_1^{-1} \dots u_n^{-1}$. Тогда

$$u_1^{-1} \dots u_n^{-1}(v_{p_1}^{-1}Kv_{p_1})u_n \dots u_1 = v_{p_1}^{-1}K'v_{p_1}$$

и слово $u_1^{-1} \dots u_n^{-1}(v_{p_1}^{-1}Kv_{p_1})u_n \dots u_1$ – простое, в котором все трансформы u_i удовлетворяют условию: $l(u_1) \le l(u_2) \le \dots \le l(u_n) \le 2l(v_{p_1}^{-1}) + 1$.

Рассмотрим произведение

$$u_1^{-1} \dots u_n^{-1}(v_{p_1}^{-1}Kv_{p_1})u_n \dots u_1(v_{p_1}^{-1}K'^{-1}v_{p_1}) = 1.$$

Если допустить, что $u_1 \notin (M_{p_1})$, тогда $u_1^{-1} \dots u_n^{-1}(v_{p_1}^{-1}Kv_{p_1})u_n \dots u_1(v_{p_1}^{-1}K'^{-1}v_{p_1})$ является словом в подгруппе H и поэтому не равно 1. Значит $u_1 \in (M_{p_1})$. Аналогично все $u_i \in (M_{p_1})$, отсюда $w_1^{-1}(M_{p_1})w_1 = (M_{p_1})$ и следовательно в этом случае в соотношении (3.8) знак $\subseteq$ можно заменить на равенство. Лемма доказана.

2) Пусть подгруппа C_{p_1} сопряжена объединяемой подгруппе. Тогда сопряжением ее можно привести к подгруппе C'_{p_1}, которая не сопряжена объединяемой подгруппе. Получаем случай 1).

Лемма 3.5. [43] *Пусть $H_1 = gp(M_0, S)$ и $H_2 = gp(M'_0, S')$ – две конечно порожденные подгруппы группы G_Γ. Основа S подгруппы H_1 порождена подгруппами ряда*

$$(M_1) \le (M_2) \le \dots \le (M_{k_1}), \tag{3.9}$$

основа S' подгруппы H_2 порождена подгруппами ряда

$$(M'_1) \le (M'_2) \le \dots \le (M'_{k_2}). \tag{3.10}$$

Тогда, если H_1 и H_2 сопряжены в G_Γ, то есть существует $z \in G_\Gamma$, такой что $z^{-1}H_1z = H_2$, то существуют $w \in gp(M'_0, S'), j = \overline{1, k_1}$, $s = \overline{1, k_2}$, такие, что $w^{-1}z^{-1}(M_j)zw = (M'_s)$, где (M_j) – подгруппа ряда (3.9), (M'_s) – подгруппа ряда (3.10).

Доказательство. По условию леммы подгруппы $H_1 = gp(M_0, S)$ и $H_2 = gp(M_0', S')$ сопряжены, тогда существует $z \in G_\Gamma$ такое, что $z^{-1}gp(M_0, S)z = gp(M_0', S')$. Приведем образующие подгруппы $z^{-1}gp(M_0, S)z$ к образующим специального множества. На каждом шаге подгруппы $z^{-1}(M_j)z$, порожденные трансформами одного вида, входящие в множество образующих подгруппы, переходят в сопряженные им и кроме того чтобы выполнялись условия 2), 3), 4) леммы 1.1., порождающие подгруппы, сопряженные с $z^{-1}(M_j)z$, могут пополняться трансформами. Тогда получим: $z^{-1}gp(M_0, S)z = gp(M_0'', S'')$, где S'' порождена подгруппами ряда $(M_1'') \leq (M_2'') \leq \cdots \leq (M_{k_3}'')$.

Из алгоритма построения подгрупп $(M_i''), i = \overline{1, k_3}$, следует, что каждая подгруппа $z^{-1}(M_j)z$ будет либо сопряжена некоторой подгруппе ряда $(M_1'') \leq (M_2'') \leq \cdots \leq (M_{k_3}'')$, либо с подгруппой некоторой подгруппы этого ряда. Сопряжем подгруппу $gp(M_0'', S'')$ элементом z^{-1}: $gp(M_0, S) = zgp(M_0'', S'')z^{-1}$. Преобразуем множество $zgp(M_0'', S'')z^{-1}$ в специальное множество. Через конечное число шагов получим, что $zgp(M_0'', S'')z^{-1} = gp(M_0''', S''')$, где S''' порождена подгруппами ряда $(M_1''') \leq (M_2''') \leq \cdots \leq (M_{k_4}''')$. Таким образом, для подгрупп рядов имеет место следующее соотношение:

$$\overline{w}_{ij}^{-1} z^{-1}(M_i) z \overline{w}_{ij} \subseteq (M_j''),$$

$\overline{w}_{ij} \in z^{-1}gp(M_0, S)z = gp(M_0'', S'')$, поэтому $\overline{w}_{ij} = z^{-1}w_{ij}z$, $w_{ij} \in gp(M_0, S)$.

С другой стороны, каждая подгруппа (M_j'') сопряжена некоторой подгруппе из (M_s'''), то есть $w_{js}'^{-1} z (M_j'') z^{-1} w_{js}' \subseteq (M_s''')$, где $w_{js}' \in gp(M_0, S)$. Поэтому имеем:

$$w_{js}'^{-1} z \overline{w}_{ij}^{-1} z^{-1}(M_i) z \overline{w}_{ij} z^{-1} w_{js}' \subseteq w_{js}'^{-1} z (M_j'') z^{-1} w_{js}' \subseteq (M_s'''), \tag{3.11}$$

где произведение $w_{js}'^{-1} z \overline{w}_{ij}^{-1} z^{-1} = w_{js}'^{-1} z (z^{-1} w_{ij}^{-1} z) z^{-1} = {w'}_{js}^{-1} w_{ij}^{-1} \in gp(M_0, S)$.

Учитывая теперь, что $gp(M_0', S') = gp(M_0'', S'')$ и $gp(M_0''', S''') = gp(M_0, S)$, можно расширить цепочки вида (3.11). В результате для каждой подгруппы (M_i) будем иметь:

$$w_{js}'^{-1} z \overline{w}_{ij}^{-1} z^{-1}(M_i) z \overline{w}_{ij} z^{-1} w_{js}' \subseteq w_{js}'^{-1} z \overline{w}_{jr}^{-1} (M_j'') \overline{w}_{jr} z^{-1} w_{js}' \subseteq$$

$$\subseteq w_{js}'^{-1} z \bar{w}_{rp}^{-1} (M'_r) \bar{w}_{rp} z^{-1} w_{js}' \subseteq w_{js}'^{-1} z \left(M''_p\right) z^{-1} w_{js}' \subseteq w_{js}'^{-1} (M'''_i) w_{js}' \subseteq (M_s),$$

где $w_{js}'^{-1} z \bar{w}_{ij}^{-1} z^{-1} \in gp(M_0, S)$.

Используя полученные ранее цепочки, можно построить цепочку минимальной длины следующего вида:

$$w_{p_1}^{-1} z \bar{w}_1^{-1} z^{-1} \left(M_{p_1}\right) z \bar{w}_1 z^{-1} w_{p_1} \subseteq w_{p_1}^{-1} z \bar{w}_2^{-1} \left(M_{i_2}''\right) \bar{w}_2 z^{-1} w_{p_1} \subseteq$$
$$\subseteq w_{p_1}^{-1} z \bar{w}_3^{-1} \left(M_{j_3}'\right) \bar{w}_3 z^{-1} w_{p_1} \subseteq \cdots \subseteq \left(M_{p_1}\right),$$

из которой следует, что $w_{p_1}^{-1} z \bar{w}_1^{-1} z^{-1} \left(M_{p_1}\right) z \bar{w}_1 z^{-1} w_{p_1} \subseteq \left(M_{p_1}\right)$, и так как $w_{p_1}^{-1} z \bar{w}_1^{-1} z^{-1} \in gp(M_0, S)$, то, используя лемму 3.4., можно показать, что $w_{p_1}^{-1} z \bar{w}_1^{-1} z^{-1}$ есть трансформа из $\left(M_{p_1}\right)$.

Поэтому имеет место равенство $w_{p_1}^{-1} z \bar{w}_1^{-1} z^{-1} \left(M_{p_1}\right) z \bar{w}_1 z^{-1} w_{p_1} = \left(M_{p_1}\right)$.

В результате получаем:

$$w_{p_1}^{-1} z \bar{w}_1^{-1} z^{-1} \left(M_{p_1}\right) z \bar{w}_1 z^{-1} w_{p_1} = w_{p_1}^{-1} z \bar{w}_3^{-1} \left(M_{j_3}'\right) \bar{w}_3 z^{-1} w_{p_1},$$

откуда $\bar{w}_1^{-1} z^{-1} \left(M_{p_1}\right) z \bar{w}_1 = \bar{w}_3^{-1} \left(M_{j_3}'\right) \bar{w}_3$, где $\bar{w}_1, \bar{w}_3 \in gp(M_0', S')$. Лемма доказана.

3.1.3. Доказательство основной теоремы

Теорема 3.1. [43] *В группе* $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \mid a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$ *разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

Доказательство. Представим группу G_Γ в виде $G_\Gamma = G_{\Gamma_1} \underset{a_{n-1}^{p_{n-1}} = a_n^{p_n}}{*} \langle a_n \rangle$,

где $G_{\Gamma_1} = \langle \prod_{k=1}^{n-1} * \langle a_k \rangle \mid a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$; $|p_{ij}|, |p_{ji}| > 1, i \neq j, i \in I'_1, j \in I'_2$.

Пусть $H_1 = gp(M_0, S)$, где S порождена подгруппами ряда

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \cdots \leq \left(M_{k_1}\right), \tag{3.12}$$

$H_2 = gp(M_0', S')$, где S' порождена подгруппами ряда

$$(M_1') \leq (M_2') \leq \cdots \leq \left(M_{k_2}'\right). \tag{3.13}$$

Среди подгрупп (3.12) существует подгруппа $\left(M_{i_0}\right) = v_{i_0}^{-1} C_{i_0} v_{i_0}$, среди подгрупп (3.13) существует подгруппа $\left(M_{j_0}'\right) = g_{j_0}^{-1} C_{j_0}' g_{j_0}$, где каждая из подгрупп C_{i_0}, C_{j_0}' является подгруппой либо сомножителя G_{Γ_1}, либо сомножителя $\langle a_n \rangle$ одновременно.

Тогда существует элемент $w \in gp(M_0', S'\ )$ такой что:

$$w^{-1}z^{-1}(M_{i_0})zw = (M_{j_0}'). \qquad (3.14)$$

I) Пусть подгруппы C_{i_0}, C_{j_0}' одновременно не сопряжены с объединяемой подгруппой U_n: $a_{n-1}^{p_{n-1}} = a_n^{p_n}$.

Подставив равенства $(M_{i_0}) = v_{i_0}^{-1}C_{i_0}v_{i_0}$, $(M_{j_0}') = g_{j_0}^{-1}C_{j_0}'g_{j_0}$ в соотношение (3.14), получаем следующее равенство:

$$(g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1})C_{i_0}(v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}) = C_{j_0}',$$

в котором $v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1} = a_0 \in G_{\Gamma}$.

Можно записать: $(g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1})gp(v_{i_0}M_0v_{i_0}^{-1}, v_{i_0}Sv_{i_0}^{-1})(v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}) =$
$= gp(g_{j_0}M_0'g_{j_0}^{-1}, g_{j_0}S'g_{j_0}^{-1})$.

Приведем образующие подгрупп $gp(v_{i_0}M_0v_{i_0}^{-1}, v_{i_0}Sv_{i_0}^{-1})$, $gp(g_{j_0}M_0'g_{j_0}^{-1}, g_{j_0}S'g_{j_0}^{-1})$ к специальным образующим, таким образом получаем:

$$a_0^{-1}gp(M_0''', S''')a_0 = gp(M_0'', S''). \qquad (3.15)$$

Выберем в подгруппе $gp(M_0''', S''')$ произвольный образующий из специального множества длины больше 1, например $X = g_1a_n^{\mu_1}g_2a_n^{\mu_2} \dots g_ka_n^{\mu_k}$, $k > 1$, где $g_i \in G_{\Gamma_1}$. Из соотношения (3.15) следует, что

$$a_0^{-1}Xa_0 = a_0^{-1}g_1a_n^{\mu_1} \dots g_ka_n^{\mu_k}a_0 \in gp(M_0'', S'').$$

Тогда слово $a_0^{-1}Xa_0$ можно переписать в другой системе образующих: $a_0^{-1}Xa_0 = u_0u_{i_1} \dots u_{i_t}$, где $u_0 \in C_{j_0}'$, $u_{i_j} \in\ gp(M_0'', S'')$.

Пусть $u_{i_1} = g_1'a_n^{\mu'_1} \dots g_k'a_n^{\mu'_k}$, тогда

$$a_0^{-1}Xa_0 = a_0^{-1}g_1a_n^{\mu_1} \dots g_ka_n^{\mu_k}a_0 = u_0(g_1'a_n^{\mu_1'} \dots g_k'a_n^{\mu_k'}) \dots u_{i_t}.$$

Из чего следует, что $a_0^{-1}g_1 = u_0g_1'h$, где h принадлежит объединяемой подгруппе: $h = a_n^{p_nt}, t \in \mathbb{Z}$, и t можно ограничить, так как группа G_{Γ} является группой с нетривиальным центром, порождаемым элементом $a_n^x \in C(G_{\Gamma})$. Таким образом: $a_0^{-1} = u_0g_1'hg_1^{-1}$ и в качестве a_0^{-1} можно взять $a_0^{-1} = g_1'hg_1^{-1}$.

Множество элементов такого вида конечно и, построив его, мы можем эффективно проверить, существует ли a_0 такой, что $z^{-1} = wg_{j_0}a_0v_{i_0}$, а так как $w \in H_2$, то в качестве z^{-1} можно взять

$$z^{-1} = g_{j_0}a_0v_{i_0}.$$

Если ни для одного такого a_0 не выполняется условие $z^{-1}H_1z = H_2$, то подгруппу $\left(M'_{j_0}\right)$ заменяем другой подгруппой $\left(M'_{j_1}\right)$, сопряженной подгруппе $\left(M_{i_0}\right)$, и повторяем алгоритм для данной пары подгрупп.

II) Каждая подгруппа $\left(M_{i_j}\right)$ ряда (3.12) сопряжена с подгруппой из объединения: $\langle a_{n-1}^{p_{n-1}}\rangle = \langle a_n^{p_n}\rangle$.

Аналогичному условию удовлетворяет каждая подгруппа ряда (3.13). Иначе, в противном случае подгруппы H_1 и H_2 не сопряжены.

На основании леммы 3.5 из сопряженности подгрупп $z^{-1}H_1z = H_2$, следует существование подгрупп $\left(M_{i_0}\right) = v_{i_0}^{-1}C_{i_0}v_{i_0}$ ряда (3.12), $\left(M'_{j_0}\right) = g_{j_0}^{-1}C'_{j_0}g_{j_0}$ ряда (3.13) и элемента $w \in gp(M'_0, S')$ такого, что

$$w^{-1}z^{-1}\left(v_{i_0}^{-1}C_{i_0}v_{i_0}\right)zw = \left(g_{j_0}^{-1}C'_{j_0}g_{j_0}\right). \tag{3.16}$$

Пусть $C_{i_0} = a_{i_0}^{-1}\langle a_{n-1}^{p_{n-1}k_{i_0}}\rangle a_{i_0}$, где $a_{i_0} \in G_{\Gamma_1}$, $C'_{j_0} = a_{j_0}^{-1}\langle a_{n-1}^{p_{n-1}k_{j_0}}\rangle a_{j_0}$, где $a_{j_0} \in G_{\Gamma_1}$. Тогда соотношение (3.16) приведем к виду:

$$a_{j_0}g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}a_{i_0}^{-1}\langle a_{n-1}^{p_{n-1}k_{i_0}}\rangle a_{i_0}v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}a_{j_0}^{-1} = \langle a_{n-1}^{p_{n-1}k_{j_0}}\rangle. \tag{3.17}$$

Из соотношения (3.17) имеем, что

$$\widetilde{w}^{-1} = a_{j_0}g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}a_{i_0}^{-1} = hs_1s_2 \dots s_N,$$

где каждое s_i есть степень a_n либо слово в образующих группы G_{Γ_1}, коммутирующих с элементами из объединяемой подгруппы $\langle a_{n-1}^{p_{n-1}}\rangle = \langle a_n^{p_n}\rangle$ и $h = a_{n-1}^{p_{n-1}k}$.

Преобразуем соотношение $w^{-1}z^{-1}gp(M_0, S)zw = gp(M'_0, S')$:

$$\left(a_{j_0}g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}a_{i_0}^{-1}\right)a_{i_0}v_{i_0}gp(M_0, S)v_{i_0}^{-1}a_{i_0}^{-1}\left(a_{i_0}v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}a_{j_0}^{-1}\right) =$$

$$= a_{j_0}g_{j_0}gp(M'_0, S')g_{j_0}^{-1}a_{j_0}^{-1}.$$

Приведем образующие подгрупп $a_{i_0} v_{i_0} gp(M_0, S) v_{i_0}^{-1} a_{i_0}^{-1}$ и $a_{j_0} g_{j_0} gp(M_0', S'\ ) g_{j_0}^{-1} a_{j_0}^{-1}$ к специальным образующим:

$$a_{i_0} v_{i_0} gp(M_0, S) v_{i_0}^{-1} a_{i_0}^{-1} = gp(M_0'', S'');$$

$$a_{j_0} g_{j_0} gp(M_0', S') g_{j_0}^{-1} a_{j_0}^{-1} = gp(M_0''', S''').$$

Причем подгруппы $(M_1'') = (M_1''') = \langle a_{n-1}^{p_{n-1} k_{j_0}} \rangle$, либо $(M_1'') = (M_1''') = \langle a_n^{p_n k_{j_0}} \rangle$. Слово $\widetilde{w}$, удовлетворяющее соотношениям $\widetilde{w}^{-1} \langle a_{n-1}^{p_{n-1} k_{j_0}} \rangle \widetilde{w} = \langle a_n^{p_n k_{j_0}} \rangle$, $\widetilde{w}^{-1} gp(M_0''', S''') \widetilde{w} = gp(M_0'', S'')$ выбираем наименьшим в двойном классе смежности $gp(M_0''', S''') \widetilde{w} gp(M_0'', S'')$.

Пусть $W_1 = \{w_{i_1}, {}_{i_1 = \overline{1, N_1}}\}$ – специальное множество образующих подгрупп $gp(M_0''', S_1''')$. $W_2 = \{w_{i_2}, {}_{i_1 = \overline{1, N_2}}\}$ – специальное множество образующих подгрупп $gp(M_0'', S_1'')$, причем $l_1 = max\{l(w_{1_1}), l(w_{2_1}), \ldots, l(w_{N_1})\}$, $l_2 = max\{l(w_{1_2}), l(w_{2_2}), \ldots, l(w_{N_2})\}$.

IIa) Рассмотрим случай, когда в подгруппах $gp(M_0'', S'')$ и $gp(M_0''', S''')$ есть нетрансформы: $M_0'' \neq \emptyset$, $M_0''' \neq \emptyset$.

В слове $\widetilde{w}^{-1} = h s_1 s_2 \ldots s_N$ выделим конечное подслово максимально возможной длины, совпадающее с конечным подсловом правой половины некоторого слова из специального множества $\widetilde{w}_{i_1}^{\varepsilon}$, где $\widetilde{w}_{i_1} \in W_1 = \{w_{i_1}, {}_{i_1 = \overline{1, N_1}}\}$.

Пусть $\widetilde{w}' = h s_1 s_2 \ldots s_i r_{j_x} r_{j-1,x} \ldots r_{1_x}$, где $r_{j_x} r_{j-1,x} \ldots r_{1_x}, j \geq 0$ – конечное подслово максимально возможной длины, совпадающее с правой половиной некоторого слова из подгруппы $gp(M_0''', S''')$, $\widetilde{w}'$ получили умножением слова $\widetilde{w}^{-1}$ на слово $u_1 u_2 \ldots u_p$, $l(u_1 u_2 \ldots u_p) < 2j$.

В слове $\widetilde{w}'$ длина начального отрезка $h s_1 s_2 \ldots s_{i-1}$ не больше $\left[\frac{l_2}{2}\right]$. Докажем это: допустим $l(h s_1 s_2 \ldots s_{i-1}) > \left[\frac{l_2}{2}\right]$. Тогда выберем в подгруппе $gp(M_0''', S''')$ любой образующий $\widetilde{w}_{i_1} \in W_1$, длины больше $2j - 1$: $\widetilde{w}_{i_1} = l_{1_{w_{i1}}} \ldots l_{n_i, w_{i1}} A_{w_{i1}} r_{n_i, w_{i1}} \ldots r_{j_{w_{i1}}} \ldots r_{1_{w_{i1}}}$. Сопряжем его элементом $\widetilde{w}'$

$$\widetilde{w}' \widetilde{w}_{i_1} (\widetilde{w}')^{-1} = h s_1 s_2 \ldots s_{i-1} l'' X r'' s_{i-1}^{-1} \ldots s_1^{-1}.$$

Подслово $hs_1s_2 \dots s_{i-1}$ не затрагивается сокращением, так как в противном случае, конечное подслово $r_{j_x}r_{j-1,x} \dots r_{1_x}$ слова $\widetilde{w}'$ не являлось бы максимально возможным.

Слово $hs_1s_2 \dots s_{i-1}l''Xr''s_{i-1}^{-1} \dots s_1^{-1}$ принадлежит подгруппе $gp(M_0''', S''')$ и, если $i-1 > \left[\frac{l_2}{2}\right]$, то длину $\widetilde{w}$ можно уменьшить, умножая слева на слово $w \in gp(M_0'', S'')$, что невозможно.

Теперь покажем, что, в произведении $(\widetilde{w}')^{-1}w_{i_2}^{-1}\widetilde{w}'$ слева и справа будут проходить сокращения затрагивающие слог s_i, $w_{i_2} \in W_2$. Допустим, что хотя бы с одной стороны слог s_i не затрагивается сокращением. Тогда $(\widetilde{w}')^{-1}w_{i_2}^{-1}\widetilde{w}' = Xs_ir_i \dots r_1$ и так как $(\widetilde{w}')^{-1}w_{i_2}^{-1}\widetilde{w}' \in gp(M_0''', S''')$, то $(\widetilde{w}')^{-1}w_{i_2}^{-1}\widetilde{w}' = u_0u_1 \dots u_n$ и поскольку $\widetilde{w}'$ нельзя укоротить, умножая справа на слова из $gp(M_0''', S''')$, то конечное подслово $Xs_ir_i \dots r_1$ можно перевести в конечное подслово правой половины некоторого $w_{j_1} \in W_2$, что невозможно по определению специального множества.

Поэтому длина любой нетрансформы из W_2 будет больше $2(i-1)$ и для любой подгруппы $\left(M_{i_j}''\right) = (g_{i_j}'')^{-1}C_{i_j}''g_{i_j}''$ с длиной $l\left(g_{i_j}''\right) \leq (i-1)$ и $g_{i_j}'' = hs_1s_2 \dots s_t$, $t \leq (i-1)$, имеем $s_t^{-1} \dots s_1^{-1}C_{i_j}''s_1 \dots s_t$ принадлежит C_n. Рассмотрим равенство

$$s_1 \dots s_ir_{j_x}r_{j-1,x} \dots r_{1_x}gp(M_0''', S''')r_{1_x}^{-1} \dots r_{j_x}^{-1}s_i^{-1} \dots s_1^{-1} = gp(M_0'', S'').$$

Сопрягая его одновременно слева и справа словом $s_1 \dots s_{i-1}$, а подгруппу $gp(M_0''', S''')$ словом $r_{1_x}^{-1} \dots r_{j_x}^{-1}$, получим

$$s_i'\left(r_{j_x} \dots r_{1_x}gp(M_0''', S''')r_{1_x}^{-1} \dots r_{j_x}^{-1}\right)s'^{-1}_i = s_{i-1}^{-1} \dots s_1^{-1}gp(M_0'', S'')s_1 \dots s_{i-1}.$$

Приводим подгруппу $r_{j_x} \dots r_{1_x}gp(M_0''', S''')r_{1_x}^{-1} \dots r_{j_x}^{-1}$ к виду $gp\left(M_0^{(4)}, S^{(4)}\right)$, а подгруппу $s_{i-1}^{-1} \dots s_1^{-1}gp(M_0'', S'')s_1 \dots s_{i-1}$ к виду $gp\left(M_0^{(5)}, S^{(5)}\right)$. Где подгруппы $gp\left(M_0^{(4)}, S^{(4)}\right)$ и $gp\left(M_0^{(5)}, S^{(5)}\right)$ порождены специальными множествами образующих и удовлетворяют равенству

$$s_i' gp\left(M_0^{(4)}, S^{(4)}\right) s_i'^{-1} = \ gp\left(M_0^{(5)}, S^{(5)}\right).$$

Таким образом, мы получили сопрягающий элемент s_i'. Его можно подобрать следующим образом: выберем в подгруппе $gp\left(M_0^{(4)}, S^{(4)}\right)$ любой образующий $X = s_i' s_1' s_2' \dots s_k', k > 1$. Тогда $s_i' X s'^{-1}_i = s_i' s_1' s_2' \dots s_k' s'^{-1}_i$, так как $s_i' s_1' s_2' \dots s_k' s'^{-1}_i \in gp\left(M_0^{(5)}, S^{(5)}\right)$, то его можно переписать в другой системе образующих: $s_i' s_1' s_2' \dots s_k' s'^{-1}_i = u_0 u_1 \dots u_m$, где $u_0 u_1 \dots u_n$ слово подгруппы $gp\left(M_0^{(5)}, S^{(5)}\right)$, причем u_0 трансформа длины 1, если среди подгрупп порождающих $S_1^{(5)}$ содержится подгруппа $\left(M_1^{(5)}\right)$, состоящая только из ядер трансформ, в противном случае $u_0 = 1$. Пусть $u_1 = l_{1_{u_1}} u_{1_n}$, тогда $s_i' s'_1 = u_0 l_{1_{u_1}} h$, где h есть степень либо a_{n-1}, либо a_n: $h = a_{n-1}^{p_{n-1} t}$, либо $h = a_n^{p_n t}$, t ограничено, т.к. для некоторого t: $a_n^{p_n t}$ – элемент из центра. Получаем $s_i' = u_0 l_{1_{u_1}} h s_1'^{-1}$, где $u_0 \in gp\left(M_0^{(5)}, S^{(5)}\right)$, из чего следует, что в качестве s_i' можно взять $l_{1_{u_1}} h s_1'^{-1}$. Таким образом, выбор s_i' делается как указано в случае I.

Для построения слова $\widetilde{w}' = h s_1 \dots s_i r_{j_x} r_{j-1,x} \dots r_{1_x}$, в качестве $r_{j_x} r_{j-1,x} \dots r_{1_x}$ выберем подслова правых половин элементов, включая 1, из множества $\{W_1 \cup W_1^{-1}\}$; в качестве $s_{i-1}^{-1} \dots s_1^{-1}$ – конечные подслова правых половин множества $\{W_2 \cup W_2^{-1}\}$, включая единицу.

IIб) Рассмотрим случай, когда в подгруппах $gp(M_0'', S'')$ и $gp(M_0''', S''')$, множества M_0'' и M_0''' пусты и $\widetilde{w} = h s_1 \dots s_N$.

Допустим, что умножением справа на подслова из подгруппы $gp(M_0''', S''')$ в слове $\widetilde{w}$ выделим конечное подслово максимально возможной длины $r_{n_{2_y}} r_{n_2-1,y} \dots r_{1_y}$, совпадающее с подсловом правой половины трансформ некоторой подгруппы (M_i'''), порождающей S'''. В результате получаем $\widetilde{w}' = h s_1 \dots s_i r_{n_{2_y}} r_{n_2-1,y} \dots r_{1_y}$. В подслове $h s_1 \dots s_{i-1}$ выделим максимально возможное начальное подслово, совпадающее с подсловом левой половины трансформ некоторой подгруппы (M_i'''), порождающей (S'''). При этом возможны случаи:

1) выделенное начальное подслово из $\widetilde{w}_L = s_1 \dots s_{i-1}$ полностью совпадает с самим $\widetilde{w}_L$. Если в подгруппе $gp\left(M_0^{(4)}, S^{(4)}\right)$ содержатся порождающие подгруппы $\left(M_j^{(4)}\right)$ с крыльями равными 1, то есть, если $S^{(4)} = \{C_i\}$, $C_i < G_{\Gamma_1}$ и подгруппа $S'' = \{C_j\}$, $C_j < G_{\Gamma_1}$, то решение проблемы сопряженности подгрупп H_1, H_2 сводится к сопряжению C_i, C_j в группе G_{Γ_1}. В противном случае, если в $\left(M_j^{(4)}\right)$ все трансформы имеют длины больше 1, тогда s_i определяем аналогично случаю IIa).

2) выделенное начальное подслово из $\widetilde{w}_L = s_1 \dots s_{i-1}$ не совпадает с $\widetilde{w}_L$. Тогда $\widetilde{w}_L' = r_{1_y}^{-1} r_{2_y}^{-1} \dots r_{n_{1_y}}^{-1} s_{n_1+1} \dots s_{i-1}$, а

$$\widetilde{w}' = r_{1_y}^{-1} r_{2_y}^{-1} \dots r_{n_{1_y}}^{-1} s_{n_1+1} \dots s_{i-1} s_i r_{j_x} r_{j-1,x} \dots r_{1_x},$$

причем каждая подгруппа $\left(M_{ij}'''\right) = \left(g_{ij}'''\right)^{-1} C_{ij}''' g_{ij}'''$, удовлетворяет соотношению

$$s_\varepsilon \dots s_i r_{j_x} r_{j-1,x} \dots r_{1_x} \left(M_{js}'''\right) r_{1_x}^{-1} \dots r_{j-1,x}^{-1} r_{j_x}^{-1} s_i^{-1} \dots s_\varepsilon^{-1} \subseteq U_{n_1+1}. \tag{3.18}$$

А каждая подгруппа $\left(M_{js}''\right)$ удовлетворяет соотношению

$$s_\varepsilon \dots s_i r_{j_y} r_{j-1,y} \dots r_{1_y} \left(M_{js}'''\right) r_{1_y}^{-1} \dots r_{j-1,y}^{-1} r_{j_y}^{-1} s_i^{-1} \dots s_\varepsilon^{-1} \subseteq U_i, \tag{3.19}$$

так как в противном случае, выделенные подслова не будут максимально возможными, полученными при умножении w слева на слова из $gp(M_0'', S'')$ и справа на слова $gp(M_0''', S''')$.

Пусть подгруппа $\left(M_{k_3}'''\right)$ имеет вид: $\left(M_{k_3}'''\right) = r_{1_x}^{-1} \dots r_{n_{2_x}}^{-1} C_{n_2}''' r_{n_{2_x}} \dots r_{1_x}$, а подгруппа $\left(M_{k_2}''\right)$ имеет вид $\left(M_{k_2}''\right) = r_{1_y}^{-1} \dots r_{n_{2_y}}^{-1} C_{n_2}'' r_{n_{2_y}} \dots r_{1_y}$.

Из условий (3,18) и (3.19) следует, что все подгруппы из S''' являются подгруппами $\left(M_{k_3}'''\right)$, а подгруппы из S'' являются подгруппами $\left(M_{k_2}''\right)$.

Поэтому $gp(M_0''', S''') = \left(M_{k_3}'''\right)$, $gp(M_0'', S'') = \left(M_{k_2}''\right)$. Получили вышерассмотренный случай.

III) Пусть подгруппы C_{i_0}, C_{j_0}' принадлежат центру, тогда каждая подгруппа $\left(M_{ij}\right)$ ряда (3.12) принадлежит центру: $\left(M_{i_0}\right) = v_{i_0}^{-1} C_{i_0} v_{i_0} = C_{i_0}$, подобному условию удовлетворяют подгруппы (M'_{ij}) ряда (3.13): $(M'_{j_0}) = g_{j_0}^{-1} C'_{j_0} g_{j_0} = C'_{j_0}$. Если хотя бы одна из подгрупп (M_{ij}) ряда (3.12) или (M'_{ij}) ряда (3.13) не принадлежит центру, то не выполняется условие $w^{-1}z^{-1}(M_{i_0})zw = (M'_{j_0})$.

Таким образом, $(M_{ij}) < \langle h \rangle$, $(M'_{ij}) < \langle h \rangle$, где $\langle h \rangle$ подгруппа из центра.

Запишем подгруппы H_1, H_2 в следующем виде:

$$H_1 = \langle h \rangle \times M_0, H_2 = \langle h \rangle \times M'_0.$$

Так как элементы из $\langle h \rangle$ перестановочны со всеми элементами G_Γ, то достаточно выяснить будут ли сопряжены M_0 и M'_0 в группе G_Γ, т.е. существует ли $z \in G_\Gamma$, такой что $z^{-1}M_0 z = M'_0$.

Пусть также $(M_0) = \langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$ и $(M'_0) = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle$. Элемент z будем выбирать наименьшим в двойном классе смежности $(M_0)z(M'_0)$.

Образующие $\{X_{i, i=\overline{1,n}}\}$ подгруппы (M_0) и образующие $\{Y_{i, i=\overline{1,n}}\}$ подгруппы (M'_0) являются специальными и удовлетворяют следующим условиям:

а) левая половина каждого $X_i \in \{X_{i, i=\overline{1,n}}\}$, имеющего нечетную длину, изолирована в множестве $\left\{\{X_{j, j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i\right\} \cup \left\{\{X_j^{-1}, _{j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i^{-1}\right\}$ левая и правая половины каждого $X_i \in \{X_{i, i=\overline{1,n}}\}$, $l(X_i) = 2m$, изолированы в множестве $\left\{\{X_{j, j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i\right\} \cup \left\{\{X_j^{-1}, _{j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i^{-1}\right\}$;

б) большой начальный и большой конечный отрезки каждого X_i изолированы в множестве $\left\{\{X_{j, j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i\right\} \cup \left\{\{X_j^{-1}, _{j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i^{-1}\right\}$;

в) для каждого $X_i \in \{X_{i, i=\overline{1,n}}\}$ справедливо соотношение $l(w_1^{\varepsilon_1} X_i w_2^{\varepsilon_2}) \leq l(X_i)$, где $w_1^{\varepsilon_1}, w_2^{\varepsilon_2} \in \left\{\{X_{j, j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i\right\} \cup \left\{\{X_j^{-1}, _{j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i^{-1}\right\}$.

Образующие подгруппы $(M'_0) = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle$ упорядочены по длинам: $1 < l(Y_1) \leq l(Y_2) \leq \dots \leq l(Y_n)$.

Всегда можем полагать, что некоторый образующий $X_1 \in (M_0)$ циклически несократим. Если все образующие (M_0) циклически сократимы, то, сопрягая (M_0) некоторым элементом z_1, получим подгруппу $z_1^{-1}(M_0)z_1 = (M''_0)$, в которой элемент $z_1^{-1}X_1 z_1 = X'_1$ циклически несократим и $l(X'_1) > 1$ и в дальнейшем можем рассматривать элемент X_1'. Тогда $z^{-1}X_1z = Y_{i_1}^{\varepsilon_1}Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k}$, где $\varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1,k}$, причем $l(z^{-1}X_1) > l(z)$, $l(X_1z) > l(z)$, так как элемент z удовлетворяет условию минимальности, и поскольку X_1 – циклически несократим, то, если имеет место сокращение в произведении $z^{-1}X_1$, то X_1z несократимо. Поэтому

$$z^{-1}X_1z = z^{-1}X_0X_nz = z_n^{-1}X_0^{-1}X_0X_nX_0z_n=z_n^{-1}X_nX_0z_n,$$

где $X_1 = X_0X_n \in G_\Gamma$ и $z^{-1}X_0X_nz = Y_{i_1}^{\varepsilon_1}Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k}$, тогда $l(z_n) \le \left[\frac{l(Y_n)}{2}\right]$.

В противном случае, если $l(z_n) > \left[\frac{l(Y_n)}{2}\right]$, то слово $Y_{i_1}^{\varepsilon_1}Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k}$ не является простым и следовательно его можно представить в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода: $Y_{i_1}^{\varepsilon_1}Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k} = v_1v_2 \dots v_{p-1}v_p$, где $v_i, i = \overline{1,p}$, – простые слова. Так как $(z_n) > \left[\frac{l(Y_n)}{2}\right]$ и большой конечный отрезок v_p не затрагивается сокращением, то длину z_n можно уменьшить, умножая справа на v_p^{-1}, $v_p \in (M_0')$, что противоречит минимальности z. Поэтому $l(Y_{i_1}^{\varepsilon_1}Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k}) \le l(X_1)+ l(Y_n) + 1$.

Далее в подгруппе $(M_0') = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle$ построим множество слов $V = \{v_1v_2 \dots v_n\}$, длина которых не превосходит $l(X_1)+ l(Y_n) + 1$. Для каждого элемента из множества $v_i \in V$ проверяем, сопряжено ли v_i с X_1. Допустим, что $v_i = v_{i_0}^{-1}v_i'v_{i_0}$, то есть v_i' – циклически несократимый элемент в G_Γ. Трансформируем подгруппу $(M_0') = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle$ элементом $v_{i_0}^{-1}$, получим равенство:

$$v_{i_0}^{-1}\langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle v_{i_0} = \langle Y'_1, Y'_2, \dots, Y'_n \rangle,$$

где $\left\{Y_i', _{i=\overline{1,n}}\right\}$ – специальное множество образующих подгруппы $v_{i_0}^{-1}\langle\left\{Y_i, _{i=\overline{1,n}}\right\}\rangle v_{i_0}$.

Из теоремы 2.3. известно, что некоторая циклическая перестановка X_i будет сопряжена с v_i' с помощью элемента h из объединяемой подгруппы, т.е. $h \in \langle a_{n-1}^{p_{n-1}} \rangle$, либо $h \in \langle a_n^{p_n} \rangle$: $h^{-1}X_i'h = v_i'$, где X_i' – циклическая перестановка X_i. Поэтому сначала сопрягаем подгруппу $(M_0) = \langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$ различными $X_{i,L}$, т.е. начальным словом $X_{i,L}$ некоторого слова X_i. В результате получим конечное множество подгрупп:

$$\left\{\langle X_{i,L}^{-1}X_1X_{i,L},\dots,X_{i,L}^{-1}X_{i-1}X_{i,L}\,,X_{i,R}X_{i,L},\ X_{i,L}^{-1}X_{i+1}X_{i,L},\dots,X_{i,L}^{-1}X_nX_{i,L}\rangle\right\}=\{\langle X_i\rangle^{X_{i,L}}\}.$$

Выделим из этого множества подгруппу, у которой X_i' сопряжено с v_i' элементом h из объединяемой подгруппы. Трансформируем выделенную подгруппу элементом h и проверяем выполнимость соотношения:

$$h^{-1}\{\langle X_i\rangle^{X_{i,L}}\}h\subset\left\{\langle Y_i\rangle^{v_{i_0}^{-1}}\right\}\subset h^{-1}\{\langle X_i\rangle^{X_{i,L}}\}h.$$

Так как $h\in C_n$, то $h=a_n^{p_nt}$. В силу того, что группа G_Γ является группой с нетривиальным центром, порождаемым элементом a_n^x, и $h=a_n^{p_nt}$ принадлежит центру, степень t ограничена.

IV) Пусть в подгруппах $H_1=gp(M_0,S)$, $H_2=gp(M_0',S')$ основы S и S' равны единице, т.е. $H_1=(M_0)$, $H_2=(M_0')$, и являются свободными подгруппами в группе G_Γ. Случай аналогичен случаю III. Таким образом, теорема 3.1. доказана.

3.2. Разрешимость проблемы сопряженности подгрупп в HNN-расширении бесконечной циклической группы

3.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим группу Баумслага на двух образующих, заданную копредставлением

$$B = \langle a, t | t^{-1} a^m t = a^n \rangle, (|m|, |n| > 1),$$

являющуюся HNN-расширением бесконечной циклической группы $\langle a \rangle$ с помощью правильной проходной буквы t.

Из результата Молдаванского Д.И. [24, теорема 9.2.] следует разрешимость проблемы сопряженности конечно порожденных подгрупп для нисходящего HNN-расширения $\langle a, t | t^{-1} a^m t = a \rangle$, $|m| > 1$.

В параграфе 3.2. докажем разрешимость проблемы сопряженности конечно порожденных подгрупп в группе $B = \langle a, t | t^{-1} a^m t = a^n \rangle$.

Доказательство проведем используя метод специального множества слов, как и в случае доказательства теоремы 3.1.

Группа B удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2.:

1. ассоциированные подгруппы $U_1 = \langle a^m \rangle, U_{-1} = \langle a^n \rangle$ обладают условием максимальности;
2. разрешима проблема вхождения в циклическую подгруппу в группе $\langle a \rangle$;
3. разрешима проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < \langle a \rangle$ с каждой из подгрупп $U_1 = \langle a^m \rangle, U_{-1} = \langle a^n \rangle$;
4. существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < \langle a \rangle$ с любой из выделенных подгрупп $U_1 = \langle a^m \rangle, U_{-1} = \langle a^n \rangle$.

Следовательно, образующие $\{w_{i, i=\overline{1,N}}\}$ подгруппы H группы B могут быть приведены к специальному множеству: $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда $(M_{i_1}) \leq (M_{i_2}) \leq \dots \leq (M_{i_k})$.

3.2.2. Вспомогательные утверждения

Лемма 3.6. *Всякое слово* w *группы* B, *являющееся трансформой* $w = g^{-1}ag$, *где* $a \in \langle a \rangle$, g^{-1} *– слово в образующих группы* B, *имеет следующую запись в u-символах подгруппы* $gp(M_0, S)$: $g^{-1}ag = u_1^{-1}u_2^{-1} \dots u_n^{-1}u_0u_n \dots u_1$, *где правая часть равенства есть слово в u-символах подгруппы* $gp(M_0, S)$, u_0 *– трансформа принадлежащая одной из трансформ подгруппы* (M_{ij}) *ряда* $(M_{i_1}) \le (M_{i_2}) \le \dots \le (M_{i_k})$ *порождающего множества* S.

Доказательство. Так как слово $w \in gp(M_0, S)$, то в u-символах оно примет вид:

$$w = g^{-1}ag = u_1u_2 \dots u_m,$$

причем $u_1u_2 \dots u_m$ – простое слово подгруппы $gp(M_0, S)$, выясним вид простого слова $u_1u_2 \dots u_m$.

Очевидно, что $u_1u_2 \dots u_m$ не является словом вида a. Докажем это. Пусть $u_1u_2 \dots u_m = u_1 \dots u_{i-1}u_iu_{i+1} \dots u_m$, где u_i нетрансформа, $l(u_i) > l(u_j)$, $i \ne j$. Поэтому $l(u_1 \dots u_{i-1}) < l(u_i)$ и $l(u_{i+1} \dots u_m) < l(u_i)$.

Так как длина $l(g^{-1}ag)$ нечетна, то $l(u_i) = l(g^{-1}ag)$ также нечетна. Получаем, что левую открытую половину нетрансформы u_i мы можем перевести в левую открытую половину u_i^{-1}, и так как $l(u_1 \dots u_{i-1}) = 2m_1 + 1$, $l(u_{i+1} \dots u_m) = 2m_2 + 1$, где $2m_i + 1 < l(g^{-1}ag), i = 1,2$, то закрытую левую половину u_i умножением слева на $u_{i+1} \dots u_mu_1 \dots u_{i-1}$, $l(u_{i+1} \dots u_mu_1 \dots u_{i-1}) < l(u_i)$, можно перевести в закрытую левую половину u_i^{-1}. Но на основании пункта 4 определения 1.9. это невозможно. Получили противоречие.

Аналогично рассуждая, можно показать, что слово $u_1u_2 \dots u_m$ не может быть словом вида b.

Пусть w – слово вида c:

$$u_1u_2 \dots u_m = u_1 \dots u_{i-1}(u_iu_{i+1}u_{i+2})u_{i+3} \dots u_m,$$

где u_i, u_{i+2} – нетрансформы, причем у u_i изолирована левая половина, а у u_{i+2} – правая. $l(u_iu_{i+1}u_{i+2}) = l(u_i) = l(u_{i+2}) = l(g^{-1}ag)$.

Нетрансформы u_i, u_{i+2} имеют нечетную длину. Если допустить, что $u_i \neq u_{i+2}^{-1}$, то левая закрытая половина u_i не равна левой закрытой половине u_{i+2}^{-1}, и так как $l(u_1 \dots u_{i-1}) = 2m_1 + 1$, $l(u_{i+1} \dots u_m) = 2m_2 + 1$, где $2m_1 + 1$ и $2m_2 + 1$ меньше $l(u_i)$, то в силу соотношения $g^{-1}ag = u_1 u_2 \dots u_m$ открытую левую половину u_i можно перевести в открытую левую половину u_{i+2}^{-1}. Но тогда закрытую левую половину u_i умножением слева на слово $u_{i+3} \dots u_m u_1 \dots u_{i-1}$, $l(u_{i+3} \dots u_m u_1 \dots u_{i-1}) < l(u_i)$ можно перевести в закрытую левую половину u_{i+2}^{-1}. Однако это противоречит пункту 4 определения 1.9. специального множества, если левые половины u_i, u_{i+2}^{-1} различны. Следовательно, они равны, но тогда равны и закрытые правые половины. Получаем, что $u_i = u_{i+2}^{-1}$.

Пусть $g^{-1}ag = u_1 \dots u_{i-1}(u_i u_{i+1} u_{i+2}) u_{i+3} \dots u_m$, где $u_i = u_{i+2}^{-1}$ – нетрансформы, $l(u_i) > l(u_j)$, $i \neq j$, $j \neq i+1, j \neq i+2$, $l(u_{i+1}) \leq l(u_i)$. Имеем $l(u_1 \dots u_i) = l(u_i)$, $l(u_{i+2} \dots u_m) = l(u_{i+2})$, $l(u_1 \dots u_{i-1}) < l(u_i)$, $l(u_{i+3} \dots u_m) < l(u_{i+2})$.

Так как $g^{-1}ag = u_1 u_2 \dots u_m$, то $u_1 \dots u_i = g^{-1} К_1 g_1$, где $К_1 -$ ядро слова, $l(g) = l(g_1)$, $u_{i+2} u_{i+3} \dots u_m = g_1^{-1} K_2 g$, $g_1 -$ закрытая правая половина $u_i = u_{i+2}^{-1}$. Трансформируем $g^{-1}ag$ словом $u_1 u_2 \dots u_i$:

$u_i^{-1} \dots u_1^{-1}(g^{-1}ag) u_1 u_2 \dots u_i = g_1^{-1} K' g_1$, где $K' = K_1^{-1} a K_1 = a$.

$l(g_1^{-1} K' g_1) \leq l(u_i)$.

Таким образом, $g_1^{-1} K' g_1 = u_{i+1} u_{i+2} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_i$ и так как g_1^{-1} является неизолированной правой закрытой половиной u_i и $g_1^{-1} K' g_1 \in gp(M_0, S)$, то на основании леммы 1.5. существует подгруппа $(M_{ij}) = g_1^{-1} A_{ij} g_1$, содержащая трансформу $g_1^{-1} K' g_1$. Таким образом $g_1^{-1} K' g_1 = u_0$, где $u_0 \in (M_{ij})$. Отсюда следует, что $g^{-1}ag = u_1^{-1} \dots u_i^{-1} u_0 u_i \dots u_1$, и произведение $u_1^{-1} \dots u_i^{-1} u_0 u_i \dots u_1$ есть слово.

Рассмотрим случай, когда $g^{-1}ag = u_1 u_2 \dots u_{i-1} u_i u_{i+1} \dots u_m$, где правая часть – слово вида d. Трансформа u_i принадлежит некоторой подгруппе (M_{ij}),

$l(u_i) > l(u_j),\ i \neq j, l(u_1 \dots u_{i-1}) < l(u_i),\quad l(u_{i+1} \dots u_m) < l(u_i)$ и $l(u_1 \dots u_{i-1})$, $l(u_{i+1} \dots u_m)$ – нечетные числа.

Сопрягая $g^{-1}ag$ словом $u_1 \dots u_{i-1}$ получаем $g'^{-1}ag' = u_i u_{i+1} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_{i-1}$, где g'^{-1} совпадает с закрытой левой половиной u_i и $g'^{-1}ag' \in gp(M_0, S)$. Поэтому на основании леммы 1.5. $g'^{-1}ag' \in (M_{ij})$, где (M_{ij}) подгруппа ряда $(M_{i_1}) \leq (M_{i_2}) \leq \dots \leq (M_{i_k})$, порождающего множество S. Отсюда следует, что $g'^{-1}ag' = u_0$, $u_0 \in (M_{ij})$ и $u_i \in (M_{ij})$. Имеем $u_i^{-1}(g'^{-1}ag') = u_{i+1} \dots u_m u_1 u_2 \dots u_{i-1} = u \in (M_{ij})$. Тогда $u_{i+1} \dots u_m = u u_1^{-1} u_2^{-1} \dots u_{i-1}^{-1}$. Подставляя в исходное равенство, получаем утверждение леммы.

Лемма 3.7. [36] *Пусть* H *– конечно порожденная подгруппа группы B, порожденная двумя различными специальными множествами, то есть различными в общем случае системами порождающих подгрупп: $H = gp(M_0, S)$ и $H = gp(M_0', S')$, где S – подгруппа порожденная подгруппами ряда*

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \dots \leq (M_k), \tag{3.20}$$

S' – подгруппа порожденная подгруппами ряда

$$(M_1') \leq (M_2') \leq \dots \leq (M_k'), \tag{3.21}$$

$(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i,\qquad (M_j') = g_j^{-1} C_j' g_j,\qquad C_i, C_j' \subset \langle a \rangle.$

Тогда для каждой подгруппы $(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$ из (3.20) существует (M_j') из (3.21) и существует слово $w_{ij} \in H$, что $(M_i) = w_{ij}^{-1}(M_j') w_{ij}$.

Доказательство. Выберем трансформу из ряда (3.20): $gKg^{-1} \in (M_i)$. Так как $gKg^{-1} \in H$, то перепишем ее в u-символах другой системы образующих:

$$gKg^{-1} = u_1 u_2 \dots u_l u_0 u_l^{-1} \dots u_1^{-1},$$

то есть $u_1 u_2 \dots u_l u_0 u_l^{-1} \dots u_1^{-1} \in gp(M_0', S')$, где u_0 в свою очередь, также является трансформой: $u_0 = g_j' K' g_j'^{-1}$, $u_0 \in (M_j')$.

Докажем, что слово $u_1 u_2 \dots u_l u_0 u_l^{-1} \dots u_1^{-1}$ простое. Предположим противное: слово $u_1 u_2 \dots u_l u_0 u_l^{-1} \dots u_1^{-1}$ – не является простым. Но тогда его можно представить в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода, пусть $u_1u_2 \dots u_l u_0 u_l^{-1} \dots u_1^{-1} = v_i v_0 v_i^{-1}$. Тогда $g_j K g_j^{-1} = v_i v_0 v_i^{-1}$, $l(gKg^{-1}) = l(v_i v_0 v_i^{-1})$ и $l(v_i) < l(gKg^{-1})$. Так как $v_i \in H$ перепишем его в первой системе образующих подгруппы H и рассмотрим слово $v_i^{-1}(gKg^{-1})\, v_i$, которое будет удовлетворять условию: $l(v_i^{-1}(gKg^{-1})\, v_i) < l(gKg^{-1})$. Мы получили, что умножением на слово v_i меньшей длины, мы уменьшили длину gKg^{-1}, что невозможно по определению специального множества. Тем самым мы доказали, что слово $u_1u_2 \dots u_l u_0 u_l^{-1} \dots u_1^{-1}$ – простое.

Покажем теперь, что существует $w_{ij} \in H$ такое, что $(M_i) \subseteq w_{ij}^{-1}(M_j')w_{ij}$. Если трансформа u_0 имеет максимальную длину $l(u_0)$ в слове $u_1u_2 \dots u_l u_0 u_l^{-1} \dots u_1^{-1}$, то в этом случае в качестве слова w_{ij} возьмем слово $u_1u_2 \dots u_l$, т.е. $w_{ij} = u_1u_2 \dots u_l$.

Пусть длина $l(u_0)$ не является максимальной. Тогда, на основании строения простого слова $l(u_1) \le l(u_2) \le \dots \le l(u_l)$, максимальную длину имеет u_l, причем $l(u_l) = l(gKg^{-1})$. В соответствии с леммой 3.6. слово u_l является нетрансформой.

а) Рассмотрим случай, когда левая половина u_l неизолирована, правая половина u_l изолирована. Так как $l(u_l) = l(u_l u_0) = l(u_l u_0 u_l^{-1})$, то существует подгруппа (M_i) содержащая $u_l u_0 u_l^{-1}$. Получили противоречие с определением слова.

б) Пусть левая половина u_l изолирована, тогда $u_l = g_l K_l g_l'$ и $u_1u_2 \dots u_l = gK_l' g_l'$ и так как $gKg^{-1} = u_1u_2 \dots u_l u_0 u_l^{-1} \dots u_1^{-1}$, то

$$u_l^{-1} \dots u_1^{-1}(gKg^{-1})u_1u_2 \dots u_l = (g_l')^{-1}\left({K_l'}^{-1} K K_l'\right)g_l' = u_0,$$

таким образом $l\left((g_l')^{-1}\widetilde{K} g_l'\right) = l(u_0) < l(gKg^{-1})$, $\quad \widetilde{K} = {K_l'}^{-1} K K_l'$.

Рассмотрим слово $u_1u_2 \dots u_l$ и перепишем его в образующих первой системы образующих H, получим: $gK_l' g_l' = u_1' \dots u_{l_1}' u_{l_1+1}' u_{l_1+2}' \dots u_{l_p}'$. Слово $u_1' \dots u_{l_1}' u_{l_2}' u_{l_3}' \dots u_{l_p}'$ - простое. Пусть u_{l_1}' – u-символ максимальной длины, то есть $l(u_{l_1}') = l(gK_l' g_l')$ и для любого $i, l(u_i') < l(u_{l_1}')$. Пусть u_{l_1}' – трансформа: $u_{l_1}' = \bar{g} K_1 \bar{g}^{-1}$, $\bar{g} \neq g$. Тогда, так как $u_1' \dots u_{l_1-1}' u_{l_1}' = gK_3\bar{g}^{-1}$, мы получили, что трансформу gKg^{-1} можно перевести в трансформу $\bar{g}\bar{K}\bar{g}^{-1}$, умножением на слово $u_1' \dots u_{l_1-1}'$, $l(u_1' \dots u_{l_1-1}')$<$l(gKg^{-1})$, что невозможно по определению специального множества.

Если допустить, что $\bar{g} = g$, то так как сокращение в слове $gKg^{-1}u_1' \dots u_{l_1}'$ доходит до ядер gKg^{-1} и u_{l_1}', то из строения простого слова и определения специального множества следует, что $u_1' \dots u_{l_1-1}'$ – есть трансформа, принадлежащая подгруппе $(M_i') = gA_i'g^{-1}$, но тогда

$$l(u_l^{-1} \dots u_1^{-1}(gKg^{-1})u_1u_2 \dots u_l) =$$
$$= l\left(u_{l_p}'^{-1} \dots u_1'^{-1}(gKg^{-1})u_1' \dots u_{l_p}'\right) = l(gKg^{-1}),$$

что противоречит условию: $l(u_l^{-1} \dots u_1^{-1}(gKg^{-1})u_1u_2 \dots u_l) < l(gKg^{-1})$.

Пусть u_{l_1}' – нетрансформа. Рассмотрим случай, когда u_{l_1}' имеет максимальную длину в слове $u_1' \dots u_{l_1}'u_{l_1+1}'u_{l_1+2}' \dots u_{l_p}'$. Если левая половина u_{l_1}' – изолирована, то умножением u_{l_1}' слева на $u_1' \dots u_{l_1-1}'$, мы переведем левую половину u_{l_1}' в левую половину трансформы gKg^{-1}, что невозможно. Если левая половина u_{l_1}' неизолирована, то в слове $u_1' \dots u_{l_1}' \dots u_{l_p}'$, элемент u_{l_1}' имеет максимальную длину равную длине u_l'. Предположим, что левая половина u_{l_1}' не равна левой половине gKg^{-1}. Невозможно, так как в противном случае умножением u_{l_1}' на слово $u_1' \dots u_{l_1-1}'$ слева $l\left(u_1' \dots u_{l_1-1}'\right) < l\left(u_{l_1}'\right)$, преобразуем левую половину u_{l_1}' в левую половину gKg^{-1}. Пусть левая половина u_{l_1}' равна g и $u_1' \dots u_{l_1-1}'$ – является трансформой принадлежащей подгруппе $\left(M_j'\right) = gA_Jg^{-1}$. Поэтому ее можно отбросить и, сопрягая gKg^{-1} нетрансформой u_{l_1}', получаем, что

$$l(u_l^{-1} \dots u_1^{-1}(gKg^{-1})u_1u_2 \dots u_l) < l(gKg^{-1}),$$

что невозможно.

Из приведенных рассуждений следует, что в равенстве $gKg^{-1} = u_1u_2 \dots u_lu_0u_l^{-1} \dots u_1^{-1}$ трансформа u_0 имеет слоговую длину $l(u_0) = l(gKg^{-1})$ и $u_0 \in \left(M_j'\right)$, поэтому $(M_i) \subseteq w_{ij}\left(M_j'\right)w_{ij}^{-1}$, где $w_{ij} = u_1u_2 \dots u_l$

и $gKg^{-1} = w_{ij}u_0w_{ij}^{-1}$. Подставив вместо u_0 образующий из подгруппы (M_j') и учитывая лемму 1.5. получаем справедливость утверждения леммы: $(M_i) = w_{ij}^{-1}(M_j')w_{ij}$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 3.8. [36] *Пусть* $H_1 = gp(M_0, S)$ *и* $H_2 = gp(M_0', S')$ *– две конечно порожденные подгруппы группы* B. *Основа* S *подгруппы* H_1 *порождена подгруппами ряда*

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \cdots \leq (M_{k_1}), \tag{3.23}$$

основа S' *подгруппы* H_2 *порождена подгруппами ряда*

$$(M_1') \leq (M_2') \leq \cdots \leq (M_{k_2}'), \tag{3.24}$$

Тогда, если H_1 *и* H_2 *сопряжены в* B, *то есть существует* $z \in B$ *такое, что* $zH_1z^{-1} = H_2$, *то существуют* $w \in gp(M_0', S')$, $j = \overline{1, k_1}$, $s = \overline{1, k_2}$, *такие, что*

$$w^{-1}z^{-1}(M_j)zw = (M_s'),$$

где (M_j) *– подгруппа ряда (3.23),* (M_s') *– подгруппа ряда (3.24).*

Доказательство. По условию леммы подгруппы $H_1 = gp(M_0, S)$ и $H_2 = gp(M_0', S')$ сопряжены, то есть существует $z \in G_\Gamma$ такое, что $z^{-1}gp(M_0, S)z = gp(M_0', S')$.

Приведем образующие подгруппы $z^{-1}gp(M_0, S)z$ к специальным образующим: $z^{-1}gp(M_0, S)z = gp(M_0'', S'')$, где S'' порождена подгруппами

$$(M_1'') \leq (M_2'') \leq \cdots \leq (M_{k_3}''), \tag{3.25}$$

Теперь сопрягаем подгруппу $gp(M_0'', S'')$ элементом z^{-1}, получаем $gp(M_0, S) = zgp(M_0'', S'')z^{-1}$. Теперь образующие $zgp(M_0'', S'')z^{-1}$ подвергнем преобразованиям приводящим к специальному множеству: $zgp(M_0'', S'')z^{-1} = zgp(M_0''', S''')$, где S''' порождена подгруппами

$$(M_1''') \leq (M_2''') \leq \cdots \leq (M_{k_4}'''), \tag{3.26}$$

Таким образом, имеем:

$$\underline{w}_{ij}^{-1}z^{-1}(M_i)z\underline{w}_{ij} \subseteq (M_j''),$$

где (M_i) - произвольная подгруппа ряда (3.23), (M_j'') – некоторая подгруппа ряда (3.25), $\underline{w}_{ij} \in z^{-1}gp(M_0, S)z = gp(M_0'', S'')$, поэтому $\underline{w}_{ij} = z^{-1}w_{ij}z$, $w_{ij} \in gp(M_0, S)$.

С другой стороны, каждая подгруппа (M_j'') ряда (3.25) сопряжена с некоторой подгруппой из (M_s'''), то есть $w_{js}'^{-1}z(M_j'')z^{-1}w_{js}' \subseteq (M_s''')$, где $w_{js}' \in gp(M_0, S)$. Поэтому можно построить цепочку вложенных подгрупп следующего вида:

$$w_{p_1}^{-1}z\underline{w}_1^{-1}z^{-1}(M_{p_1})z\underline{w}_1z^{-1}w_{p_1} \subseteq w_{p_1}^{-1}z\underline{w}_2^{-1}(M_{t_2}'')\underline{w}_2z^{-1}w_{p_1} \subseteq$$
$$\subseteq w_{p_1}^{-1}z\underline{w}_3^{-1}(M_{j_3}')\underline{w}_3z^{-1}w_{p_1} \subseteq \cdots \subseteq (M_{p_1}),$$

из которой следует, что $w_{p_1}^{-1}z\underline{w}_1^{-1}z^{-1}(M_{p_1})z\underline{w}_1z^{-1}w_{p_1} \subseteq (M_{p_1})$ и так как $w_{p_1}^{-1}z\underline{w}_1^{-1}z^{-1} \in gp(M_0, S)$, то $w_{p_1}^{-1}z\underline{w}_1^{-1}z^{-1}(M_{p_1})z\underline{w}_1z^{-1}w_{p_1} = (M_{p_1})$, то всюду в последовательности знак $\subseteq$ можно заменить на $=$.

В результате получаем:

$$w_{p_1}^{-1}z\underline{w}_1^{-1}z^{-1}(M_{p_1})z\underline{w}_1z^{-1}w_{p_1} = w_{p_1}^{-1}z\underline{w}_3^{-1}(M_{j_3}')\underline{w}_3z^{-1}w_{p_1},$$

откуда $\underline{w}_1^{-1}z^{-1}(M_{p_1})z\underline{w}_1 = \underline{w}_3^{-1}(M_{j_3}')\underline{w}_3$, где $\underline{w}_1, \underline{w}_3 \in gp(M_0', S')$.

Лемма доказана.

3.2.3. Доказательство основной теоремы

Теорема 3.2. [36] *В группе* $B = \langle a, t; t^{-1}U_1t = U_{-1}\rangle$, $|m|, |n| > 1$, $U_1 = \langle a^m\rangle, U_{-1} = \langle a^n\rangle$ *разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

Доказательство. Пусть $H_1 = gp(M_0, S)$, где S порождена подгруппами ряда

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \cdots \leq (M_k), \tag{3.27}$$

$H_2 = gp(M_0', S')$, где S' порождена подгруппами ряда

$$(M_1') \leq (M_2') \leq \cdots \leq (M_{k_1}'). \tag{3.28}$$

Тогда среди подгрупп (3.27) существует

$$(M_{i_0}) = v_{i_0}^{-1}C_{i_0}v_{i_0},\ C_{i_0} \subset \langle a\rangle, \tag{3.29}$$

среди подгрупп (3.28) существует

$$\left(M'_{j_0}\right) = g_{j_0}^{-1} C'_{j_0} g_{j_0},\ C'_{j_0} \subset \langle a \rangle, \tag{3.30}$$

и $w \in gp(M'_0, S')$ такие, что

$$w^{-1} z^{-1} \left(M_{i_0}\right) z w = \left(M'_{j_0}\right). \tag{3.31}$$

Как и при доказательстве теоремы 3.1. рассмотрим различные случаи:

I) Пусть подгруппы C_{i_0} и C'_{j_0} не сопряжены ни с подгруппой $U_1 = \langle a^m \rangle$, ни с подгруппой $U_{-1} = \langle a^n \rangle$.

Из соотношений (3.29), (3.30) и (3.31), получаем

$$(g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1}) C_{i_0} \left(v_{i_0} z w g_{j_0}^{-1}\right) = C'_{j_0},$$

т.к. C_{i_0} и C'_{j_0} являются подгруппами в $\langle a \rangle$, то $v_{i_0} z w g_{j_0}^{-1} = a_0 \in \langle a \rangle$.

Делая вставки $v_{i_0}^{-1} v_{i_0}$ и $g_{j_0}^{-1} g_{j_0}$, можно записать:

$$(g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1}) gp\left(v_{i_0} M_0 v_{i_0}^{-1}, v_{i_0} S v_{i_0}^{-1}\right)\left(v_{i_0} z w g_{j_0}^{-1}\right) = gp\left(g_{j_0} M'_0 g_{j_0}^{-1}, g_{j_0} S' g_{j_0}^{-1}\right).$$

Приведем к специальным образующим образующие подгрупп

$$gp\left(g_{j_0} M'_0 g_{j_0}^{-1}, g_{j_0} S' g_{j_0}^{-1}\right) = gp(M''_0, S''),$$

$$gp\left(v_{i_0} M_0 v_{i_0}^{-1}, v_{i_0} S v_{i_0}^{-1}\right) = gp(M'''_0, S''').$$

Таким образом,

$$a_0^{-1} gp(M''_0, S'') a_0 = gp(M'''_0, S'''). \tag{3.32}$$

В подгруппе $gp(M'''_0, S''')$ выбираем произвольный образующий $X = B_{0_x} t^{\varepsilon_1} B_{1_x} t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_k} B_{k_x}$, $k > 1$. Из соотношения (3.32), произведение $a_0^{-1} B_{0_x} t^{\varepsilon_1} B_{1_x} t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_k} B_{k_x} a_0$ можно переписать в другой системе образующих:

$$a_0^{-1} B_{0_x} t^{\varepsilon_1} B_{1_x} t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_k} B_{k_x} a_0 = u_0 u_1 \dots u_m, \tag{3.33}$$

где $u_0 u_1 \dots u_m \in gp(M''_0, S'')$ и $u_0 \in (M''_i) = C'_{j_0}$, то есть трансформа u_0 состоит только из ядра.

Запишем слово u_1 в виде $u_1 = l_{1_{u_1}} t^{\eta_1} u_{1_n}, \eta_1 = \pm 1$, тогда из (3.33) получим: $a_0^{-1} B_{0_x} = u_0 l_{1_{u_1}} h$, где $h \in U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$. Тогда $h = a^{km}, k \in \mathbb{Z}$ можно ограничить элементом $a^{sm} \in H_2$, где $k < s$.

Таким образом

$$a_0^{-1} = u_0 l_{1_{u_1}} h B_{0_x}^{-1}.$$

Так как $u_0 \in (M_i'') = C_{j_0}'$, то им можно пренебречь и в качестве a_0^{-1} взять

$$a_0^{-1} = l_{1_{u_1}} h B_{0_x}^{-1}. \tag{3.34}$$

Множество элементов вида (3.34) обозначим Т. Это множество конечно и, проверив каждый его элемент, мы можем эффективно установить, существует ли a_0 такой, что $z^{-1} = w g_{j_0}^{-1} a_0 v_{i_0}$, и так как $w \in H_2$, то в качестве z^{-1} можно взять

$$z^{-1} = g_{j_0}^{-1} a_0 v_{i_0}.$$

Если ни для одного из $a_0 \in T$ не выполняется условие сопряженности $z^{-1} H_1 z = H_2$, то берем другую подгруппу $\left(M_{j_1}'\right)$, сопряженную подгруппе $\left(M_{i_0}\right)$. И повторяем алгоритм.

II) Пусть каждая подгруппа $\left(M_{i_j}\right)$ ряда (3.27) сопряжена с подгруппой $U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, и аналогичному условию удовлетворяет каждая подгруппа ряда (3.28). В противном случае подгруппы H_1 и H_2 не сопряжены.

На основании леммы 3.8. из сопряженности H_1, H_2 элементом z следует существование подгруппы $\left(M_{i_0}\right) = v_{i_0}^{-1} C_{i_0} v_{i_0}$ ряда (3.27) и подгруппы $\left(M_{j_0}'\right) = g_{j_0}^{-1} C_{j_0}' g_{j_0}$ ряда (3.28) и элемент $w \in gp(M_0', S'\ )$, таких что

$$w^{-1} z^{-1} \left(v_{i_0}^{-1} C_{i_0} v_{i_0}\right) z w = \left(g_{j_0}^{-1} C_{j_0}' g_{j_0}\right). \tag{3.35}$$

Пусть C_{i_0}, C_{j_0}' сопряжены с ассоциированной подгруппой U_ε: $\langle a^m \rangle$, либо $\langle a^n \rangle$ $C_{i_0} = \mathrm{C}_1^{-1} \langle a^{\mu_{i_0} m} \rangle \mathrm{C}_1$, $C_{j_0}' = \mathrm{C}_2^{-1} \langle a^{\mu_{j_0} n} \rangle \mathrm{C}_2$. Соотношение (3.35) перепишется в следующем виде:

$$\left(\mathrm{C}_2 g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1} \mathrm{C}_1^{-1}\right) \langle a^{\mu_{i_0} m} \rangle \left(\mathrm{C}_1 v_{i_0} z w g_{j_0}^{-1} \mathrm{C}_2^{-1}\right) = \langle a^{\mu_{j_0} n} \rangle. \tag{3.36}$$

Из соотношения (3.36) имеем:

$$\widetilde{w}^{-1} = \mathrm{C}_2 g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1} \mathrm{C}_1^{-1} = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_k} B_k, \alpha = 0, \pm 1.$$

Преобразуем соотношение $w^{-1} z^{-1} gp(M_0, S) z w = gp(M_0', S')$:

$$\left(g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1}\right) v_{i_0} gp(M_0, S) v_{i_0}^{-1} \left(v_{i_0} z w g_{j_0}^{-1}\right) = g_{j_0} gp(M_0', S') g_{j_0}^{-1}.$$

Приводим образующие подгрупп $v_{i_0}gp(M_0,S)v_{i_0}^{-1}$, $g_{j_0}gp(M_0',S')g_{j_0}^{-1}$ к специальным: $v_{i_0}gp(M_0,S)v_{i_0}^{-1} = gp(M_0''',S''')$, $g_{j_0}gp(M_0',S')g_{j_0}^{-1} = gp(M_0'',S'')$, где S'' порождена подгруппами ряда

$$(M_1'') \leq (M_2'') \leq \cdots \leq (M_{k_2}''), \tag{3.37}$$

S''' порождена подгруппами ряда

$$(M_1''') \leq (M_2''') \leq \cdots \leq \left(M_{k_3}'''\right), \tag{3.38}$$

$(M_1''') \leq (M_2''') \leq \cdots \leq \left(M_{k_2}'''\right)$, причем $(M_1'') = (M_1''') = \langle a^{\mu_{i_0}m}\rangle$, или $(M_1'') = (M_1''') = \langle a^{\mu_{j_0}n}\rangle$.

Слово $\widetilde{w}$, удовлетворяющее соотношениям $\widetilde{w}^{-1}\langle a^{\mu_{i_0}m}\rangle\widetilde{w} = \langle a^{\mu_{j_0}n}\rangle$,

$$\widetilde{w}^{-1}gp(M_0''',S''')\widetilde{w} = gp(M_0'',S'')$$

выбираем наименьшим в двойном классе смежности $gp(M_0''',S''')\widetilde{w}gp(M_0'',S'')$.

Пусть $W_1 = \left\{w_{i_1},_{i=\overline{1,N_1}}\right\}$ – специальное множество образующих подгрупп $gp(M_0''',S''')$, $W_2 = \left\{w_{i_2},_{i=\overline{1,N_2}}\right\}$ – специальное множество образующих подгрупп $gp(M_0'',S'')$, $l_1 = \max\left\{l(w_{11}), l(w_{21}), \dots, l(w_{N_1,1})\right\}$, $l_2 = \max\{l(w_{12}),\ l(w_{22}), \dots,$ $l(w_{N_2,2})\}$.

IIa) Рассмотрим случай, когда в подгруппах $gp(M_0'',S''), gp(M_0''',S''')$ $M_0'' \neq \emptyset, M_0''' \neq \emptyset$.

Теперь укажем способ построения слова $\widetilde{w}^{-1}$, сопрягающего подгруппы $gp(M_0''',S''')$ и $gp(M_0'',S'')$. Умножая слово $\widetilde{w}^{-1} = t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}B_1 \dots t^{\varepsilon_k}B_k$ на слово $u_0u_1 \dots u_p \in gp(M_0''',S''')$, $l\left(u_0u_1 \dots u_p\right) < 2j$, выделим максимально возможное подслово, являющееся закрытым подсловом правой половины некоторого $\widetilde{w}_{i_j}^{\varepsilon} = t^{\alpha'}l_1t^{\varepsilon_1'}l_2 \dots l_nt^{\varepsilon_n'}Kt^{\varepsilon_n}r_n \dots t^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}}r_{j-1} \dots r_1t^{\beta} \in \left(M_0''' \cup {M_0'''}^{-1}\right)$, то есть $\widetilde{w}' = t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}B_1 \dots t^{\varepsilon_i}B_i't^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}}r_{j-1} \dots r_1t^{\beta}$, где $t^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}}r_{j-1} \dots r_1t^{\beta}$ – закрытое конечное подслово правой половины слова из $\widetilde{w}_{i_j}^{\varepsilon} \in \left(M_0''' \cup {M_0'''}^{-1}\right)$, либо трансформы, принадлежащей некоторой порождающей подгруппе

$$(M_i''') = t^{-\beta}r_1^{-1} \dots t^{-\varepsilon_{j-1}}r_j^{-1}t^{-\varepsilon_j} \dots r_n^{-1}t^{-\varepsilon_n}A_it^{\varepsilon_n}r_n \dots t^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}}r_{j-1} \dots r_1t^{\beta}.$$

Длина начального закрытого отрезка $t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}B_1 \dots B_{i-1}t^{\varepsilon_i}$ слова $\widetilde{w}^{-1}$ не больше $\left[\frac{l_2}{2}\right]$. Используя рассуждения из IIa) главы 3.1., нетрудно показать, что, сопрягая любой $w_{i_2} \in W_2$ элементом $\widetilde{w}'^{-1}$, получим сокращение в произведении $\widetilde{w}'^{-1}w_{i_2}\widetilde{w}'$ слева и справа, затрагивающее слог B_i'.

Тогда длина любой нетрансформы в W_2 будет больше $2(i-1)$ и для любой подгруппы $(M_{ij}'') = g_{ij}''^{-1}C_{ij}''g_{ij}''$ с $l(g_{ij}'') < i-1$ и $g_{ij}''^{-1} = t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}B_1 \dots B_{k-1}t^{\varepsilon_k}$, $k < (i-1)$ имеем $t^{-\varepsilon_i}B_{i-1}^{-1} \dots t^{-\varepsilon_{k+1}}B_k^{-1}C_{ij}''B_kt^{\varepsilon_{k+1}} \dots B_{i-1}t^{\varepsilon_i} \subset U_{\varepsilon_i}$. Поэтому сопрягая одновременно левую и правую части равенства

$$\widetilde{w}'\, gp(M_0''', S''')\widetilde{w}'^{-1} = gp(M_0'', S'')$$

$$t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_i}B_i't^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}} \dots r_1t^{\beta}gp(M_0''', S''')t^{-\beta}r_1^{-1} \dots t^{-\varepsilon_1}B_0^{-1}t^{-\alpha} = gp(M_0'', S'')$$

словом $t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_i}$, а подгруппу $gp(M_0''', S''')$ словом $t^{-\beta}r_1^{-1} \dots t^{-\varepsilon_j}$, получим

$$B_i'\left(t^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}} \dots r_1t^{\beta}gp(M_0''', S''')t^{-\beta}r_1^{-1} \dots t^{-\varepsilon_j}\right)B_i'^{-1} =$$

$$= t^{-\varepsilon_i} \dots B_0^{-1}t^{-\alpha}gp(M_0'', S'')t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_i}.$$

Приводим подгруппу $t^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}} \dots r_1t^{\beta}gp(M_0''', S''')t^{-\beta}r_1^{-1} \dots t^{-\varepsilon_j}$ к виду $gp\left(M_0^{(4)}, S^{(4)}\right)$, а подгруппу $t^{-\varepsilon_i} \dots B_0^{-1}t^{-\alpha}gp(M_0'', S'')t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_i}$ к виду $gp\left(M_0^{(5)}, S^{(5)}\right)$. Последние подгруппы порождены специальными множествами образующих и удовлетворяют равенству

$$B_i'gp\left(M_0^{(4)}, S^{(4)}\right)B_i'^{-1} = gp\left(M_0^{(5)}, S^{(5)}\right). \qquad (3.39)$$

Для определения B_i' выберем в группе $gp\left(M_0^{(4)}, S^{(4)}\right)$ любой образующий

$$X = B_0't^{\eta_1}B_1't^{\eta_2} \dots t^{\eta_k}B_k',\ k \geq 1,$$

тогда из соотношения (3.39) $B_i'XB_i'^{-1} = B_i'B_0't^{\eta_1}B_1' \dots t^{\eta_k}B_k'B_i'^{-1} \in gp\left(M_0^{(5)}, S^{(5)}\right)$. Перепишем слово $B_i'XB_i'^{-1}$ в образующих подгруппы $gp\left(M_0^{(5)}, S^{(5)}\right)$ $B_i'B_0't^{\eta_1}B_1't^{\eta_2} \dots t^{\eta_k}B_k'B_i'^{-1} = u_0u_1 \dots u_m$. В слове $u_0u_1 \dots u_m$ элемент u_0 является трансформой длины 1, если среди подгрупп, порождающих $S^{(5)}$ содержится подгруппа трансформ единичной длины $\left(M_1^{(5)}\right) = \mathrm{C}_1^{(5)} < \langle a \rangle$, в противном случае $u_0 \neq 1$. Запишем $u_1 = l_{1_{u_1}} t^{\eta_1} u_{1_n}, \eta_1 = \pm 1$, тогда

$$B_i' B_0' = u_0 l_{1_{u_1}} h, \tag{3.40}$$

$h \in U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, $h = a^{km}$, где k ограничено, т.к. подгруппа H_2 содержит элемент a^{sm}, $s < k$. Из (3.40) имеем $B_i' = u_0 l_{1_{u_1}} h B_0'^{-1}$, где $u_0 \in gp\left(M_0^{(5)}, S^{(5)}\right)$, и в качестве B_i' можно взять $l_{1_{u_1}} h B_0'^{-1}$.

IIб) Рассмотрим случай, когда в подгруппах $gp(M_0'', S''), gp(M_0''', S''')$ $M_0'' = \emptyset$, $M_0''' = \emptyset$.

Допустим, что умножением справа на слова из подгруппы $gp(M_0''', S''')$ в слове $\widetilde{w}^{-1} = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_k} B_k$ выделим закрытое конечное подслово максимально возможной длины $t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta$, совпадающее с подсловом правой половины трансформы некоторой подгруппы (M_i''') ряда (3.37). В результате получаем $\widetilde{w}' = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_i} B_i' t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta$. В подслове $\widetilde{w}_\Lambda = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_i}$ выделим максимально возможное закрытое начальное подслово, совпадающее с подсловом левой половины трансформ некоторой подгруппы (M_i'') ряда (3.38). При этом возможны случаи:

Выделенное начальное подслово целиком совпадает с $\widetilde{w}_\Lambda$. Тогда, если в подгруппе $gp\left(M_0^{(4)}, S^{(4)}\right) = t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} \dots r_1 t^\beta gp(M_0''', S''') t^{-\beta} r_1^{-1} \dots t^{-\varepsilon_j}$ содержатся порождающие подгруппы $\left(M_i^{(4)}\right)$ с крыльями, не равными 1, то выбор B_i' осуществляется аналогично случаю IIа. Если подгруппа $gp\left(M_0^{(4)}, S^{(4)}\right)$ состоит из трансформ только единичной длины, т.е. $gp\left(M_0^{(4)}, S^{(4)}\right) = \mathrm{C}_1 < \langle a \rangle$ и подгруппа $t^{-\varepsilon_i} \dots B_0^{-1} t^{-\alpha} gp(M_0'', S'') t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_i} = gp\left(M_0^{(5)}, S^{(5)}\right) = \mathrm{C}_2 < \langle a \rangle$, то решение проблемы сопряженности H_1 и H_2 сводится к сопряжению подгрупп C_1 и C_2 в группе $\langle a \rangle$.

Пусть теперь выделенное начальное подслово в слове $\widetilde{w}_\Lambda = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_i}$ меньше $\widetilde{w}_\Lambda$. Тогда

$$\widetilde{w}'_\Lambda = t^{-\varepsilon_\alpha} r_{1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_1} r_{2x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_{n_1}} B_{n_1+1} t^{\varepsilon_{n_1+1}} \dots t^{\varepsilon_i},$$

$$\widetilde{w}' = t^{-\varepsilon_\alpha} r_{1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_1} r_{2x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_{n_1}} B_{n_1+1} t^{\varepsilon_{n_1+1}} \dots t^{\varepsilon_i} B'_i t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta,$$

причем каждая подгруппа $\left(M'''_{ij}\right) = {g'''_{ij}}^{-1} C'''_{ij} g'''_{ij}$, порождающая S''', удовлетворяет соотношению

$$t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta \left(M'''_{ij}\right) t^{-\beta} r_1^{-1} \dots r_j^{-1} t^{-\varepsilon_j} < U_{\varepsilon_1}, \tag{3.41}$$

а каждая подгруппа $\left(M''_{js}\right)$, порождающая S'', удовлетворяет соотношению

$$t^{-\varepsilon_\alpha} r_{1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_1} r_{2x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_{n_1}} \left(M''_{js}\right) t^{\varepsilon'_{n_1}} r_{n_1x} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1x} t^{\varepsilon_\alpha} < U_{\varepsilon_2}, \tag{3.42}$$

так как в противном случае выделенные подслова $t^{-\varepsilon_\alpha} r_{1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_1} r_{2x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_{n_1}}$ и $t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta$ не будут максимально возможными, полученными соответственно при умножении w слева на слова из $gp(M''_0, S'')$и справа на слова из $gp(M'''_0, S''')$.

Кроме того, подгруппы, порождающие S''', могут быть подгруппами следующего ряда

$$U_{i_0},\ t^{-\beta} C'''_2 t^\beta,\ t^{-\beta} r_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} C'''_3 t^{\varepsilon_1} r_1 t^\beta, \dots, \tag{3.43}$$
$$t^{-\beta} r_1^{-1} \dots r_j^{-1} t^{-\varepsilon_j} C'''_j t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta,$$

а подгруппы, порождающие S'', могут быть подгруппами ряда

$$U_{j_0}, t^{-\varepsilon_\alpha} C''_2 t^{\varepsilon_\alpha},\ \dots,\ t^{-\varepsilon_\alpha} r_{1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_1} r_{2x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_{n_1}} C''_{n_1} t^{\varepsilon'_{n_1}} r_{n_1x} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1x} t^{\varepsilon_\alpha} \tag{3.44}$$

Подгруппа $\left(M'''_{k_3}\right)$ ряда (3.38) имеет вид:

$$\left(M'''_{k_3}\right) = t^{-\beta} r_1^{-1} \dots r_j^{-1} t^{-\varepsilon_j} C'''_j t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta,$$

а подгруппа ряда (3.37) имеет вид

$$\left(M''_{k_2}\right) = t^{-\varepsilon_\alpha} r_{1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_1} r_{2x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_{n_1}} C''_{n_1} t^{\varepsilon'_{n_1}} r_{n_1x} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1x} t^{\varepsilon_\alpha}.$$

Из условий (3.41), (3.42) следует, что все подгруппы ряда (3.38) являются подгруппами $\left(M'''_{k_3}\right)$, а подгруппы ряда (3.37) – подгруппами подгруппы $\left(M''_{k_2}\right)$. Поэтому $gp(M'''_0, S''') = \left(M'''_{k_3}\right)$, $gp(M''_0, S'') = \left(M''_{k_2}\right)$. Получили выше рассмотренный случай.

III) Пусть в подгруппах $H_1 = gp(M_0, S)$, $H_2 = gp(M_0', S')$ основы S и S' равны единице, т.е. $H_1 = (M_0)$, $H_2 = (M_0')$, и являются свободными подгруппами в группе B. Выясним, будут ли сопряжены M_0 и M_0' в группе B, т.е. существует ли $z \in$ B, такой что $z^{-1}M_0 z = M_0'$. Элемент z будем выбирать наименьшим в двойном классе смежности $(M_0)z(M_0')$.

Пусть также $(M_0) = \langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$ и $(M_0') = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle$. Образующие $\{X_{i, i=\overline{1,n}}\}$ и $\{Y_{i, i=\overline{1,n}}\}$ являются специальными и удовлетворяют условиям:

а) закрытая левая половина каждого $X_i \in \{X_i\}_{i=\overline{1,n}}$, имеющего нечетную длину, изолирована в множестве $\left\{\{X_{j, j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i\right\} \cup \left\{\{X_j^{-1}, _{j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i^{-1}\right\}$, закрытая левая и закрытая правая половины каждого $X_i \in \{X_{i, i=\overline{1,n}}\}$, имеющего четную длину, изолированы в множестве $\left\{\{X_{j, j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i\right\} \cup \left\{\{X_j^{-1}, _{j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i^{-1}\right\}$;

б) закрытый большой начальный и закрытый большой конечный отрезки каждого X_i изолированы в множестве $\left\{\{X_{j, j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i\right\} \cup \left\{\{X_j^{-1}, _{j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i^{-1}\right\}$;

в) для каждого $X_i \in \{X_{i, i=\overline{1,n}}\}$ справедливо соотношение $l\left(w_1^{\varepsilon_1} X_i w_2^{\varepsilon_2}\right) \le l(X_i)$, где $w_1^{\varepsilon_1}, w_2^{\varepsilon_2} \in \left\{\{X_{j, j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i\right\} \cup \left\{\{X_j^{-1}, _{j=\overline{1,n}}\} \backslash X_i^{-1}\right\}$.

Причем, образующие подгруппы $(M_0') = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle$ упорядочены по длинам: $1 < l(Y_1) \le l(Y_2) \le \dots \le l(Y_n)$.

Рассмотрим циклически несократимый образующий $X_1 \in (M_0)$. Сопрягая его элементом z получим: $z^{-1}X_1 z = Y_{i_1}^{\varepsilon_1} Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k}$, где слово $Y_{i_1}^{\varepsilon_1} Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k} \in (M_0')$ – простое и $l(Y_{i_1}^{\varepsilon_1} Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k}) \le l(X_1) + l(Y_n) + 1$.

В подгруппе (M_0') построим множество слов $V = \{v_1 v_2 \dots v_n\}$, длина которых не превосходит $l(X_1) + l(Y_n) + 1$. Для каждого элемента из множества $v_i \in V$ проверяем, сопряжено ли v_i с X_1. Допустим, что $v_i = v_{i_0}^{-1} v_i' v_{i_0}$, то есть $v_i' = t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_k} B_k$ – циклически несократимый элемент в группе B. Сопрягаем подгруппу $\langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle$ элементом $v_{i_0}^{-1}$, получим равенство:

$$v_{i_0}^{-1} \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle v_{i_0} = \langle Y_1', Y_2', \dots, Y_n' \rangle,$$

где $\{Y_i'{,}_{i=\overline{1,n}}\}$ – специальное множество образующих подгруппы $\nu_{i_0}^{-1}\langle\{Y_i \ {,}_{i=\overline{1,n}}\}\rangle\nu_{i_0}$.

Из теоремы Коллинза [18] известно, что некоторая циклическая перестановка X_i будет сопряжена с v_i' с помощью элемента h из ассоциированной подгруппы, т.е. $h \in \langle a^m\rangle$, либо $h \in \langle a^n\rangle$:

$$h^{-1}X_1'h = v_i'$$

где X_1' - циклическая перестановка X_1. Поэтому сначала сопрягаем подгруппу $(M_0) = \langle X_1, X_2, \dots, X_n\rangle$ различными $X_{i,L}$, т.е. начальным словом $X_{i,L}$ некоторого слова X_i. В результате получим конечное множество подгрупп:

$$\{\langle X_{i,L}^{-1}X_1X_{i,L}, \dots, X_{i,L}^{-1}X_{i-1}X_{i,L}\ , X_{i,L}X_{i,R},\ X_{i,L}^{-1}X_{i+1}X_{i,L}, \dots, X_{i,L}^{-1}X_nX_{i,L}\rangle\} = \{\langle X_i\rangle^{X_{i,L}}\}$$

и выберем из этого множества подгруппу, у которой X_1' сопряжено с v_i' элементом h из ассоциированной подгруппы. Трансформируем выделенную подгруппу элементом h и проверяем справедливость цепочки соотношений:

$$h^{-1}\{\langle X_i\rangle^{X_{i,L}}\}h \subset \left\{\langle Y_i\rangle^{\nu_{i_0}^{-1}}\right\} \subset h^{-1}\{\langle X_i\rangle^{X_{i,L}}\}h \qquad (3.45)$$

Если соотношение (3.45) для некоторого h выполняется, то подгруппы H_1, и H_2 сопряжены.

Пусть $X_1 = B_0t^{\varepsilon_1}B_1 \dots t^{\varepsilon_k}B_k$. Из (3.45) имеем $h^{-1}X_1'h \in \langle\{Y_i \ {,}_{i=\overline{1,n}}\}\rangle$. Сумму всех показателей степеней ε_i элемента X_1 обозначим $\sigma_t(X_1)$. Если $\sigma_t(X_1) \neq 0$, то существует единственное $h^{-1}X_1'h = Y_{i_1}^{\varepsilon_1}Y_{i_2}^{\varepsilon_2}\dots Y_{i_{k_1}}^{\varepsilon_{k_1}}$. Для него проверяем: $h^{-1}H_1h = H_2$. Если $\sigma_t(X_1) = 0$, то выбираем X_i с $\sigma_t(X_i) \neq 0$,. Если же все X_i таковы, что $\sigma_t(X_i) = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$. Существует $h = a^{sm} \in \langle a^m\rangle$, такое, что для любого i: $h^{-1}X_ih = X_i$. В этом случае по структуре каждого X_i определяем общее h, которое ограничивается s. Теорема 3.2. доказана.

3.3. Разрешимость проблемы сопряженности подгрупп в HNN-расширении древесного произведения бесконечных циклических групп с объединением с ассоциированными циклическими подгруппами

3.3.1. Постановка задачи

Пусть группа $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} {}^{*} \langle a_k \rangle \,|\, a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$, $|p_{ij}|, |p_{ji}| \geq 1, i \in I_1$, $j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty$, – есть древесное произведение циклических групп с циклическим объединением, которому соответствует конечный дерево-граф Г; каждой вершине v_k графа Г соответствует бесконечная циклическая группа $\langle a_k \rangle$, а ребру, соединяющему вершины v_i и v_j – ассоциированные подгруппы $\langle a_i^{p_{ij}} \rangle, \langle a_j^{p_{ji}} \rangle$.

Рассмотрим *HNN*-расширение группы G_Γ с помощью правильной проходной буквы t:

$$\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1} U_1 t = U_{-1} \rangle,$$

где $U_1 = \langle a_m^{s_{ml}} \rangle, U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}} \rangle, |s_{ml}|, |s_{lm}| \geq 1, m \in I_1, l \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty$.

Основным результатом является разрешимость проблемы сопряженности конечно порожденных подгрупп в группе $\bar{G}_\Gamma$.

Доказательство разрешимости проблемы сопряженности подгрупп базируется на следующих утверждениях:

– в группе G_Γ – базовой группе *HNN*-расширения, разрешима проблема сопряженности слов;

– в группе G_Γ разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп;

– проблема сопряженности подгрупп разрешима в группе $B = \langle a, t; t^{-1} a^m t = a^n \rangle$, $|m|, |n| > 1$, которая является частным случаем группы $\bar{G}_\Gamma$.

Также известно (см. параграф 2.2.), что образующие конечно порожденной подгруппы группы $\bar{G}_\Gamma$ можно привести к специальным образующим, порождающим ту же самую подгруппу.

Рассмотрим вспомогательные утверждения, которые будут использоваться при доказательстве теоремы 3.3.

3.3.2. Вспомогательные утверждения

Лемма 3.9. *Пусть* $H = gp(M_0, S)$ *– конечно порожденная подгруппа группы* $\bar{G}_\Gamma$, *где* S *– порождена подгруппами ряда*

$$(M_1) \le (M_2) \le \cdots \le (M_k). \tag{3.46}$$

Всякое простое слово $w \in gp(M_0, S)$ *группы* $\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1}U_1 t = U_{-1}\rangle, U_1 = \langle a_m^{S_{ml}}\rangle, U_{-1} = \langle a_l^{S_{lm}}\rangle$, *имеющее своей несократимой записью трансформу* $w = g^{-1}ag$, *где* $a \in G_\Gamma$, *может быть приведено к виду* $g^{-1}ag = u_1^{-1}u_2^{-1} \dots u_n^{-1}u_0 u_n \dots u_1$, *где* u_0 *– трансформа, принадлежащая одной из подгрупп* $(M_i), i = \overline{1,k}$, *ряда (3.46),* $u_i \in (M_0)$ *либо* $u_i \in (M_i)$ *ряда (3.46),* $u_1 u_2 \dots u_n u_0 u_n \dots u_1$ *– слово подгруппы* $gp(M_0, S)$.

Доказательство. Так как слово $w \in gp(M_0, S)$, то в u-символах оно принимает вид:

$$w = g^{-1}ag = u_1 u_2 \dots u_m,$$

причем $u_1 u_2 \dots u_m$ –является простым словом подгруппы $gp(M_0, S)$, выясним вид простого слова $u_1 u_2 \dots u_m$.

Опираясь на доказательство леммы 3.6, нетрудно показать, что $u_1 u_2 \dots u_m$ не является словом вида a и b.

Пусть w – слово вида c:

$$u_1 u_2 \dots u_m = u_1 \dots u_{i-1}(u_i u_{i+1} u_{i+2}) u_{i+3} \dots u_m,$$

где u_i, u_{i+2} – нетрансформы, причем у u_i изолирована левая половина, а у u_{i+2} – правая. $l(u_i u_{i+1} u_{i+2}) = l(u_i) = l(u_{i+2}) = l(g^{-1}ag)$.

Нетрансформы u_i, u_{i+2} имеют нечетную длину. Если допустить, что $u_i \ne u_{i+2}^{-1}$, то левая закрытая половина u_i не равна левой закрытой половине u_{i+2}^{-1}, и так как $l(u_1 \dots u_{i-1}) = 2m_1 + 1$, $l(u_{i+1} \dots u_m) = 2m_2 + 1$, где $2m_1 + 1$ и

$2m_2+1$ меньше $l(u_i)$, то в силу соотношения $g^{-1}ag = u_1u_2\dots u_m$ открытую левую половину u_i можно перевести в открытую левую половину u_{i+2}^{-1}. Но тогда закрытую левую половину u_i умножением слева на слово $u_{i+3}\dots u_m u_1\dots u_{i-1}$, $l(u_{i+3}\dots u_m u_1\dots u_{i-1}) < l(u_i)$ можно перевести в закрытую левую половину u_{i+2}^{-1}. Однако это противоречит пункту 4 определения 1.9. специального множества. Следовательно, они равны, но тогда равны и закрытые правые половины. Получаем, что $u_i = u_{i+2}^{-1}$.

Пусть $g^{-1}ag = u_1\dots u_{i-1}(u_iu_{i+1}u_{i+2})u_{i+3}\dots u_m$, где $u_i = u_{i+2}^{-1}$ – нетрансформы, $l(u_i) > l(u_j)$, $i \neq j, j \neq i+1, j \neq i+2$, $l(u_{i+1}) \leq l(u_i)$, $l(u_1\dots u_i) = l(u_i)$, $l(u_{i+2}\dots u_m) = l(u_{i+2})$, $l(u_1\dots u_{i-1}) < l(u_i)$, $l(u_{i+3}\dots u_m) < l(u_{i+2})$.

Так как $g^{-1}ag = u_1u_2\dots u_m$, то $u_1\dots u_i = g^{-1}К_1g_1$, где $К_1$ – ядро слова, $l(g) = l(g_1)$, $u_{i+2}u_{i+3}\dots u_m = g_1^{-1}K_2g$, g_1 – закрытая правая половина $u_i = u_{i+2}^{-1}$. Трансформируем $g^{-1}ag$ словом $u_1u_2\dots u_i$:

$u_i^{-1}\dots u_1^{-1}(g^{-1}ag)u_1u_2\dots u_i = g_1^{-1}K'g_1$, где $K' = K_1^{-1}aK_1$.

$l(g_1^{-1}K'g_1) \leq l(u_i)$.

Таким образом, $g_1^{-1}K'g_1 = u_{i+1}u_{i+2}\dots u_m u_1u_2\dots u_i$ и так как g_1 является неизолированной правой закрытой половиной u_i и $g_1^{-1}K'g_1 \in gp(M_0,S)$, то на основании леммы 1.5. существует подгруппа $(M_j) = g_1^{-1}A_jg_1$, содержащая трансформу $g_1^{-1}K'g_1$. Таким образом $g_1^{-1}K'g_1 = u_0$, где $u_0 \in (M_j)$. Отсюда следует, что $g^{-1}ag = u_1^{-1}\dots u_i^{-1}u_0u_i\dots u_1$, и произведение $u_1^{-1}\dots u_i^{-1}u_0u_i\dots u_1$ есть слово.

Рассмотрим случай, когда $g^{-1}ag = u_1u_2\dots u_{i-1}u_iu_{i+1}\dots u_m$, где правая часть – слово вида d. Трансформа u_i принадлежит некоторой подгруппе (M_j), $l(u_i) > l(u_j)$, $i \neq j$, $l(u_1\dots u_{i-1}) < l(u_i)$, $l(u_{i+1}\dots u_m) < l(u_i)$.

Рассмотрим произведение $w \cdot w = g^{-1}ag \cdot g^{-1}ag = g^{-1}a^2g$. Так как $l(w\cdot w) = l(u_1\dots u_iu_{i+1}u_{i+2}\dots u_m \cdot u_1\dots u_iu_{i+1}u_{i+2}\dots u_m) \leq l(g^{-1}ag)$, то сокращение в слове $u_iu_{i+1}u_{i+2}\dots u_m u_1\dots u_{i-1}u_i$ идет до ядер u_i, поэтому слово

$u_{i+1}u_{i+2}\dots u_m u_1 \dots u_{i-1} = u$ является простым и есть трансформа, принадлежащая некоторой подгруппе (M_j), $u \in (M_j)$. Поэтому $u_1 \dots u_{i-1} = u_m^{-1} \dots u_{i+2}^{-1} u_{i+1}^{-1} u$ и подставляя в исходное равенство получим: $g^{-1}ag = u_m^{-1} \dots u_{i+2}^{-1} u_{i+1}^{-1} u_0 u_{i+1} u_{i+2} \dots u_m$, где $u_0 = uu_i$. Лемма доказана.

Лемма 3.10. [48] *Пусть* H *– конечно порожденная подгруппа группы* $\bar{G}_\Gamma$, *порожденная двумя различными системами порождающих подгрупп:* $H = gp(M_0, S)$ *и* $H = gp(M_0', S')$, *где* S *– подгруппа порожденная подгруппами ряда*

$$(M_1) \le (M_2) \le \dots \le (M_k), \tag{3.47}$$

S' *– подгруппа порожденная подгруппами ряда*

$$(M_1') \le (M_2') \le \dots \le (M_k'), \tag{3.48}$$

$(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i, \qquad (M_j') = g_j^{-1} C_j' g_j, \qquad C_i, C_j' \subset G_\Gamma.$

Тогда для каждой подгруппы $(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$ *из (3.47) существует* (M_j') *из (3.48) и существует слово* $w_{ij} \in H$, *что* $(M_i) \subseteq w_{ij}^{-1} (M_j') w_{ij}$.

Доказательство. Если подгруппа (M_i) из ряда (3.47) содержит трансформы с крыльями равными единице, то некоторая подгруппа (M_j') ряда (3.48) также содержит трансформы равные единице, и тогда слово $w_{ij} = 1$.

Пусть $v_i^{-1} K_1 v_i$, $v_i^{-1} K_2 v_i$, ... , $v_i^{-1} K_m v_i$ образующие некоторой подгруппы $(M_i) = v_i^{-1} A_i v_i$ из ряда (3.47) где $v_i^{-1} = t^{-\alpha} r_{1_i}^{-1} t^{-\varepsilon_1} r_{2_i}^{-1} t^{-\varepsilon_2} \dots r_{k_i}^{-1} t^{-\varepsilon_k}$, $\alpha = 0, \pm 1$; $\varepsilon_i = \pm 1$, – левая половина трансформ подгруппы (M_i). Предположим, что среди трансформ $v_i^{-1} K_j v_i$ существует такой элемент, что ядро K_j не сопряжено объединяемой подгруппе. Так как $v_i^{-1} K_j v_i \in gp(M_0', S')$, то на основании леммы 3.9.

$$v_i^{-1} K_j v_i = u_{1j}^{-1} \dots u_{nj}^{-1} u_{0j} u_{nj} \dots u_{1j},$$

где $1 \le j \le m$, $u_{1j}^{-1} \dots u_{nj}^{-1} u_{0j} u_{nj} \dots u_{1j}$ – простое слово, u_{0j} – трансформа, принадлежащая некоторой подгруппе (M_j') ряда (3.48).

Покажем, что для любого j все трансформы u_{0j} принадлежат одной подгруппе (M'_s) ряда (3.48). Пусть $v_i^{-1}K_{j_1}v_i = u_{1j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1}u_{0j_1}u_{nj_1} \dots u_{1j_1}$ слово вида c, а слово $v_i^{-1}K_{j_2}v_i = u_{1j_2}^{-1} \dots u_{nj_2}^{-1}u_{0j_2}u_{nj_2} \dots u_{1j_2}$ является словом вида d. Тогда $l(u_{nj_1}) > l(u_{sj_1})$, где $s \neq n$, $l(u_{0j_1}) \leq l(u_{nj_1})$, $u_{n,j_1}-$ нетрансформа с изолированной закрытой правой половиной, $l(u_{1j_1}^{-1} \dots u_{n-1j_1}^{-1}) < l(u_{nj_1}^{-1})$. Трансформа u_{0j_2} удовлетворяет условию: $l(u_{0j_2}) > l(u_{s,j_2})$ при $s \neq 0$, $l(u_{1j_2}^{-1} \dots u_{nj_2}^{-1}) < l(u_{0j_2})$ и так как подслова $u_{1j_1}^{-1} \dots u_{n-1j_1}^{-1}$ и $u_{1j_2}^{-1} \dots u_{nj_2}^{-1}$ одновременно принадлежат подгруппе $gp(M_0\ ,S)$ и имеют длину меньше $(2k_i + 1)$, то после сопряжения этими элементами трансформ $v_i^{-1}K_jv_i$, их длина не изменится. Поэтому изолированную закрытую левую половину u_{n,j_1} умножением можем перевести в закрытую левую половину u_{0j_2}, что противоречит определению специального множества.

Предположим, что все слова вида $v_i^{-1}K_jv_i$ – слова вида c. Тогда в силу строения простого слова, имеем: $u_{s,j_1} = u_{s,j_2}$ для $s = \overline{1,n}$. Трансформы u_{0j} принадлежат некоторым подгруппам (M'_j) ряда (3.48), причем, если $u_{n_j} = (g')^{-1}K_jg''$, где $(g')^{-1}$ – неизолированная левая половина, то $(M'_s) = (g')^{-1}A_sg'$.

Каждое слово $u_{1j_s}^{-1} \dots u_{n-1,j_s}^{-1}u_{nj_s}^{-1} = v_i^{-1}K'_sg'$. Поэтому, сопрягая левую и правую половину равенства $v_i^{-1}K_jv_i = u_{1j}^{-1} \dots u_{nj}^{-1}u_{0j}u_{nj} \dots u_{1j}$ словом $u_{1j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1}$, получим

$$u_{1j_1} \dots u_{nj_1}(v_i^{-1}K_{j_1}v_i)u_{nj_1}^{-1} \dots u_{1j_1}^{-1} = g'^{-1}\widetilde{K}_{j_1}g', 1 \leq j \leq m\ ,\ g'^{-1}\widetilde{K}_{j_1}g' = u_{0j_1},$$

$$g'^{-1}\widetilde{K}_{j_1}g' = u_{nj_1} \dots u_{1j_1}u_{1j_s}^{-1}u_{2j_s}^{-1} \dots u_{nj_s}^{-1}u_{0j_s}u_{1j_s}u_{2j_s} \dots u_{nj_s}u_{nj_1}^{-1} \dots u_{1j_1}^{-1}, 1 \leq j \leq m,$$

$$u_{nj_1} \dots u_{1j_1}u_{1j_s}^{-1}u_{2j_s}^{-1} \dots u_{nj_s}^{-1} = (g')^{-1}K''_sg', \text{ где } (g')^{-1}K''_sg' \in (M'_s).$$

Отсюда $u_{1j_s}^{-1}u_{2j_s}^{-1} \dots u_{nj_s}^{-1} = u_{1j_1}^{-1}u_{2j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1}((g')^{-1}K''_sg')$.

В результате, используя полученные равенства и заменяя подслова $u_{1j_s}^{-1}u_{2j_s}^{-1} \dots u_{nj_s}^{-1}$ соответственно равным словом $u_{1j_1}^{-1}u_{2j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1}((g')^{-1}K''_sg')$, получим

$$v_i^{-1}K_s v_i = u_{1j_1}^{-1}u_{2j_1}^{-1}\dots u_{nj_1}^{-1}u'_{0j_s}u_{1j_1}u_{2j_1}\dots u_{nj_1},$$

где $u'_{0j_s} = ((g')^{-1}K''_s g_1)u'_{0j_s}(g_1^{-1}(K''_s)^{-1}g') \in (M'_s)$.

Пусть все слова вида $v_i^{-1}K_j v_i$ являются словами вида d. Тогда $l\left(u_{1j}^{-1}\dots u_{nj}^{-1}\right) < l(u_{0j})$ для $1 \le j \le m$, и допустим, что трансформа u_{0j} имеет вид $u_{0j} = t^{-\alpha}r_1^{-1}t^{-\varepsilon_1}r_2^{-1}t^{-\varepsilon_2}\dots r_i^{-1}t^{-\varepsilon_i}K_j t^{\varepsilon_i}r_i\dots t^{\varepsilon_1}r_1 t^{\alpha}, \alpha = 0, \pm 1;\ \varepsilon_i = \pm 1$.
Рассмотрим произведение:

$$u_{0_1}u_{n_1}\dots u_{1_1}\cdot u_{1_j}^{-1}\dots u_{n_j}^{-1}u_{0_j},\ 1 \le j \le m.$$

Так как в словах $u_{0_1}u_{n_1}\dots u_{1_1}$ и $u_{1_j}^{-1}\dots u_{n_j}^{-1}u_{0_j}$ максимальные длины имеют элементы u_{0_1} и u_{0_j} соответственно, причем $l\left(u_{0_1}\right) = l(u_{0_j})$, то

$$u_{0_1}u_{n_1}\dots u_{1_1}\cdot u_{1_j}^{-1}\dots u_{n_j}^{-1}u_{0_j} = t^{-\alpha}r_{1_i}^{-1}t^{-\varepsilon_1}\dots r_{k_i}^{-1}t^{-\varepsilon_k}h_j t^{\varepsilon_k}r_{k_i}\dots t^{\varepsilon_1}r_1 t^{\alpha},$$

где ядро h_j принадлежит ассоциированной подгруппе, тогда $u_{1j}^{-1}\dots u_{nj}^{-1} = u_{1_1}^{-1}\dots u_{n_1}^{-1}u'_{0_j}$, где $u'_{0_j} \in (M'_s)$, $l\left(u'_{0_j}\right) < 2k_i + 1$. Но тогда трансформы $v_i^{-1}K_1 v_i$ и $v_i^{-1}K_j v_i$ примут следующий вид:

$$v_i^{-1}K_1 v_i = u_{1_1}^{-1}u_{2_1}^{-1}\dots u_{n_1}^{-1}u_{0_1}u_{n_1}u_{n-1,_1}\dots u_{1_1},$$

$$v_i^{-1}K_j v_i = u_{1_1}^{-1}u_{2_1}^{-1}\dots u_{n_1}^{-1}u''_{0j}u_{n_1}u_{n-1,_1}\dots u_{1_1},$$

где $1 \le j \le m,\ u''_{0j} = u'_{0_j}u_{0_j}(u'_{0_j})^{-1} \in (M'_s)$.

Таким образом, показано, что для каждой подгруппы (M_i) ряда (3.47) существует подгруппа ряда (3.48) и слова $w_{ij} \in H$ такие, что $(M_i) \subseteq w_{ij}^{-1}(M'_j)w_{ij}$.

Лемма доказана.

Лемма 3.11. [48] *Пусть группа H порождена двумя различными специальными множествами $H = gp(M_0, S)$ и $H = gp(M'_0, S')$, где $S -$ древесное произведение подгрупп ряда (3.47), а S' – древесное произведение подгрупп ряда (3.48). Тогда существует подгруппа $(M_i) = v_i^{-1}C_i v_i$, из ряда (3.47), существует $\left(M'_j\right)$ из ряда (3.48) и слово $w_{ij} \in H$, такое что $(M_i) = w_{ij}^{-1}\left(M'_j\right)w_{ij}$.*

Доказательство. На основании леммы 3.10. для подгруппы (M_i) ряда (3.47) существует подгруппа (M'_j) ряда (3.48) и слово $w_{ij} \in H$, удовлетворяющие условию

$$(M_i) \subseteq w_{ij}^{-1}(M'_j)w_{ij} \tag{3.49}$$

Аналогично для подгрупп ряда (3.48):

$$(M'_j) \subseteq w_{ji}^{-1}(M_i)w_{ji} \tag{3.50}$$

С помощью соотношений (3.49) и (3.50) можно построить цепочку вложенных подгрупп, имеющих наименьшую длину:

$$w_1^{-1}(M_{p_1})w_1 \subseteq w'^{-1}_1(M'_{q_1})w'_1 \subseteq w_2^{-1}(M_{p_2})w_2 \subseteq \ldots \subseteq$$
$$\subseteq w'^{-1}_k(M'_{q_k})w'_k \subseteq (M_{p_1}),$$

где $w_i, w'_i \in H$, (M_{p_i}) – подгруппа ряда (3.47), (M'_{q_j}) – подгруппа ряда (3.48). Следовательно $w_1^{-1}(M_{p_1})w_1 \subseteq (M_{p_1})$.

Используя рассуждения доказательства леммы 3.4. можно показать, что все трансформы u_i слова $w_1^{-1} = u_1u_2 \ldots u_l$ принадлежат подгруппе (M_{p_1}). Следовательно, $w_1^{-1}(M_{p_1})w_1 = (M_{p_1})$.

Лемма доказана.

Лемма 3.12. *Пусть $H_1 = gp(M_0, S)$ и $H_2 = gp(M'_0, S')$ – две конечно порожденные подгруппы группы $\bar{G}_\Gamma$. Основа S подгруппы H_1 порождена подгруппами ряда*

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \cdots \leq (M_{k_1}), \tag{3.51}$$

основа S' подгруппы H_2 порождена подгруппами ряда

$$(M'_1) \leq (M'_2) \leq \cdots \leq (M'_{k_2}). \tag{3.52}$$

Тогда, если существует $z \in \bar{G}_\Gamma$, такой что $z^{-1}H_1z = H_2$, то существуют $w \in gp(M'_0, S'), j = \overline{1, k_1}$, $s = \overline{1, k_2}$ такие, что $w^{-1}z^{-1}(M_j)zw = (M'_s)$, где (M_j) – подгруппа ряда (3.51), (M'_s) – подгруппа ряда (3.52).

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3.5.

Лемма 3.13. *Пусть* $H_1 < G_\Gamma, H_2 < G_\Gamma$, *причем* H_1 *и* H_2 *не сопряжены одновременно ассоциированной подгруппе. Подгруппы* H_1 *и* H_2 *сопряжены в группе* $\bar{G}_\Gamma$ *тогда и только тогда, когда они сопряжены в группе* G_Γ.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3.1.

3.3.3. Доказательство основной теоремы

Теорема 3.3. [48] *В группе* $\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1}U_1 t = U_{-1}\rangle$, $U_1 = \langle a_m^{s_{ml}}\rangle, U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}}\rangle, |s_{ml}|, |s_{lm}| \geq 1$, *разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

Доказательство. Пусть $H_1 = gp(M_0, S)$ и $H_2 = gp(M_0', S')$ подгруппы группы $\bar{G}_\Gamma$, где S порождена подгруппами ряда

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \cdots \leq (M_k), \tag{3.53}$$

S' порождена подгруппами ряда

$$(M_1') \leq (M_2') \leq \cdots \leq (M_{k_1}'). \tag{3.54}$$

Тогда среди подгрупп (3.53) существует $(M_{i_0}) = v_{i_0}^{-1} C_{i_0} v_{i_0}$, среди подгрупп (3.54) существует подгруппа $(M_{j_0}') = g_{j_0}^{-1} C_{j_0}' g_{j_0}$, $C_{i_0}, C_{j_0}' < G_\Gamma$, и $w \in gp(M_0', S')$ такие, что

$$w^{-1} z^{-1} (M_{i_0}) z w = (M_{j_0}'). \tag{3.55}$$

При доказательстве теоремы 3.3. будем опираться на доказательство теоремы 3.2., обращая внимание на структуру группы $\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1}U_1 t = U_{-1}\rangle$.

I) Если C_{i_0} и C_{j_0}' не сопряжены с ассоциированными подгруппами U_1, U_{-1}, то $(g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1}) C_{i_0} (v_{i_0} z w g_{j_0}^{-1}) = C_{j_0}'$. Пусть $a_0 = v_{i_0} z w g_{j_0}^{-1}$, и так как $C_{i_0}, C_{j_0}' < G_\Gamma$, то $a_0 \in G_\Gamma$.

Сопряжем подгруппы $gp(M_0, S)$ и $gp(M_0', S')$ элементами $v_{i_0}^{-1}$ и $g_{j_0}^{-1}$ соответственно, а затем приведем образующие этих подгрупп к специальному множеству: $gp(g_{j_0} M_0' g_{j_0}^{-1}, g_{j_0} S' g_{j_0}^{-1}) = gp(M_0'', S'')$,
$gp(v_{i_0} M_0 v_{i_0}^{-1}, v_{i_0} S v_{i_0}^{-1}) = gp(M_0''', S''')$. Тогда

$$a_0^{-1}gp(M_0'',S'')a_0 = gp(M_0''',S'''). \qquad (3.56)$$

Рассмотрим элемент $X = B_{0_x}t^{\varepsilon_1}B_{1_x}t^{\varepsilon_2}\dots t^{\varepsilon_k}B_{k_x} \in gp(M_0''',S'''), k > 1$. Из соотношения (3.56) произведение $a_0^{-1}B_{0_x}t^{\varepsilon_1}B_{1_x}t^{\varepsilon_2}\dots t^{\varepsilon_k}B_{k_x}a_0$ переписываем в образующих специального множества $gp(M_0'',S'')$:

$$a_0^{-1}B_{0_x}t^{\varepsilon_1}B_{1_x}t^{\varepsilon_2}\dots t^{\varepsilon_k}B_{k_x}a_0 = u_0u_1\dots u_m,$$

где $u_0u_1\dots u_m \in gp(M_0'',S'')$ и $u_0 \in (M_i'') = C_{j_0}'$.

Пусть $u_1 = l_{1_{u_1}}t^{\eta_1}u_{1_n}$, тогда $a_0^{-1}B_{0_x} = u_0l_{1_{u_1}}h$, где $h \in U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$. Причем степень элемента h ограничена, так как группа G_Γ имеет центр. Покажем это.

Если подгруппа H_1 содержит элемент из центра группы G_Γ: $C(G_\Gamma)$, то степень h ограничена степенью элемента, порождающего центр.

Пусть подгруппы H_1 и H_2 не содержат элементов из центра. В виду того, что $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \,|\, a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$ есть древесное произведение, то любые две вершины графа Г соединяет единственный путь, и образующие ассоциированных подгрупп $\langle a_m^{s_{ml}} \rangle$ и $\langle a_l^{s_{lm}} \rangle$ группы $\overline{G_\Gamma}$ связывает соотношение $a_m^{s_{ml}M} = a_l^{s_{lm}N}$.

Если $M = N$, то элемент $a_m^{s_{ml}MC_0}$, где $a_m^{C_0} \in C(G_\Gamma)$, коммутирует с любым элементом из группы $\bar{G}_\Gamma$, где $a_m^{C_0} \in C(G_\Gamma)$, и элемент h ограничен степенью $a_m^{s_{ml}MC_0}$. Пусть $M \neq N$. Обозначим $\lambda_t(Y)$ – число вхождений проходной буквы t в образующий Y. Рассмотрим элемент $h_0 = a_m^{s_{ml}M^{\lambda_0}N^{\lambda_0}C_0}$, где $\lambda_0 = \lambda_t(Y)$. Нетрудно показать, что элемент ассоциированной подгруппы h_0 перестановочен с любым элементом Y при условии, что сумма всех показателей проходной буквы $\sigma_t(Y) = 0$. Если все элементы подгрупп H_1 и H_2 обладают условием $\sigma_t(Y) = 0$, то h ограничен степенью h_0.

Пусть существует нетрансформа Y_1, такая что $\sigma_t(Y_1) \neq 0$. Рассмотрим сопряжение Y_1 элементом h_0: $a_m^{-s_{ml}M^{\lambda_0}N^{\lambda_0}C_0} \cdot Y_1 \cdot a_m^{s_{ml}M^{\lambda_0}N^{\lambda_0}C_0} = a_m^{s_{ml}M^{\lambda_0'}N^{\lambda_0''}C_0}Y_1'$, где $\lambda_0' + \lambda_0'' = 2\lambda_0$. Обозначим $h_0' = a_m^{s_{ml}M^{\lambda_0'}N^{\lambda_0''}C_0}$. Для любого элемента h', показатель которого не превосходит показатель h_0 сопрягаем Y_1 элементом

$$a_0^{-1} = l_{1_{u_1}} h' B_{0_x}^{-1}, \tag{3.57}$$

получаем элемент Y_1'. Далее решаем проблему пересечения $Y_1'H_2 \cap \langle h_0 \rangle$ (см. лемму 2.6). Если $Y_1'H_2 \cap U_\varepsilon \neq \emptyset$, то оно выполняется для единственного h', так как в противном случае подгруппы H_1 и H_2 содержали бы элементы из центра.

Мы показали, что множество элементов вида (3.57) конечно и, проверив его, мы можем эффективно установить, существует ли a_0 такой, что $z^{-1} = wg_{j_0}^{-1} a_0 v_{i_0}$, и так как $w \in H_2$, то в качестве z^{-1} можно взять

$$z^{-1} = g_{j_0}^{-1} a_0 v_{i_0}.$$

II) Пусть каждая подгруппа $\left(M_{i_j}\right)$ ряда (3.53) сопряжена с подгруппой $U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$. Аналогичному условию удовлетворяет каждая подгруппа ряда (3.54).

На основании леммы 3.12. из сопряженности H_1, H_2: $z^{-1} H_1 z = H_2$ следует существование подгруппы $\left(M_{i_0}\right) = v_{i_0}^{-1} C_{i_0} v_{i_0}$ ряда (3.53) и подгруппы $\left(M_{j_0}'\right) = g_{j_0}^{-1} C_{j_0}' g_{j_0}$ ряда (3.54) и элемент $w \in gp(M_0', S')$, таких что

$$w^{-1} z^{-1} \left(v_{i_0}^{-1} C_{i_0} v_{i_0}\right) zw = \left(g_{j_0}^{-1} C_{j_0}' g_{j_0}\right). \tag{3.58}$$

Пусть $C_{i_0} = \mathrm{C}_1^{-1} \langle a_{i_0}^{\mu_{i_0} m} \rangle \mathrm{C}_1$, $C_{j_0}' = \mathrm{C}_2^{-1} \langle a_{j_0}^{\mu_{j_0} n} \rangle \mathrm{C}_2$, где $\langle a_{i_0}^{\mu_{i_0} m} \rangle < U_1$, $\langle a_{j_0}^{\mu_{j_0} n} \rangle < U_{-1}$. Соотношение (3.58) приведем к виду:

$$\left(\mathrm{C}_2 g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1} \mathrm{C}_1^{-1}\right) \langle a_{i_0}^{\mu_{i_0} m} \rangle \left(\mathrm{C}_1 v_{i_0} zw g_{j_0}^{-1} \mathrm{C}_2^{-1}\right) = \langle a_{j_0}^{\mu_{j_0} n} \rangle.$$

Обозначим $\widetilde{w}^{-1} = \mathrm{C}_2 g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1} \mathrm{C}_1^{-1} = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_k} B_k, \alpha = 0, \pm 1$

Преобразуем образующие подгруппы $w^{-1} z^{-1} gp(M_0, S) zw$ в подгруппу $gp(M_0', S')$:

$$\left(\mathrm{C}_2 g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1} \mathrm{C}_1^{-1}\right) \mathrm{C}_1 v_{i_0} gp(M_0, S) v_{i_0}^{-1} \mathrm{C}_1^{-1} \left(\mathrm{C}_1 v_{i_0} zw g_{j_0}^{-1} \mathrm{C}_2^{-1}\right)$$
$$= \mathrm{C}_2 g_{j_0} gp(M_0', S') g_{j_0}^{-1} \mathrm{C}_2^{-1}.$$

Приведем образующие подгрупп $\mathrm{C}_1 v_{i_0} gp(M_0, S) v_{i_0}^{-1} \mathrm{C}_1^{-1}$, $\mathrm{C}_2 g_{j_0} gp(M_0', S') g_{j_0}^{-1} \mathrm{C}_2^{-1}$ к специальным: $\mathrm{C}_1 v_{i_0} gp(M_0, S) v_{i_0}^{-1} \mathrm{C}_1^{-1} = gp(M_0''', S''')$, $\mathrm{C}_2 g_{j_0} gp(M_0', S') g_{j_0}^{-1} \mathrm{C}_2^{-1} = gp(M_0'', S'')$, где S'' порождена подгруппами ряда

$$(M_1'') \leq (M_2'') \leq \cdots \leq (M_{k_2}''), \tag{3.59}$$

S''' – порождена подгруппами ряда

$$(M_1''') \leq (M_2''') \leq \cdots \leq \left(M_{k_3}'''\right), \tag{3.60}$$

причем $(M_1'') = (M_1''') = \langle a_{i_0}^{\mu_{i_0} m} \rangle$ или $(M_1'') = (M_1''') = \langle a_{j_0}^{\mu_{j_0} n} \rangle$.

Слово $\widetilde{w}$ удовлетворяет соотношениям $\widetilde{w}^{-1} \langle a_{i_0}^{\mu_{i_0} m} \rangle \ \widetilde{w} = \langle a_{j_0}^{\mu_{j_0} n} \rangle$,

$$\widetilde{w}^{-1} gp(M_0''', S''') \widetilde{w} = gp(M_0'', S'').$$

И тогда $\widetilde{w}$ выбираем наименьшим в двойном классе смежности $gp(M_0''', S''') \widetilde{w} gp(M_0'', S'')$.

Пусть $W_1 = \left\{ w_{i_1, i=\overline{1, N_1}} \right\}$ – специальное множество образующих подгрупп $gp(M_0''', S''')$, $W_2 = \left\{ w_{i_2, i=\overline{1, N_2}} \right\}$ – специальное множество образующих подгрупп $gp(M_0'', S'')$, $l_1 = \max\left\{ l(w_{11}), l(w_{21}), \dots, l(w_{N_1,1}) \right\}$, $l_2 = \max\{ l(w_{12}),\ l(w_{22}), \dots, l(w_{N_2,2}) \}$.

IIa) Рассмотрим случай, когда в подгруппах $gp(M_0'', S''), gp(M_0''', S''')$ имеются нетрансформы, т.е. $M_0'' \neq \emptyset, M_0''' \neq \emptyset$.

Опишем способ построения слова $\widetilde{w}^{-1}$ сопрягающего подгруппы $gp(M_0''', S''')$ и $gp(M_0'', S'')$. Выделяем в слове $\widetilde{w}^{-1} = t^{\alpha} B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_k} B_k$ максимально возможное подслово, совпадающее с подсловом правой половины некоторого образующего специального множества. Допустим, что $\widetilde{w}^{-1}$ можно умножить на слово $u_0 u_1 \dots u_p \in gp(M_0''', S''')$, $l\left(u_0 u_1 \dots u_p\right) < 2j, j < k,$ чтобы длина произведения $l\left(\widetilde{w}^{-1} u_0 u_1 \dots u_p\right) < l(\widetilde{w}^{-1})$ и длину $\widetilde{w}' = \widetilde{w}^{-1} u_0 u_1 \dots u_p$ нельзя больше уменьшить, умножая слева на слова из подгруппы $gp(M_0'', S'')$.

Пусть $\widetilde{w}' = t^{\alpha} B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_i} B_i' t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^{\beta}$, где $t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^{\beta}$ – максимально возможное закрытое конечное подслово правой половины некоторого слова $\widetilde{w}_{i_j}^{\varepsilon} = t^{\alpha} l_1 t^{\varepsilon_1'} l_2 \dots l_n t^{\varepsilon_n'} K t^{\varepsilon_n} r_n \dots t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^{\beta}$, являющегося либо нетрансформой, либо трансформой, принадлежащей подгруппе ряда (3.60):

$$(M_i''') = t^{-\beta} r_1^{-1} \dots t^{-\varepsilon_{j-1}} r_j^{-1} t^{-\varepsilon_j} \dots r_n^{-1} t^{-\varepsilon_n} A_i t^{\varepsilon_n} r_n \dots t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^{\beta}.$$

Длина начального закрытого отрезка $t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}B_1\dots B_{i-1}t^{\varepsilon_i}$, $i<k$, слова $\widetilde{w}'$ не больше $\left[\frac{l_2}{2}\right]$. Выберем в подгруппе $gp(M_0''',S''')$ любой образующий w_{i_1} из специального множества W_1, $l\left(w_{i_1}\right)\geq 2j+1$,

$$w_{i_1}=t^{\alpha'}l_{1w_{i_1}}t^{\varepsilon_1'}l_{2w_{i_1}}t^{\varepsilon_2'}\dots l_{n_i,w_{i_1}}t^{\varepsilon_{n_i}'}K_{w_{i_1}}t^{\varepsilon_{n_i}''}r_{n_i,w_{i_1}}\dots t^{\varepsilon_1''}r_{1w_{i_1}}t^{\eta'}$$

и рассмотрим

$$\widetilde{w}'w_{i_1}(\widetilde{w}')^{-1}=t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}B_1\dots B_{i-1}t^{\varepsilon_i}B''t^{\eta_1}Xt^{\eta_2}B'''t^{-\varepsilon_i}B_{i-1}^{-1}\dots t^{-\varepsilon_1}B_1^{-1}t^{-\alpha}.$$

Подслово $t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}B_1\dots B_{i-1}t^{\varepsilon_i}$ не затрагивается сокращением, иначе конечное подслово $\widetilde{w}'$ не является максимально возможным. Слово $t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}B_1\dots B_{i-1}t^{\varepsilon_i}B''t^{\eta_1}Xt^{\eta_2}B'''t^{-\varepsilon_i}B_{i-1}^{-1}\dots t^{-\varepsilon_1}B_1^{-1}t^{-\alpha}$ принадлежит подгруппе $gp(M_0'',S'')$, и если $(i-1)>\left[\frac{l_2}{2}\right]$, то длину $\widetilde{w}^{-1}$ можно укоротить умножая слева на слово из $gp(M_0'',S'')$.

Теперь покажем, что, сопрягая любой элемент специального множества $w_{i_2}\in W_2$ элементом $\widetilde{w}'^{-1}$, получим сокращение в произведении $\widetilde{w}'^{-1}w_{i_2}\widetilde{w}'$ слева и справа, затрагивающее слог B_i'. Допустим, что слог B_i' затрагивается сокращением либо слева, либо справа. Тогда $\widetilde{w}'^{-1}w_{i_2}^{\varepsilon}\widetilde{w}'=Xt^{\varepsilon_i}B_i't^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}}r_{j-1}\dots r_1t^{\beta}$ и, так как $\widetilde{w}'^{-1}w_{i_2}^{\varepsilon}\widetilde{w}'\in gp(M_0''',S''')$, то $\widetilde{w}'^{-1}w_{i_2}^{\varepsilon}\widetilde{w}'=u_0u_1\dots u_n$ и, поскольку $\widetilde{w}'$ нельзя укоротить, умножая справа на слова из $gp(M_0''',S''')$, то конечное подслово $Xt^{\varepsilon_i}B_i't^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}}r_{j-1}\dots r_1t^{\beta}$ можно перевести в конечное подслово правой половины некоторого слова $\widetilde{w}_{j_1}^{\varepsilon}$ из специального множества W_2, что невозможно по определению 1.9.

Тогда длина любой нетрансформы в W_2 будет больше $2(i-1)$ и для любой подгруппы $\left(M_{ij}''\right)=g_{ij}''^{-1}C_{ij}''g_{ij}''$ с $l\left(g_{ij}''\right)<i-1$ и $g_{ij}''^{-1}=t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}B_1\dots B_{k-1}t^{\varepsilon_k}$, $k<(i-1)$ имеем $t^{-\varepsilon_i}B_{i-1}^{-1}\dots t^{-\varepsilon_{k+1}}B_k^{-1}C_{ij}''B_kt^{\varepsilon_{k+1}}\dots B_{i-1}t^{\varepsilon_i}\subset U_{\varepsilon_i}$. Поэтому сопрягая одновременно левую и правую части равенства

$$t^{\alpha}B_0\dots t^{\varepsilon_i}B_i't^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}}r_{j-1}\dots r_1t^{\beta}\,gp(M_0''',S''')t^{-\beta}r_1^{-1}\dots r_j^{-1}t^{-\varepsilon_j}B_i'^{-1}\dots B_0^{-1}t^{-\alpha}$$
$$=gp(M_0'',S'')$$

словом $t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}\dots t^{\varepsilon_i}$, а подгруппу $gp(M_0''',S''')$ словом $t^{-\beta}r_1^{-1}\dots t^{-\varepsilon_j}$, получим

$$B_i'\left(t^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}}\dots r_1t^{\beta}gp(M_0''',S''')t^{-\beta}r_1^{-1}\dots t^{-\varepsilon_j}\right){B_i'}^{-1} =$$
$$= t^{-\varepsilon_i}\dots B_0^{-1}t^{-\alpha}gp(M_0'',S'')t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}\dots t^{\varepsilon_i}.$$

Приводим подгруппу $t^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}}\dots r_1t^{\beta}gp(M_0''',S''')t^{-\beta}r_1^{-1}\dots t^{-\varepsilon_j}$ к виду $gp\left(M_0^{(4)},S^{(4)}\right)$, а подгруппу $t^{-\varepsilon_i}\dots B_0^{-1}t^{-\alpha}gp(M_0'',S'')t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}\dots t^{\varepsilon_i}$ к виду $gp\left(M_0^{(5)},S^{(5)}\right)$. Последние подгруппы удовлетворяют равенству

$$B_i'gp\left(M_0^{(4)},S^{(4)}\right){B_i'}^{-1} = gp\left(M_0^{(5)},S^{(5)}\right).$$

Для определения B_i' выберем в группе $gp\left(M_0^{(4)},S^{(4)}\right)$ любой образующий

$$X = B_0't^{\eta_1}B_1't^{\eta_2}\dots t^{\eta_k}B_k',\ k > 1,$$

тогда $B_i'X{B_i'}^{-1} = B_i'B_0't^{\eta_1}B_1'\dots t^{\eta_k}B_k'{B_i'}^{-1} \in gp\left(M_0^{(5)},S^{(5)}\right)$, а следовательно его можно переписать в образующих подгруппы $gp\left(M_0^{(5)},S^{(5)}\right)$: $B_i'B_0't^{\eta_1}B_1't^{\eta_2}\dots t^{\eta_k}B_k'{B_i'}^{-1} = u_0u_1\dots u_m$. В слове $u_0u_1\dots u_m$ элемент u_0 является трансформой длины 1, если среди подгрупп, порождающих $S^{(5)}$ содержится подгруппа трансформ единичной длины $\left(M_1^{(5)}\right) = \mathrm{C}_1^{(5)} < G_{\Gamma}$, в противном случае $u_0 \neq 1$. Запишем $u_1 = l_{1_{u_1}}t^{\eta_1}u_{1_n}, \eta_1 = \pm 1$, тогда

$$B_i'B_0' = u_0l_{1_{u_1}}h,$$

$h \in U_{\varepsilon}, \varepsilon = \pm 1,\ \ h = a_{i_0}^{Xs_{ij}}$, где Xs_{ij} ограничено, как в первом случае. Получаем, что $B_i' = u_0l_{1_{u_1}}h{B_0'}^{-1}$, где $u_0 \in gp\left(M_0^{(5)},S^{(5)}\right)$, и в качестве B_i' можно взять $l_{1_{u_1}}h{B_0'}^{-1}$. Возможен случай, когда $B_i' = 1$. Таким образом, выбор B_i' делается как в случае 1.

Остается указать способ построения слова $\widetilde{w}' = t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}B_1\dots t^{\varepsilon_i}B_i't^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}}r_{j-1}\dots r_1t^{\beta}$. В качестве $t^{\varepsilon_j}r_jt^{\varepsilon_{j-1}}r_{j-1}\dots r_1t^{\beta}$ выберем подслова правых половин элементов, включая 1, из множества $\{W_1 \cup W_1^{-1}\}$, где W_1 – специальное множество образующих $gp(M_0''',S''')$. В качестве $(t^{\alpha}B_0t^{\varepsilon_1}B_1\dots t^{\varepsilon_i})^{-1}$ – конечные подслова правых половин множества $\{W_2 \cup W_2^{-1}\}$, включая 1, где W_2 – специальное множество образующих подгруппы $gp(M_0'', S'')$.

IIб) Рассмотрим случай, когда в подгруппах $gp(M_0'', S''), gp(M_0''', S''')$ множества нетрансформ пусты: $M_0'' = \emptyset,\ M_0''' = \emptyset$ и пусть $\widetilde{w}^{-1} = t^{\alpha} B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_k} B_k$.

Предположим, что умножением справа на слова из подгруппы $gp(M_0''', S''')$ в слове $\widetilde{w}^{-1}$ выделим закрытое конечное подслово максимальной длины $t^{\varepsilon_{n_2}} r_{n_2,y} t^{\varepsilon_{n_2-1}} r_{n_2-1,y} \dots r_{1y} t^{\beta}$, совпадающее с подсловом правой половины какой-либо трансформы подгруппы (M_i''') ряда (3.60). В результате получаем $\widetilde{w}' = t^{\alpha} B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_i} B_i' t^{\varepsilon_{n_2}} r_{n_2,y} t^{\varepsilon_{n_2-1}} r_{n_2-1,y} \dots r_{1y} t^{\beta}$. В подслове $\widetilde{w}_\Lambda = t^{\alpha} B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_i}$ выделим максимально возможное закрытое начальное подслово, совпадающее с подсловом левой половины трансформ некоторой подгруппы (M_i'') ряда (3.59). При этом возможны случаи:

– выделенное начальное подслово целиком совпадает с $\widetilde{w}_\Lambda$. Тогда, если в подгруппе $gp\left(M_0^{(4)}, S^{(4)}\right) = t^{\varepsilon_{n_2}} r_{n_2,y} t^{\varepsilon_{n_2-1}} \dots r_{1y} t^{\beta} gp(M_0''', S''') t^{-\beta} r_{1y}^{-1} \dots t^{-\varepsilon_{n_2}}$ содержатся порождающие подгруппы $\left(M_i^{(4)}\right)$ с крыльями, не равными 1, то выбор B_i' осуществляется аналогично предыдущему случаю IIа. Если $S^{(4)} = \{C_i\}$, $C_i < G_\Gamma$, и подгруппа $S^{(5)} = \{C_j\}$, $C_j < G_\Gamma$, то решение проблемы сопряженности H_1 и H_2 сводится к сопряжению C_i, C_j в группе G_Γ (см. п.3.1.).

– выделенное начальное подслово в слове $\widetilde{w}_\Lambda = t^{\alpha} B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_i}$ меньше $\widetilde{w}_\Lambda$. Тогда

$$\widetilde{w}_\Lambda' = t^{-\varepsilon_\alpha} r_{1x}^{-1} t^{-\varepsilon_1'} r_{2x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} t^{-\varepsilon_{n_1}'} B_{n_1} t^{\varepsilon_{n_1+1}} \dots t^{\varepsilon_i},$$

$$\widetilde{w}' = t^{-\varepsilon_\alpha} r_{1x}^{-1} t^{-\varepsilon_1'} r_{2x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} t^{-\varepsilon_{n_1}'} B_{n_1} t^{\varepsilon_{n_1+1}} \dots t^{\varepsilon_i} B_i' t^{\varepsilon_{n_2}} r_{n_2y} t^{\varepsilon_{n_2-1}} r_{n_2-1,y} \dots r_{1y} t^{\beta},$$

причем каждая подгруппа $\left(M_{ij}'''\right) = {g_{ij}'''}^{-1} C_{ij}''' g_{ij}'''$, порождающая S''', удовлетворяет соотношению

$$\widetilde{w}'\left(M_{ij}'''\right)(\widetilde{w}')^{-1} < U_{\varepsilon_1}, \qquad (3.61)$$

а каждая подгруппа $\left(M_{js}''\right)$, порождающая S'', удовлетворяет соотношению

$$(\widetilde{w}')^{-1}\left(M''_{js}\right)\widetilde{w}' < U_{\varepsilon_2}, \tag{3.62}$$

так как в противном случае выделенные подслова не будут максимально возможными, полученными соответственно при умножении w слева на слова из $gp(M''_0, S'')$ и справа на слова из $gp(M'''_0, S''')$.

Подгруппа $\left(M'''_{k_3}\right)$ ряда (3.60) имеет вид:

$$\left(M'''_{k_3}\right) = t^{-\beta} r_{1y}^{-1} \dots r_{n_2,y}^{-1} t^{-\varepsilon_{n_2}} C'''_j t^{\varepsilon_{n_2}} r_{n_2,y} t^{\varepsilon_{n_2-1}} r_{n_2-1,y} \dots r_{1y} t^{\beta},$$

а подгруппа ряда (3.59) имеет вид

$$\left(M''_{k_2}\right) = t^{-\varepsilon_\alpha} r_{1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_1} r_{2x}^{-1} \dots r_{n_1 x}^{-1} t^{-\varepsilon'_{n_1}} C''_{n_1} t^{\varepsilon'_{n_1}} r_{n_1 x} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1x} t^{\varepsilon_\alpha}.$$

Из условий (3.61), (3.62) следует, что все подгруппы ряда (3.60) являются подгруппами $\left(M'''_{k_3}\right)$, а подгруппы ряда (3.59) – подгруппами подгруппы $\left(M''_{k_2}\right)$. Поэтому $gp(M'''_0, S''') = \left(M'''_{k_3}\right)$, $gp(M''_0, S'') = \left(M''_{k_2}\right)$. Получили выше рассмотренный случай.

III) Пусть $H_1 = (M_0)$, $H_2 = (M'_0)$, и являются свободными подгруппами в группе $\bar{G}_\Gamma$. Выясним, существует ли $z \in \bar{G}_\Gamma$, такой что $z^{-1}(M_0)z = (M'_0)$.

Элемент z будем выбирать наименьшим в двойном классе смежности $(M_0)z(M'_0)$.

Пусть также $(M_0) = \langle X_1, X_2, \dots, X_n\rangle$ и $(M'_0) = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n\rangle$. Образующие $\{X_i\}_{i=\overline{1,n}}$ и $\{Y_i\}_{i=\overline{1,n}}$ являются специальными и удовлетворяют условиям а), б), в) случая III) теоремы 3.2. Образующие подгруппы $(M'_0) = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n\rangle$ упорядочены по длинам: $1 < l(Y_1) \le l(Y_2) \le \dots \le l(Y_n)$.

Рассмотрим циклически несократимый образующий $X_1 \in (M_0)$. Сопрягая его элементом z, получим: $z^{-1}X_1 z = Y_{i_1}^{\varepsilon_1} Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k}$, где слово $Y_{i_1}^{\varepsilon_1} Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k} \in (M'_0)$ – простое и $l(Y_{i_1}^{\varepsilon_1} Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k}) \le l(X_1) + l(Y_n) + 1$.

В подгруппе (M'_0) построим множество слов $V = \{v_1 v_2 \dots v_n\}$, длина которых не превосходит $l(X_1) + l(Y_n) + 1$. Для каждого элемента из множества $v_i \in V$ проверяем, сопряжено ли v_i с X_1. Допустим, что $v_i = v_{i_0}^{-1} v'_i v_{i_0}$, то есть $v'_i = t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_k} B_k$ – циклически несократимый элемент в группе $\bar{G}_\Gamma$. Сопрягаем подгруппу $\langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n\rangle$ элементом $\nu_{i_0}^{-1}$, получим равенство: $\nu_{i_0}^{-1}\langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n\rangle\nu_{i_0} = \langle Y_1', Y_2', \dots, Y_n'\rangle$, где $\left\{Y_i',_{i=\overline{1,n}}\right\}$ – специальное множество образующих подгруппы $\nu_{i_0}^{-1}\left\langle\left\{Y_i',_{i=\overline{1,n}}\right\}\right\rangle\nu_{i_0}$.

Известно, что некоторая циклическая перестановка X_1 будет сопряжена с v_i' с помощью элемента h из ассоциированной подгруппы:

$$h^{-1}v_i'h = X_1',$$

где X_1' – циклическая перестановка X_1.

Пусть $X_1' = t^{\varepsilon_1}B_1t^{\varepsilon_2}B_2 \dots t^{\varepsilon_k}B_k$, $v_i' = t^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}A_2 \dots t^{\varepsilon_k}A_k$. Причем X_1' такая циклическая перестановка, что все степени $\varepsilon_i, i = \overline{1,k}$ у элементов X_1', v_i' совпадают.

Найдем такое $h \in U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, что

$$hX_1' = v_i'h.$$

Слово h будем строить последовательно из $h_1, h_2, \dots, h_k$, таких что каждое принадлежит ассоциированной подгруппе, причем h_1 переводит B_1 в A_1, h_2 переводит B_2 в A_2 и A_1 оставляет без изменения и т.д. На каждом шаге решаем проблемы пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической из $U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$ для нахождения элемента h_i, а затем проблему пересечения конечно порожденной подгруппы с подгруппой из $U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, для нахождения подгруппы, которой будет принадлежать следующий h_{i+1}, $(i + 1) = \overline{1,k}$. На конечном шаге имеем:

$$t^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}A_2 \dots t^{\varepsilon_k}A_kh' = t^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}A_2 \dots t^{\varepsilon_k}A_kh_1, h_2, \dots, h_k.$$

Из вышеизложенного следует, что существует минимальная степень r, такая что $a_m^{rs_{ml}}v_i' = v_i'a_m^{qs_{ml}}$, где $a_m^{rs_{ml}}, a_m^{qs_{ml}} \in U_{\varepsilon_1}^{(k)}$.

Тогда выясняем, существует ли показатель Y, чтобы с одной стороны выполнялось равенство

$$\left(a_m^{rs_{ml}}\right)^Y v_i'a_m^{p_0} = v_i'a_m^{p_0}\left(a_m^{qs_{ml}}\right)^Y,$$

а с другой – должно выполняться следующее равенство

$$\left(a_m^{rs_{ml}}\right)^Y v_i'a_m^{p_0}=v_i'a_m^{q_0}\left(a_m^{rs_{ml}}\right)^Y.$$

Из чего имеем: $v_i' a_m^{p_0}\left(a_m^{qs_{ml}}\right)^Y = v_i' a_m^{q_0}\left(a_m^{rs_{ml}}\right)^Y$,

справедливость которого следует из разрешимости уравнения

$$p_0 + qs_{ml}Y = q_0 + rs_{ml}Y, \qquad (3.63)$$

в целых числах.

При $q = r$ и $p_0 \neq q_0$ слова X_1 и v_i' не сопряжены.

Если $q = r$ и $p_0 = q_0$, то элемент $\left(a_m^{rs_{ml}}\right)^Y$ для любого Y перестановочен с каждым X_1'. Тогда перебором всех степеней выясняем, существует ли такое Y_1 элемента $\left(a_m^{rs_{ml}}\right)^{Y_1}$, который переводит подгруппу H_1' в H_2. Для конечности алгоритма, необходимо ограничить показатель rY_1. Так как в графе Г группы $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle | a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$ любые две вершины соединяет единственный путь, то образующие ассоциированных подгрупп $\langle a_m \rangle$ и $\langle a_l \rangle$ группы $\overline{G_\Gamma}$ связывает соотношение $a_m^{s_{ml}M} = a_l^{s_{lm}N}$.

Если $M = N$, то легко проверить, что $a_m^{s_{ml}MC_0}$ коммутирует с любым словом из группы $\bar{G}_\Gamma$, где $a_m^{C_0} \in C(G_\Gamma)$.

Пусть $M \neq N$. Рассмотрим элемент ассоциированной подгруппы $h = a_m^{s_{ml}M^{\lambda_0}N^{\lambda_0}C_0}$, где $\lambda_0 = \lambda_t(X_1')$ − число вхождений проходной буквы t элемента X_1'. Обозначим $\sigma_t(X_1')$ сумму всех показателей степеней $t^{\varepsilon_i}, i = \overline{1,k}$, элемента X_1'. Если $\sigma_t\left(X_1'\right) = 0$, то h коммутирует с X_1', тогда в соотношении (3.63) $q = r$. Следовательно в данном случае X_1' и v_i' сопряжены тогда и только тогда, когда $p_0 = q_0$.

Если $\sigma_t\left(X_1'\right) \neq 0$, то $q \neq r$.

Для проверки сопряженности подгрупп H_1' и H_2 если $\sigma_t\left(X_i'\right) = 0, i = \overline{1,n}$, то рассмотрим все степени меньше $h = a_m^{s_{ml}M^{\lambda}N^{\lambda}C_0}$, где λ − наименьшее общее кратное всех $\lambda_i = \lambda_t(X_i')$, $X_i' \in H_1'$, $i = \overline{1,n}$.

Основная теорема доказана.

Заключение

В современной теории групп особое внимание уделяется исследованию свойств различных свободных конструкций групп, таких как свободные произведения, свободные произведения с объединением и *HNN*-расширения. Данная работа посвящена изучению разрешимости проблемы сопряженности слов и проблемы сопряженности подгрупп в древесных произведениях некоторых групп с циклическим объединением и в их *HNN*-расширениях с ассоциированными циклическими подгруппами. Некоторые из полученных результатов являются обобщениями и усилениями известных результатов. Опишем их более подробно.

Проблема сопряженности слов решена в следующих конструкциях:

– в древесном произведении конечного числа свободных групп с циклическим объединением $F_\Gamma = \left\langle \prod_{i=1}^{n} {}^{*} \, F_{m_i} \middle| v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{p_{ji}} \right\rangle, |p_{ij}|, |p_{ji}| \geq 1,$ $v_{ij}^{p_{ij}} \in F_{m_i}$, $v_{ji}^{p_{ji}} \in F_{m_j}$; отметим, что для свободного произведении двух свободных групп, объединенных по циклической подгруппе $F_m *_C F_n$ проблема сопряженности была решена С. Липшуцем в 1966 году [32];

– в HNN-расширении с ассоциированными циклическими подгруппами древесного произведения циклических групп с объединением $\bar{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel(G_\Gamma), t^{-1}U_1 t = U_{-1} \rangle$, где $U_1 = \langle a_m^{s_{ml}} \rangle, U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}} \rangle, |s_{ml}|, |s_{lm}| \geq 1,$ $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} {}^{*} \langle a_k \rangle \, | a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle$;

– в *HNN*-расширении с помощью конечного числа проходных букв с ассоциированными циклическими подгруппами древесного произведения циклических групп с циклическим объединением $\bar{G}_\Gamma^* = \langle G_\Gamma, \{t_{ij}\} | rel(G_\Gamma), t_{ij}^{-1} U_{ij} t_{ij} = U_{ji} \rangle$, где $U_{ij} = \langle a_{ij}^{s_{ij}} \rangle, U_{ji} = \langle a_{ji}^{s_{ji}} \rangle$ при условии, что элементы не принадлежат ассоциированной подгруппе.

Проблема сопряженности подгрупп решена в следующих группах:

– в древесном произведении циклических групп с циклическим объединением $G_Г = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \, | a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}} \rangle, |p_{ij}|, |p_{ji}| \geq 1$;

– в HNN-расширении бесконечной циклической группы $B = \langle a, t; t^{-1} a^m t = a^n \rangle$, $|m|, |n| > 1$;

– в HNN-расширении с ассоциированными циклическими подгруппами древесного произведения циклических групп с циклическим объединением $\bar{G}_Г = \langle G_Г, t | rel(G_Г), t^{-1} U_1 t = U_{-1} \rangle$, где $U_1 = \langle a_m^{s_{ml}} \rangle, U_{-1} = \langle a_l^{s_{lm}} \rangle, |s_{ml}|, |s_{lm}| \geq 1$, что является обобщением предыдущего результата.

Нерешенными в данном классе групп являются: проблема сопряженности подгрупп для древесного произведения свободных групп с циклическим объединением, сопряженность подгрупп в HNN-расширении данной группы, а также в HNN-расширении древесного произведения циклических групп с циклическим объединением с конечным числом проходных букв.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Безверхнему В.Н., за постановку задач, помощь в работе над диссертацией и поддержку в организационных вопросах.

Литература

1. *Адян, С. И.* Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем в теории групп / С. И. Адян // *Труды Московского математического общества*. – 1957. – Т. 6. – С. 231-298.

2. *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп / В. Н. Безверхний // *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение.* Межвузовский сборник научных трудов. – 1983. – С. 50-80.

3. *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп. I-II / В. Н. Безверхний // *Современная алгебра.* Межвузовский сборник. – 1977. – Вып. 6. – С.16-32.

4. *Безверхний, В.Н.* О пересечении конечно-порожденных подгрупп свободной группы / В.Н. Безверхний // *Сборник научных трудов кафедры высшей математики.* Тульский политехнический институт. – 1974. – Вып. 2. – С. 51-56.

5. *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности слов в некоторых классах групп / В. Н. Безверхний // *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп.* Межвузовский сборник научных трудов. – 1990. – С. 103-152.

6. *Безверхний, В. Н.* Неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с объединением / В. Н. Безверхний // *Сборник научных трудов кафедры высшей математики.* Тульский политехнический институт. – 1975. – Вып. 2. – С. 90-95.

7. *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения групп / В. Н. Безверхний // XXI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. - Кишинев, 1971. – С. 9-10.

8. *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы вхождения для одного класса групп / В. Н. Безверхний // *Вопросы теории групп и полугрупп.* ТГПИ им. Л.Н. Толстого. – 1972. – С. 3-86.

9. *Безверхний*, *В. Н.* О нормализаторах элементов в C(p)&T(q)-группах / В. Н. Безверхний // *Алгоритмические проблемы теории групп* и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. — 1994. — С. 4-58.

10. *Брискорн, Э.* Группы Артина и группы Кокстера / Э. Брискорн, К. Сайто // *Математика:* Сб. переводов. 1974. - №6. - С. 56-79.

11. *Гарсайд, Ф.* Группа кос и другие группы / Ф. Гарсайд // *Математика:* Сб. переводов. 1970. - №4. - С. 113-132.

12. *Гриндлингер, М. Д.* К проблемам тождества слов и сопряженности / М. Д. Гриндлингер // *Изв. АН СССР*, сер. матем. – 1965. – Т.154. – С. 507-509.

13. *Гриндлингер, М. Д.* О проблеме сопряженности и совпадения с антицентром в теории групп / М. Д Гриндлингер // *Сибирский математический журнал.* – 1966. – Т.7. – С. 785-803.

14. *Гриндлингер, М. Д.* Сопряженность подгрупп свободной группы / М. Д Гриндлингер // *Сибирский математический журнал.* – 1970. – Т.11. – С. 1178-1180.

15. *Громов, М. Л.* Гиперболические группы / М. Л. Громов. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.

16. *Каргаполов, М. И.* Основы теории групп / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. – М.: Наука, 1977. – 288 с.

17. *Курош, А.Г.* Теория групп / А. Г. Курош. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

18. *Линдон, Р.* Комбинаторная теория групп / Р. Линдон, П. Шупп. – М.: Мир, 1980. – 450 с.

19. *Магнус, В.* Комбинаторная теория групп / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

20. *Маканин, Г. С.* Проблема сопряженности в группе кос / Г. С. Маканин // Доклады АН СССР. – 1968. – Т. 182, № 3. – С. 495-496.

21. *Марков, А. А.* Основы алгебраической теории кос / А. А. Марков // Труды Математического института АН СССР. — 1945. — Т. 16. — С. 1-53.

22. *Молдаванский, Д. И.* Решение проблемы сопряженности подгрупп / Д. И. Молдаванский // XXI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. – Кишинев, 1971. – С. 62-63.

23. *Молдаванский, Д. И.* Сопряженность подгрупп свободной группы / Д. И. Молдаванский // *Алгебра и логика.* – 1969. – Т.8. №6. – С. 691-694.

24. *Молдаванский, Д. И.* Аппроксимационные свойства HNN-расширений и групп с одним определяющим соотношением : Дис. … д-ра ф.-м. наук. Иванов. гос. университет, Иваново, 2005.

25. *Новиков, П. С.* Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп / П. С. Новиков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1955. – №44. – С.1-143.

26. *Ремесленников, В. Н.* Сопряженность подгрупп в нильпотентных группах / В. Н. Ремесленников // *Алгебра и логика*. – 1967. – Т.6. №2. – С. 61-76.

27. *Фридман, А. А*. Решение проблемы сопряженности в одном классе групп / А. А. Фридман // Труды МИАН. – М: 1973. – Т.133. – С. 233-242.

28. *Baumslag, G.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups / G. Baumslag, D. Solitar. // *Bulletin of the American Mathematical Society*. – 1962. – №68. – P. 199-201.

29. *Dehn, M.* Uber Unendliche diskontinuierliche Gruppen / M. Dehn *// Math. Annal*. – 1912. – V.71. – P. 116-144.

30. *Garside, F.* The braid group and other groups / Garside F. // *Quart. J. Math*. – 1969. – №20 – C. 235-254.

31. *Karras, A.* The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup / A. Karras, D. Solitar // Trans. Amer. Math. Soc. - 1970. - V. 150. - P. 227-255.

32. *Lipschutz, S.* The generalization of Dehn's result on the conjugacy problem / S.Lipschutz // Prog.. Amer. Math. Soc. – 1966. - V. 150. – P. 759-762.

33. *Lyndon, R.* On Dehn’s algorithm / R. Lyndon // *Math. Annal*. – 1966. – V.166. – P. 208-228.

34. *Neumann, H.* Generalized free product with amalgamated / H. Neumann // Amer. J. Math. – 1948. – 70. – P. 590-625.

35. *Schupp, P.* On Dehn’s algorithm and the conjugacy problem / P. Schupp // *Math. Annal*. – 1968. – V.178. – P. 119-130.

Публикации автора

36. *Безверхний, В. Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // *Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика.* – 2006. –Т.12. – Вып.1. – С. 83-101.

37. *Безверхний, В. Н.* Проблема сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // Современные проблемы математики, механики, информатики: тез. Международной научной конференции, Тула, 28-30 ноября 2006г. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. – С. 19-20.

38. *Безверхний, В. Н.* Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении циклических групп с объединением / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // *Чебышевский сборник.* – 2012. – Т. 13. – Вып. 1(41). – С. 20-45.

39. *Безверхний, В. Н.* Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // *Чебышевский сборник.* – 2014. – Т. 15. – Вып. 1(49). – С. 43-54.

40. *Безверхний, В. Н.* Проблема сопряженности слов в HNN-расширении древесного произведения циклических групп с циклическим объединением / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // *Известия ТулГУ. Естественные науки.* – 2014. – Вып. 2. Ч. 1. – С. 30-45.

41. *Безверхний, В. Н.* О сопряженности слов и подгрупп в некоторых свободных конструкциях групп / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, тез. XIII Международной конференции, Тула, 25-30 мая 2015г. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. – С. 15-19.

42. *Безверхний, В. Н.* Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением / В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева // *Дискретная математика*. – 2015. – (Принята к печати)

43. *Логачева, Е. С.* Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении бесконечных циклических групп / Е. С. Логачева // *Известия ТулГУ. Естественные науки*. – 2013. – Вып. 2. Ч. 1. – С. 19-39.

44. *Логачева, Е. С.* Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении бесконечных циклических групп / Е. С. Логачева // *Чебышевский сборник.* – 2013. – Т.14. – Вып. 1(45). – С. 61-69.

45. *Логачева, Е. С.* Проблема сопряженности слов в HNN-расширении с конечным числом проходных букв древесного произведения циклических групп с циклическим объединением / Е. С. Логачева // *Чебышевский сборник*. – 2014. – Т. 15. – Вып. 2. – С. 50-65.

46. *Логачева, Е. С.* Проблема сопряженности в древесном произведении групп / Е. С. Логачева // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, тез. XII Международной конференции, Тула, 21-25 апреля 2014г. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. – С. 85-88.

47. *Логачева, Е. С.* Проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп в HNN-расширении древесного произведения циклических групп с циклическим объединением / Е. С. Логачева // Абелевы группы: Материалы Международного симпозиума, Москва, 2-6 ноября 2014г. – Москва: МПГУ, 2014. – С. 46-49.

48. *Логачева, Е. С.* Проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп в HNN-расширении древесного произведения циклических групп с циклическим объединением / Е. С. Логачева // *Известия ТулГУ. Естественные науки*. – 2015. – Вып. 2. – С. 13-35.

49. *Логачева, Е. С.* Теорема Магнуса для древесного произведения свободных групп с циклическим объединением / Е. С. Логачева // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, тез. XIII Международной конференции, Тула, 25-30 мая 2015г. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. – С. 84-87.